

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Том 3, № 2

1972

Содержание

1. В.А.Быченков, В.В.Гаджиева, В.Ф.Куропатенко. Расчет неустановившихся движений разрушаемых сред 3
2. Ю.П.Глаголева, Б.М.Жогов, Ю.Ф.Кириянов, В.Д.Мальшаков, Л.В.Нестеренко, И.Ф.Подливаев, И.Д.Софронов. Основы методики "Медуза" численного расчета двумерных нестационарных задач газодинамики. 18
3. Г.В.Долголева, В.Л.Загускин. Применение схемы расщепления к расчету движения газа с переносом излучения. 56
4. Ш.А.Ершин, А.К.Ефимов, Ж.К.Кудусов, З.Б.Сакипов. Расчет участка тепловой стабилизации в трубе при течении жидкости с сильно зависящей от температуры вязкостью. 70
5. Г.И.Тимухин. О построении некоторых схем приближенного решения уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости. 77
6. В.В.Шайдуров. Об одном методе повышения точности разностных решений. 96
7. Г.И.Шишкин. Об одной задаче со свободной границей для системы параболических уравнений. 105

В.А.БЫЧЕНКОВ, В.В.ГАДЖИЕВА, В.Ф.КУРОПАТЕНКО
РАСЧЕТ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ РАЗРУШАЕМЫХ СРЕД.

В веществе при высоких давлениях и температурах имеют место испарение, плавление, полиморфные фазовые переходы и другие явления. Их описание невозможно без использования закона сохранения энергии и сложных уравнений состояния, удовлетворяющих условиям выпуклости лишь локально и, тем самым, приводящих к появлению в решении различных особенностей. Поскольку здесь давление по величине сильно превосходит компоненты девиатора напряжений, то для решения таких задач можно ограничиваться лишь гидродинамическим приближением (без учета тензора девиатора напряжений). С другой стороны, при давлениях примерно сто килобар и ниже гидродинамическое приближение не может описать всех особенностей поведения вещества. Стремление к созданию универсальной модели сжимаемой среды, описывающей поведение вещества при сжатии и растяжении в широком диапазоне давлений и температур, наложило определенный отпечаток на уравнения, которые будут обсуждены ниже.

В данной работе рассматриваются вопросы, связанные с расчетом движений вещества при низких давлениях. Используемая для этих целей модель позволяет определять объем трещин в зонах трещиноватости и объем пор в зонах дробления. В статье кратко излагается разностный метод расчета и обсуждаются результаты расчета нескольких задач.

Поведение вещества в широком диапазоне давлений в тече-

ние длительного времени являлось предметом экспериментальных исследований. В [1] дано достаточно полное описание физической стороны вопроса. Создание ЭВМ привело к появлению в последние годы ряда работ, посвященных расчету неустановившихся движений среды с учетом реальных свойств вещества (упругость, пластичность, сжимаемость, разрушаемость и др.). В [2] - [5] рассматриваются как модели среды, так и разностные методы, с помощью которых проводилось интегрирование дифференциальных уравнений. Один из разностных методов был предложен А.Н. Коноваловым. Своеобразная модель, предложенная и использованная в [7], [8], позволила свести задачу о взрыве к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассматриваемые ниже среды могут быть как сплошными, так и несплошными (пористыми или трещиноватыми). И те, и другие могут быть прочными, частично прочными или непрочными.

Под действием приложенных нагрузок среда может менять свои свойства, например, прочная среда может разрушиться, в сплошной среде могут появиться трещины или поры. Возможны также и противоположные процессы (закрытие трещин, восстановление прочности и др.). Уравнения, описывающие поведение сплошных и несплошных сред, отличаются друг от друга.

Рассмотрим **вначале** сплошные среды. Законы сохранения массы, количества движения и энергии для сплошного вещества в одномерном случае в лагранжевых координатах имеют вид

$$\frac{\dot{V}}{V} = \frac{\partial U}{\partial r} + (\alpha-1) \frac{U}{r}, \quad \frac{\dot{U}}{V} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial r} + (\alpha-1) \frac{\sigma_i - \sigma_2}{r}, \quad (1)$$

$$\dot{r} = U, \quad \dot{E} = \sigma_2 \dot{V} + (\alpha-1) V (\sigma_2 - \sigma_1) U / r.$$

Здесь U - массовая скорость, V - удельный объем ($V=1/\rho$), E - удельная внутренняя энергия, r - эйлерова координата, σ_i - напряжения, ($i = 1, 2, 3$), $\alpha = 1, 2, 3$ в зависимости от типа симметрии. Точка означает дифференцирование по времени вдоль траектории. Уравнения состояния вещества берутся в виде

$$\sigma_i = -\rho(V, E) + S_i(\epsilon_i, E), \quad (2)$$

где ρ - достаточно произвольная функция от V и E , удовлетворяющая условиям устойчивости термодинамического равновесия, а S_i - компоненты тензора девиатора напряжений, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^3 S_i = 0$. Компоненты тензора девиатора деформаций в сплошной среде определяются, как обычно, по формулам

$$\dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_i - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V}, \quad (3)$$

