

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Габов С.А.* О существовании установившихся волн конечной амплитуды на поверхности флотирующей жидкости // *Ж. вычисл. мат. и мат. физики.* – 1988. – Т. 28, № 10.
2. *Габов С.А.* Об одной задаче гидродинамики идеальной жидкости, связанной с флотацией // *Дифференц. уравн.* – 1988. – Т. 24, № 1, – С. 16–21.
3. *Некрасов А.И.* Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости // *Собр. соч.* – Т. 1. – М.: Физматгиз, 1961. – С. 358–439.
4. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. – М.: Наука, 1977.
5. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969.
6. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969.

Поступила в редакцию 21.10.88

УДК 532.529

## НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

*В.Ф. Куропатенко*

Рассматриваются модели многокомпонентных сред. Сформулированы условия, при которых из модели многоскоростных взаимодействующих континуумов следует модель турбулентного перемешивания. Предложены уравнения, описывающие для каждой компоненты генерацию, диссипацию и диффузию турбулентности. Для смесей изотермических и политропных газов приведены аналитические решения о структуре волн разрежения и ударных волн.

## Введение

Многокомпонентные среды – смеси широко распространены в природе и используются во многих областях человеческой деятельности. Смеси можно разделить на гомотенные и гетерогенные. Промежуточное положение между ними занимают коллоидные растворы. В гомотенных смесях-растворах компоненты равномерно распределены по объему в виде атомов, ионов, молекул, т.е. микрочастиц. В коллоидных растворах компоненты представлены макрочастицами, которые еще участвуют в броуновском движении. Гетерогенными называются макроскопически неоднородные смеси, состоящие из различных по своим свойствам компонент, разделенных поверхностями раздела: суспензии, эмульсии, аэрозоли, аэрозвеси, горные породы, композиционные материалы и др.

Гомотенными или гетерогенными смесями становится подавляющее большинство химических соединений в условиях частичной или полной диссоциации.

Во многих физических процессах смеси могут возникать в системах, в которых их вначале не было, в частности, из-за неустойчивости и разрушения контактных границ в условиях динамических нагрузок. В других случаях динамические нагрузки могут приводить к противоположному эффекту – к сепарации компонент предварительно созданной смеси.

Развитие механики многокомпонентных сред вызвано практическими приложениями и потребностями авиационной и космической техники, атомной энергетики, турбостроения, химической технологии и др. Экспериментальные и теоретические исследования волновых процессов в многокомпонентных средах, проведенные в СССР, достаточно полно изложены в [1] – [6]. Теоретические работы широко используют гипотезу о взаимопроникающих и взаимодействующих континуумах, предложенную Х.А. Рахматулиным [7], а также подход В.В. Струминского [8], который с помощью методов статистической физики получил выражение для сил взаимодействия между компонентами. Как правило, в моделях многокомпонентных сред предполагается, что каждая компонента описывается индивидуальными термодинамическими величинами и компоненты движутся с разными скоростями, а обмен импульсом и энергией между ними происходит за конечное время релаксации. Следует подчеркнуть, что все такие работы посвящены исследованию поведения уже готовых смесей и не затрагивают вопросов их образования. В этих работах проблема турбулентного обмена импульсом и энергией между компонентами занимает незначительное место.

Другая большая группа теоретических и экспериментальных работ [9] – [18] посвящена изучению гидродинамической неустойчивости поверхностей раздела двух сред с разными свойствами – контактных границ, исследованию процессов разрушения таких границ и перемешивания первоначально разделенных сред. Из теоретических работ этой группы следует выделить работы по прямому математическому моделированию процессов образования смеси [9] – [12]. Такой подход позволяет удовлетворительно описать линейную стадию развития возмущений, образование и проникновение струй одной жидкости в другую, разрушение струй и возникновение вихрей. Однако для удовлетворительного описания развития каждого возмущения требуется вполне определенное число точек сетки. Поэтому широкое применение этого метода сдерживается недостаточными возможностями ЭВМ.

Широкое распространение получили математические модели перемешивания, являющиеся развитием модели Беленького и Фрадкина. В этих моделях считается, что основным механизмом перемешивания является перенос частиц компонент с помощью вихрей, смесь характеризуется средними термодинамическими величинами и скоростью, а взаимное проникновение компонент описывается уравнением диффузии для массовых концентраций.

В данной работе делается попытка перекинуть мостик между методами исследования многокомпонентных сред и методами исследования турбулентного перемешивания и на основе использования достижений тех и других методов сформулировать требования к математической модели перемешивания.

## § 1. Перемешивание двух жидкостей в поле тяжести.

Сложный процесс перемешивания предварительно разделенных жидкостей может быть разбит на несколько стадий.

Первая стадия начинается в момент возникновения неустойчивости контактной границы. Малые геометрические или динамические возмущения контактной границы или неоднородности свойств веществ по обе стороны границы растут по экспоненциальному закону, причем этот рост существенно зависит от характера начальных возмущений. На первой стадии перемешивания возмущения развиваются, сохраняя в основном свою форму. Когда форма возмущений заметно изменяется, наступает вторая стадия перемешивания. Возмущения принимают форму струй тяжелой жидкости, "проваливающихся" в легкую. Между ними "всплывают" пузыри легкой

жидкости. На этих двух стадиях смесь существенно гетерогенна, а энергия турбулентных вихрей пренебрежимо мала (рис. 1).

Обтекание струй тяжелой жидкостью легкой порождает сдвиговую неустойчивость течения и приводит к образованию на торцах струй грибообразных шляпок, от которых отрываются вращающиеся края. Наступает переходная стадия от ламинарного к турбулентному режиму перемешивания. Энергия вихрей возрастает.

Наконец, струи разрушаются, превратившись в систему вращающихся частиц тяжелой жидкости. В вихревое движение вовлекается также и легкая компонента. Наступает стадия развитой турбулентности.

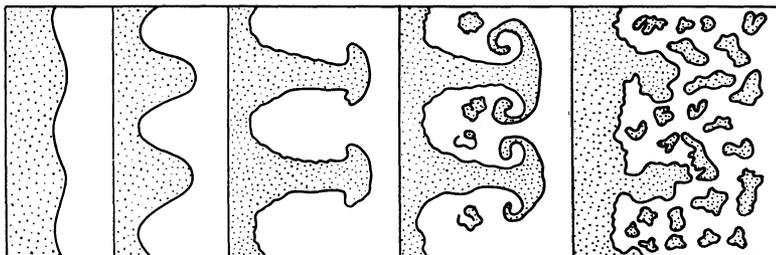


Рис. 1. Схематическое изображение стадий развития смеси

При наличии трения энергия вращения вихрей диссипирует, превращаясь в тепловую энергию компонент. Наступает пятая стадия затухания турбулентности. Описанная картина перемешивания является схематической и границы между стадиями весьма условны. Например, на стадии развитой турбулентности происходит рост новых малых возмущений, образование струй, расщепление других струй и т.д. Но на всех пяти стадиях в сечениях, ортогональных вектору скорости, смесь является гетерогенной двухкомпонентной средой. Это дает основание утверждать, что в основе математической модели перемешивания должны лежать уравнения многокомпонентных гетерогенных сред. В эти уравнения должны включаться уравнения, описывающие зарождение и развитие вихрей, рост и диссипацию кинетической энергии вихрей, изменение размеров частиц и вихрей. Уточнение таких моделей возможно на пути учета анизотропии вихрей и распределения вихрей по размерам и угловым скоростям вращения.

## § 2. Математические модели гетерогенной среды

Рассматривается среда, состоящая из нескольких компонент. Свойства компоненты "i" описываются давлением  $P_i$ , плотностью  $\rho_i$ , удельной внутренней энергией  $E_i$ , скоростью  $U_i$ . Соответственно многокомпонентная среда описывается давлением  $P = \sum \alpha_i P_i$ , плотностью  $\rho = \sum \alpha_i \rho_i$ , удельной внутренней энергией  $E = \sum \eta_i E_i$ , скоростью  $U = \sum \eta_i U_i$ . Здесь  $\alpha_i$  и  $\eta_i$  — объемная и массовая концентрации i-й компоненты.

