

# МОДЕЛЬ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЫ\*

В.Ф. КУРОПАТЕНКО

В работе излагается новая модель неравновесной многокомпонентной среды. В законах сохранения компонентов учитывается их взаимодействие друг с другом в виде сил и потоков энергии, содержащих разности скоростей, давлений и температур компонентов. Рассматривается также форма обмена импульсом и энергией между каждым компонентом и сплошной средой, выражающей коллективные свойства ансамбля компонентов. Показано, что эти потоки импульса и энергии отличны от нуля только в неравновесных по скоростям состояниях многокомпонентной среды. Приводится полная система уравнений, описывающих поведение каждого компонента смеси.

## 1. Многокомпонентная среда

Чистых веществ в природе чрезвычайно мало. В основном это многокомпонентные среды. Сплошную среду в малом объеме  $d\theta$  называют многокомпонентной, если в этом объеме перемешаны несколько  $(N - 1)$  веществ. Под такое определение подпадают все известные типы многокомпонентных сред: гомогенные (компоненты перемешаны на молекулярном уровне), гетерогенные (хотя бы один компонент присутствует в виде макрочастиц), коллоидные растворы, которые занимают промежуточное состояние.

Каждый компонент может находиться в одном из известных агрегатных состояний: Т – твердое тело, Ж – жидкость, Г – газ, П – плазма. В смеси возможны комбинации компонентов в любых агрегатных состояниях. Например, в двухкомпонентной смеси возможны следующие типы смесей: Г + Ж – аэрозоль, Г + Т – аэрозоль, Ж + Г – пузырьковая среда, Ж + Ж – эмульсия, Ж + Т – суспензия, Т + Т – скальные породы, грунты, композиционные материалы, сплавы и т. д. Конкретные агрегатные состояния, в которых находятся компоненты, определяют характер их взаимодействия. Взаимодействие компонентов зависит еще от ряда других характеристик: от размера и формы частиц, взаимных адгезионных свойств, теплоемкости, скорости звука и т. д. Физические процессы, происходящие в многокомпонентной среде, могут привести к изменению агрегатного состояния одного или нескольких компонентов. Это явление называется тиксотропией. При этом изменяется характер взаимодействия компонентов. В технике встречается настолько большое количество многокомпонентных сред, что дать их полную классификацию очень трудно.

Процессы внутри многокомпонентных сред возникают при любых видах воздействий: механических, тепловых, радиационных, химических, комбинированных. Воздействия приводят к взаимным перемещениям компонентов (перемешиванию или сепарации), к нагреванию и деформациям компонентов, к фазовым переходам и, таким образом, к смене типа многокомпонентной среды, к химическим реакциям в компонентах.

Если давления  $P_i$  ( $i$  – номер компонента), температуры  $T_i$  и скорости  $\bar{U}_i$  для всех компонентов одинаковы, то смесь называется равновесной. В противном случае многокомпонентная среда неравновесна. Каждый вид неравновесности (механическое

---

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 04-01-00050).

при  $P_i \neq P_j$ , тепловое при  $T_i \neq T_j$ , кинематическое при  $\bar{U}_i \neq \bar{U}_j$ ) порождает соответствующий релаксационный процесс, приводящий к уменьшению разницы между неравновесными величинами. Времена релаксации  $\tau^P, \tau^T, \tau^U$  зависят от свойств взаимодействующих компонентов.

## 2. Механика многоскоростных континуумов

Рассмотрим элемент смеси, имеющий объем  $d\theta$  и массу  $dM$ . По определению плотность смеси равна

$$\rho = \frac{dM}{d\theta}. \quad (1)$$

Смесь в объеме  $d\theta$  состоит из компонентов. Каждый из них занимает объем  $d\theta_i$  и имеет массу  $dM_i$ . По определению физическая плотность  $i$ -го компонента равна

$$\rho_i = \frac{dM_i}{d\theta_i}. \quad (2)$$

Объем и масса смеси складываются из объемов и масс компонентов

$$dM = \sum_{i=1}^N dM_i, \quad (3)$$

$$d\theta = \sum_{i=1}^N d\theta_i. \quad (4)$$

Уравнения (3), (4) определяют объемную и массовую концентрации  $i$ -го компонента

$$\alpha_i = \frac{d\theta_i}{d\theta}, \quad \eta_i = \frac{dM_i}{dM}. \quad (5)$$