где ϵ_i - компоненты тензора деформаций, причем $\dot{\epsilon}_i = \frac{\partial U}{\partial r}$ независимо от α , а $\dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3 = 0$ при $\alpha=1$, $\dot{\epsilon}_2 = \frac{U}{r}$, $\dot{\epsilon}_3 = 0$ при $\alpha=2$, $\dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3 = \frac{U}{r}$ при $\alpha=3$.

В области упругих деформаций, определяемой неравенством

$$\sum_{i=1}^3 S_i^2 < \frac{2}{3} Y^2, \quad (4)$$

S_i связаны с ϵ_i законом Гука

$$S_i = 2\mu(V, E) \epsilon_i, \quad (5)$$

где модуль сдвига μ предполагается зависящим в общем случае от V и E .

В пластических веществах при нарушении неравенства (4) наступает пластическое течение. Предел упругости Y является одновременно и пределом текучести. В области пластичности S_i определяются с помощью уравнений Прандтля-Рейсса

$$S_i + \lambda S_i = 2\mu \epsilon_i \quad (6)$$

и условия текучести Мизеса

$$\sum_{i=1}^3 S_i^2 = \frac{2}{3} Y^2. \quad (7)$$

Предел текучести Y предполагается зависящим от ρ а множитель λ в (6) имеет вид

$$\lambda = 2\mu \frac{\sum_{i=1}^3 S_i \dot{\epsilon}_i}{\frac{2}{3} Y^2} - \frac{\dot{Y}}{Y}. \quad (8)$$

В хрупких веществах при нарушении неравенства (4) происходит хрупкое разрушение. Предел упругости Y является в таких веществах критерием разрушения. Разрушенное вещество не обладает прочностью на разрыв ($\sigma_{r0} = 0$). Если разрушение произошло в процессе нагрузки, то в момент разрушения термо-

динамические величины не меняются, однако меняется характер зависимости предела текучести от ρ . В раздробленной среде предел текучести Y пропорционален ρ . При разгрузке раздробленного вещества, если напряжения в нем возрастут до нуля, оно теряет сплошность - в нем возникают поры.

Хрупкое разрушение может произойти и в процессе разгрузки. В этом случае все σ_i скачком уменьшаются до нуля, скачком же меняются V , ρ , \mathcal{E} , U и в веществе возникают поры с удельным объемом θ_0 . Такое вещество становится несплошным. Часто изучаемое вещество, если оно не раздроблено, обладает прочностью на разрыв $\sigma_{кр}$. Условия сохранения прочности имеют вид неравенств

$$\sigma_1 < \sigma_{кр}, \quad \sigma_2 < \sigma_{кр}. \quad (9)$$

При нарушении этих условий в веществе возникают трещины, ортогональные напряжению, нарушившему (9). Если $\sigma_1 \geq \sigma_{кр}$ то возникают трещины первого класса, если $\sigma_2 \geq \sigma_{кр}$, то второго класса. При одновременном нарушении неравенств (9) в веществе образуются поры. Мы предполагаем, что трещины или поры распределены в элементе среды равномерно. Таким образом, в зависимости от вида трещин "частицы" вещества в элементе среды в одномерном случае будут иметь вид бесконечных пластин, цилиндров, сферических поверхностей или спиц, в которых в момент разрушения возникает сильный разрыв, изменяющийся скачком до нуля напряжение $\sigma_{кр}$. Этот сильный разрыв распространяется ортогонально к поверхностям трещин и на нем скачком изменяются термодинамические и упругие характеристики вещества. В то же время из деформаций терпит разрыв лишь одна: нормальная к поверхности трещин. Ограничиваясь рассмотрением только первого скачка, предполагая последующие скачки слабыми, используя, для простоты, акустическое приближение и предполагая скачок упругим, получим формулы, характеризующие изменение термодинамических величин при внезапном раскрытии трещин.

$$\Delta V = \begin{cases} -\frac{\sigma_{кр}}{\alpha^2 + \frac{4}{3}\mu_- \rho} & \text{для трещин I-го класса,} \\ -\frac{\sigma_{кр}}{\alpha^2 + \frac{2}{3}\frac{4-\alpha}{\alpha-1}\mu_- \rho} & \text{для трещин 2-го класса,} \end{cases} \quad (10)$$

$$\Delta \mathcal{E} = 0,5 \sigma_{кр} \Delta V, \quad \Delta \rho = \rho(V_+, \mathcal{E}_+) - \rho, \quad \theta = -\Delta V.$$