Система уравнений законов сохранения в плоском одномерном случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_i \rho_i) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_i \rho_i U_i) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_i \rho_i U_i) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_i (\rho_i U_i^2 + P_i - S_i)) = R_i, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_i \rho_i (E_i + 0.5 U_i^2)) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_i U_i (P_i - S_i + \rho_i (E_i + 0.5 U_i^2))) = \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_i q_i) + \Phi_i, \quad (2.3)$$

$$S_i = \frac{4}{3} \rho_i \nu_i \frac{\partial U_i}{\partial x}, \quad q_i = \kappa_i \frac{\partial T_i}{\partial x}, \quad R_i = \sum_j \varphi_{ij} \frac{U_j - U_i}{\tau_{ij}^U},$$

$$\Phi_i = R_i U_i + \sum_j \left( b_{ij} R_j (U_j - U_i) + \frac{P_j - P_i}{\tau_{ij}^P} + \varphi_{ij} \psi_{ij} \frac{T_j - T_i}{\tau_{ij}^T} \right),$$

$$\varphi_{ij} = \frac{\alpha_i \rho_i \alpha_j \rho_j}{\rho}, \quad \psi_{ij} = \frac{\eta_i C_{Vi} \eta_j C_{Vj}}{C_V}.$$

Здесь  $S_i$  — вязкость,  $q_i$  — поток тепла,  $\nu_i$  — коэффициент вязкости,  $\kappa_i$  — коэффициент теплопроводности,  $C_{Vi}$  — теплоемкость  $i$ -й компоненты;  $R_i$ ,  $\Phi_i$  — интенсивности силового и энергетического взаимодействия  $i$ -й компоненты с другими компонентами,  $\tau_{ij}^U$ ,  $\tau_{ij}^P$ ,  $\tau_{ij}^T$  — времена релаксации соответственно скоростей, давления и температур.

Система уравнений (2.1)–(2.3) замыкается уравнениями состояния компонент (рис. 2):

$$P_{ik} = P_{ik}(\rho_i, E_i, \Phi_{ik}), \quad T_{ik} = T_{ik}(\rho_i, E_i, \Phi_{ik}), \\ \nu_{ik} = \nu_{ik}(\rho_i, E_i, \Phi_{ik}), \quad \kappa_{ik} = \kappa_{ik}(\rho_i, E_i, \Phi_{ik}),$$

где  $k$  — номер фазы.

Границы фаз описываются уравнениями

$$F_{ik}(\rho_i, E_i, \Phi_{ik}) = 0.$$

Условие принадлежности к фазе имеет вид  $F_{ik} \geq 0$ . Типичные уравнения состояния приведены в [19]. Сочетание разных фаз компонент приводит к одной из смесей, перечисленных выше. В общем случае функции  $b_{ij}$ ,  $\tau_{ij}^U$ ,  $\tau_{ij}^P$ ,  $\tau_{ij}^T$  зависят от физико-химических свойств компонент, структуры гетерогенной среды, фазового состояния компонент и параметров течения.

Покажем, что с помощью некоторых предположений относительно термодинамических характеристик и скоростей компонент из уравнений (2.1)–(2.3) могут быть получены уравнения диффузионных моделей турбулентного перемешивания. С этой целью в (2.1)–(2.3) с помощью уравнения  $(\alpha \rho)_i = \eta_i \rho$  заменим  $(\alpha \rho)_i$  на

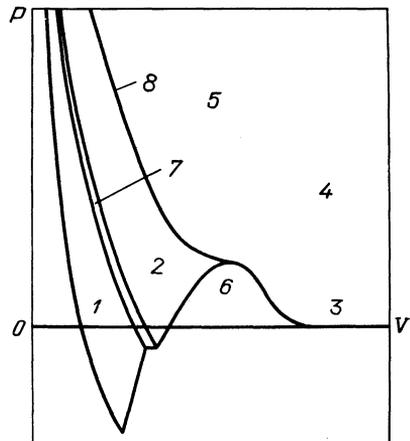


Рис. 2. Схематическое изображение фазовой диаграммы вещества в переменных  $P$ ,  $V$ . 1 — твердое тело, 2 — жидкость, 3 — газ, 4 — плазма, 5 — плотная плазма, 6 — смесь газа и жидкости, 7 — смесь жидкости и твердого тела, 8 — критическая изэнтропа

$\eta_i \rho$ . После этого запишем (2.1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (\eta_i \rho) + \frac{\partial}{\partial x} (\eta_i \rho U) = \frac{\partial}{\partial x} (\eta_i \rho (U - U_i)), \quad (2.4)$$

где  $U = \sum_i \eta_i U_i$ . Просуммировав (2.4) по  $i$ , получим уравнение неразрывности для среды

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho U) = 0. \quad (2.5)$$

Умножим (2.5) на  $\eta_i$  и вычтем из (2.4), получим

$$\rho \left( \frac{\partial \eta_i}{\partial t} + U \frac{\partial \eta_i}{\partial x} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} (\eta_i \rho (U_i - U)). \quad (2.6)$$

Перейдем теперь к уравнению движения (2.3). Прделав аналогичные преобразования и приняв во внимание, что  $\sum R_i = 0$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho U) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \sum_i \eta_i U_i^2) + \frac{\partial}{\partial x} (P - S) = \frac{\partial}{\partial x} (P - S - \sum_i \alpha_i (P_i - S_i)). \quad (2.7)$$

Добавим  $\frac{\partial}{\partial x} (\rho U^2)$  в правую и левую часть (2.7) и из полученного уравнения вычтем (2.5), умноженное на  $U$ . В результате получим

$$\rho \left( \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (P - S) = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad (2.8)$$

где

$$\Omega = P - S + \rho U^2 - \sum_i (\alpha_i (P_i - S_i) + \rho \eta_i U_i^2). \quad (2.9)$$

Сделаем теперь несколько упрощающих предположений.

1. Будем считать, что в (2.6)  $\eta_i (U - U_i) = D_t \frac{\partial \eta_i}{\partial t}$ , где  $D_t$  — коэффициент турбулентной диффузии.

2. Будем считать, что в (2.8)  $\Omega = 0$ . В этом случае уравнение (2.9), записанное в виде

$$P - S = \sum_i (\alpha_i (P_i - S_i + \rho \eta_i (U_i^2 - U^2))), \quad (2.10)$$

можно рассматривать как определение усредненной поверхностной силы  $P - S$ . После этих предположений уравнения многокомпонентных сред превращаются в уравнения модели Беленького—Фраджина [13]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U}{\partial x} &= 0, \\ \rho \left( \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (P - S) &= 0, \\ \rho \left( \frac{\partial \eta_i}{\partial t} + U \frac{\partial \eta_i}{\partial x} \right) &= \rho D_t \frac{\partial \eta_i}{\partial x}, \end{aligned}$$

которая является наиболее простой среди диффузионных моделей турбулентного перемешивания.

Если в уравнения компонент ввести турбулентное давление  $P_{ti}$  и турбулентную вязкость  $S_{ti}$ , то уравнения (2.8) и (2.10) примут вид

$$\rho \left( \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (P + P_t - S - S_t) = 0,$$

$$P - S + P_t - S_t = \sum_i (\alpha_i (P_i - S_i + P_{ti} - S_{ti}) + \rho \eta_i (U_i^2 - U^2)),$$

и уравнения неразрывности, движения и концентраций совпадут с соответствующими уравнениями из [16], где изложена одна из наиболее общих диффузионных моделей турбулентного перемешивания. Модели, изложенные в [13] и [16], относятся к классу диффузионных моделей, поскольку в них используется предположение о пропорциональности диффузионной скорости  $U - U_i$  градиенту массовой концентрации  $i$ -й компоненты с коэффициентом турбулентной диффузии  $D_t > 0$ . Это значит, что явление сепарации компонент такими моделями описано быть не может.

### § 3. Некоторые аналитические решения в ламинарной двухкомпонентной смеси газов

Многокомпонентные среды по своим свойствам резко отличаются от однокомпонентных сплошных сред. В частности, существенно иначе выглядят в них ударные волны и волны разрежения. Так, если в однокомпонентных средах понятия "ударная волна" и "сильный разрыв", как правило, означают одно и то же, если нет нужды анализировать структуру фронта ударной волны, то в многокомпонентной смеси ударная волна имеет сложную структуру из нескольких сильных разрывов и областей непрерывного течения между ними. Точно так же и волны разрежения имеют сложную структуру из слабых разрывов и зон непрерывного течения. Здесь уже термины "сильный разрыв" и "ударная волна" точно так же, как "слабый разрыв" и "волна разрежения", означают разные понятия.

С целью выяснения и понимания физической сути процессов в ударных волнах и волнах разрежения в многокомпонентных смесях рассмотрим ряд автомодельных или стационарных решений. Подробно эти решения изложены в [20] – [22].

**3.1. Центрированная волна разрежения.** Пусть обмен импульсом между компонентами за счет разницы их скоростей отсутствует  $R_i = 0$ . В качестве условия совместного деформирования компонент примем предположение о равенстве их давлений  $P_1 = P_2$ . Рассмотрим гетерогенную среду в области  $x \geq 0$  с начальным состоянием компонент  $U_1 = U_2 = 0$ ,  $P_1 = P_2 = P_0$ ,  $\rho_1 = \rho_{10}$ ,  $\alpha_1 = \alpha_{10}$ ,  $\rho_2 = \rho_{20}$ ,  $\alpha_2 = \alpha_{20}$ ,  $\rho_2 > \rho_1$ . Слева среда ограничена поршнем. Условия на поршне при  $t \geq 0$  имеют вид

$$U = U_{\Pi} = \text{const} < 0, \quad x = x_{\Pi} = U_{\Pi} t.$$

Уравнения состояния компонент:

- 1) изотермические газы  $P_i = C_i^2 \rho_i$ ,  $C_i = \text{const}$ ,  $C_1 > C_2$ ,
- 2) политропные газы  $P_i = A_i \rho_i^n$ ,  $A_i = \text{const}$ ,  $A_1 > A_2$ ,
- 3) несжимаемые частицы  $\rho_2 = \text{const}$ .