Из (3) – (5) следует, что

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \quad \sum_{i=1}^N \eta_i = 1. \quad (6)$$

Будем считать, что каждый компонент в своем объеме  $d\theta_i$  характеризуется физическими величинами  $P_i, T_i, \bar{U}_i, \rho_i, E_i$  – удельная внутренняя энергия,  $S_i$  – энтропия,  $S_{ikl}$  – компоненты девиатора тензора напряжений и т. д. Термодинамические величины  $P_i, T_i, \rho_i, E_i, S_i$  связаны уравнением состояния. В объеме смеси  $d\theta$  каждый компонент характеризуется парциальными величинами  $\alpha_i P_i, \alpha_i \rho_i, \eta_i \bar{U}_i, \eta_i E_i$  и др., которые получаются из физических величин умножением на  $\alpha_i$  или  $\eta_i$ . В соответствии с принятым определением парциальных величин они непрерывны в объеме смеси  $d\theta$ . Непрерывность парциальных величин позволяет написать для них законы сохранения в частных производных. Такой подход означает, что в каждой точке пространства одновременно находятся все  $N$  компонентов. Идеи, лежащие в основе моделей многоскоростных континуумов, изложены в ряде работ [1-7].

Получим уравнение, выражающее плотность смеси  $\rho$  через парциальные плотности компонентов  $\alpha_i \rho_i$ . Для этого подставим (1) и (2) в (3). В результате получим

$$\rho d\theta = \sum_{i=1}^N \rho_i d\theta_i. \quad (7)$$

После подстановки в (7)  $d\theta_i$  из (5) и сокращения на  $d\theta \neq 0$  получаем, что плотность смеси равна сумме парциальных плотностей компонентов

$$\rho = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i. \quad (8)$$

Из уравнений (1), (2) и (5) следует уравнение, выражающее парциальную плотность  $i$ -го компонента через плотность смеси

$$\alpha_i \rho_i = \rho \eta_i. \quad (9)$$

При  $t = \text{const}$  кроме законов сохранения масс (3) и объемов (4) напишем законы сохранения количества движения  $\bar{K}$  и энергии

$$d\bar{K} = \sum_{i=1}^N d\bar{K}_i, \quad (10)$$

$$dQ = \sum_{i=1}^N dQ_i. \quad (11)$$

По определению

$$d\bar{K} = \bar{U}dM, \quad d\bar{K}_i = \bar{U}_i dM_i. \quad (12)$$

Из (5), (10) и (12) следует выражение для скорости смеси

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^N \eta_i \bar{U}_i. \quad (13)$$

Скорость смеси, определяемая уравнением (13), называется барицентрической. Поскольку время  $t$  заморожено, то переходы энергии из одного вида в другой отсутствуют. Поэтому уравнение (11) можно применить как к удельной внутренней энергии  $E$ , так и к удельной полной энергии  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N \eta_i \varepsilon_i, \quad (14)$$

$$E = \sum_{i=1}^N \eta_i E_i. \quad (15)$$

Каждый компонент имеет уравнение состояния [8], а смесь не имеет уравнения состояния. Тем не менее, удельную внутреннюю энергию  $E(V, S)$ , как и  $E_i(V_i, S_i)$ , можно рассматривать как термодинамические потенциалы

$$dE = \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_S dV + \left( \frac{\partial E}{\partial S} \right)_V dS, \quad (16)$$

$$dE_i = \left( \frac{\partial E_i}{\partial V_i} \right)_{S_i} dV_i + \left( \frac{\partial E_i}{\partial S_i} \right)_{V_i} dS_i. \quad (17)$$

