

ГИДРОДИНАМИКА МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ МНОГОФАЗНЫХ СЖИМАЕМЫХ СРЕД

В.Ф. Куропатенко

Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт
технической физики им. Е.И. Забабахина,
Россия, 456770 г.Снежинск Челябинской обл., а/я 245, v.f.kuropatenko@vniitf.ru

Любые воздействия на многокомпонентные среды выводят их из равновесного состояния и порождают релаксационные процессы, в ходе которых компоненты, взаимодействуя друг с другом, обмениваются импульсом, энергией, а при наличии химических реакций и массой. Описание обменных процессов в рамках парных взаимодействий компонентов позволяет учесть их индивидуальные свойства (размер частиц, чистоту поверхности, адгезионные свойства и т.д.). В работе в дополнение к парным взаимодействиям предлагается новая форма взаимодействия – кластерное, порождающее новые тензор взаимодействия и потоки энергии. Предлагаются и обосновываются их зависимости от характеристик каждого компонента и барицентрической скорости. Вводится понятие неравновесной кинетической энергии компонента и предлагается новое уравнение для объемных концентраций, замыкающее систему законов сохранения вместе с уравнением состояния i -го компонента и не накладывающее дополнительных ограничений на свойства смеси. Модель допускает изменение агрегатного состояния и фазовые переходы в каждом компоненте.

Введение

Чистых веществ в природе чрезвычайно мало. В основном это смеси веществ. Если в некотором малом объеме $d\theta$ перемешаны несколько ($N > 1$) веществ, то сплошную среду в этом объеме называют многокомпонентной, а каждую составляющую смеси – компонентом. Воздействия на многокомпонентные среды (МКС) приводят к взаимным перемещениям компонентов, их перемешиванию или сепарации, нагреванию и деформациям, фазовым переходам или изменениям агрегатных состояний (т.е. к тиксотропии), химическим реакциям в компонентах и другим изменениям.

Теория моделей МКС далека от своего завершения. Развитие моделей МКС идет по пути создания, изучения и применения частных моделей. Во всех моделях слабым местом остается описание взаимодействия компонентов. Не решенными в общем случае остаются две принципиально важные проблемы:

- проблема получения законов сохранения смеси из законов сохранения компонентов;
- проблема замыкания системы уравнений i -го компонента.

Ниже приводится решение этих проблем.

1. Модели многокомпонентных сред

Наиболее общими из моделей МКС являются модели многоскоростных взаимодействующих континуумов, в которых поведение каждого компонента определяется законами сохранения, записанными для величин макроуровня. Это значит, что для каждого компонента уже прошел переход от рассмотрения на микроуровне к величинам макроуровня, в результате чего каждый компонент с номером i – имеет физические характеристики: P_i – давление, T_i – температуру, ρ_i – плотность, E_i – удельную внутреннюю энергию, \bar{U}_i – скорость, S_i – энтропию и др. Термодинамические характеристики i -го компонента связаны уравнением состояния.

Рассмотрим малый объем $d\theta$, в котором находится смесь N компонентов, имеющая массу dM . Поделим dM и $d\theta$ между всеми компонентами

$$dM = \sum_{i=1}^N dM_i, \quad d\theta = \sum_{i=1}^N d\theta_i. \quad (1)$$

Отношения

$$\eta_i = \frac{dM_i}{dM}, \quad \alpha_i = \frac{d\theta_i}{d\theta} \quad (2)$$

называют [1-5] массовой и объемной концентрациями i -го компонента. По определению плотность – это масса вещества в единичном объеме. Следовательно

$$\rho_i = \frac{dM_i}{d\theta_i}, \quad \rho = \frac{dM}{d\theta}, \quad (3)$$

где ρ – плотность смеси. Представим, что масса dM_i "размазана" на весь объем $d\theta$. Величина

$$\alpha_i \rho_i = \frac{dM_i}{d\theta}. \quad (4)$$

является виртуальной величиной и называется парциальной плотностью i -го компонента. Из (2)-(4) видно, что $\alpha_i \rho_i$ и ρ связаны уравнением

$$\alpha_i \rho_i = \eta_i \rho. \quad (5)$$

Для удельного объема $V = 1/\rho$ соотношение (5) принимает вид

$$\alpha_i V = \eta_i V_i. \quad (6)$$

Из (1), (3) и (4) следует, что плотность смеси равна сумме парциальных плотностей компонентов

$$\rho = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i. \quad (7)$$

Каждый компонент смеси имеет количество движения $\bar{U}_i dM_i$. Из закона сохранения количества движения при фиксированном времени t следует

$$\bar{U} dM = \sum_{i=1}^N \bar{U}_i dM_i.$$

Заменив dM_i с помощью (2) на $\eta_i dM$ и сократив на dM , получим, что скорость смеси \bar{U} равна сумме парциальных скоростей $\eta_i \bar{U}_i$ компонентов