В качестве автомодельной переменной возьмем  $\xi = x/C_1 t$ .

Волна разрежения в смеси двух изотермических газов в переменных  $(\alpha\rho)_i$ ,  $U_i$  [20], [21] представляется совокупностью двух волн разрежения, распространяющихся каждая по своей компоненте. Решение имеет вид

Область 1:  $1 \leq \xi \leq \infty$ . Среда находится в невозмущенном начальном состоянии:

$$U_1 = U_2 = 0, \quad P_1 = P_2 = P_0, \quad \rho_1 = \rho_{10}, \quad \rho_2 = \rho_{20}.$$

Область 2:  $Z \leq \xi \leq 1$ , ( $Z = C_2/C_1 < 1$ ). Легкий газ выносятся из смеси, тяжелый покоится:

$$U_1/C_1 = \xi - 1, \quad U_2 = 0, \quad (\alpha\rho)_1 = (\alpha\rho)_{10} e^{\xi-1}, \quad (\alpha\rho)_2 = (\alpha\rho)_{20}.$$

Область 3:  $U_{\text{п}}/C_1 + 1 \leq \xi \leq Z$ . Обе компоненты охвачены ускоренным движением:

$$U_1/C_1 = \xi - 1, \quad U_2/C_1 = \xi - Z, \quad (\alpha\rho)_1 = (\alpha\rho)_{10} e^{\xi-1}, \quad (\alpha\rho)_2 = (\alpha\rho)_{20} e^{(\xi-Z)/Z}.$$

Область 4:  $U_{\text{п}}/C_1 + Z \leq \xi \leq U_{\text{п}}/C_1 + 1$ . Скорость легкого газа достигла значения скорости поршня. Скорость тяжелого — продолжает падать:

$$U_1 = U_{\text{п}}, \quad U_2/C_1 = \xi - Z, \quad (\alpha\rho)_1 = (\alpha\rho)_{10} e^{U_{\text{п}}/C_1}, \quad (\alpha\rho)_2 = (\alpha\rho)_{20} e^{(\xi-Z)/Z}.$$

Область 5:  $U_{\text{п}}/C_1 \leq \xi \leq U_{\text{п}}/C_1 + Z$ . Оба газа движутся со скоростью поршня:

$$U_1 = U_2 = U_{\text{п}}, \quad (\alpha\rho)_1 = (\alpha\rho)_{10} e^{U_{\text{п}}/C_1}, \quad (\alpha\rho)_2 = (\alpha\rho)_{20} e^{U_{\text{п}}/C_1}.$$

На рис. 3 приведены зависимости  $U_1$ ,  $U_2$  и  $\eta_1$  от  $\xi$  в точном решении при  $U_{\text{п}} = -4$ ,  $U_{10} = 0$ ,  $C_1 = 1$ ,  $\rho_1 = 1$ ,  $\alpha_{10} = 0.4545$ ,  $P_{10} = 1$ ,  $U_{20} = 0$ ,  $C_{20} = 0.548$ ,  $\rho_{20} = 3.333$ ,  $\alpha_{20} = 0.5455$ ,  $P_{20} = 1$ .

Для смеси двух политропных газов в зависимости от величины скорости поршня могут реализоваться два режима течения [22]: с полной сепарацией компонент в волне разрежения и с частичной сепарацией компонент.

В области смеси решение описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dU_i}{d\xi} = -2\gamma_i A(C_1, C_2, \rho_1, \rho_2, U_1, U_2, \alpha_1, \alpha_2, \xi), \quad (3.1)$$

$$\frac{d(\alpha\rho)_i}{d\xi} = \gamma_i B(C_1, C_2, \rho_1, \rho_2, U_1, U_2, \alpha_1, \alpha_2, \xi). \quad (3.2)$$

Вид функций  $\gamma_i$ ,  $A$  и  $B$  приведен в [22]. Решения системы уравнений (3.1), (3.2) сопрягаются с начальными данными при  $\xi = \xi_{\text{п}}$ , удовлетворяющем уравнению

$$n\xi_{\text{п}}^4 - N\xi_{\text{п}}^2 + C_{10}C_{20} = 0, \quad (3.3)$$

где

$$N = C_{10}((n+Z)\alpha_{10} + (1+nZ)\alpha_{20}), \quad Z = (A_2/A_1)^{1/n}.$$

На рис. 4 представлены зависимости  $U_1$ ,  $U_2$  и  $\eta_1$  от  $\xi$  в волне разрежения в смеси политропных газов для значений  $n = 2$ ,  $Z^n = 0.1$ ,  $\eta_{10} = 0.6$ ,  $U_{\text{п}} = -1.7$ , соответствующие режиму течения с полной сепарацией компонент в волне разрежения. Левее точки  $\xi^*$  находится чистая легкая компонента.

На рис. 5 приведено решение задачи для значений параметров  $n = 3$ ,  $Z^n = 0.01$ ,  $\eta_{10} = 0.13$ ,  $U_{\text{п}} = -0.408$ , соответствующее режиму течения с частичной сепарацией компонент. В этом случае решение имеет вид волны разрежения, сопряженной с ударной волной в виде совокупности двух сильных разрывов перед областью постоянного течения у поршня.

Для смеси изотермического газа с несжимаемыми частицами в зависимости от величины скорости поршня могут реализоваться три режима течения [24]: с полной сепарацией в волне разрежения в газе; с полной сепарацией компонент в области постоянного течения газа у поршня; с частичной сепарацией компонент и с областью постоянного течения смеси у поршня, где смесь обогащена газом.

В переменных  $(\alpha\rho)_i$ ,  $U_i$  система уравнений в этом случае для газа не содержит параметров частиц и может быть проинтегрирована точно. Решение для газа в каждой

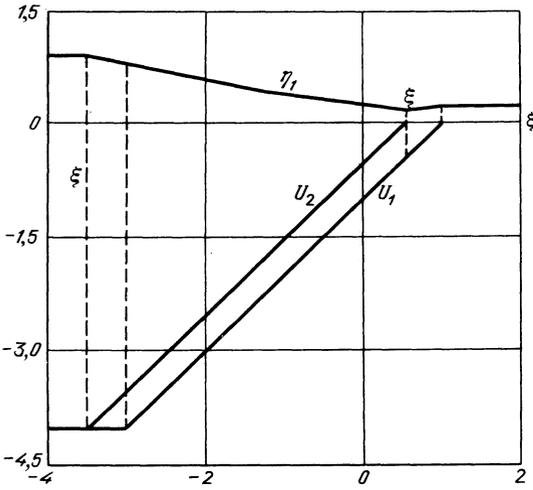


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость скоростей компонент и массовой концентрации легкой компоненты от  $\xi$  для смеси изотермических газов

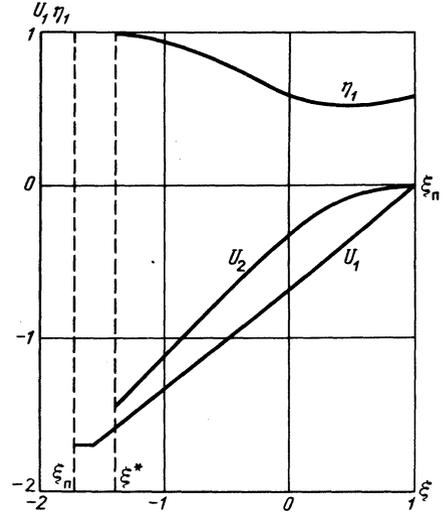


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость скоростей компонент и массовой концентрации легкой компоненты от  $\xi$  в смеси политропных газов с полной сепарацией

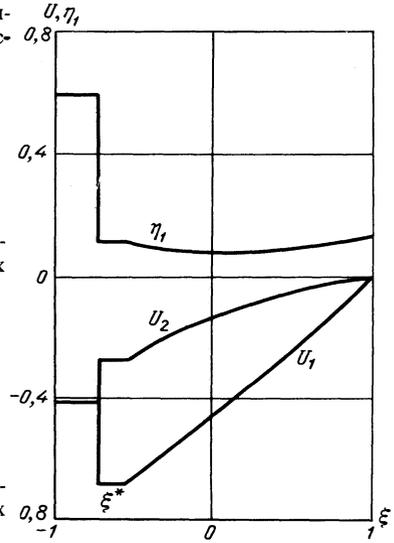


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость скоростей компонент и массовой концентрации легкой компоненты от  $\xi$  в смеси политропных газов с частичной сепарацией

области имеет вид:

Область 1:  $1 \leq \xi \leq \infty$ . Область покоя

$$U_1 = U_2 = 0, \quad (\alpha\rho)_1 = (\alpha\rho)_{10}.$$

Область 2:  $U_{\text{п}}/C_1 + 1 \leq \xi \leq 1$ . Область ускоренного движения газа

$$U_1 = C_1(\xi - 1), \quad (\alpha\rho)_1 = (\alpha\rho)_{10}e^{\xi-1}.$$

Область 3:  $U_{\text{п}}/C_1 \leq \xi \leq U_{\text{п}}/C_1 + 1$ . Область постоянного течения газа у поршня

$$U_1 = U_{\text{п}}, \quad (\alpha\rho)_1 = (\alpha\rho)_{10}e^{U_{\text{п}}/C_1}.$$

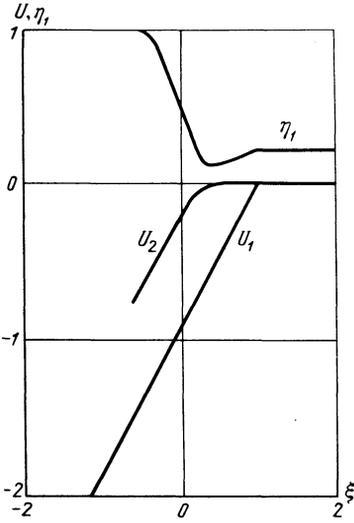


Рис. 6

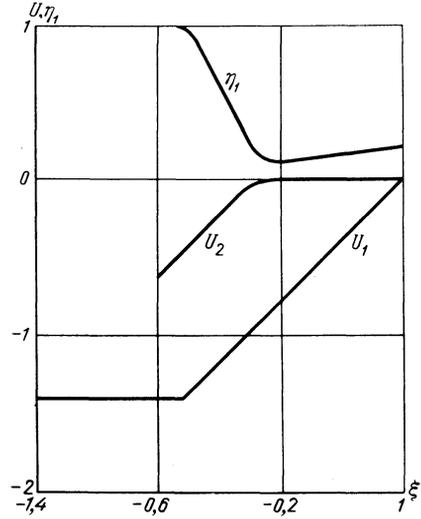


Рис. 7

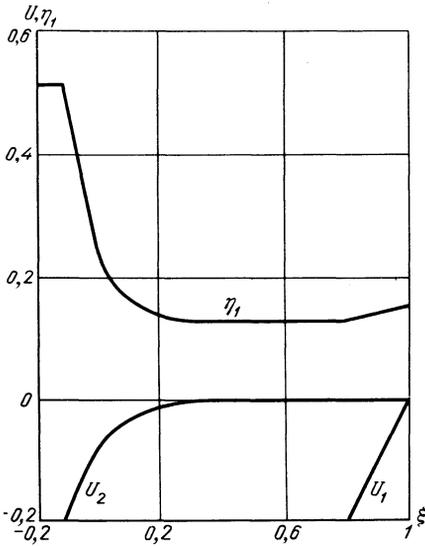


Рис. 8

Рис. 6. Зависимость скоростей компонент и массовой концентрации газа от  $\xi$  в смеси изотермического газа с несжимаемыми частицами с полной сепарацией в волне разрежения

Рис. 7. Зависимость скоростей компонент и массовой концентрации газа от  $\xi$  в смеси изотермического газа с несжимаемыми частицами с полной сепарацией в области постоянного течения

Рис. 8. Зависимость скоростей компонент и массовой концентрации газа от  $\xi$  в смеси изотермического газа с несжимаемыми частицами с частичной сепарацией

Система обыкновенных дифференциальных уравнений для определения параметров частиц в области смеси имеет вид

$$\frac{d\alpha_2}{d\xi} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha\rho)_1}{\alpha_1^2 \rho_2 (U_2/C_1 - \xi)^2 - (\alpha\rho)_1}, \tag{3.4}$$

$$\frac{dU_2}{d\xi} = - \frac{\alpha_1 C_1 (\alpha\rho)_1 (U_2/C_1 - \xi)}{\alpha_2 (\alpha\rho)_2 (U_2/C_1 - \xi)^2 - (\alpha\rho)_1} \tag{3.5}$$

В области  $1 \leq \xi \leq \infty$  частицы покоятся  $U_2 = U_{20} = 0$ ,  $(\alpha\rho)_2 = (\alpha\rho)_{20}$ , левее точки  $\xi = 1$  решение получается в результате численного интегрирования уравнений (3.4),

(3.5). Это решение справедливо вплоть до точки  $\xi^*$ , в которой реализуется одна из следующих возможностей:

1) массовая концентрация частиц обращается в ноль, тогда как их скорость еще не достигла значения скорости поршня. При этом точка  $\xi^*$  может лежать справа или слева от точки  $\xi = U_{\text{п}}/C_1 + 1$ . В первом случае полная сепарация компонент происходит в волне разрежения в газе, а во втором – в области постоянного течения газа у поршня;

2) скорость частиц достигает значения скорости поршня, тогда как их массовая концентрация еще не обратилась в ноль. В этом случае всегда  $\xi^* = U_{\text{п}}/C_1 + 1$  и имеется область постоянного течения у поршня. Полной сепарации компонент не происходит, но у поршня смесь существенно обогащена газом. Для смеси с параметрами  $\rho_{10} = 1$ ,  $C_1 = 1$ ,  $\rho_{20} = 100$ ,  $\alpha_{10} = 0.95$ ,  $U_{10} = U_{20} = 0$  режим с полной сепарацией компонент в волне разрежения в газе реализуется, например, для  $U_{\text{п}} = -2$  (рис. 6), режим с полной сепарацией компонент в области постоянного течения – для  $U_{\text{п}} = -1.4$  (рис. 7), режим с областью постоянного течения смеси у поршня – для  $U_{\text{п}} = -0.2$  (рис. 8).

**3.2. Ударная волна.** Пусть теперь поршень вдвигается в смесь. Условия на поршне при  $t \geq 0$  имеют вид  $U = U_{\text{п}} = \text{const} > 0$ ,  $x_{\text{п}} = U_{\text{п}}t$ . По смеси будет распространяться ударная волна. Автомодельную переменную введем соотношением  $\xi = x - Dt$  и будем рассматривать стационарные решения соответствующих систем уравнений.

Для смеси двух изотермических газов в переменных  $(\alpha\rho)_i$ ,  $U_i$  решение получается в виде совокупности двух сильных разрывов, распространяющихся независимо каждый по своей компоненте. Качественная картина течения представлена на рис. 9.

$$D_1 = 0,5(U_{\text{п}} + \sqrt{U_{\text{п}}^2 + 4C_1^2}), \quad D_2 = 0,5(U_{\text{п}} + \sqrt{U_{\text{п}}^2 + 4C_2^2}).$$

Область 1 – область между сильными разрывами

$$(\alpha\rho)_{11} = (\alpha\rho)_{10}D_1/(D_1 - U_{\text{п}}), \quad (\alpha\rho)_2 = (\alpha\rho)_{20},$$

$$U_{11} = U_{\text{п}}, \quad U_{21} = 0, \quad P_1 = P_0 + (D_1^2 - C_1^2)(\alpha\rho)_{10}.$$

Область 2 – область за сильным разрывом в тяжелой компоненте перед поршнем

$$U_{12} = U_{\text{п}}, \quad U_{22} = U_{\text{п}}, \quad (\alpha\rho)_{12} = (\alpha\rho)_{11},$$

$$(\alpha\rho)_{22} = (\alpha\rho)_{20}D_2/(D_2 - U_{\text{п}}), \quad P_2 = P_1 + (\alpha\rho)_{20}(D_2^2 - C_2^2).$$

На рис. 10 представлены зависимости  $P(x)$ ,  $U(x)$ ,  $\eta_1(x)$  на некоторый момент времени  $t$  для  $\eta_{10} = 0.25$ ,  $U_{\text{п}} = 2$ ,  $Z^2 = (C_2/C_1)^2 = 17/36$ . За первым сильным разрывом смесь существенно обогащена легкой компонентой, а за вторым – тяжелой. Давление дважды меняется скачком.

Для смеси двух политропных газов система уравнений на одиночном сильном разрыве имеет вид

$$(\alpha\rho)_{i1}(D - U_{i1}) = (\alpha\rho)_{i0}(D - U_{i0}),$$

$$(\alpha\rho)_{i1}(D - U_{i1})^2 + (\gamma_i/n)(\alpha\rho)_{i1}((\alpha\rho)_{i1} + Z(\alpha\rho)_{j1})^{n-1} =$$

$$= (\alpha\rho)_{i0}(D - U_{i0})^2 + (\gamma_i/n)(\alpha\rho)_{i0}((\alpha\rho)_{i0} + Z(\alpha\rho)_{j0})^{n-1}.$$

Решение задачи о поршне представляет собой совокупность двух сильных разрывов, распространяющихся с разными скоростями.