В (10) $\Delta f = f_+ - f_-$, где f_- и f_+ означают величины до раскрытия и после раскрытия трещин. При раскрытии трещин кинетическая энергия изменяется на величину

$$\Delta Q_{кин} = -0,5 \sigma_{кр} \Delta V. \quad (11)$$

Для определения новых значений упругих характеристик после раскрытия для трещин I-го класса имеем

$$S_{1+} = S_{1-} + \frac{4}{3}\mu_- \rho \Delta V, \quad S_{2+} = S_{2-} - \frac{2}{3}\mu_- \rho \Delta V. \quad (12)$$

В случае трещин второго класса, которые возможны лишь при $\alpha > 1$, те же величины имеют вид

$$S_{1+} = S_{1-} - \frac{2}{3}\mu_- \rho \Delta V, \quad S_{2+} = S_{2-} + \frac{2}{3}\frac{4-\alpha}{\alpha-1}\mu_- \rho \Delta V. \quad (13)$$

В (10) вошла величина α_- - акустический импеданс, определяемый выражением

$$\alpha_-^2 = -V \left(\frac{\partial \rho}{\partial V} \right)_{\mathcal{E}} - V \rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathcal{E}} \right)_V.$$

Поскольку уравнения (10)-(13) являются приближенными, то σ_{1+} в случае трещин первого класса и σ_{2+} в случае трещин второго класса после раскрытия трещин могут быть не равны нулю. Чтобы ликвидировать эту погрешность, будем определять S_{1+} в случае трещин первого класса из уравнения $\sigma_{1+} = 0$. Уравнения же (12) позволяют выразить S_{2+} через S_{1+} . Таким образом, вместо (12) получим

$$S_{1+} = P_+, \quad S_{2+} = S_{2-} + 0,5(S_{1-} - P_+).$$

Аналогично в случае трещин второго класса вместо (13) получим:

$$S_{2+} = P_+, \quad S_{1+} = S_{1-} - \frac{\alpha-1}{4-\alpha}(P_+ - S_{2-}).$$

При одновременном нарушении неравенств (19) и σ_1 и σ_2 обращаются в нуль и, следовательно, $S_{1+} = S_{2+} = P_+$. При $\alpha=1$ и $\alpha=3$ $S_3 = S_2$. Поэтому S_{1+} , S_{2+} и P_+ в момент разрушения могут скач-

ком измениться только до нуля, а $\Delta V, \Delta E$ и ΔQ должны быть вычислены интерациями по (I0), (II).

Перейдем к описанию несплошных сред. Чтобы описать поведение пористого или трещиноватого вещества, уравнения (I) должны быть записаны в ином виде. Для этого заменим прерывное вещество непрерывным с некоторыми значениями удельного объема V_* и напряжений σ_{i*} . Объем занимаемый единичной массой сплошного вещества, равен V . Если же это вещество раздробить, то оно займет объем $V + \theta$, где V - объем, занимаемый непосредственно веществом, и θ - объем, занимаемый порами или трещинами. Таким образом

$$V_* = V + \theta. \quad (I4)$$

Для сплошного вещества с удельным объемом V_* справедливы уравнения (I). Подставляя (I4) в первое из уравнений (I), получим

$$(\dot{V} + \dot{\theta}) / (V + \theta) = \frac{\partial U}{\partial r} + (\alpha - 1) U / r. \quad (I5)$$

В пористом разрушенном веществе частички предполагаются настолько малыми, что в них мгновенно реализуется условие механического равновесия с порами

$$\sigma_i = 0. \quad (I6)$$

Из (I) и (I6) следует, что в таком веществе будет

$$E = 0, \dot{U} = 0, E = const, U = const. \quad (I7)$$

Рассмотрим далее трещиноватое вещество. На простом примере декартовых координатах установим связь между σ_i и σ_{i*} . Пусть трещины направлены вдоль оси Ox , а само вещество имеет форму столбиков или спиц, также направленных вдоль Ox . В спицах реализуется условие механического равновесия с трещинами $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. В трещинах $\sigma_x = 0$, а в спицах $\sigma_x \neq 0$. Проведем плоскость, ортогональную оси Ox , и выделим на ней площадку F . Пусть суммарная площадь оснований спиц, проходящих через площадку F , равна F_θ . Сила, действующая на площадку F_θ , равна $\Pi = \sigma_x F_\theta$. Поскольку на площадке $F - F_\theta$ напряжение σ_x равно нулю, то результирующая сила, действующая на площадку F , также будет равна Π . Обозначая через σ_{x*} напряжение, непрерывное на площадке F , получим

$$\Pi = \sigma_x F_\theta = \sigma_{x*} F. \quad (I8)$$

Из (I8) следует формула усреднения напряжения σ_x

$$\sigma_{x*} = \sigma_x F_\theta / F. \quad (I9)$$

Преобразуем формулу (I9). С этой целью умножим числитель и знаменатель на одну и ту же величину Δx . Масса вещества с удельным объемом V , находящегося в элементарном объеме $F_\theta \Delta x$, равна массе вещества с удельным объемом V_* , находящегося в объеме $F \Delta x$.