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^N \eta_i \bar{U}_i. \quad (8)$$

Из (5) и (8) следует, что удельное количество движения смеси $\rho \bar{U}$ равно сумме удельных количеств движения компонентов

$$\rho \bar{U} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i \bar{U}_i. \quad (9)$$

Скорость \bar{U} , определяемая выражением (8), называется барицентрической [1,2].

Удельная внутренняя энергия E — это энергия единичной массы. Из закона сохранения внутренней энергии при фиксированном времени следует

$$EdM = \sum_{i=1}^N E_i dM_i.$$

После деления на dM и использования (2) получим, что удельная внутренняя энергия смеси равна сумме парциальных удельных внутренних энергий компонентов

$$E = \sum_{i=1}^N \eta_i E_i. \quad (10)$$

Такие же рассуждения относительно удельной полной энергии ε дают уравнение

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N \eta_i \varepsilon_i. \quad (11)$$

С помощью (6) выражения (10), (11) запишем в виде

$$\rho E = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i E_i, \quad \rho \varepsilon = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i \varepsilon_i. \quad (12)$$

Величины $E(V, S)$ и $E_i(V_i, S_i)$ являются термодинамическими потенциалами и их дифференциалы имеют вид

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S dV + \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V dS, \quad d_i E_i = \left(\frac{\partial E_i}{\partial V_i} \right)_{S_i} d_i V_i + \left(\frac{\partial E_i}{\partial S_i} \right)_{V_i} d_i S_i. \quad (13)$$

В случае $S = \text{const}$, $S_i = \text{const}$, в пространствах термодинамических переменных V , S и V_i, S_i продифференцируем (6) и (10) с учетом того, что η_i и α_i не зависят ни от V , S ни от V_i, S_i . В результате получим два уравнения

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S dV = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial E_i}{\partial V_i} \right)_{S_i} \eta_i d_i V_i, \quad \alpha_i dV = \eta_i d_i V_i,$$

из которых следует

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial E_i}{\partial V_i} \right)_{S_i} \alpha_i. \quad (14)$$

Поскольку

$$P = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S, \quad P_i = - \left(\frac{\partial E_i}{\partial V_i} \right)_{S_i},$$

то уравнение (14) означает, что давление смеси равно сумме парциальных давлений компонентов

$$P = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i \tag{15}$$

Это уравнение общее. В частном случае смеси идеальных газов, имеющих равновесную температуру $T_i = T$ оно было доказано Дальтоном и получило название "закон Дальтона".

Физические величины $P_i, \rho_i, E_i, T_i, \bar{U}_i$ и др. являются величинами макроуровня i -го компонента, а парциальные величины $\alpha_i \rho_i, \alpha_i P_i, \eta_i \bar{U}_i, \eta_i E_i, \eta_i \varepsilon_i$ и описывают его поведение, как сплошной среды. Но каждый компонент является структурным элементом смеси. Т.о. указанные величины по отношению к смеси являются величинами промежуточного уровня - мезоуровня. Величины макроуровня, характеризующие поведение смеси получаются из величин мезоуровня с помощью уравнений (7), (8), (10), (11), (15).

2. Взаимодействия компонентов

Многокомпонентная среда может находиться в неравновесном состоянии. Условия равновесия смеси имеют вид

$$P_i = P_j, \quad T_i = T_j, \quad \bar{U}_i = \bar{U}_j.$$

Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, смесь является неравновесной. В ней происходят релаксационные процессы установления равновесия, в которых компоненты обмениваются импульсом и энергией.