В отличие от смеси изотермических газов на каждом разрыве параметры обеих компонент изменяются скачком. Зависимости  $P(x)$ ,  $U(x)$ ,  $\eta(x)$  для параметров за

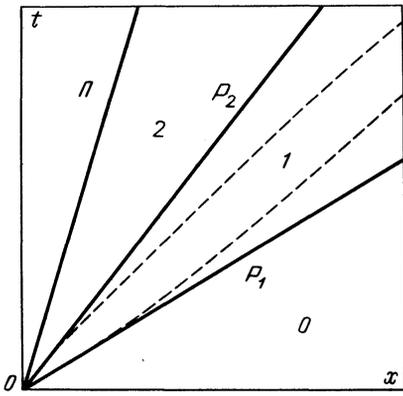


Рис. 9. Траекториидвигающегося поршня (П) и двух сильных разрывов ( $P_1$  и  $P_2$ ) в двухкомпонентной смеси

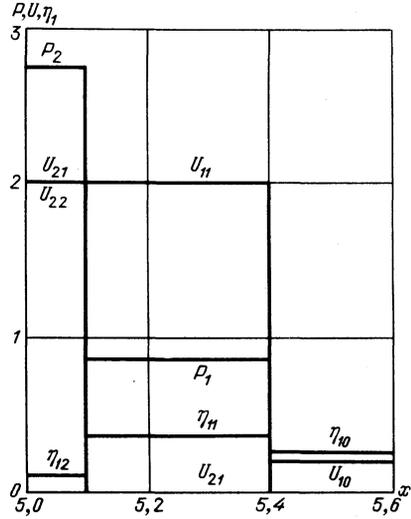


Рис. 10. Зависимости давлений, скоростей и массовой концентрации легкой компоненты от  $x$  при движении поршня в смесь изотермических газов

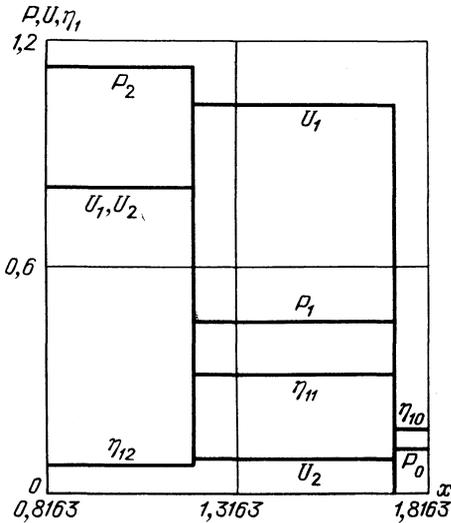


Рис. 11. Зависимости давлений, скоростей и массовой концентрации легкой компоненты от  $x$  при движении поршня в смесь политропных газов

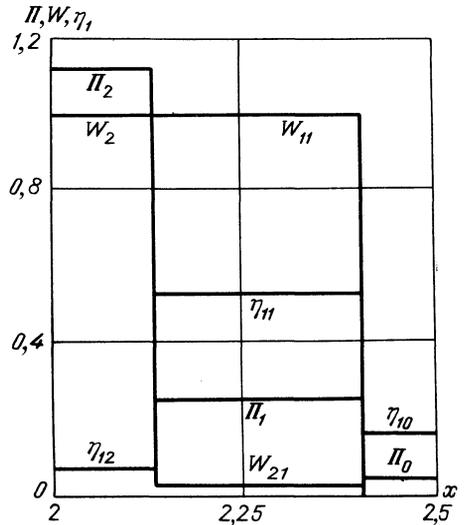


Рис. 12. Зависимость безразмерных давлений, скоростей компонент и массовой концентрации газа от  $x$  при движении поршня в смесь изотермического газа с несжимаемыми частицами

дачи  $n = 3$ ,  $Z^U = 0.01$ ,  $U_{\Pi} = 0.8163$ ,  $U_{10} = U_{20} = 0$ ,  $(\alpha\rho)_{10} = 0.041$ ,  $(\alpha\rho)_{20} = 0.273$ ,  $\eta_{10} = 0.13$  представлены на рис. 11 на момент времени  $t = 1$ . Отметим, что в этой смеси  $U_{11} > U_{\Pi}$  в отличие от смеси двух изотермических газов, где  $U_{11} = U_{\Pi}$ .

В случае смеси изотермического газа с несжимаемыми частицами ( $\rho_2 = \text{const}$ ) решение задачи о вдвигающемся поршне также представляет собой совокупность двух сильных разрывов,двигающихся с разными скоростями. Так как система уравнений для газа не содержит параметров частиц, то параметры газа претерпевают скачок только на первом сильном разрыве

$$(\alpha\rho)_{1\Pi}(D_1 - U_{\Pi}) = (\alpha\rho)_{10}(D_1 - U_{10}),$$

$$(\alpha\rho)_{1\Pi}((D_1 - U_{\Pi})^2 + C_1^2) = (\alpha\rho)_{10}((D_1 - U_{10})^2 + C_1^2),$$

откуда сразу определяются

$$D_1 = 0,5(U_{\Pi} + \sqrt{U_{\Pi}^2 + 4C_1^2}), \quad (\alpha\rho)_{1\Pi} = (\alpha\rho)_{10}(D_1 - U_{10})/(D_1 - U_{\Pi}).$$

Частицы реагируют на скачок параметров газа, поэтому для определения параметров частиц решается следующая система уравнений:

$$\alpha_{21}(D_1 - U_{21}) = \alpha_{20}(D_1 - U_{20}),$$

$$\alpha_{21} \left( \left( \frac{D_1 - U_{21}}{C_1} \right)^2 + \frac{\rho_{1\Pi}}{\rho_2} \right) = \alpha_{20} \left( \left( \frac{D_1 - U_{20}}{C_1} \right)^2 + \frac{\rho_{10}}{\rho_2} \right),$$

$$\alpha_{2\Pi}(D_2 - U_{\Pi}) = \alpha_{21}(D_2 - U_{21}),$$

$$\alpha_{2\Pi} \left( \left( \frac{D_2 - U_{\Pi}}{C_1} \right)^2 + \frac{\rho_{1\Pi}}{\rho_2} \right) = \alpha_{21} \left( \left( \frac{D_2 - U_{21}}{C_1} \right)^2 + \frac{\rho_{1\Pi}}{\rho_2} \right).$$

Зависимости  $\Pi(x) = P/P_{\Pi}$ ,  $W = U/U_{\Pi}$ ,  $\eta_1(x)$  для параметров задачи  $U_{10} = U_{20} = 0$ ,  $C_1 = 1$ ,  $\alpha_{10} = 0.95$ ,  $\rho_{10} = 1$ ,  $\rho_{20} = 100$ ,  $U_{\Pi} = 2$  и решения  $P_{\Pi} = 26.93$  представлены на рис. 12 на момент времени  $t = 1$ .

**3.3. Ударная волна в смеси изотермических газов при  $R_i \neq 0$ .** Построенные выше решения для  $R_i = 0$ , т.е. без обмена импульсом между компонентами, являются асимптотическими. В реальной смеси  $R_i \neq 0$ . Рассмотрим структуру ударной волны при наличии силового взаимодействия компонент.

Будем рассматривать задачу о поршне, вдвигающемся с постоянной скоростью в смесь двух изотермических газов [22].

Как показано выше, в случае отсутствия сил взаимодействия компонент ( $R_i = 0$ ) ударная волна распространяется по среде в виде совокупности двух сильных разрывов (сплошные линии на рис. 9), движущихся с разными скоростями. Таким образом, при  $R_i = 0$  не существует системы координат, в которой решение было бы стационарным. Наличие сил взаимодействия ( $R_i \neq 0$ ) меняет дело. Характер влияния сил взаимодействия компонент в зоне релаксации скоростей таков, что скорость распространения первого сильного разрыва уменьшается, а скорость распространения второго сильного разрыва увеличивается. Наконец, наступает момент времени  $t^*$ , когда скорости распространения становятся одинаковыми и равными  $D$ . Траектории разрывов в этом случае изображены на рис. 9 штриховыми линиями.

С момента времени  $t^*$  течение будет стационарным в системе координат, движущейся с постоянной скоростью  $D$ . Время  $t^*$  выхода на стационарный режим течения и ширина зоны между разрывами уменьшаются с увеличением интенсивности силового взаимодействия компонент.