$$M = F_\theta \Delta x / V = F \Delta x / V_*. \quad (20)$$

Из (I9), (20) и (I4) следует $\sigma_{x*} = \sigma_x V / (V + \theta)$. Поскольку все оси равноправны, значок x у σ может быть опущен или заменен другим значком

$$\sigma_{i*} = \sigma_i \frac{V}{V + \theta}. \quad (21)$$

С учетом всего вышесказанного уравнения (I) принимают вид

$$\frac{\dot{U}}{V + \theta} = \frac{\partial \sigma_{i*}}{\partial r} + (\alpha - 1) \frac{\sigma_{1*} - \sigma_{2*}}{r}, \quad (22)$$

$$\dot{E} = \sigma_{1*} (\dot{V} + \dot{\theta}) + (\alpha - 1) (V + \theta) (\dot{\sigma}_{2*} - \dot{\sigma}_{1*}) / r. \quad (23)$$

Будем предполагать, что пока в элементе среды есть трещины, напряжение, ортогональное трещинам, равно нулю, а соответствующая ему деформация вещества не совпадает с деформацией элемента среды. Эти предположения позволяют написать уравнения, определяющие изменение величин θ , V , E , в элементе среды с раскрытыми трещинами.

В качестве примера приведем такие уравнения для вещества с трещинами второго класса. Ограничимся случаем упругих деформаций.

Уравнения, описывающие поведение трещиноватой среды, рассматриваемой как сплошная, имеют вид (I5), (22), (23). Кроме того, в такой среде

$$\sigma_{2*} = 0, \dot{\sigma}_{2*} = 0. \quad (24)$$

Поведение вещества, из которого состоят спицы, определяется уравнениями

$$\frac{\dot{V}}{V} = \frac{\partial U}{\partial r} + (\alpha-1)\dot{\epsilon}_2, \quad \dot{E} = \sigma \dot{V} - (\alpha-1)V\dot{\epsilon}_2 \dot{\epsilon}_2, \quad (25)$$

$$\dot{\sigma}_2 = 0, \quad \dot{\epsilon}_2 = 0. \quad (26)$$

Из (25) следует

$$\dot{E} = \sigma V \frac{\partial U}{\partial r}. \quad (27)$$

Из (15) и (25) выражается $\dot{\sigma}_2$ через $\dot{\epsilon}_2$

$$\dot{\sigma}_2 = \sigma_2 \left[\frac{\partial U}{\partial r} + (\alpha-1) \frac{U}{r} \right] + (\alpha-1)V \left(\frac{U}{r} - \dot{\epsilon}_2 \right). \quad (28)$$

Для определения $\dot{\epsilon}_2$ запишем вначале (26) в виде

$$2\mu \dot{\epsilon}_2 - \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_E \dot{V} - \left(\frac{\partial p}{\partial E} \right)_V E = 0, \quad (29)$$

а затем выразим $\dot{\epsilon}_2$ с помощью (25), (27) и (3)

$$\dot{\epsilon}_2 = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\frac{2}{3}\mu + V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_E + \sigma V \left(\frac{\partial p}{\partial E} \right)_V}{\frac{2}{3}\mu(4-\alpha) - (\alpha-1)V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_E}. \quad (30)$$

Аналогично получаются уравнения для среды с трещинами первого класса в упругой области, а также для среды с трещинами того и другого классов в области пластического течения.

После закрытия трещин прочность среды в направлении, ортогональном закрытым трещинам, восстанавливается лишь в случае, если температура станет близка к температуре плавления.

Все высказанные выше соображения о поведении вещества, были учтены при создании программы для расчетов на ЭВМ. В программе была реализована разностная схема I из [II], несколько измененная для учета θ_1 , θ_2 , S_1 , S_2 . Ударные фронты "размазывались" с помощью линейноквадратичной псевдовязкости из [I2], обобщенной на случай $\alpha > 1$. Выпишем разностные уравнения, применявшиеся для расчетов. Заметим, что если нижние индексы у всех величин, входящих в уравнение, одинаковы, то они опускаются. Индекс i уменьшается при возрастании r .

$$U_i^{n+1} = U_i^n \frac{2\sigma}{m_{i-0.5}^n + m_{i+0.5}^n} \left[(\bar{\sigma}_*)_{i-0.5}^n - (\bar{\sigma}_*)_{i+0.5}^n \right] + (\alpha-1)\psi_i^n \sigma. \quad (31)$$

