Б-7
К-93

РОССИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЯДЕРНЫЙ ЦЕНТР -
ВСЕРОССИЙСКИЙ НИИ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Куропатенко В.Ф., Брезгина Л.П.

# СРАВНЕНИЕ МНОГОСКОРОСТНЫХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ МОДУЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

ПРЕПРИНТ № 72

СНЕЖИНСК 1998

B-7 ± 532
K-33


Аннотация УДК 533.6

В методике РДСМ /I/ на основе уравнений механики многокомпонентных сред реализована возможность описания перемешивания веществ на неустойчивых контактных границах с описанием диссипации кинетической энергии за счет сил взаимодействия компонент /2/. С целью определения возможностей модели проведены численные эксперименты по гравитационному перемешиванию жидкостей, построена функция силового взаимодействия компонент, которая позволила описать всю совокупность экспериментальных данных /3/.

Одним из естественных путей расширения возможностей модели /2/ может служить введение турбулентных членов и подключение уравнений для описания турбулентных кинетических энергий компонент. Такая турбулентная многокомпонентная модель предложена В.Ф.Куропатенко /4/.

В данной работе подробно рассматриваются возможности модели /4/ по описанию турбулентного перемешивания веществ. Проводится сравнение с известной моделью /5/, указывается на близость рассматриваемых моделей. Выделяются условия, при которых модель /4/ включает все возможности модели /5/, отмечено отличие в описании масштабов турбулентной области.

# I. АНАЛИЗ ПОДХОДОВ К ОПИСАНИЮ ТУРБУЛЕНТНОЙ ЭНЕРГИИ И ТУРБУЛЕНТНОГО МАСШТАБА В МОДЕЛЯХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

Сложный процесс перемешивания веществ сопровождается эволюцией структуры зоны смеси. Начальные стадии гравитационного перемешивания характеризуются образованием и развитием беспорядочных струй тяжелой жидкости, проникающих в легкую. Стадия развитой турбулентности может характеризоваться вихрями различной интенсивности и разнородными по составу. При этом средние значения турбулентной энергии для каждой компоненты могут быть существенно различны по отношению друг к другу.

Для адекватного математического моделирования поведения зоны перемешивания в реальных газодинамических течениях следует рассматривать индивидуальные уравнения, описывающие турбулентную кинетическую энергию для каждой компоненты. Такой подход применяется в модели /4/. При этом возможно описание и традиционного подхода (модель /5/), когда рассматривается одно уравнение для турбулентной энергии.

Докажем последнее утверждение в частном случае двух компонент.

Уравнение для описания турбулентной энергии в модели Д.Янгса /5/ имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon_t) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \tilde{u}\, \varepsilon_t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \mathcal{D}_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial x}\right) + S - e, \qquad (1.1)$$

где

$$\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 \qquad (2.1)$$ – плотность смеси,

$$\tilde{u} = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 \qquad (3.1)$$ – среднемассовая скорость,

(4.I) $\mathcal{D}_{\varepsilon} = 2\,\varepsilon_t^{1/2}\,\ell_t$ – коэффициент турбулентной диффузии,

$\ell_t$ – масштаб турбулентной длины,

$R$ – напряжение Рейнольдса,

(5.I) $S = (u_1 - u_2)\,(M_{12} + D_{12}) - R\,\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$ ,

(6.I) $M_{12} = -0{,}5\,\rho\,\alpha_1\alpha_2\,\left(\dfrac{d_1 u_1}{dt} - \dfrac{d_2 u_2}{dt}\right)$ ,

(7.I) $D_{12} = -c_1\,\dfrac{\rho\alpha_1\alpha_2}{L}\,|u_1 - u_2 - W_1 + W_2|\cdot(u_1 - u_2 - W_1 + W_2)$, $c_1 = const$,

(8.I) $W_i = -\dfrac{\mathcal{D}}{\alpha_i\rho_i}\,\dfrac{\partial}{\partial x}(\alpha_i\rho_i)$ , $i = 1, 2$ ,

(9.I) $\mathcal{D} = 2\,\varepsilon_t^{1/2}\,\ell_t$ ,

(IO.I) $R = \dfrac{2}{3}\rho\,\varepsilon_t - \dfrac{4}{3}\mu_t\,\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$ ,

(II.I) $\mu_t = \rho\,\varepsilon_t^{1/2}\,\ell_t$ ,

(I2.I) $e = 0{,}09\,\dfrac{\rho\,\varepsilon_t^{3/2}}{\ell_t}$ .