Пусть  $R_1$  имеет вид  $R_1 = \alpha_1 \rho_1 \alpha_2 \rho_2 / \rho \cdot (U_2 - U_1) / \tau_{12}^U$ . Стационарное решение в системе координат  $\xi = x - Dt$  является сложным и описывается системой обычно-

венных дифференциальных уравнений

$$m_i \left(1 - \frac{\gamma_i}{V_i^2}\right) \frac{dV_i}{d\xi} = R_i(V_j - V_i), \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j,$$

и условиями на разрывах

$$m_i = (\alpha\rho)_i V_i = (\alpha\rho)_{i0} V_{i0} = (\alpha\rho)_{i\Pi} V_{i\Pi},$$

$$M = (\alpha\rho)_{10}(V_{10}^2 + 1) + (\alpha\rho)_{20}(V_{20}^2 + (C_2/C_1)^2) = (\alpha\rho)_{11}(V_1^2 + 1) +$$

$$+ (\alpha\rho)_{21}(V_{21}^2 + (C_2/C_1)^2) = (\alpha\rho)_{1\Pi}(V_{\Pi}^2 + 1) + (\alpha\rho)_{2\Pi}(V_{2\Pi}^2 + (C_2/C_1)^2),$$

где

$$V_i = (U_i - D)/C_1, \quad V_{i0} = (U_{i0} - D)/C_1, \quad V_{i\Pi} = (U_{\Pi} - D)/C_1,$$

$$R = \frac{m_1 m_2}{m_1 V_2 + m_2 V_1} \cdot \frac{1}{C_1 \tau_{12}^U}, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2,$$

а значения  $D$  определяется уравнением

$$D^2 - U_{\Pi} D - C_1^2(\eta_{10} + \gamma_2 \eta_{20}) = 0.$$

В зависимости от соотношения параметров задачи возможны четыре типа структуры решения:

$$1. U_{\Pi} > (1 - \gamma_2) C_1 \eta_{20}, \quad U_{\Pi} > (1 - \gamma_2) C_2 \eta_{10} / \gamma_2.$$

Решение представляется совокупностью двух сильных разрывов в компонентах и область релаксации скоростей между ними.

На рис. 13 представлены профили  $U_i(\xi)$ ,  $P(\xi)$ ,  $\eta_i(\xi)$  для скорости поршня  $U_{\Pi} = 2$  и параметров гетерогенной среды

$$\tau_{12}^U = 1, \quad \eta_{10} = 0,2, \quad \gamma_2 = 0,1. \tag{3.6}$$

$$2. (1 - \gamma_2) C_2 \eta_{10} / \gamma_2 < U_{\Pi} < (1 - \gamma_2) C_1 \eta_{20}.$$

Сильный разрыв в легком газе отсутствует. На рис. 14 представлены профили  $U_i(\xi)$ ,  $P(\xi)$ ,  $\eta_i(\xi)$  для значений параметров гетерогенной среды (3.6) и скорости поршня

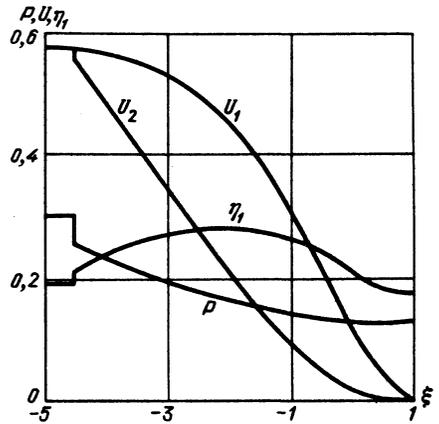
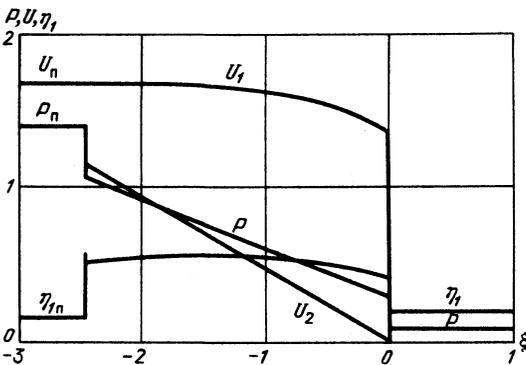


Рис. 13. Зависимости давления, скоростей и массовой концентрации от  $\xi$  при движении поршня в смесь взаимодействующих изотермических газов (случай двух сильных разрывов с областью релаксации)

Рис. 14. Зависимость давления, скоростей и массовой концентрации от  $\xi$  при движении поршня в смесь взаимодействующих изотермических газов (случай, когда отсутствует сильный разрыв в легкой компоненте)

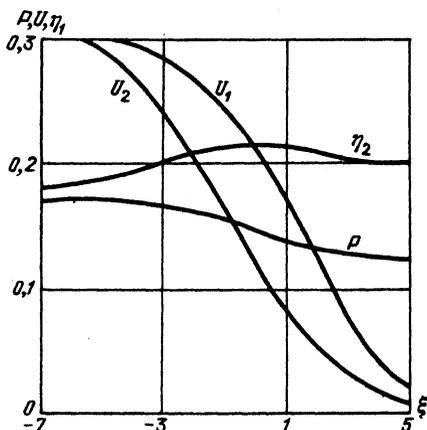


Рис. 15. Зависимость давления, скорости и массовой концентрации от  $\xi$  при движении поршня в смесь взаимодействующих изотермических газов (случай, когда нет сильных разрывов)

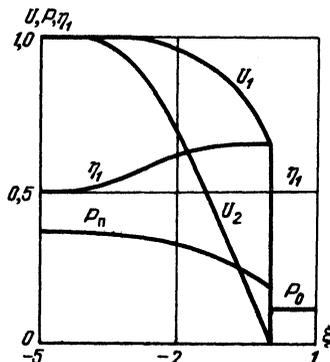


Рис. 16. Зависимость давления, скорости и массовой концентрации от  $\xi$  при движении поршня в смесь взаимодействующих изотермических газов (случай, когда отсутствует сильный разрыв в тяжелой компоненте)

$U_{II} = 0.6$ , которые обеспечивают реализацию данного типа структуры решения.

$$3. U_{II} < (1 - \gamma_1) C_1 \eta_{20}, \quad U_{II} < (1 - \gamma_2) C_2 \eta_{10} / \gamma_2.$$

В решении нет сильных разрывов. На рис. 15 представлены профили  $U_i(\xi)$ ,  $P(\xi)$ ,  $\eta_1(\xi)$  для значений параметров гетерогенной среды (3.6) и скорости поршня  $U_{II} = 0.3$ , которые обеспечивают реализацию данного типа структуры решения.

$$4. (1 - \gamma_2) C_1 \eta_{20} < U_{II} < (1 - \gamma_2) C_2 \eta_{10} / \gamma_2.$$

Сильный разрыв в тяжелом газе отсутствует. На рис. 16 представлены профили  $U_i(\xi)$ ,  $P(\xi)$ ,  $\eta_1(\xi)$  для значений параметров гетерогенной среды и скорости поршня, которые обеспечивают реализацию данного типа структуры решения.

#### § 4. Структура фронта ударной волны в смеси He и Ar

В [25], [26] излагаются экспериментальные результаты исследований явления скоростной неравновесности компонент во фронте ударной волны, распространяющейся на бинарной смеси газов.

В [25] получена экспериментальная зависимость ширины фронта ударной волны в смеси He и Ar от объемной концентрации Ar. Число Маха ударной волны в экспериментах было  $\approx 2$ . Примерно для этих же условий в [25] показано, что температуры компонент во фронте ударной волны отличаются мало, поэтому в качестве условий совместного деформирования компонент примем предположения о равенстве их давлений и температур. Для описания интенсивности силового взаимодействия компонент примем представление (2.4), которое по форме согласуется с представлением для  $R_i$  в бинарной молекулярной смеси газов, следующим из молекулярно-кинетических рассмотрений [8]. Уравнения состояния компонент — идеальные газы. Ширину фронта ударной волны определим соотношением

$$\delta_{\Phi} = (\rho_+ - \rho_-) \left/ \left| \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{\max} \right.,$$

где  $\rho_-$  и  $\rho_+$  — плотность смеси "перед" и "за" ударной волной, соответственно. Число Маха ударной волны во всех расчетах было равно двум.

Из кинетических рассматриваний и экспериментальных данных известно, что приближение Навье—Стокса дает удовлетворительное согласие с экспериментом по ширине фронта ударной волны в чистых газах только для слабых ударных волн. Для ударных волн с числом Маха 2 уравнение Навье—Стокса для чистых He и Ar дают в  $1.3 \div 1.5$  раз меньшую ширину фронта ударной волны, поэтому для того, чтобы расчетные значения ширины фронта ударной волны в чистых газах He и Ar (точки

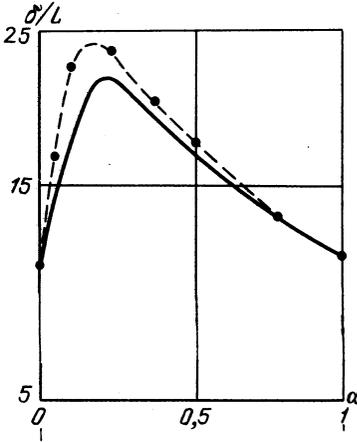


Рис. 17. Зависимость эффективной ширины фронта ударной волны в смеси He и Ar от объемной концентрации Ar

соответствующие значениям  $\alpha_{Ar} = 0$  и  $\alpha_{Ar} = 1$  на рис. 17) удовлетворяли экспериментальным данным [26] были выбраны эффективные значения коэффициентов вязкости He и Ar ( $\mu_{He} = 2.98 \text{ Пз}$ ,  $\mu_{Ar} = 4.12 \text{ Пз}$ ), которые примерно в 1.5 раза превышают реальные значения.

