УДК 532.529

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ РАЗРЕЖЕНИЯ И УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ГЕТЕРОГЕННОЙ СМЕСИ ДВУХ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ГАЗОВ

О.В. Буряков, В.Ф. Куропатенко

Для гетерогенной смеси двух изотермических газов в одномерном плоском случае получено аналитическое решение задачи о движении поршня. Показано, что в волне разрежения существует не только как зона, где смесь обеднена легким компонентом, но и зона, где смесь обогащена. При разлете в вакуум у поршня массовая концентрация легкого компонента равна единице, т.е. имеет место полная сепарация компонентов. В задаче о вдвигающемся поршне ударная волна расщепляется. Между разрывом в легком компоненте и разрывом в тяжелом компоненте смесь существенно обогащена легким компонентом, а между разрывом в тяжелом компоненте и поршнем – тяжелым.

Введение

Течение гетерогенных сред имеет существенные особенности: многоскоростной характер течения, процессы взаимодействия, термодинамическая неравновесность, условия совместного течения и т.д.

Математические модели гетерогенных сред весьма сложны. Подробную библиографию по проблемам механики гетерогенных сред можно найти в работах [1–3] .

В последние годы появились работы по численному исследованию неустановившихся течений гетерогенных сред [3–6] . В связи с этим называется актуальность вопросов, связанных с пониманием качественных особенностей математических моделей: распространение волн, взаимодействие относительного движения компонентов с условиями их совместного течения и т.д. Кроме того, необходимо иметь хорошие тесты для сложных численных методик. В настоящей работе для простейшей модели гетерогенной среды исследуются особенности распространения волн разрежения и ударных волн.

1. Непрерывное плоское одномерное течение смеси двух изотермических газов

Непрерывное плоское одномерное течение смеси двух изотермических газов описывается системой уравнений

$$\frac{\partial \alpha_i \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_i \rho_i u_i}{\partial x} = 0; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \alpha_i \rho_i u_i}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_i \rho_i u_i^2}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i P_i}{\partial x} = R_{ji}; \qquad (2)$$

$$P_i = c_i^2 \rho_i ; \quad c_i = const . \qquad (3)$$

Здесь α_i – объемная концентрация; ρ_i – плотность; u_i – скорость; P_i – давление; c_i – изотермическая скорость звука i-го компонента; R_{ji} – сила воздействия j-го компонента на i-й в процессе их относительного движения. Объемные концентрации α_i удовлетворяют условиям

$$0 \le \alpha_i \le 1; \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1 . \qquad (4)$$

Условие совместного течения компонентов возьмем в виде

$$P_1 = P_2 = P. \tag{5}$$

Система (1)-(5) содержит восемь уравнений и восемь искомых функций.

Параметры смеси выражаются через параметры компонентов

$$u = \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 ; \quad \rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 , \tag{6}$$

где η_i - массовая концентрация i-го компонента, удовлетворяющая условиям

$$0 \le \eta_i \le 1 ; \quad \eta_1 + \eta_2 = 1 . \tag{7}$$

Введем новые переменные

$$R_i = \alpha_i \rho_i . \tag{8}$$

В уравнениях (1), (2) перейдем от переменных $\alpha_i, \rho_i, P_i, u_i$ к переменным u_i, R_i и положим $R_{ji} = 0$.

Тогда уравнения (1), (2) примут вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial R_i}{\partial t} + \frac{\partial R_i u_i}{\partial x} = 0 ; \\ &\frac{\partial R_i u_i}{\partial t} + \frac{\partial R_i u_i^2}{\partial x} + C_i^2 \frac{\partial R_i}{\partial x} = 0 . \end{aligned} \tag{9}$$

В переменных R_i, u_i исходная система уравнений распалась на две независимые системы (9) для $i = 1, 2$ соответственно. Каждая из этих систем имеет пару действительных характеристик

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{i1,i2} = u_i \pm C_i , \tag{10}$$

вдоль которых выполняются соотношения

$$du_i \pm C_i \, d \ln R_i = 0 . \tag{11}$$

Из уравнений (10), (11) следует, что возмущения скорости u_i и величины R_i одного компонента распространяются по ее индивидуальным характеристикам и не влияют ни на ход характеристик, ни на соответствующие величины другого компонента.