Здесь приняты обозначения

$$m_{i-0.5}^n = (r_{i-1}^n - r_i^n) / (V_*)_{i-0.5}^n, \quad \bar{\sigma}_* = (S_2 - \bar{p})V / (V + \theta), \quad (32)$$

$$\psi_i^n = \frac{(S_1)_{i+0.5}^n - (S_2)_{i+0.5}^n}{\rho_{i+0.5}^n (r_{i+1}^n + r_i^n)} + \frac{(S_1)_{i-0.5}^n - (S_2)_{i-0.5}^n}{\rho_{i-0.5}^n (r_i^n + r_{i-1}^n)}. \quad (33)$$

После нахождения скоростей U_i^{n+1} из (31), находятся:

$$r_i^{n+1} = r_i^n + U_i^{n+1} \tau, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{i-0.5}^{n+1} = \frac{(U_{i-1} - U_i)^{n+1}}{r_{i-1} - r_i}, \quad \left(\frac{U}{r} \right)_{i-0.5}^{n+1} = \frac{(U_{i-1} + U_i)^{n+1}}{r_{i-1} + r_i},$$

после чего определяются $\dot{\epsilon}_1^{n+1}$ и $\dot{\epsilon}_2^{n+1}$ по формулам:

а) $\theta > 0$, вещество раздроблено:

$$\dot{\epsilon}_1^{n+1} = 0, \quad \dot{\epsilon}_2^{n+1} = 0. \quad (34)$$

б) $\theta > 0$, трещины I-го класса:

$$\dot{\epsilon}_1^{n+1} = (\alpha-1) \frac{U}{r} \frac{\frac{2}{3}\mu r^n + V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_E + V \sigma_2 \left(\frac{\partial p}{\partial E} \right)_V + \sigma_2 \Omega_1 - \Omega_2}{\frac{2}{3}\mu r^n - V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_E + \Omega_2}, \quad (35)$$

$$\dot{\epsilon}_2^{n+1} = \frac{U}{r}, \quad (36)$$

в) $\theta > 0$, трещины 2-го класса:

$$\dot{\epsilon}_1^{n+1} = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (37)$$

$$\dot{\epsilon}_2^{n+1} = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\frac{2}{3}\mu r^n + V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_E + V \sigma_2 \left(\frac{\partial p}{\partial E} \right)_V + \sigma_2 \Omega_1 - (\alpha-1)\Omega_2}{(4-\alpha)\frac{2}{3}\mu r^n - (\alpha-1)V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_E + (\alpha-1)\Omega_2}, \quad (38)$$

г) во всех остальных случаях:

$$\dot{\epsilon}_1^{n+1} = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \dot{\epsilon}_2^{n+1} = \frac{U}{r}. \quad (39)$$

В (35) и (38) входят Ω_1 , Ω_2 , которые определяются по формулам

$$\Omega_1 = \mathbb{E} \left[\rho^n 2\mu r^n / \frac{2}{3} (Y^n)^2 - V \left(\frac{\partial p}{\partial E} \right)_V \left(\frac{d \ln Y}{d \ln \rho} \right)^2 \right], \quad (40)$$

$$\Omega_2 = \mathbb{E} \left[V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_E \left(\frac{d \ln Y}{d \ln \rho} \right)^2 - 2\mu r^n (\rho^n)^2 / \frac{2}{3} (Y^n)^2 \right],$$

где $\mathbb{E} = 0$ в упругой области и $\mathbb{E} = 1$ в пластической области (случай "щебенки" без пор описывается формулами (39)).

Далее определяется объем трещин или пор

$$\theta^{n+1} = 0, \quad \text{если } \theta^n = 0, \quad (41)$$

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \tau (V^2 \theta^n) \left[\frac{\partial u}{\partial r} + (\alpha-1) \frac{U}{r} \right] - \tau \Delta, \text{ если } \theta^n \neq 0. \quad (41)$$

Здесь

$$\Delta = \begin{cases} 0 & \text{в раздробленной среде,} \\ V^2 [\dot{\epsilon}_1 + (\alpha-1) \frac{U}{r}], & \text{в области трещин I-го класса,} \\ V^2 \left[\frac{\partial u}{\partial r} + (\alpha-1) \dot{\epsilon}_2 \right], & \text{в области трещин 2-го класса.} \end{cases}$$

