

**РАСПАД ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА НА ГРАНИЦЕ ИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ГАЗА  
И ГЕТЕРОГЕННОЙ СМЕСИ ДВУХ ДРУГИХ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ГАЗОВ**

О.В.Буряков, В.Ф.Куропатенко, В.К.Мустафин

Построено точное решение задачи о распаде произвольного разрыва на границе раздела двух сред, когда по одну сторону границы находится изотермический газ, а по другую — гетерогенная смесь двух изотермических газов. В качестве условия совместного деформирования компонентов используется предположение о локальном равенстве их давлений в смеси.

В в е д е н и е

В настоящее время остро стоит проблема построения точных решений, которые отражали бы те или иные свойства математических моделей и реальных гетерогенных сред в рамках некоторых упрощающих предположений.

В классической газовой динамике при распаде произвольного разрыва на контактной границе двух однокомпонентных сред решение строится в виде какой-либо комбинации из двух волн, ударных или разрежения, распространяющихся в противоположные стороны от контактной границы и разделенных областями постоянного течения (см., например, [1]).

Если по одну либо по обе стороны от контактной границы находится гетерогенная смесь, решение будет иметь другой вид. В этом случае нужно учитывать, что ударные волны и волны разрежения в гетерогенных средах имеют многоволновую структуру (особенности решения в случае ударной волны и волны разрежения в гетерогенной смеси двух изотермических газов в рамках предположения о локальном равенстве давлений компонентов исследованы в [2]).

Постановка задачи

Рассматривается следующая задача. В начальный момент времени в правом полупространстве  $x > 0$  находится гетерогенная смесь двух изотермических газов I и 2 с состояниями компонентов  $\rho_{ci} = \rho_{ci0}$ ;  $u_i = u_{i0}$  ( $i = 1, 2$ ), где  $\rho_{ci} = \alpha_i \rho_i$  — парциальная плотность;  $\alpha_i$  — объемная концентрация;  $\rho_i$  — плотность;  $u_i$  — скорость  $i$ -го компонента.

В левом полупространстве  $x < 0$  находится изотермический газ 3 с начальными значениями параметров  $\rho_3 = \rho_{30}$ ,  $u_3 = u_{30}$ .

Начальные состояния компонентов смеси, находящейся справа, согласованы таким образом, что, во-первых, начальные давления компонентов равны:  $p_{10} = p_{20}$ ; во-вторых, начальные скорости газов совпадают:  $u_{10} = u_{20}$ . В остальном параметры всех трех газов различны, причем по обе стороны от

плоскости  $x = 0$  газодинамические величины никак не связаны между собой и совершенно произвольны.

Плоскость  $x = 0$  можно мысленно представить в виде тонкой перегородки, разделяющей два различных вещества, находящихся в произвольных состояниях. Если перегородку мгновенно убрать, то газы придут в движение. Задачу определения параметров и структуры течения в некоторый момент времени  $t^* > 0$  после такого мгновенного изъятия перегородки по аналогии с классической газовой динамикой будем называть задачей о распаде произвольного разрыва.

Ниже приведены системы уравнений, которые описывают отдельно течение газа 3 и течение гетерогенной смеси газов I и 2. Плоское непрерывное течение чистого изотермического газа 3 описывается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial \rho_3}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_3 u_3)}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho_3 u_3)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_3 u_3^2)}{\partial x} + \frac{\partial p_3}{\partial x} = 0; \quad (2)$$

$$T_3 = \text{const}; \quad (3)$$

$$p_3 = c_3^2 \rho_3, \quad (4)$$

где  $T$  — температура;  $c_3 = \text{const}$  — изотермическая скорость звука.

Плоское непрерывное течение гетерогенной смеси изотермических газов I и 2 описывается системой уравнений

$$\frac{\partial \rho_{ci}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_{ci} u_i)}{\partial x} = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial (\rho_{ci} u_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_{ci} u_i^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\alpha_i p_i)}{\partial x} = R_i; \quad (6)$$

$$T_i = \text{const}; \quad (7)$$

$$p_i = c_i^2 \rho_i; \quad c_i = \text{const}; \quad (i = 1, 2) \quad (8)$$

$$\rho = \rho_{c1} + \rho_{c2}; \quad (9)$$

$$p_i = p_2; \quad (10)$$

где  $\rho$  — плотность смеси;  $R_i$  — интенсивность силового воздействия на  $i$ -й компонент со стороны другого компонента. В дальнейшем считаем  $R_1 = 0$  и  $c_1 > c_2$ , т.е. первый компонент более легкий.