2. Центрированная волна разрежения в покоящейся смеси

Для системы уравнений (9) поставим следующую смешанную задачу Коши

$$\begin{aligned} &u_i = u_2 = 0, \ R_1 = R_{10}, \ R_2 = R_{20} \ \text{при} \ x \ge 0, \ t = 0; \\ &u_1 = u_2 = u_n = const < 0, \ x = u_n t, \ t \ge 0 . \end{aligned} \tag{12}$$

Введем безразмерные переменные

$$M_i = \frac{u_i}{C_1} , \ M_n = \frac{u_n}{C_1} , \ \bar R_1 = \frac{R_1}{\rho_0} , \ \bar R_2 = \frac{R_2}{\rho_0} , \tag{13}$$

где

$$\rho_0 = \alpha_{10} \rho_{10} + \alpha_{20} \rho_{20} = R_{10} + R_{20} . \tag{14}$$

Введем также безразмерную независимую переменную

$$\xi = \frac{x}{C_1 t} . \tag{15}$$

Запишем уравнения (9), (12) в безразмерном виде

$$\begin{aligned} &(M_1 - \xi) \frac{d \ln \bar R_1}{d\xi} + \frac{dM_1}{d\xi} = 0 ; \\ &(M_1 - \xi) \frac{dM_1}{d\xi} + \frac{d \ln \bar R_1}{d\xi} = 0 ; \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &(M_2 - \xi) \frac{d \ln \bar R_2}{d\xi} + \frac{dM_2}{d\xi} = 0 ; \\ &(M_2 - \xi) \frac{dM_2}{d\xi} + z^2 \frac{d \ln \bar R_2}{d\xi} = 0 ; \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &M_1 = M_2 = 0, \ \bar R_1 = \bar R_{10}, \ \bar R_2 = \bar R_{20} \ \text{при} \ \xi = \infty ; \\ &M = M_n = const < 0 \ \text{при} \ \xi = \xi_n = M_n < 0 , \end{aligned} \tag{18}$$

где $z = \frac{C_2}{C_1} = const < 1$. При таком выборе z компонент с номером 1 легкий, с номером 2 - тяжелый.

Система (16), (17) имеет следующие решения:

$$M_1 = const , \quad \bar R_1 = const ; \tag{19}$$

$$M_1 = \xi + 1 , \quad \bar R_1 = const \cdot e^{-\xi} ; \tag{20}$$

$$M_1 = \xi - 1 , \quad \bar R_1 = const \cdot e^{\xi} ; \tag{21}$$

$$M_2 = const , \quad \bar R_2 = const ; \tag{22}$$

$$M_2 = \xi + z , \quad \bar R_2 = const \cdot e^{-\frac{\xi}{z}} ; \tag{23}$$

$$M_2 = \xi - z , \quad \bar R_2 = const \cdot e^{\frac{\xi}{z}} . \tag{24}$$

Решение в волне разрежения будем конструировать из выражений (19)-(24), начиная с точки $\xi = \infty$ и двигаясь в сторону уменьшения ξ.

Область 1. $1 \le \xi \le \infty$. Среда находится в невозмущенном (начальном) состоянии, которое определяется решениями (19), (22)

$$M_1 = M_2 = 0 , \ \bar R_1 = \bar R_{10} , \ \bar R_2 = \bar R_{20} .$$

Область 2. $z \le \xi \le 1$. Первый компонент охвачен движением. Второй компонент покоится

$$M_1 = \xi - 1, \ M_2 = 0, \ \bar R_1 = \bar R_{10} e^{\xi - 1}, \ \bar R_2 = \bar R_{20} .$$

В точке $\xi = 1$ терпят разрыв производные $\frac{dM_1}{d\xi}$, $\frac{d\bar R_1}{d\xi}$.

Область 3. $M_n + 1 \le \xi \le z$. Оба компонента охвачены ускоренным движением

$$M_1 = \xi - 1, \ M_2 = \xi - z , \ \bar R_1 = \bar R_{10} e^{\xi - 1}, \ \bar R_2 = \bar R_{20} e^{\frac{\xi - z}{z}} .$$

В точке $\xi = z$ терпят разрыв производные $\frac{dM_2}{d\xi}, \frac{d\bar{R}_2}{d\xi}$.