По определению

$$P = - \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_S, \quad P_i = - \left( \frac{\partial E_i}{\partial V_i} \right)_{S_i}. \quad (18)$$

По аналогии с термодинамикой будем рассматривать изэнтропический процесс при постоянных массовых и объемных концентрациях. Тогда (16), (17) примут вид

$$dE = -PdV, \quad dE_i = -PdV_i. \quad (19)$$

Продифференцируем (15) при  $\eta_i = \text{const}$  и в полученное уравнение подставим (19). В результате получим

$$PdV = \sum_{i=1}^N \eta_i P_i dV_i. \quad (20)$$

Но при  $\eta_i = \text{const}$ ,  $\alpha_i = \text{const}$  из (9) следует уравнение

$$\eta_i dV_i = \alpha_i dV. \quad (21)$$

Подставив (21) в (20) и сократив на  $dV \neq 0$ , получим, что давление смеси равно сумме парциальных давлений компонентов

$$P = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i. \quad (22)$$

Это уравнение было получено Дальтоном для смеси идеальных газов, находящихся в тепловом равновесии, и известно, как закон Дальтона.

Далее для простоты изложения будем рассматривать адиабатическое ядро системы законов сохранения  $i$ -го компонента с нулевым девиатором тензора напряжений, без теплопроводности, без химических реакций и без воздействия полей излучения. При необходимости физические процессы (вязкость, упругость, пластичность, сухое трение, теплопроводность и др.) добавляются в законы сохранения – уравнения адиабатического ядра.

С учетом сказанного выше, законы сохранения массы, количества движения и энергии  $i$ -го компонента запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i) + \nabla(\alpha_i \rho_i \bar{U}_i) = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i \bar{U}_i) + \nabla \alpha_i \mathbf{p}_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha_i \rho_i \bar{U}_i U_{ki} + \alpha_i \bar{F}_{kSi}) - \alpha_i \bar{R}_{Si} = 0, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i \varepsilon_i) + \nabla(\alpha_i \bar{U}_i (P_i + \rho_i \varepsilon_i)) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha_i \bar{F}_{kSi} \bar{U}_i) + \\ & + \nabla(\alpha_i \bar{Q}_{Si}) - \alpha_i A_{Si} - \alpha_i \Phi_{Si} = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\varepsilon_i = E_i + 0,5 \bar{U}_i^2, \quad P_i = P_i(\rho_i, E_i). \quad (26)$$

Вектор  $\bar{R}_{Si}$  описывает сумму парных обменов количеством движения  $i$ -го компонента со всеми остальными компонентами,  $A_{Si}$  – работа вектора  $\bar{R}_{Si}$ , функция  $\Phi_{Si}$

описывает сумму парных обменов энергией  $i$ -го компонента со всеми остальными компонентами смеси, тензор  $F_{Si}$  описывает воздействие смеси на  $i$ -й компонент в результате кластерного взаимодействия (вектор  $\overline{F}_{kSi}$  образован элементами  $k$ -й строки ( $k = 1, 2, 3$ ) тензора  $F_{Si}$ ),  $\overline{Q}_{Si}$  описывает поток энергии со стороны смеси к  $i$ -му компоненту в результате кластерного взаимодействия. Система уравнений (23) – (26) не является замкнутой, поскольку к физическим величинам  $P_i, \rho_i, E_i, \varepsilon_i, \overline{U}_i$  добавилась еще объемная концентрация  $\alpha_i$ .