В приведенных системах уравнений соотношения (4) и (8) — уравнения состояния газов. Используя (4) и (8), можно исключить давление из уравнений движения (2) и (6). Получим соответственно

$$\frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2^2)}{\partial x} + c_2^2 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = 0; \quad (II)$$

$$\frac{\partial(\rho_{ci} u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{ci} u_i^2)}{\partial x} + c_i^2 \frac{\partial \rho_{ci}}{\partial x} = 0. \quad (I2)$$

Из системы уравнений (5), (I2) следует, что при рассмотрении непрерывного течения отдельно в области смеси эта система распадается на две независимые подсистемы для  $u_1, \rho_{c1}$  и  $u_2, \rho_{c2}$  соответственно [2]. Каждая из этих подсистем имеет пару действительных характеристик  $(\frac{dx}{dt})_{i,2} = u_i \pm c_i$  ( $i = 1, 2$ ), вдоль которых выполняются соотношения  $d(u_i \pm c_i \ln \rho_{ci}) = 0$  ( $i = 1, 2$ ).

В то же время в области течения третьего чистого газа существует лишь две действительные характеристики  $(\frac{dx}{dt})_{i,2} = u_3 \pm c_3$ , вдоль которых  $d(u_3 \pm c_3 \ln \rho_3) = 0$ .

Таким образом, с математической точки зрения сложность решаемой задачи состоит в описании взаимодействия и взаимовлияния двух областей, в одной из которых имеются две, а в другой — четыре действительные характеристики.

#### Особенности ударно-волновых течений гетерогенных смесей изотермических газов

Течение гетерогенной смеси двух изотермических газов характеризуется рядом особенностей [2].

1. Как в ударной волне, так и в волне разрежения решение для смеси изотермических газов при отсутствии силового взаимодействия компонентов имеет двухволновую конфигурацию (два сильных разрыва в ударной волне и совокупность двух пар слабых разрывов в волне разрежения).

2. Ни в волне разрежения, ни в ударной волне концентрация компонента не может обратиться в нуль.

3. В задаче о поршне для гетерогенной смеси двух изотермических газов при любой постоянной скорости поршня как положительной, так и отрицательной, сепарации компонентов в соответствующем тале волны не происходит, причем в ударной волне и в волне разрежения имеется область постоянного течения у поршня.

Из сказанного следует, что при построении решения рассматриваемой задачи о распаде произвольного разрыва необходимо учитывать, что левая граница смеси всегда будет находиться в контакте с правой границей чистого изотермического газа 3, причем справа от этой границы (в смеси) имеется область постоянного течения, в которой скорости компонентов одинаковы. Слева от этой границы также находится область постоянного течения чистого изотермического газа, а сама граница покоится относительно движущихся слева и справа от нее с постоянной скоростью масс газа.

В силу этих обстоятельств на границе должны выполняться условия непрерывности давлений и скоростей.

Таким образом, для построения решения задачи о распаде произвольного разрыва необходимо определить конфигурацию решения, после чего можно его строить, используя в качестве элементов двухволновые конфигурации [2], решения в ударной волне и волне разрежения в чистом изотермическом газе и области постоянного течения.

#### Различные типы распада разрыва

Для построения решения задачи о распаде произвольного разрыва необходимо последовательно решить две следующие задачи.

1. Определить конфигурацию решения (тип распада разрыва).

2. Построить решение для данной конфигурации.

Определение типа распада разрыва осуществляется из решения соответствующей задачи при однокоростном подходе к описанию смеси: гетерогенная смесь справа считается однородным изотермическим газом, начальная плотность которого  $\rho_0$  и скорость звука  $c_0$  определяются осреднением по параметрам компонентов

$$\rho_0 = \rho_{c10} + \rho_{c20};$$

$$c_0^2 = \eta_{10} c_1^2 + \eta_{20} c_2^2,$$

где  $\eta_i = \frac{\rho_i}{\rho}$  — массовая концентрация  $i$ -го компонента. После того, как точка пересечения адиабат  $\rho_1(u)$  и  $\rho_2(u)$  правого и левого газов найдена и, следовательно, конфигурация решения определена, можно приступить к построению решения исходной задачи о распаде разрыва.

В зависимости от значений параметров газов в рассматриваемой задаче возможны четыре типа распада произвольного разрыва (в записи названий типов распада разрыва для краткости будем использовать сокращения: УВ — ударная волна, ВР — волна разрежения; запись УВ-ВР, например, означает тип распада разрыва, когда влево идет ударная волна, вправо — волна разрежения).