<u>Область 4.</u> $M_n + z \le \xi \le M_n + 1$. Точка $\xi = M_n + 1$ является границей волны разрежения в первом компоненте

$$M_1 = M_n, \; M_2 = \xi - z, \; \bar{R}_1 = \bar{R}_{10} e^{M_n}, \; \bar{R}_2 = \bar{R}_{20} \cdot e^{\frac{\xi - z}{z}}.$$

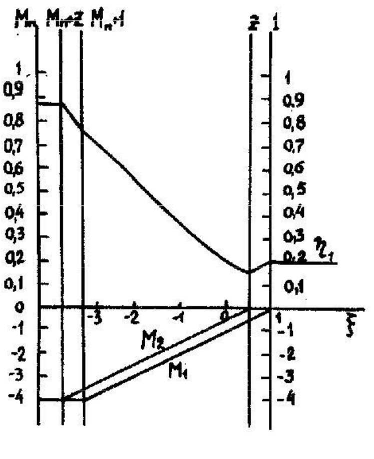
В точке $\xi = M_n + 1$ терпят разрыв производные $\frac{dM_1}{d\xi}, \frac{d\bar{R}_1}{d\xi}$.

<u>Область 5.</u> $M_n \le \xi \le M_n + z$. Точка $\xi = M_n + z$ является границей волны разрежения во втором компоненте. Таким образом, область 5 есть область постоянного течения

$$M_1 = M_2 = M_n, \; \bar{R}_1 = \bar{R}_{10} e^{M_n}, \; \bar{R}_2 = \bar{R}_{20} e^{\frac{M_n}{z}}.$$

В точке $\xi = M_n + z$ терпят разрыв производные $\frac{dM_2}{d\xi}, \frac{d\bar{R}_2}{d\xi}$.

Зная зависимости $\bar{R}_1(\xi)$, $\bar{R}_2(\xi)$, определим все термодинамические величины как для среды в целом, так и для компонентов. Кроме того, найдем зависимости $\eta_i(\xi)$. В точках $\xi = 1, z, M_n + 1, M_n + z$ профили этих величин терпят излом. На рисунке изображены профили $M_i(\xi)$, $\eta_1(\xi)$ для $z^2 = 0{,}3$, $\eta_{10} = 0{,}2$, $M_n = -4$. Из рисунка видно, что в области постоянного течения у поршня имеет место эффект сепарации – смесь существенно обогащена легким компонентом.



В этой области

$$\eta_1 = \eta_{10} \cdot \frac{1}{(1-\eta_{10}) \cdot e^{\frac{M_n}{z}(1-z)} + \eta_{10}}$$

и при $M_n \to -\infty$, $\eta_1 \to 1$, т.е. тяжелый компонент отстает от свободной поверхности при истечении смеси изотермических газов в вакуум.

<u>3. Стационарная ударная волна</u>

Перейдем от неподвижной системы координат к системе координат, движущейся с постоянной скоростью D, т.е. вместо x введем координату

$$\xi = x - Dt. \tag{25}$$

В новой системе координат уравнение (9) примет вид

$$\frac{\partial R_i}{\partial t} - D\frac{\partial R_i}{\partial \xi} + \frac{\partial R_i u_i}{\partial \xi} = 0. \tag{26}$$

$$\frac{\partial R_i u_i}{\partial t} - D\frac{\partial R_i u_i}{\partial \xi} + \frac{\partial R_i u_i^2}{\partial \xi} + C_i^2 \frac{\partial R_i}{\partial \xi} = 0. \tag{27}$$

Рассмотрим стационарное решение системы (26), (27), т.е. решение, у которого $\frac{\partial R_i}{\partial t} = 0, \frac{\partial u_i}{\partial t} = 0$

$$-D\frac{dR_i}{d\xi} + \frac{dR_i u_i}{d\xi} = 0; \tag{28}$$

$$-D\frac{dR_i u_i}{d\xi} + \frac{dR_i u_i^2}{d\xi} + \frac{dC_i^2 R_i}{d\xi} = 0.$$

Проинтегрировав уравнения (28), получим

$$R_i(u_i - D) = K_{1i}; \tag{29}$$

$$R_i u_i (u_i - D) + C_i^2 R_i = K_{2i}. \tag{30}$$

Выразим R_i и u_i через D. Система (29), (30) имеет два корня, которым соответствуют два вида решений

$$u_i = D + \frac{C_i^2}{u_{i0} - D}, \quad R = \frac{R_{i0}(u_{i0} - D)^2}{C_i^2}; \tag{31}$$

$$u_i = u_{i0}, \quad R_i = R_{i0}. \tag{32}$$

Решение (32) для обоих компонентов тривиально.