По $r_i^{n+1}, \dot{\epsilon}_1^{n+1}, \dot{\epsilon}_2^{n+1}, \theta^{n+1}$ вычисляются

$$V_{i-0,5}^{n+1} = (V^2 \theta^n) \frac{(r_{i-1}^{n+1}) - (r_i^{n+1})^\alpha}{(r_{i-1}^n)^\alpha - (r_i^n)^\alpha} - \theta_{i-0,5}^{n+1}, \quad (42)$$

$$S_1^{n+1} = S_1^n + 2\mu \left(\tau \dot{\epsilon}_1^{n+1} - \frac{1}{3} \frac{V^{n+1} - V^n}{V^{n+1} + V^n} \right), \quad (43)$$

$$S_2^{n+1} = S_2^n + 2\mu \left(\tau \dot{\epsilon}_2^{n+1} - \frac{1}{3} \frac{V^{n+1} - V^n}{V^{n+1} + V^n} \right), \quad (44)$$

$$S_3^{n+1} = -S_1^{n+1} - S_2^{n+1}. \quad (45)$$

Если $\sum_{k=1}^3 (S_k^{n+1})^2 \geq \frac{2}{3} (Y^n)^2$, то для выполнения (7) умножим $(S_1, S_2, S_3)^{n+1}$ на множитель $\sqrt{\frac{2}{3} (Y^n)^2 / \sum_{k=1}^3 (S_k^{n+1})^2}$ аналогично тому, как это делается в [4]. Совершаемая при этом ошибка в определении S_k есть величина $O(\tau^2)$.

Далее вычисляются

$$E^{n+1} = E^n - 0,5 (\bar{\rho}^n + \bar{\rho}^{n+1}) (V^{n+1} - V^n) + \tau q_s, \quad (46)$$

$$\rho^{n+1} = \rho (V^{n+1}, E^{n+1}), \quad (47)$$

где
$$q_s = 0,25 (V^2 V^{n+1}) \left[(S_1^{n+1} S_1^n) \dot{\epsilon}_1^{n+1} + (\alpha-1) (S_2^{n+1} + S_2^n) \dot{\epsilon}_2^{n+1} \right],$$

$$\bar{\rho}_k^{n+1} = -\bar{\rho}_k^{n+1} + S_k^{n+1}, \quad (48)$$

$$\bar{\rho}^{n+1} = \begin{cases} \rho^{n+1} & \text{при } \Delta U = U_{i-1}^{n+1} - U_i^{n+1} \geq 0, \\ \rho^* - \Delta U (a^n - C_0 \rho^n \Delta U) & \text{при } \Delta U < 0, \end{cases} \quad (49)$$

$$\rho_{i-0,5}^* = \rho_{i-0,5}^n \text{ при } \Delta U < 0, U_* = U_i^n + U_{i-1}^n < 0, \quad (50)$$

$$\rho_{i-0,5}^* = \rho_{i-0,5}^n - (\alpha-1) (a^n)_{i-0,5}^2 V_{i-0,5}^n \tau U_* / (r_{i-1}^n + r_i^n). \quad (50)$$

Величина Y^n , входящая в (40), определяется так

$$a) \text{ в нераздробленной среде: } Y^n = \min(C_2, Y_0 + C_3 \rho^n),$$

$$b) \text{ в раздробленной среде: } Y^n = \min(C_4, C_5 \rho^n).$$

В данной работе не обсуждаются погрешности аппроксимации и другие свойства разностных уравнений, поскольку они практически такие же, как в схеме I из [11]. Шаг по времени в используемой разностной схеме ограничен условием устойчивости $\tau \leq m / (a + \frac{4}{3} \rho \mu)$.

Результаты расчетов, проведенных по этой схеме, хорошо согласуются с данными опытов. Приведем некоторые результаты расчета двух задач.

1. Взрыв в граните, $Q = 5$ кг (Хардхэт). Расчет сделан в предположении, что в начальный момент внутренняя энергия Q равномерно распределена в сфере радиуса 1 м, наполненной идеальным газом с $\gamma = 4/3$, $\rho_0 = 0,71$ г/см. Уравнение состояния гранита бралось в виде

$$p = (\gamma-1) \rho E + \frac{\rho_0 C_0^2}{\rho} \left[\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0} \rho^2 + \frac{\rho(\rho-1)}{\rho_0} \rho - \rho \right] \quad (51)$$

с параметрами $\rho_0 = 2,67$ г/см³, $a = 2,72$, $\gamma = 2,18$, $C_0 = 3,66$ км/сек, $\nu = 0,27$, $\alpha_p = 77$ бар, $C_2 = 28$ кбар, $Y_0 = 2$ кбар, $C_3 = 1,85$, $C_4 = 0,5$ кбар, $C_5 = 1$. Гранит предполагался хрупким. Результаты расчетов приведены на рис. 1,2. Там же для сравнения приведены результаты опыта и расчета по программе SOC из [5]. В расчетах была взята сетка по r со следующими параметрами: а) в полости число точек $N_1 = 15$ равномерно по r , б) в граните было взято $N_2 = 400$ на участке $1 \text{ м} \leq r \leq 250 \text{ м}$, причем интервалы $\Delta r_{i-0,5}$ возрастали при увеличении r по геометрической прогрессии. Величина интервала Δr , примыкающего к границе полости, была равна $0,1 \text{ м}$.