### 3. Парное взаимодействие компонентов

Предполагается, что два компонента с номерами  $i$  и  $j$  взаимодействуют друг с другом независимо от остальных компонентов. Интенсивность потока количества движения определяются вектором  $\overline{R}_{ij}$ , который, как правило, имеет вид

$$\overline{R}_{ji} = a_{ji}(\overline{U}_j - \overline{U}_i). \quad (27)$$

Порядок индексов указывает направление действия. Вектор  $\overline{R}_{ji}$  действует со стороны  $j$ -го компонента на  $i$ -й. Функция  $a_{ij}$  удовлетворяет условиям Онзагера  $a_{ij} = a_{ji}$  [9]. Интенсивность обмена энергией определяется функцией

$$\Phi_{ji} = b_{ij}(P_j - P_i) - c_{ij}(T_j - T_i), \quad (28)$$

где  $b_{ij}, c_{ij}$  также удовлетворяют условиям взаимности Онзагера

$$b_{ij} = b_{ji}, \quad c_{ij} = c_{ji}. \quad (29)$$

Вектор  $\overline{R}_{ji}$  и функция  $\Phi_{ji}$  отличны от нуля только в случае отсутствия равновесия при  $\overline{U}_i \neq \overline{U}_j, P_i \neq P_j$  или  $T_i \neq T_j$ . В равновесной смеси  $\overline{R}_{ji} = 0, \Phi_{ji} = 0$ . Следствием условий Онзагера является равенство нулю суммы членов с разным порядком индексов

$$\overline{R}_{ij} + \overline{R}_{ji} = 0, \quad \Phi_{ij} + \Phi_{ji} = 0. \quad (30)$$

Условия (30) являются важной особенностью парных взаимодействий. Полное действие всех компонентов на  $i$ -й компонент получается суммированием по  $j$ .

$$\overline{R}_{Si} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \overline{R}_{ji}, \quad \Phi_{Si} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_{ji}. \quad (31)$$

Из (31) следует еще одно свойство парных взаимодействий

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j \overline{R}_{ji} = 0, \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j \Phi_{ji} = 0. \quad (32)$$

Несколько слов следует сказать о выборе функций  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$ . Неравновесность по  $\overline{U}, P$  и  $T$  порождает соответствующий релаксационный процесс [9]. Время релаксации зависит от многих факторов. Так, например, время релаксации скоростей  $\tau_{ij}^U$  зависит от размеров и формы частиц взаимодействующих компонентов, их адгезионных характеристик, шероховатости частиц и т. д. Теоретически обосновать эти зависимости

трудно [10-13]. Как правило, для выбора  $\tau_{ij}^U$  привлекаются результаты экспериментов. Поскольку размерность  $\dim a_{ij} = \rho/t$ , то с учетом условий Онзагера наиболее простое выражение для  $a_{ij}$  можно принять таким

$$a_{ij} = \frac{\rho_i \rho_j (\alpha_i + \alpha_j)}{(\alpha_i \rho_i + \alpha_j \rho_j) \tau_{ij}^U}. \quad (33)$$

Аналогичные рассуждения приводят к следующим выражениям для  $b_{ij}$  и  $c_{ij}$ :

$$b_{ij} = \frac{1}{\tau_{ij}^P}, \quad c_{ij} = \frac{\rho_i \rho_j C_{Vi} C_{Vj} (\eta_i + \eta_j) (\alpha_i + \alpha_j)}{(\eta_i C_{Vi} + \eta_j C_{Vj}) (\alpha_i \rho_i + \alpha_j \rho_j) \tau_{ij}^T}, \quad (34)$$

где  $C_V$  – теплоемкость при постоянном  $V$ . Для определения времен релаксации  $\tau_{ij}^P, \tau_{ij}^T$  чаще всего строят изолированную ячейку из компонентов  $i$  и  $j$ , в которой происходит установление равновесия.

#### 4. Кластерное взаимодействие

Одновременно с парным взаимодействием в законы сохранения вводятся члены, выражающие кластерное взаимодействие  $i$ -го компонента со смесью. Эти члены отличны от нуля только в случае отсутствия равновесия по скоростям. Поскольку скорости компонентов направлены произвольно, то сила их взаимодействия должна зависеть от ориентации выбранной площадки, т.е. быть тензором. Условия кластерного взаимодействия имеют вид

$$F_S = \sum_{i=1}^N \alpha_i F_{iS} = - \sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{F}_{Si}, \quad (35)$$

$$\bar{Q}_S = \sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{Q}_{iS} = - \sum_{i=1}^N \alpha_i Q_{Si}. \quad (36)$$