В течение длительного времени при построении моделей многокомпонентных сред рассматривали только парные взаимодействия, в процессе которых i -й и j -й компоненты взаимодействуют независимо от остальных компонентов [1-4]. В случае, если $\bar{U}_i \neq \bar{U}_j$, обмен импульсом определялся чаще всего вектором

$$\bar{R}_{ij} = a_{ij} (\bar{U}_j - \bar{U}_i) / \tau_{ij}^U.$$

Функции a_{ij}, τ_{ij}^U зависят от степени гетерогенности смеси, от свойств i -го и j -го компонентов и от размеров частиц компонентов, от скорости звука, сжимаемости, уравнений состояния компонентов, от агрегатных состояний компонентов, их адгезионных свойств и др. так, что они удовлетворяют условию взаимности Онзагера

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \tau_{ij}^U = \tau_{ji}^U,$$

вследствие чего вектор \bar{R} удовлетворяет условию

$$\bar{R}_{ij} = -\bar{R}_{ji} \tag{16}$$

Конкретный вид этих зависимостей устанавливается с учетом условий каждой конкретной задачи. Часто для их обоснования строят элементарную двухкомпонентную ячейку. Порядок индексов ij указывает, что i -й компонент действует на j -й. Действие на i -й компонент всех N компонентов, т.е. смеси, получается суммированием по j

$$\bar{R}_s = \sum_{j=1}^N \alpha_j \bar{R}_j.$$

В силу условий (16), вектор \bar{R}_s , действующий на смесь со стороны всех компонентов, оказывается равным нулю

$$\bar{R}_s = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \alpha_i \alpha_j \bar{R}_{ij} = 0. \quad (17)$$

Аналогичные рассуждения относятся и к скалярной функции Φ_{ij} , описывающей обмен энергией i -го и j -го компонентов. Как правило [4], эту функцию берут в виде

$$\Phi_{ij} = \frac{b_{ij}}{\tau_{ij}^p} (P_j - P_i) + \frac{c_{ij}}{\tau_{ij}^T} (T_j - T_i), \quad (18)$$

где

$$b_{ij} = b_{ji}, \quad c_{ij} = c_{ji}, \quad \tau_{ij}^p = \tau_{ji}^p, \quad \tau_{ij}^T = \tau_{ji}^T, \quad \Phi_{ji} = -\Phi_{ij}.$$

Поток энергии к i -му компоненту со стороны остальных компонентов смеси получается суммированием

$$\Phi_{Si} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_{ij}.$$

Поток энергии, действующий на смесь со стороны всех компонентов равен нулю

$$\Phi_S = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j \Phi_{ij} = 0. \quad (19)$$

Уравнения (17), (19) – это принципиальная особенность модели парных взаимодействий.

Введение с помощью выражений (7), (8), (10), (11), (15) величин макроуровня ρ , \bar{U} , E , ε , P позволяет ввести новую форму взаимодействия, при которой каждый i -й компонент взаимодействует со смесью. Назовем такой вид взаимодействия **кластерным**. Изменение импульса и энергии i -го компонента при кластерном взаимодействии зависят от характеристик смеси P , ρ , E , \bar{U} , T и характеристик i -го компонента P_i , ρ_i , E_i , \bar{U}_i , T_i . Для выражения нового типа взаимодействия введем тензор взаимодействий и поток энергии. Обозначим тензор взаимодействий на i -й компонент со стороны смеси через F_{Si} , а поток энергии через \bar{Q}_S . Они удовлетворяют условиям кластерного взаимодействия

$$F_S = \sum_{i=1}^N \alpha_i F_{iS} = -\sum_{i=1}^N \alpha_i F_{Si}, \quad \bar{Q}_S = \sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{Q}_{iS} = -\sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{Q}_{Si}. \quad (20)$$

3. Законы сохранения i -го компонента

После учета кластерной формы взаимодействия законы сохранения массы, импульса и энергии запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i) + \nabla(\alpha_i \rho_i \bar{U}_i) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i \bar{U}_i) + \nabla \alpha_i P_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\alpha_i \rho_i \bar{U}_i U_{ki} + \alpha_i \bar{F}_{kSi}) - \alpha_i \bar{R}_{Si} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i \varepsilon_i) + \nabla(\alpha_i \bar{U}_i (P_i + \rho_i \varepsilon_i)) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\alpha_i \bar{F}_{kSi} \bar{U}_i) + \nabla \alpha_i \bar{Q}_{Si} - \alpha_i \Phi_{Si} - \alpha_i A_{Si} = 0,$$