Для корректного сравнения моделей /4/ и /5/ следует предположить, что имеет место

а) отсутствие вязкости ( $\nu_1 = \nu_2 = 0$ ),

б) общий масштаб длины ( $L_1 = L_2 = L$ ),

в) большие числа Рейнольдса ( $Re > Re_{кр.}$ ).

С учетом этих предположений уравнения для расчета турбулентных энергий в модели /4/ имеют вид:

(I3.I) $\alpha_i\rho_i\,\dfrac{\partial \varepsilon_{t_i}}{\partial t} + \alpha_i\rho_i\,u_i\,\dfrac{\partial \varepsilon_{t_i}}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\alpha_i\rho_i\,\mathcal{D}_{t_i}\dfrac{\partial \varepsilon_{t_i}}{\partial x}\right) + A_i - B_i + \varphi_i^{\varepsilon}$ ,

где $\mathcal{D}_{t_i}$ – коэффициент турбулентной диффузии $i$ –ой компоненты,

(I4.I) $\mathcal{D}_{t_i} = K_5\,\varepsilon_{t_i}^{1/2}\,L$ , $K_5 = const$ ,

$A_i$ – член, описывающий генерацию турбулентной энергии,

(I5.I) $$A_i = \alpha_i \rho_i \left\{ \frac{(\Delta u_i)^3}{L} - R_{e_{кр.}} \nu_{t_i} \frac{(\Delta u_i)^2}{L^2} \right\}$$

$B_i$ – диссипативнй член,

(I6.I) $$B_i = K_1 \alpha_i \rho_i \varepsilon_{t_i}^{3/2} / L \quad , \quad K_1 = const ,$$

(I7.I) $$\Delta u_i = \varepsilon_{t_i}^{1/2} + | u_i - u_j | \quad , \quad i \neq j ,$$

(I8.I) $$\varphi_i^{\varepsilon} = \psi_{ij} \left( \varepsilon_{t_i} - \varepsilon_{t_j} \right) / \tau_{ij}^{\varepsilon}$$

$i = 1, 2$ , $i \neq j$ ,

$\tau_{ij}^{\varepsilon}$ – время релаксации турбулентных энергий компонент ;

$\psi_{ij}$ – функция, зависящая от свойств среды.

Используя соотношения:

(I9.I) $$\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$$

(20.I) $$\alpha_i \rho_i = \eta_i \rho$$

запишем уравнения (I3.I) в следующей форме:

(2I.I) $$\rho \eta_i \frac{\partial \varepsilon_{t_i}}{\partial t} + \rho \eta_i u_i \frac{\partial \varepsilon_{t_i}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta_i \rho \mathcal{D}_i \frac{\partial \varepsilon_{t_i}}{\partial x} \right) + A_i - B_i + \varphi_i^{\varepsilon} .$$

Уравнения неразрывности примут вид:

(22.I) $$\frac{\partial \eta_i \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\eta_i \rho u_i)}{\partial x} = 0$$

Перейдем в уравнениях (2I.I)-(22.I) к среднемассовым величинам:

(23.I) $$\tilde{u} = \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2$$

(24.I) $$\varepsilon_t = \eta_1 \varepsilon_{t_1} + \eta_2 \varepsilon_{t_2}$$

(25.I) $$\mathcal{D}_{\varepsilon} = \eta_1 \mathcal{D}_{t_1} + \eta_2 \mathcal{D}_{t_2} .$$

После несложных преобразований получим:

(26.I) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\varepsilon_t) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\tilde{u}\,\varepsilon_t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\,\mathcal{D}_t\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial x}\right) + A - B +$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\rho(\varepsilon_{t_1}-\varepsilon_{t_2})\cdot f_{12} + \rho\eta_1\eta_2(\mathcal{D}_{t_1}-\mathcal{D}_{t_2})\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_{t_1}-\varepsilon_{t_2})\right\}$$

где

(27.I) $$\mathcal{D}_t = K_5\, L\left(\eta_1\varepsilon_{t_1}^{1/2} + \eta_2\varepsilon_{t_2}^{1/2}\right),$$

(28.I) $$B = \frac{K_1\rho}{L}\left(\eta_1\varepsilon_{t_1}^{3/2} + \eta_2\varepsilon_{t_2}^{3/2}\right),$$

(29.I) $$A = \frac{\rho}{L}\left(\eta_1(\Delta u_1)^3 + \eta_2(\Delta u_2)^3\right) - R_{e_{кр}}\frac{\rho}{L^2}\left(\eta_1(\Delta u_1)^2 + \eta_2(\Delta u_2)^2\right)$$

$$f_{12} = \mathcal{D}_\varepsilon\frac{\partial\eta_2}{\partial x} - \eta_1\eta_2(u_1 - u_2).$$

При моделировании течений, в которых время релаксации турбулентных энергий оказывается много меньше ремени релаксации скорости, температуры и других характерных времен рассматриваемых процессов, можно сделать предположение о локальном равенстве турбулентных энергий компонент, т.е. положить $\varepsilon_{t_1} = \varepsilon_{t_2}$.

Тогда уравнение (26.I) можно записать в виде, соответствующем уравнению (I.I) в модели Д.Янгса:

(30.I) $$\frac{\partial(\rho\,\varepsilon_t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\tilde{u}\,\varepsilon_t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\,\mathcal{D}_t\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial x}\right) + A - B$$

Определим константы модели следующим образом:

(31.I) $$K_1 = 0{,}09\, L/\ell_t,$$

(32.I) $$K_5 = 2\,\ell_t/L,$$

тогда для коэффициента турбулентной диффузии и диссипативного члена получим выражения, соответствующие модели /5/:

(33.I) $$\mathcal{D} = 2\,\ell_t\,\varepsilon_t^{1/2},$$

(34.I) $$B = 0{,}09\,\rho\,\ell_t\,\varepsilon_t^{3/2} = e$$

Отличие в источниковых членах не является принципиальным, т.к. определяющим является слагаемое, присутствующее в обеих моделях и имеющее вид: $\rho\,|u_1 - u_2|^3$.

При необходимости в модели /4/ может быть введен и аддитивный член, зависящий от разницы ускорений компонент или градиента массовой концентрации.

Преимущество подхода, реализованного в /4/, состоит в расширении спектра течений, которые могут быть рассмотрены:

а) ламинарное взаимопроникновение

б) развитая турбулентность,

в) движение турбулизованной компоненты (или смеси) в ламинарном потоке,

г) переходные режимы: из ламинаного течения в турбулентное и наоборот.

Функция, описывающая источник турбулентной энергии в /4/, зависит от числа Рейнольдса, что позволяет описать задержку образования турбулентности на стадии малых возмущений.

Рассматриваемые модели существенно отличаются в описании масштабов турбулентного перемешивания.

В модели Д.Янгса вводится

$L$ – масштаб длины;

$\ell_t$ – масштаб длины турбулентности;

$\ell_t = c_2 L$ , $c_2$ – константа модели.

Уравнение для масштаба длины имеет вид:

$$\frac{\partial L}{\partial t} + u_L \frac{\partial L}{\partial x} = S_L + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{D}_L \frac{\partial L}{\partial x}\right), \tag{35.I}$$

$$u_L = \bar{u} + (\alpha_2 - \alpha_1)(u_1 - u_2),$$

где $u_L$ – скорость переноса

$\bar{u}$ – скорость, усредненная по объему

$S_L$ – член источника,

$\mathcal{D}_L$ – коэффициент диффузии масштаба длины,

$$\mathcal{D}_L = 2\,\varepsilon_t^{1/2}\,l_t ,$$

$$S_L = \left[2\rho/(\rho_1+\rho_2)\right]^{1/2}(u_1-u_2) .$$

В модели /4/ масштабы областей турбулентного перемешивания $L_i$ для компонент задаются следующими уравнениями:

(36.I) $$\frac{d^2 L_i}{dt^2} = K\,\frac{d\Delta u_i}{dt} + \frac{L_{0i}\,\beta}{\lambda_{0i}\,\rho}\left(\left|\frac{\partial P}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial x}\ln\rho\right| - \frac{\partial P}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial x}\ln\rho\right),$$

где $L_{0i}$, $\lambda_{0i}$ – средние продольный и поперечный размеры начальных возмущений $i$-ой компоненты, $K$ , $\beta$ – импирические константы.

## II. СРАВНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА В РАССМАТРИВАЕМЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ МОДЕЛЯХ.

Сделаем предположения, аналогичные приведенным в предыдущем параграфе:

(I.2)
а) $\nu_i = 0$ (отсутствие вязкости); $(i=1,2)$,
б) $\varepsilon_{t_1} = \varepsilon_{t_2} = \varepsilon_t$ ,
в) $\nu_{t_1} = \nu_{t_2} = \nu_t$ ,
г) $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ,
д) $Re > Re_{кр}$ .

Выпишем уравнение для переноса количества движения в модели Янгса

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_i \alpha_i u_i) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_i \rho_i u_i^2) = -\alpha_i \frac{\partial P}{\partial x} + D_{12} + M_{12} - m_i \frac{\partial R}{\partial x} ,$$

где $D_{12}$ – член, описывающий интенсивность силового взаимодействия компонент за счет разницы скоростей компонент;

$M_{12}$ – описывает интенсивность силового взаимодействия компонент за счет разницы ускорений;

$R$ – напряжение Рейнольдса;

запишем в равносильной форме:

(2.2)
$$\alpha_i \rho_i \frac{d_i u_i}{dt} = -\alpha_i \frac{\partial P}{\partial x} - m_i \frac{\partial R}{\partial x} + D_{12} + M_{12} ,$$

где
$$D_{12} = -\frac{c_1 \alpha_1 \alpha_2 \rho}{L} \left| u_1 - u_2 - w_1 + w_2 \right| \cdot (u_1 - u_2 - w_1 + w_2) ,$$

(3.2)
$$M_{12} = -0{,}5 \rho \alpha_1 \alpha_2 \left( \frac{d_1 u_1}{dt} - \frac{d_2 u_2}{dt} \right) ,$$

$$R = \frac{2}{3} \rho \varepsilon_t - \frac{4}{3} \rho \varepsilon_t^{1/2} \ell_t \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} ,$$

$$W_i = -2\sqrt{\varepsilon_t}\, \ell_t \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_i \rho_i) / \alpha_i \rho_i .$$

Покажем, что в предположении (I.2) уравнения для переноса количества движения модели /4/ включают эффекты, описываемые уравнением (2.2).

Уравнения модели /4/ имеют вид:

(4.2) $$\alpha_i \rho_i \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_i p_i + \alpha_i P_{t_i} - \alpha_i S_{t_i}) + \bar{R}_i$$

$$i = 1,2 ;$$

где $\quad P_{t_i} = \frac{2}{3}\rho_i \varepsilon_t$ – турбулентное давление ;

(5.2) $$S_{t_i} = \frac{4}{3}\rho_i \nu_t \frac{\partial u_i}{\partial x}$$ – турбулентная вязкость ;

$\bar{R}_i$ – функция, описывающая силовое взаимодействие компонент. Вид ее должен отражать специфику конкретного физического процесса. Общим же для всех представлений функции $\bar{R}$ является наличие в качестве аддитивных слагаемых объемных сил , имеющих следующий вид:

$$R_i = \varphi_{ij}(u_j - u_i) / \tau_{ij}^{u}$$

где $\varphi_{ij}$ – некоторая функция;

$\tau_{ij}^{u}$ – функция, характеризующая времена релаксации скоростей компонент.