Для ранее введенных характеристик смеси  $P, \rho, E, \bar{U}, \epsilon$  законы сохранения сплошной среды имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{U}) = 0, \quad (37)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{U}) + \nabla P + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{F}_{kS} + \rho \bar{U} U_k) = 0, \quad (38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \nabla(\bar{U}(P + \rho \epsilon)) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{U} \bar{F}_{kS}) + \nabla Q_S = 0. \quad (39)$$

В рамках принятых ранее гипотез уравнение состояния смеси не существует. Тензор  $F_S$  и поток энергии  $\bar{Q}_S$  действуют на смесь со стороны всех компонентов. Для выбора их функциональной зависимости от остальных функций, входящих в уравнения (37) – (39), сформулируем два требования:

1. Уравнения (37) – (39) должны получаться путем суммирования по  $i$  соответствующих законов сохранения  $i$ -го компонента (23) – (25).

2. Уравнения (23) – (25) и (37) – (39) должны быть инвариантны к преобразованию Галилея.

После выполнения приведенных выше требований получаются следующие выражения для  $\bar{F}_{kSi}$  и  $\bar{Q}_{Si}$ :

$$\bar{F}_{kSi} = -0,5\rho_i(\bar{U}_i - \bar{U})(U_{ki} - U_k), \quad (40)$$

$$\bar{Q}_{Si} = 0,5\rho_i(\bar{U} - \bar{U}_i)(P_i + \rho E_i). \quad (41)$$

## 5. Уравнение для объемной концентрации

Из законов сохранения  $i$ -го компонента (23) – (25) с помощью тождественных преобразований получим уравнение для производства энтропии  $i$ -го компонента

$$\alpha_i \rho_i T_i \frac{d_i S_i}{dt} - P_i \frac{d_i \alpha_i}{dt} + \alpha_i \left( \bar{R}_{Si} \bar{U} - A_{Si} - \Phi_{Si} + \sum_{k=1}^3 \left( \bar{F}_{kSi} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \right) \right) + \nabla \alpha_i \bar{Q}_{Si} = 0. \quad (42)$$

Это уравнение содержит субстанциональную производную  $i$ -го компонента, которая для произвольной функции  $f$  имеет вид

$$\frac{d_i f}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \bar{U}_i \nabla f. \quad (43)$$

Совершенно аналогично уравнение производства энтропии смеси получим из (37) – (39) в виде

$$\rho T \frac{dS}{dt} + \frac{\partial \rho H}{\partial t} + \nabla(\rho H \bar{U}) + \sum_{k=1}^3 \left( \bar{F}_{kS} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x_k} \right) + \nabla \bar{Q}_S = 0, \quad (44)$$

где

$$\rho H = 0,5 \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i (\bar{U}_i - \bar{U})^2. \quad (45)$$

Субстанциональная производная вдоль траектории смеси связана с субстанциональной производной  $i$ -го компонента уравнением

$$\frac{df}{dt} = \frac{d_i f}{dt} + (\bar{U} - \bar{U}_i) \nabla f. \quad (46)$$

Потребуем, чтобы производство энтропии смеси было равно суммарному производству энтропии компонентов

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i T_i \frac{dS_i}{dt}. \quad (47)$$

Подставив сюда выражения для производства энтропии (42) и (44) с учетом связи субстанциональных производных (46), получим уравнение для объемной концентрации

$$P_i \frac{d\alpha_i}{dt} - \left( \frac{P_i}{\rho_i} + E_i \right) \nabla(\alpha_i \rho_i (\bar{U} - \bar{U}_i)) + \alpha_i (\Phi_{Si} + A_{Si} - \bar{R}_{Si} \bar{U}) = 0. \quad (48)$$

Это уравнение вместе с уравнением состояния  $i$ -го компонента замыкает систему законов сохранения  $i$ -го компонента. Каждый компонент имеет свое уравнение состояния, которое может быть сколь угодно сложным [8].