где A_{Si} — работа вектора \bar{R}_{Si} , определяемая уравнением

$$A_{Si} = 0.5 \sum_{j=1}^N \alpha_j \bar{R}_{ji} (\bar{U}_i + \bar{U}_j).$$

К системе уравнений (21)-(23) нужно добавить уравнение состояния в виде

$$P_i = P_i(\rho_i, E_i), \quad T_i = T_i(\rho_i, E_i)$$

и выражение ε_i через E_i и $0.5 \bar{U}_i^2$

$$\varepsilon_i = E_i + 0.5 \bar{U}_i^2, \quad (24)$$

Новыми по сравнению с [1-3] в этих уравнениях являются вектор \bar{F}_{kSi} , образованный элементами k -й строки тензора F_{Si} , вектор \bar{Q}_{Si} и скаляр A_{Si} .

Величины макроуровня P , ρ , E , \bar{U} , ε , T являются характеристиками некоторой сплошной среды (смеси). Запишем для нее законы сохранения массы импульса и энергии с учетом кластерной формы взаимодействия. Они имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \bar{U} = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{U}) + \bar{U} \nabla(\rho \bar{U}) + \rho(\bar{U} \nabla) \bar{U} + \nabla P + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{F}_{kS} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \nabla \bar{U} (P + \rho \varepsilon) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{U} \bar{F}_{kS}) + \nabla \bar{Q}_S = 0. \quad (27)$$

Вектор \bar{F}_{kS} образован элементами k -й строки тензора \bar{F}_S , определяющего воздействие всех i -х компонентов на смесь. F_S и F_{Si} , \bar{Q}_S и \bar{Q}_{Si} связаны условиями кластерного взаимодействия (20).

4. Тензор взаимодействий F_{Si}

Будем считать разности $\delta \bar{U}_i = \bar{U}_i - \bar{U}$ пульсациями скорости возле среднего значения \bar{U} . Подставим

$$\bar{U}_i = \bar{U} + \delta \bar{U}_i$$

в уравнение импульса i -го компонента (22) и просуммируем по i . В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\bar{U}) + \bar{U}\nabla(\rho\bar{U}) + \rho(\bar{U}\nabla)\bar{U} + \nabla P + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\alpha_i (\bar{F}_{ksi} + \rho_i \delta \bar{U}_i \delta \bar{U}_{ki})) = 0. \quad (28)$$

Первые четыре члена этого уравнения совпадают с соответствующими членами уравнения (26). Условие полного совпадения (28) с (26) имеет вид

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\alpha_i (2\bar{F}_{ksi} + \rho_i (\bar{U}_i - \bar{U})(U_{ki} - U_k))) = 0.$$

Приравняв нулю каждое слагаемое этой суммы, проинтегрировав по x_k и потребовав, чтобы было $\bar{F}_{ksi} = 0$ при $\bar{U}_i = \bar{U}$, получим выражение для вектора \bar{F}_{ksi}

$$\bar{F}_{ksi} = -0.5\rho_i (\bar{U}_i - \bar{U})(U_{ki} - U_k). \quad (29)$$

5. Поток энергии \bar{Q}_{Si}

Удельная кинетическая энергия пульсаций скорости равна

$$H_i = 0.5(\bar{U}_i - \bar{U})^2. \quad (30)$$

Из закона сохранения каждого вида энергии при $t = \text{const}$ следует

$$\rho H = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i H_i. \quad (31)$$

Подставим в (31) выражение H_i из (30) и воспользуемся формулами усреднения (7) и (9). В результате получим

$$\rho H + 0.5\rho\bar{U}^2 = \sum_{i=1}^N 0.5\alpha_i \rho_i \bar{U}_i^2. \quad (32)$$

Выразим характеристики смеси $P\bar{U}$, $\rho\varepsilon$, $\rho\varepsilon\bar{U}$, \bar{Q}_S , \bar{F}_{kS} , A_S через суммы парциальных величин с помощью (12) и выражений

$$P\bar{U} = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i \bar{U}_i + \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i (\bar{U} - \bar{U}_i), \quad \rho\varepsilon\bar{U} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i \varepsilon_i U_i + \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i \varepsilon_i (\bar{U} - \bar{U}_i),$$

$$\bar{Q}_S = -\sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{Q}_{Si}, \quad \bar{F}_{kS} = -\sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{F}_{ksi}, \quad -\sum_{i=1}^N \alpha_i A_{Si} = 0, \quad -\sum_{i=1}^N \alpha_i \Phi_{Si} = 0$$