Значение  $\tau_{12}^U$  в (2.4) было подобрано из условия описания экспериментальных данных для концентрации  $\alpha_{Ar} = 0.5$  и затем считалось постоянным для всех других значений.

На рис. 17 представлены экспериментальная и расчетная зависимости  $\delta_{\phi}/L^*$  (где  $L^* = \mu/\rho(D-U)$ ) от  $\alpha_{Ar}$ . В довольно широкой окрестности точки  $\alpha_{Ar} = 0.5$ , по которой калибровалось значение  $\tau_{12}^U$ , математическая модель удовлетворительно описывает ход экспериментальной кривой (точки и штрихи — эксперимент, сплошная линия — расчет).

## § 5. Уравнения турбулентного перемешивания

Уравнения (2.1)–(2.5) описывают многокомпонентную среду, в которой каждая компонента "i" движется со своей скоростью  $\bar{U}_i$ . Величины  $\bar{R}_i$  и  $\Phi_i$  определяют обмен импульсом и энергией между компонентами среды. Чтобы эти уравнения описывали также турбулентное течение, нужно в уравнения движения (2.2) аддитивно с давлением  $P_i$  добавить еще турбулентное давление  $P_{ti}$ , возникающее из-за наличия инерции вихрей. В уравнение энергии (2.3) кроме  $P_{ti}$  нужно добавить еще кинетическую энергию вихрей  $\mathcal{E}_{ti}$  и работу силы  $P_{ti}$ . Поскольку во вращение вовлекаются все компоненты среды, резко возрастает диссипация энергии из-за турбулентного трения. Турбулентная вязкость  $S_H$  должна входить в уравнения движения и энергии. После учета всех перечисленных эффектов в (2.1)–(2.5) получаем уравнения тур-

булизованной многокомпонентной среды:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_i \rho_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\alpha_i \rho_i U_{ik}) = 0, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_i \rho_i U_{ik}) + \frac{\partial}{\partial x_l} (\alpha_i (\rho_i U_{ik} U_{il} + \Pi \delta_{kl} - S_{ikl})) = R_{ik}, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_i \rho_i \xi_i) + \frac{\partial}{\partial x_l} (\alpha_i U_{il} (\Pi_i + \rho_i \xi_i) - U_{ik} \alpha_i S_{ikl}) = \Phi_i, \quad (5.3)$$

$$\xi_i = E_i + 0,5 \bar{U}_i \cdot \bar{U}_i + \xi_{ti}, \quad \Pi_i = P_i + P_{ti}, \quad (5.4)$$

$$S_{ikl} = \frac{2}{3} \nu \left( \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial U_{il}}{\partial x_k} \right) + \nu_{ti} \left( \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial U_{il}}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \frac{\partial U_v}{\partial x_v} \right), \quad (5.5)$$

$$R_{ik} = \sum_j \varphi_{ij} (U_{jk} - U_{ik}) / \tau_{ij}^U, \quad (5.6)$$

$$\Phi_i = \bar{R}_i \cdot \bar{U}_i + \sum_j \left( b_{ij} \bar{R}_i (\bar{U}_j - \bar{U}_i) + \frac{\Pi_j - \Pi_i}{\tau_{ij}^P} + \varphi_{ij} \psi_{ij} \frac{T_j - T_i}{\tau_{ij}^T} \right), \quad (5.7)$$

$$\varphi_{ij} = \frac{\alpha_i \rho_i \alpha_j \rho_j}{\rho}, \quad \psi_{ij} = \frac{\eta_i C_{Vi} \eta_j C_{Vj}}{C_V}.$$

Здесь индексы  $i, j$  означают номер компоненты и если они повторяются, то по ним суммирование нет. По остальным повторяющимся индексам идет суммирование.

Турбулентную энергию  $\xi_t$  можно связать с турбулентным давлением  $P_{ti}$  аналогично [16] уравнением

$$P_{ti} = \Gamma_i \rho_i \xi_{ti}, \quad (5.8)$$

где  $\Gamma_i = 2/3$ . Кроме того, к уравнениям (5.1)–(5.8) нужно добавить еще уравнение производства кинетической энергии турбулентности. В общем виде это уравнение может быть таким

$$(\alpha_i \rho_i) \left( \frac{\partial \xi_{ti}}{\partial t} + U_{ik} \frac{\partial \xi_{ti}}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \alpha_i \rho_i D_{ti} \frac{\partial \xi_{ti}}{\partial x_k} \right) + A_i - B_i + \Phi_i^{\xi}, \quad (5.9)$$

где  $A_i$  – члены, описывающие генерацию турбулентной энергии  $\xi_{ti}$ ,  $B_i$  – члены, описывающие диссипацию  $\xi_{ti}$ .

Величина  $A$  должна обладать следующими свойствами. Если значение  $Re$  меньше некоторого критического значения  $Re_{кр}$ , то генерация  $\xi_{ti}$  должна отсутствовать. Если, при этом, в начальном состоянии среды было  $\xi_{ti} = 0$ , то течение при  $Re < Re_{кр}$  должно оставаться ламинарным. Введем величину

$$\Delta U_i = \xi_{ti}^{0,5} + \max_j \{ |\bar{U}_i - \bar{U}_j| \}. \quad (5.10)$$

Масштаб области турбулентного перемешивания компоненты "i" определим уравнением

$$L_i = \int_{t_0}^t \Delta U_i dt. \quad (5.11)$$

Введем индикаторную функцию  $\omega$  следующим образом:

$$\omega_i = \begin{cases} 0 & \text{при } \chi_i \leq 0, \\ \chi_i & \text{при } \chi_i > 0, \end{cases} \quad (5.12)$$

где

$$\chi_i = \Delta U_i L_i / (\nu_i + \nu_{ti}) - \text{Re}_{\text{кр}}. \quad (5.13)$$

Будем считать, что  $A$  пропорциональна  $\omega$  и составим из  $(\nu + \nu_t)_i$ ,  $L_i$ ,  $\Delta U_i$  простейшую размерную комбинацию размерности

$$A_i = \alpha_i \rho_i \omega_i (\nu_i + \nu_{ti}) \Delta U_i^2 / L_i^2. \quad (5.14)$$

Такой выбор функции  $A_i$  позволяет описать задержку образования турбулентности на стадии малых возмущений, т.е. на первой стадии гравитационного перемешивания. Для величины  $B$  воспользуемся выражением, аналогичным предложенному в [27]

$$B_i = k_1 \mathfrak{E}_{ti}^{1,5} / L_i + k_2 \mathfrak{E}_{ti} \nu_i / L_i^2. \quad (5.15)$$

Первое слагаемое в (5.15) характеризует диссипацию  $\mathfrak{E}_{ti}$  при больших  $\text{Re}$ , второе — при малых  $\text{Re}$ .

Энергия турбулентности — кинетическая энергия вращения вихрей является величиной неравновесной. Разные компоненты могут иметь в один и тот же момент времени разные значения  $\mathfrak{E}_{ti}$ , но из-за трения с течением времени они должны выравниваться. Следовательно, уравнение (5.9) должно иметь еще один член

$$\Phi_i^{\mathfrak{E}} = \sum_j \varphi_{ij} \frac{\mathfrak{E}_{ij} - \mathfrak{E}_{ti}}{\tau_{ij}^{\mathfrak{E}}}. \quad (5.16)$$

Время релаксации энергии турбулентности свяжем с масштабом области турбулентного перемешивания и вязкостью

$$\tau_{ij}^{\mathfrak{E}} = L_i L_j / (\nu_i + \nu_{ti}). \quad (5.17)$$

Окончательно (5.9) принимает вид

$$\begin{aligned} (\alpha \rho)_i \left( \frac{\partial \mathfrak{E}_{ti}}{\partial t} + U_{ik} \frac{\partial \mathfrak{E}_{ti}}{\partial x_k} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \alpha_i \rho_i D_{ti} \frac{\partial \mathfrak{E}_{ti}}{\partial x_k} \right) + \\ + (\alpha \rho)_i \omega_i (\nu_i + \nu_{ti}) \frac{\Delta U_i^2}{L_i^2} &- \left( \frac{k_1 \mathfrak{E}_{ti}^{1,5}}{L_i} + \frac{k_2 \mathfrak{E}_{ti} \nu_i}{L_i^2} \right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Величина  $\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \alpha_i \rho_i D_{ti} \frac{\partial \mathfrak{E}_{ti}}{\partial x_k} \right)$  описывает диффузию турбулентной энергии.