Тип I. Конфигурация вида УВ-УВ. В этом случае влево идет ударная волна, а вправо, в гетерогенную смесь, с разными скоростями распространяются два сильных разрыва. Если перейти к безразмерным обозначениям

$$\bar{\rho}_{30} = \frac{\rho_{30}}{\rho_0}, \quad \bar{\rho}_{c10} = \frac{\rho_{c10}}{\rho_0} \quad (i = 1, 2);$$

$$\bar{D}_i = \frac{D_i}{c_1}, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{c_1} \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$\bar{x} = \frac{x}{c_1 t}; \quad \bar{z} = \frac{z}{c_1}; \quad \bar{P} = \frac{P}{\rho_0 c_1^2}$$

(черту у безразмерных переменных далее опускаем), то условие для определения безразмерной скорости  $u$  контактной границы примет вид

$$\rho_{30} + \rho_{30} (u_{30} - D_3) (u_{30} - u) = \rho_0 + \rho_{c10} (D_1^2 - 1) + \rho_{c20} (D_2^2 - 1),$$

где

$$D_1 = \frac{1}{2} (u + u_{10} + \sqrt{(u - u_{10})^2 + 4});$$

$$D_2 = \frac{1}{2} (u + u_{20} + \sqrt{(u - u_{20})^2 + 4z^2});$$

$$D_3 = \frac{1}{2} (u + u_{30} - \sqrt{(u - u_{30})^2 + 4z^2}).$$

Рассмотренный режим течения реализуется, например, для изотермических газов со следующими значениями параметров (здесь и далее все численные значения параметров задаются в размерном виде):

$$\begin{aligned} \rho_{10} = 1; \quad c_1 = 3; \quad u_{10} = 0; \quad \alpha_{10} = 0,9; \\ \rho_{20} = 9; \quad c_2 = 1; \quad u_{20} = 0; \quad \alpha_{20} = 0,1; \quad (I3) \\ \rho_{30} = 0,36; \quad c_3 = 5; \quad u_{30} = 2. \end{aligned}$$

Автомодельные профили функций  $P(\xi)$ ,  $\eta(\xi)$ ,  $u_i(\xi)$  ( $\xi = \frac{x}{c_1 t}$ ) для этого типа распада разрыва приведены на рис. 1, а. Положение контактной границы на этом и следующих рисунках обозначено  $\xi_r$ , безразмерная скорость и давление на контактной границе —  $u_{kr}$  и  $P_{kr}$  соответственно.

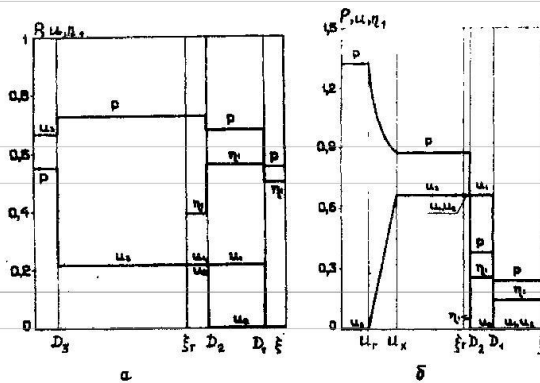


Рис. 1. Автомодельные профили  $P(\xi)$ ,  $\eta(\xi)$ ,  $u_i(\xi)$ , а — тип распада разрыва UB-UB;  $u_{kr} = 0,218$ ;  $P_{kr} = 0,727$ ; б — тип распада разрыва BP-UB;  $u_{kr} = 0,693$ ;  $P_{kr} = 0,872$

**Тип 2. Конфигурация вида BP-UB.** При таком типе распада разрыва влево идет волна разрежения, вправо — совокупность двух сильных разрывов. В тех же обозначениях, что и выше, получаем условие для определения скорости  $u$  контактной границы

$$\rho_{30}^2 e^{\frac{u_{30}-u}{c_3}} = \rho_{10} + \rho_{c10} (\omega_1^2 - 1) + \rho_{c20} (\omega_2^2 - z^2).$$

Такой тип решения реализуется, например, для следующих значений параметров:

$$\begin{aligned} \rho_{10} = 1; \quad c_1 = 3; \quad u_{10} = 0; \quad \alpha_{10} = 0,6; \\ \rho_{20} = 9; \quad c_2 = 1; \quad u_{20} = 0; \quad \alpha_{20} = 0,4; \quad (I4) \\ \rho_{30} = 2; \quad c_3 = 5; \quad u_{30} = 0. \end{aligned}$$

Автомодельное решение этой задачи представлено на рис. 1, б.  $u_r$  и  $u_x$  на этом и следующих рисунках — положение "головной" и "хвостовой" характеристик в соответствующей волне разрежения.

**Тип 3. Конфигурация вида BP-BP.** В этом случае вправо, в гетерогенную смесь, распространяется совокупность двух волн разрежения, а влево — обычная волна разрежения в чистом изотермическом газе.