В работе /I/ рассматривался случай, когда в качестве функции, описывающей интенсивность силового взаимодействия компонент, было принято соотношение:

$$R_i = F \cdot \left(\frac{d_j u_j}{dt} - \frac{d_i u_i}{dt}\right)$$

где $F = const.$

Таким образом описание интенсивности силового взаимодействия компонент имеет свою специфику в конкретных прикладных задачах и может включать аддитивные слагаемые, имеющие характер силового взаимодействия за счет "эффекта присоединенных масс", как это делает Д.Янгс в модели /5/.

Сделанные замечания без ограничения общности позволяют положить

$$\bar{R}_i = \mathcal{D}_{ij} + M_{ij} \quad . \tag{6.2}$$

Тогда уравнения (4.2) примут вид :

$$\alpha_i \rho_i \frac{d_i u_i}{dt} = -\alpha_i \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\alpha_i \rho_i}{\rho} \frac{\partial \tilde{R}_i}{\partial x} + \mathcal{D}_{ij} + M_{ij} - P \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} + \tilde{R}_i \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha_i \rho_i}{\rho}\right) ; \tag{7.2}$$

где

$$\tilde{R}_i = \frac{2}{3} \rho \varepsilon_t - \frac{4}{3} \nu_t \rho \frac{\partial u_i}{\partial x}$$

$\tilde{R}_i$ можно рассматривать как напряжение Рейнольдса для $i$ -ой компоненты. Сравнение уравнений (2.2) и (7.2) позволяют сделать вывод: в уравнении для переноса количества движения модели /4/ учитываются все эффекты, представленные в модели /5/. Кроме того, уравнение (7.2) модели /4/ описывает перенос импульса за счет градиентов объемной и массовой концентраций.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование возможностей моделей по описанию турбулентного перемешивания в рамках многоскоростного подхода, проведенное в данном отчете, подтверждает широкие возможности модели /4/.

Модель /5/ при определенных предположениях является частным случаем модели /4/, следует отметить однако, что уравнения для описания масштаба турбулентной области имеют существенные отличия.

Предполагаются дальнейшие исследования как свойств данного уравнения, так и модели в целом и их экспериментальная проверка.

### Обозначения

Параметры $i$ -ой компоненты:

$\rho_i$ - плотность

$\alpha_i$ - объемная концентрация

$u_i$ - скорость

$P_i$ - давление

$\mathcal{E}_{t_i}$ - турбулентная энергия

$S_{t_i}$ - турбулентная вязкость

$\eta_i$ - массовая концентрация

$\mathcal{D}_{t_i}$ - коэффициент турбулентной диффузии

$P_{t_i}$ - турбулентное давление

$Re$ - число Рейнольдса.

$\nu_{t_i}$ - коэффициент турбулентной вязкости

$\nu_i$ - коэффициент кинематической вязкости

$E_i$ - внутренняя энергия

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

I. Куропатенко В.Ф., Буряков О.В. и др. Методика расчета нестационарных течений в многослойных неравновесных смесях веществ. Математическое моделирование, т. 4, № 9, I992.

2. Куропатенко В.Ф., Буряков О.В., Брезгина Л.П., Макеева И.В. Моделирование перемешивания веществ в методике РДСМ. Сб. Динамика пространственных и неравновесных течений жидкости и газа. Челябинск-Миасс, I992.

3. Кучеренко Ю.А. и др. Экспериментальное исследование гравитационного турбулентного перемешивания в автомодельном режиме. ВАНТ, Вып. I, I988.

4. Куропатенко В.Ф. Неустановившиеся течения многокомпонентных сред. Математическое моделирование, т. I, № 2, I989.

5. Youngs D. L. Numerical simulation of turbulent mixing by Rayleigh - Taylor Instability, Physica D 12, 1989.

Подписано в печать 28.04.95 дд № II8I/95
Заказ № 74. Тираж 50 экз. Уч.изд.л. 0,8
Отпечатано в отделе научно-технической информации ВНИИТФ
456770, г.Снежинск, Челябинской обл.,
а/я 245, ВНИИТФ, ОНТИ