2. Взрыв в плексигласе шарика из ТЭНа $r = 5 \text{ мм}$, $\rho_0 = 1,53$ г/см³. Расчет выполнен в предположении, что происходит мгновенная детонация ВВ. Уравнение состояния ВВ бралось в виде $p = A \rho^n$ с параметрами $\rho_0 = 1,53$ г/см³, $A = 2,54$, $n = 3$. Уравнение плексигласа бралось в виде (51) с параметрами

$C_0 = 2,37$ км/сек, $\rho_0 = 1,19$ г/см³, $\gamma = 5/3$, $n = 3,5$, $\nu = 0,335$, $Y_0 = 3,6$ кбар, $C_2 = \infty$, $C_3 = 1$, $C_4 = 0,3$ кбар, $C_5 = 0,5$. Результаты расчетов на рис. 3,4 сравниваются с результатами опыта [6] и с результатами расчетов [8]. Можно отметить лучшее, чем в [8], согласие с опытом. В ВВ было взято 25 точек равномерно по r , в плексиглазе $N_2 = 100$ на участке $0,5 \text{ см} \leq r \leq 100 \text{ см}$ причем $\Delta r_{i+0,5}$ возрастали по геометрической прогрессии при увеличении r , а величина интервала, граничного с ВВ, была равна 0,1 см.

С целью определения чувствительности предложенной в данной работе модели к изменениям параметров уравнения состояния, кроме основного варианта расчета задачи I, были рассчитаны еще четыре варианта, отличающиеся от основного численным значением одной из величин C_0, γ, n, Y_0 . Каждая из них увеличивалась на 10%. Сравнивались величины на фронте ударной волны в момент ее прихода на радиус $r = 26,7$ м. Результаты сравнения приведены в таблице I.

ТАБЛИЦА I.

Величина	Основной вариант	км			
		$C_{01} = 1,1 C_0$	$\gamma_1 = 1,1 \gamma$	$n_1 = 1,1 n$	$Y_{01} = 1,1 Y_0$
ρ	$2,67 \text{ г/см}^3$	$3,66 \text{ сек}$	$n = 2,72$	$\gamma = 2,2.18$	$Y_0 = 2 \text{ кбар}$
σ	1,42141	1,55836	1,44168	1,42807	1,41139
ρ	1,38821	1,52527	1,40848	1,39487	1,37829
ν	0,36111	0,36238	0,36097	0,36111	0,36127
U	0,1475	0,1508	0,1509	0,1488	0,1467

На основании этой таблицы можно вычислить приближенные значения логарифмических производных, характеризующих чувствительность величин на фронте ударной волны к изменениям параметров уравнения состояния.

Конечно, эта оценка является частной. Аналогичные оценки могут быть сделаны для каждой из интересующих величин, однако, это связано с увеличением объема вычислений. Приближенные значения логарифмических производных приведе-

ны в таблице 2. В этой таблице в строчку расположены дифференциалы функций, а в столбик дифференциалы аргументов. ТАБЛИЦА 2.

	$\partial \ln C_0$	$\partial \ln \rho$	$\partial \ln \nu$	$\partial \ln U$
$\partial \ln C_0$	-0,96	0,98	0,035	0,22
$\partial \ln \rho$	0,14	0,15	-0,00005	0,23
$\partial \ln \nu$	0,047	0,048	0	0,088
$\partial \ln Y_0$	0,070	-0,072	0,004	-0,054

Из таблицы 2 видно, что ударная волна наиболее чувствительна к изменению C_0 . Следовательно, C_0 должна определяться более аккуратно, чем остальные величины.

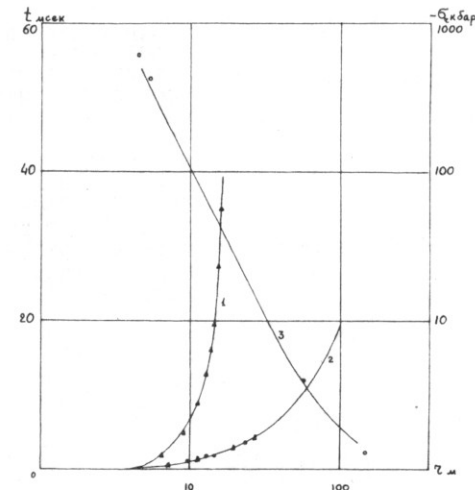


Рис. I.