и подставим в уравнение энергии смеси (27). В результате получим

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_i \rho_i \varepsilon_i) + \nabla (\alpha_i \bar{U}_i (P_i + \rho_i \varepsilon_i)) + \right]$$

$$\left[\alpha_i \bar{F}_{kSi} \bar{U}_i + \nabla \alpha_i \bar{Q}_{Si} - \alpha_i \Phi_{Si} - \alpha_i A_{Si} + B_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\alpha_i \bar{F}_{kSi} \bar{U}_i) \right] = 0, \tag{33}$$

где

$$B_i = \nabla(\alpha_i(P_i + \rho_i \varepsilon_i)(\bar{U} - U_i)) - 2\nabla \alpha_i \bar{Q}_{Si} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\alpha_i \bar{F}_{kSi} (\bar{U} + \bar{U}_i)).$$

Условие совпадения каждого i -го слагаемого в (33) с уравнением энергии i -го компонента (23) имеет вид $B_i = 0$. Преобразуем его с помощью (24) и (29) к виду

$$\nabla(\alpha_i((\bar{U} - \bar{U}_i)(P_i + \rho_i E_i) - 2\bar{Q}_{Si})) = 0. \tag{34}$$

Проинтегрировав (34) по x_k и выбрав постоянные интегрирования из условий $\bar{Q}_{Si} = 0$ при $\bar{U}_i = \bar{U}$, получим выражение для потока энергии

$$\bar{Q}_{Si} = 0.5(\bar{U} - \bar{U}_i)(P_i + \rho_i E_i). \tag{35}$$

Законы сохранения i -го компонента (21)-(23) при выбранных выражениях (29), (35) для \bar{F}_{kSi} и \bar{Q}_{Si} инвариантны к преобразованию Галилея и обладают свойством, что при суммировании по i каждого закона сохранения i -х компонентов получается соответствующий закон сохранения смеси сплошной среды. Т.о. первая из двух перечисленных выше проблем решена.

6. Следствия законов сохранения

Прежде, чем начать преобразования законов сохранения (21)-(23) и (25)-(27) рассмотрим составляющие удельной полной энергии ε . Умножим выражение ε_i (24) на $\alpha_i \rho_i$ и просуммируем по i

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i \varepsilon_i = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i E_i + \sum_{i=1}^N 0.5 \alpha_i \rho_i \bar{U}_i^2.$$

Подставим сюда (12) и (32), и сократив на ρ , получим

$$\varepsilon = E + 0.5\bar{U}^2 + H.$$

Т.о. удельная полная энергия смеси ε состоит из удельной внутренней энергии смеси E , удельной кинетической энергии смеси $0.5\bar{U}^2$ и удельной неравновесной кинетической энергии смеси H (удельной энергии пульсаций скорости). В процессе релаксации скоростей H переходит в E .

Из законов сохранения i -го компонента (21)-(23) и смеси (25)-(27) с помощью тождественных преобразований получаются уравнения движения, уравнения для удельной внутренней энергии и уравнения для удельной энтропии

$$\alpha_i \rho_i \frac{d_i \bar{U}_i}{dt} + \nabla \alpha_i P_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\alpha_i \bar{F}_{kSi}) - \alpha_i \bar{R}_{Si} = 0,$$

$$\alpha_i \rho_i \frac{d_i E_i}{dt} + \alpha_i \left(P_i \nabla \bar{U}_i + \sum_{k=1}^3 \bar{F}_{kSi} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \bar{R}_{Si} \bar{U}_i - A_{Si} - \Phi_{Si} \right) + \nabla \alpha_i \bar{Q}_{Si} = 0,$$

$$\alpha_i \rho_i T_i \frac{d_i S_i}{dt} - P_i \frac{d_i \alpha_i}{dt} + \alpha_i \left(\sum_{k=1}^3 \bar{F}_{kSi} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \bar{R}_{Si} \bar{U}_i - A_{Si} - \Phi_{Si} \right) + \nabla \alpha_i \bar{Q}_{Si} = 0, \quad (36)$$

$$\rho \frac{d\bar{U}}{dt} + \nabla P + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \bar{F}_{kS}}{\partial x_k} = 0,$$

$$\rho \frac{dE}{dt} + \rho \frac{dH}{dt} + P \nabla \bar{U} + \sum_{k=1}^3 \bar{F}_{kS} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x_k} + \nabla \bar{Q}_S = 0,$$

$$\rho T \frac{dS}{dt} + \frac{\partial \rho H}{\partial t} + \nabla (\rho H \bar{U}) + \sum_{k=1}^3 \bar{F}_{kS} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x_k} + \nabla \bar{Q}_S = 0. \quad (37)$$