## 6. Система уравнений $i$ -го компонента

Преобразуем уравнения (23) – (25) и запишем систему уравнений  $i$ -го компонента для парциальной плотности, скорости, удельной внутренней энергии и объемной концентрации. Таким образом, полная система уравнений  $i$ -го компонента состоит из уравнения неразрывности (23), уравнения движения

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_i \nabla \bar{U}_i + \frac{1}{\alpha_i \rho_i} \nabla \alpha_i P_i + \frac{1}{\alpha_i \rho_i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\alpha_i \bar{F}_{kSi}) - \frac{\bar{R}_{Si}}{\rho_i} = 0, \quad (49)$$

уравнения для внутренней энергии

$$\frac{\partial E_i}{\partial t} + \bar{U}_i \nabla E_i + \frac{P_i}{\rho_i} \nabla \bar{U}_i + \frac{1}{\rho_i} \sum_{k=1}^3 \bar{F}_{kSi} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\alpha_i \rho_i} \nabla \alpha_i \bar{Q}_{Si} - \frac{\Phi_{Si} + A_{Si} - \bar{U}_i \bar{R}_{Si}}{\rho_i} = 0 \quad (50)$$

и уравнения для объемной концентрации

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \bar{U}_i \nabla \alpha_i - \left( \frac{1}{\rho_i} + \frac{E_i}{P_i} \right) \nabla \alpha_i \rho_i (\bar{U} - \bar{U}_i) + \frac{\alpha_i}{P_i} (\Phi_{Si} + A_{Si} - \bar{R}_{Si} \bar{U}) = 0. \quad (51)$$

Обменные члены, характеризующие парные взаимодействия, используются в виде

$$\bar{R}_{Si} = \sum_{j=1}^N \alpha_j a_{ij} (\bar{U}_j - \bar{U}_i), \quad \bar{R}_{ji} = a_{ij} (\bar{U}_j - \bar{U}_i),$$

$$\Phi_{Si} = \sum_{j=1}^N \alpha_j (b_{ij} (P_j - P_i) - c_{ij} (T_j - T_i)), \quad A_{Si} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \alpha_j \bar{R}_{ji} (\bar{U}_j + \bar{U}_i).$$

Обменные члены, характеризующие кластерные взаимодействия, имеют вид (40), (41). Скорость и плотность смеси определяются уравнениями (8), (13).

Таким образом, полная система уравнений смеси содержит одинаковое количество уравнений и функций и является замкнутой без дополнительных гипотез, конкретизирующих смесь.

## Список литературы

1. Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // ПММ. 1956. Т. 20, вып. 2. С. 184–195.
2. Крайко А.Н., Нигматулин Р.И., Старков В.К., Стернин Л.Е. Механика многофазных сред // Итоги науки и техники. Гидромеханика. 1973. Т. 6. С. 93–174.
3. Кутателадзе С.С., Стырикович М.А. Гидравлика газожидкостных систем. М.: Госэнергоиздат, 1958.
4. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
5. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1, 2.
6. Куропатенко В.Ф. Неустановившиеся течения многокомпонентных сред // Мат. моделирование. 1989. Т. 1, № 2. С. 118–136.



7. Яненко Н.Н., Солоухин Р.И., Папырин А.Н., Фомин В.М. *Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц*. Новосибирск: Наука, 1980.
8. Куропатенко В.Ф. *Уравнения состояния в математических моделях механики и физики // Экстремальные состояния вещества: Сб. науч. тр. АН СССР*. М.: ИВТАН, 1991. С. 3–38.
9. Де Гроот С.Р. *Термодинамика необратимых процессов*. М.: Тех.-теор. лит., 1956.
10. Гиршфельдер Д., Кертис Ч., Берд Р. *Молекулярная теория газов и жидкостей*. М.: Иностран. лит., 1961.
11. Цянь Сюэ-Сень. *Физическая механика*. М.: Мир, 1965.
12. Френкель Я.И. *Статистическая физика*. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948.
13. Даниэльс Ф., Олберти Р. *Физическая химия*. М.: Мир, 1978.