В соответствии с моделью Прандтля—Колмогорова [28] будем считать, что коэффициент турбулентной диффузии выражается через  $\mathfrak{E}_{ti}$  и  $L_i$  по формуле

$$D_{ti} = k_5 \mathfrak{E}_{ti}^{0,5} L_i. \quad (5.19)$$

Если предположить, что величина  $\nu_t$  подчиняется условию самодиффузии, то по аналогии с [29] она должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \nu_{ti}}{\partial t} + U_{ik} \frac{\partial \nu_{ti}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \nu_{ti} \frac{\partial \nu_{ti}}{\partial x_k} \right) + k_3 \nu_{ti} \frac{\Delta U_i}{L_i} - \frac{k_4 \nu_{ti}^2}{L_i^2}. \quad (5.20)$$

Таким образом, изложенная выше модель турбулентного перемешивания содержит 6 безразмерных констант  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, \text{Re}_{\text{кр}}$ .

В случае одномерного течения с плоской симметрией уравнения (5.1) – (5.20) принимают вид

$$\frac{\partial(\alpha_i \rho_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_i \rho_i U_i)}{\partial x} = 0, \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial(\alpha_i \rho_i U_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_i (\rho_i U_i^2 + \Pi_i - S_i)) = R_i, \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial(\alpha_i \rho_i \mathcal{E}_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_i U_i (\Pi_i - S_i + \rho_i \mathcal{E}_i)) = \Phi_i, \quad (5.23)$$

$$\mathcal{E}_i = E_i + 0,5 U_i^2 + \mathcal{E}_{ti}, \quad \Pi_i = P_i + P_{ti}, \quad (5.24)$$

$$S_i = \frac{4}{3} \nu_i \rho_i \frac{\partial U_i}{\partial x}, \quad (5.25)$$

$$R_i = \sum_j \varphi_{ij} (U_j - U_i) / \tau_{ij}^U, \quad \varphi_{ij} = \alpha_i \rho_i \alpha_j \rho_j / \rho, \quad \psi_{ij} = \eta_i C_{Vj} \eta_j C_{Vi} / C_V, \quad (5.26)$$

$$\Phi_i = R_i U_i + \sum_j \left( b_{ij} R_i (U_j - U_i) + \frac{\Pi_j - \Pi_i}{\tau_{ij}^P} + \varphi_{ij} \psi_{ij} \frac{T_j - T_i}{\tau_{ij}^T} \right), \quad (5.27)$$

$$P_{ti} = (2/3) \rho_i \mathcal{E}_{ti}, \quad (5.28)$$

$$\alpha_i \rho_i \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{ti}}{\partial t} + U_i \frac{\partial \mathcal{E}_{ti}}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_i \rho_i D_{ti} \frac{\partial \mathcal{E}_{ti}}{\partial x} \right) + A_i - B_i + \Phi_i^{\mathcal{E}}, \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial \nu_{ti}}{\partial t} + U_i \frac{\partial \nu_{ti}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_{ti} \frac{\partial \nu_{ti}}{\partial x} \right) + k_3 \nu_{ti} \frac{\Delta U_i}{L_i} - \frac{k_4 \nu_{ti}^2}{L_i^2}. \quad (5.30)$$

Величины  $A_i, B_i, \Phi_i$  выбираются в соответствии с (5.10) – (5.17).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дейч М.Е., Филиппов Г.А. Газодинамика двухфазных сред. – М.: Энергоиздат, 1968. – 422 с.
2. Ляхов Г.М. Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах. – М.: Недра, 1974. – 190 с.
3. Кутателадзе С.С., Стырикович М.А. Гидродинамика газожидкостных систем. – 2-е изд. – М.: Энергия, 1976. – 296 с.
4. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
5. Яненко Н.Н., Солоухин Р.И., Папырин А.Н., Фомин В.М. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц. – Новосибирск.: Наука, 1980. – 158 с.
6. Кутателадзе С.С., Накоряков В.Е. Тепломассообмен и волны в газо-жидкостных системах. – Новосибирск.: Наука, 1984. – 301 с.
7. Рахматуллин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // ПММ. – 1956. – Т. 20, вып. 2. – С. 184–195.
8. Струминский В.В. Влияние диффузионной скорости на течение газовых смесей // ПММ. – 1974. – Т. 38, вып. 2. – С. 203–210.
9. Анучина Н.Н., Огибина В.Н. Численное исследование Релей – Тэйлоровской неустойчивости // Вопр. атомной науки и техники, Сер. методики и прогр. численного реш. задач мат. физ. – 1981. – Вып. 2 (8). – С. 59–65.
10. Анучина Н.Н., Огибина В.Н. Численное моделирование гравитационного турбулентного движения // Вопр. атомной науки и техники, Сер. методики и прогр. численного реш. задач мат. физ. – 1982. – Вып. 2 (10). – С. 23–31.

11. Анучина Н.Н., Кучеренко А.Ю., Неуважаев В.Е., Огибина В.Н., Шибаршов Л.И. Яковлев В.Г. Турбулентное перемешивание на ускоряющейся границе разноплотных жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1978. – № 6. – С. 157–160.
12. Андронов В.А., Бахрах С.М., Никифоров В.В., Янцлик Ю.В. Численное моделирование некоторых турбулентных течений в приближении двумерной турбулентности // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1984. – № 6. – С. 20–26.
13. Бельский С.З., Фрадкин Е.С. Теория турбулентного перемешивания // Тр. ФИАН СССР. – 1965. – Т. 29. – С. 207–238.
14. Richtmyer R.D., Taylor G.T. Instability in Shock Acceleration of Compressible Fluid // Comm. on Pure and Appl. Math. – 1960. – V. 13. – P. 297–302.
15. Неуважаев В.Е., Яковлев В.Г. К теории турбулентного перемешивания границы раздела жидкостей в поле тяжести // ПМТФ. – 1976. – № 4. – С. 74–81.
16. Андронов В.А., Бахрах С.М., Мешков Е.Е., Мохов В.Н., Никифоров В.В., Певницкий А.В., Толшмяков А.И. Турбулентное перемешивание на контактной поверхности ускоряемой ударными волнами // ЖЭТФ. – 1976. – Т. 71, № 2 (8). – С. 806–811.
17. Иногамов Н.А. Турбулентная стадия тейлоровской неустойчивости // Письма ЖЭТФ. – 1978. – Т. 4, вып. 12. – С. 743–747.
18. Baker G.R., Meison D.J., Orszag S.A. Vortex Simulations of the Rayleigh – Taylor Instability // J. Phys. Fluids. – 1980. – V. 23, № 8. – P. 341–349.
19. Куропатенко В.Ф., Минаева И.С. Уравнения состояния некоторых металлов // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск: Наука. – 1982. – Т. 13, № 6. – С. 69–76.
20. Буряков О.В., Куропатенко В.Ф. Распространение волны разрежения и ударной волны в гетерогенной смеси двух изотермических газов // Вопр. атомной науки и техники, Сер. методики и прогр. численного реш. задач мат. физ. – 1981. – Вып. 2 (8), – С. 3–7.
21. Буряков О.В., Куропатенко В.Ф. Решение задачи о движении поршня в смеси двух газов с учетом скоростной неравновесности компонент // Моделирование процессов гидродинамики и энергетики. – Новосибирск: Наука, 1985. – С. 245.
22. Буряков О.В., Куропатенко В.Ф. Решение задачи о движении поршня в смеси двух газов // Вопр. атомной науки и техники, Сер. Методики и прогр. численного реш. задач мат. физ. – 1985. – Вып. 1. – С. 11–18.
23. Буряков О.В., Куропатенко В.Ф. Структура фронта ударной волны в гетерогенной смеси двух изотермических газов при наличии сил взаимодействия компонент // Вопр. атомной науки и техники, Сер. методики и прогр. численного реш. задач мат. физ. – 1985. – Вып. 3. – С. 19–24.
24. Буряков О.В., Куропатенко В.Ф. Решение задачи о поршне для смеси изотермического газа с несжимаемыми частицами с учетом скоростной неравновесности компонент // Вопр. атомной науки и техники, Сер. методики и прогр. численного реш. задач мат. физ. – 1986. – Вып. 1. – С. 27–32.
25. Center R.E. Measurement of Shock-Wave Structure in Helium – Argon Mixtures // J. Phys. Fluids. – 1967. – V. 10, № 8. – P. 1777–1784.
26. Harnett L.N., Muntz E.P. Experimental Investigation of Normal Shock Wave Velocity Distribution Functions in Mixtures of Argon and Helium // J. Phys. Fluids. – 1972. – V. 15, № 4. – P. 965–971.
27. Глушко Г.С. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине в несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Механика. – 1965. – № 4. – С. 13–23.
28. Колмогоров А.Н. Уравнение турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Сер. физ. – 1942. – Вып. 6, № 1–2. – С. 56–58.
29. Nee V.W., Kovaszny L.S. Simple Phenomenological Theory of Turbulent Shear Flows. // J. Phys. Fluids. – 1969. – V. 12. – P. 473–484.

Поступила в редакцию 24.10.88