Условие для определения скорости контактной границы имеет вид

$$\rho_{30}^2 e^{\frac{u_{30}-u}{c_3}} = \rho_{c10} e^{\frac{u-u_{10}}{c_1}} + z^2 \rho_{c20} e^{\frac{u-u_{20}}{c_2}}.$$

Рассмотренный тип решения реализуется, например, для изотермических газов при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} \rho_{10} = 1; \quad c_1 = 3; \quad u_{10} = 5; \quad \alpha_{10} = 0,6; \\ \rho_{20} = 9; \quad c_2 = 1; \quad u_{20} = 5; \quad \alpha_{20} = 0,4; \quad (I5) \\ \rho_{30} = 2; \quad c_3 = 2; \quad u_{30} = 0. \end{aligned}$$

На рис. 2 представлены автомодельные зависимости  $\eta(\xi)$ ,  $u_i(\xi)$ ,  $P(\xi)$  решения этой задачи.

**Тип 4. Конфигурация вида UB-BP.** При таком типе распада разрыва влево идет ударная волна,

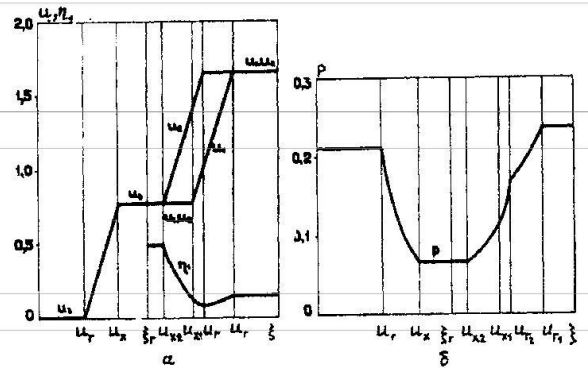


Рис. 2. Автомодельные профили для конфигурации UB-BP;  $u_{kr} = 0,781$ ;  $P_{kr} = 0,066$ ; а —  $\eta(\xi)$ ,  $u_i(\xi)$ ; б —  $P(\xi)$

а вправо — совокупность двух волн разрежения. Условие для определения скорости контактной границы имеет в этом случае вид

$$\rho_{30} + \rho_{30} (u_{30} - u) (u_{30} - D_3) = \rho_{c10} e^{\frac{u-u_{10}}{c_1}} + z^2 \rho_{c20} e^{\frac{u-u_{20}}{c_2}}.$$

Решение вида UB-BP реализуется, например, для газов со следующими значениями параметров:

$$\begin{aligned} \rho_{10} = 1; \quad c_1 = 3; \quad u_{10} = 0; \quad \alpha_{10} = 0,9; \\ \rho_{20} = 9; \quad c_2 = 1; \quad u_{20} = 0; \quad \alpha_{20} = 0,1; \quad (I6) \\ \rho_{30} = 1,25; \quad c_3 = 2; \quad u_{30} = 0. \end{aligned}$$

Автомодельное решение этой задачи представлено на рис. 3.

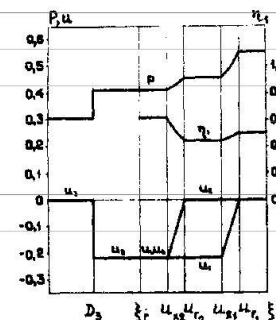


Рис. 3. Автомодельные профили  $P(\xi)$ ,  $\eta(\xi)$ ,  $u_i(\xi)$ . Тип распада разрыва UB-BP;  $u_{kr} = -0,221$ ;  $P_{kr} = 0,429$

**З а м е ч а н и е.** Важным элементом алгоритма получения решения задачи о распаде произвольного разрыва на границе одного изотермического газа со смесью двух других изотермических газов является определение типа распада разрыва из решения соответствующей задачи при односкоростном подходе к описанию смеси. В рассмотренных выше частных случаях, характеризующихся совокупностями значений параметров (I3)-(I6), предположение о реализации иного типа распада разрыва (уже при двухскоростном подходе к описанию смеси) всегда приводило к несовместной системе уравнений. Это наводит на мысль о существовании общего доказательства однозначного соответствия типов распада разрыва при односкоростном и двухскоростном подходах к описанию смеси (по крайней мере, для изотермических газов). Поскольку такого доказательства в настоящее время не существует, то на практике использование этого принципа требует дополнительного обоснования, аналогичного изложенному выше; такое обоснование должно быть проведено в каждом частном случае и для каждого уравнения состояния.

#### С п и с о к л и т е р а т у р ы

1. Зелдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.

2. Буряков О.В., Куропатенко В.Ф. Распространение волны разрежения и ударной волны в гетерогенной смеси двух изотермических газов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1981. Вып. 2(8). С.3-7.

Статья поступила в редакцию 16.08.89.