Взрыв "Хардхет". I-зависимость радиуса полости от времени 2-положение фронта волны, 3-радиальное напряжение на фронте. Сплошные линии - наш расчет, o - эксперимент из [5], Δ - расчет по программе SDC.

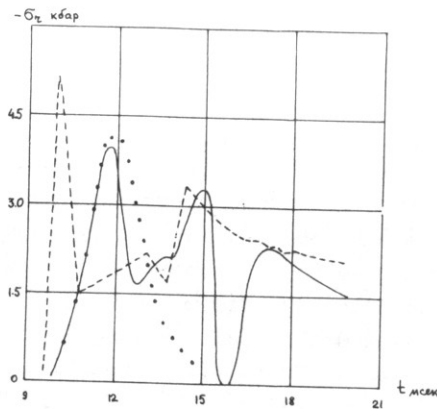


Рис. 2

Взрыв "Хардхет". Зависимость радиального напряжения от времени на расстоянии 62 м. от центра взрыва. Сплошные линии — наш расчет, пунктирные линии — расчет по программе SDC, \circ — эксперимент из [5].

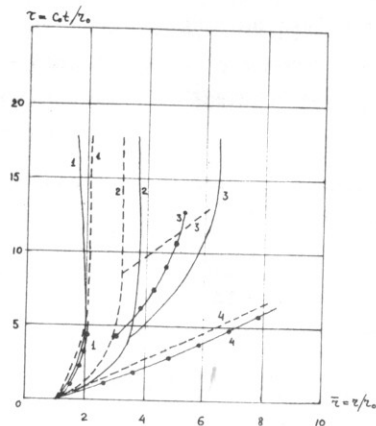


Рис. 3

Взрыв в плексигласе. I — положение полости, 2 — границы области пластического течения, 3 — границы области трещин второго класса (область трещин между линиями 2 и 3), 4 — положение фронта ударной волны. Сплошные линии — наш расчет, пунктирные — результаты расчета из [8], \circ — эксперимент из [6].

Л и т е р а т у р а .

1. Л.В.Альтшулер, "Применение ударных волн в физике высоких давлений", УФН, т.85, вып.2, 1965, 197.
2. Л.В.Альтшулер, А.В.Балабанов, В.А.Баталов, В.А.Родионов, Д.М.Тарасов, "Рентгенографическое исследование начальной стадии развития камуфлетной полости в песчаном грунте", ФГиВ, № 3, 1970.
3. Д.Майнчен, С.Сак, "Метод расчета "Тензор", Выч. методы в гидродинамике, изд. "МИР", 1967.

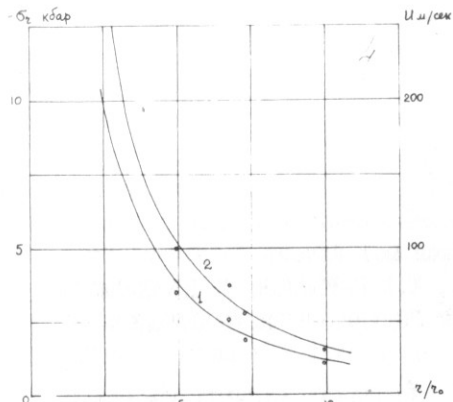


Рис. 4.

Взрыв в плексигласе. I — радиальное напряжение, 2 — массовая скорость на фронте ударной волны. Сплошные линии — наш расчет, \circ — эксперимент из [6].

4. М.Уилкинс, "Расчет упруго-пластических течений", Выч. методы в гидродинамике, изд. "Мир", 1967.
5. Д.Черри, "Машинный расчет воронок, образующихся при взрыве", сб. "Механика", № 6, 106, 1967.
6. В.В.Адушкин, А.П.Сухотин, "О разрушении твердой среды взрывом", ПМТФ, № 4, 1961.
7. С.С.Григорян, "Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород" ПММ, т.31, вып. 4, 1967.
8. А.Б.Багдасарян, С.С.Григорян, "О действии взрыва в органическом стекле", ПМТФ, № 3, 1967.
9. J. Butkovich, Calculation of the shock wave from an underground nuclear explosion in granite, J. Geophys. Res., 70(40), 885-891, 1965
10. E. Teller, W. Tauber, Gary H. Higgins, G. Johnson, "The constructive uses of nuclear explosive", Chapter 4, 143, New York, Mc Graw-Hill, 1958.
11. В.Ф.Куропатенко "О разностных методах для уравнения гидродинамики", Труды МИ АН СССР им.В.А.Стеклова, т.74, Ч.1, 1966, 107-137.
12. В.Ф.Куропатенко "Об одной форме псевдовязкости", Известия СО АН СССР, сер.техн. № 13, вып.3, 1967, 81-83.

Поступила 1.У1.1971г.