В изохорическом процессе при $V = \text{const}$, $V_i = \text{const}$ и при условии, что η_i и α_i не зависят от термодинамических величин, из уравнений

$$dE = \sum_{i=1}^N \eta_i d_i E_i, \quad dE = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V dS, \quad d_i E_i = \left(\frac{\partial E_i}{\partial S_i} \right)_{V_i} d_i S_i, \quad T = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V, \quad T_i = \left(\frac{\partial E_i}{\partial S_i} \right)_{V_i}$$

получим уравнение

$$TdS = \sum_{i=1}^N \eta_i T_i d_i S_i,$$

которое с помощью (6) запишем в виде

$$\rho T dS = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i T_i d_i S_i.$$

Разделим на dt и получим уравнение, выражающее производство энтропии смеси через сумму производств энтропии компонентов

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i T_i \frac{d_i S_i}{dt}. \quad (38)$$

Подставив в (38) выражение для производства энтропии смеси (37) и компонентов (36), получим уравнение для объемной концентрации i -го компонента

$$P_i \frac{d_i \alpha_i}{dt} + (\bar{U} - \bar{U}_i) \nabla \alpha_i P_i - 2 \nabla \alpha_i \bar{Q}_{Si} = 0. \quad (39)$$

Это уравнение замыкает систему законов сохранения i -го компонента. Т.о. и вторая из перечисленных выше проблем решена.

7. Свойства модели

Новая сила – тензор взаимодействий F_{Si} (29) и поток энергии \bar{Q}_{Si} (35) содержат величины с индексом i , характеризующие компоненты – структурные элементы многокомпонентной среды и всего две величины макроуровня – плотность ρ и скорость \bar{U} смеси. Сила F_{Si} и поток \bar{Q}_{Si} универсальны: они не содержат эмпирических констант, не зависят от характеристик или свойств компонентов, влияющих на времена релаксации. В этом принципиальное отличие кластерного взаимодействия от парного.

Сила F_{Si} и поток \bar{Q}_{Si} обращаются в ноль при наступлении равновесия по скоростям. Из (39) следует, что при $\bar{U}_i = \bar{U}$ объемные концентрации компонентов остаются постоянными вдоль траекторий.

Законы сохранения многокомпонентной среды получаются путем суммирования соответствующих законов сохранения компонентов. Это свойство модели является не более, чем важным аргументом в ее пользу, т.к. для описания поведения i -го компонента они не нужны. Система уравнений i -го компонента включает законы сохранения (21)-(23), выражения для A_{Si} , \bar{F}_{Si} , \bar{Q}_{Si} , \bar{R}_{Si} , Φ_{Si} и ϵ_i , уравнение для α_i (39), уравнения состояния и уравнения для ρ и U (8), (9). Таким образом: полная система уравнений содержит одинаковое количество уравнений и функций и является замкнутой без дополнительных гипотез, конкретизирующих смесь. Изложенная в работе модель дает возможность описать с единой точки зрения множество явлений в многокомпонентных средах.

Работа поддержана РФФИ, проект 04-01-00050.

Литература

1. Крайко А.Н., Нигматулин Р.И., Старков В.К., Стернин Л.Б. Итоги науки и техники. Гидромеханика. 1973. Т.6. С. 93-174.
2. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М. Наука, 1978, 336 с.
3. Яненко Н.Н., Солоухин Р.И., Папырин А.Н., Фомин В.М. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц. Новосибирск. Наука. 1980. 158 с.
4. Куропатенко В.Ф. Математическое моделирование. 1989. т. 1, №2. С. 118-136.
5. Куропатенко В.Ф. Модель многокомпонентной среды, Доклады АН, 2005, №6. С. 761-763.