Решение (31) для обоих компонентов не имеет физического смысла, так как при уменьшении скорости разрыва и стремлении ее к скорости звука скачки плотности, давления, массовой скорости и других величин не стремятся к нулю.

Физический смысл имеют два вида решений:

1) для первого компонента решение (31), для второго – решение (32);

2) для второго компонента решение (31), для первого – решение (32).

Рассмотрим эти комбинации

$$u_i = D + \frac{C_i}{\varphi_i}, \; R_i = R_{i0}\varphi_i^2, \; u_j = u_{j0}, \; R_j = R_{j0}, \tag{33}$$

где

$$\varphi_i = \frac{u_{i0} - D}{C_i}.$$

Выпишем параметры смеси и компонентов за i-м разрывом

$$p = p_0 + \alpha_{i0}\rho_{i0} C_i^2 (\varphi_i^2 - 1); \tag{34}$$

$$\rho = \rho_0 + \alpha_{i0}\rho_{i0} (\varphi_i^2 - 1); \tag{35}$$

$$\rho_i=\rho_{i0}+\alpha_{i0}\rho_{i0}(\varphi_i^2-1);\tag{36}$$

$$\rho_j=\rho_{j0}+\alpha_{i0}\rho_{j0}(\varphi_i^2-1);\tag{37}$$

$$\alpha_i=\frac{\alpha_{i0}\varphi_i^2}{1+\alpha_{i0}(\varphi_i^2-1)};\tag{38}$$

$$\alpha_j=\frac{\alpha_{j0}}{\alpha_{j0}+(1-\alpha_{j0})\varphi_i^2};\tag{39}$$

$$\eta_i=\frac{\eta_{i0}\varphi_i^2}{1+\eta_{i0}(\varphi_i^2-1)};\tag{40}$$

$$\eta_j=\frac{\eta_{j0}}{\eta_{j0}+(1-\eta_{j0})\varphi_i^2};\tag{41}$$

Из выражений (34), (35) следует уравнение ударной адиабаты i-го скачка

$$P=P_0+C_i^2(\rho-\rho_0),\tag{42}$$

таким образом, ударной адиабатой i-го скачка является изотерма i-го компонента

$$\left(\frac{dP}{dV}\right)_{H_i}=-\frac{C_i^2}{V^2}=-\rho^2C_i^2=\lambda_{H_i};\tag{43}$$

$$\lambda_{\lambda_i}=\frac{P-P_0}{V-V_0}=-\rho\rho_0\frac{P-P_0}{\rho-\rho_0}=-\rho\rho_0C_i^2.\tag{44}$$

Для λ_{λ_i} возможны два неравенства

$$\lambda_{H_i}<\lambda_{\lambda_i}<\lambda_{H_{i0}}<0;\tag{45}$$

$$\lambda_{H_{i0}}<\lambda_{\lambda_i}<\lambda_{H_i}<0.\tag{46}$$

Из уравнений (43), (44) для неравенства (45) следует

$$\rho>\rho_0,\tag{47}$$

а для неравенства (46)

$$\rho<\rho_0.\tag{48}$$

Так как уравнение (42) в переменных P,V - выпуклая кривая, то ударная волна разрежения механически неустойчива, поэтому имеет смысл только неравенство (45).

Из уравнений (47), (35), (33) следует

$$u_{i0}+C_i<D<u_i+C_i.\tag{49}$$

Из уравнений (49) следует, что на i-м разрыве пересекаются характеристики i-го компонента. Так как u_j остается постоянной при переходе через скачок, то характеристики j-го компонента не чувствуют скачка. В свою очередь, из выражений (33), следует, что скорость i-го скачка зависит только от параметров i-го компонента. Вдоль характеристик переносятся не возмущения величин (34)-(41), а возмущения R_i и R_j, которые и порождают состояние (34)-(41). Таким образом из неравенства (49) и $R_j=const$ при переходе через скачок следует, что при любом соотношении между D и $u_{j0}+C_2$, u_j+C_2 i-й скачок не посылает перед собой возмущений.

4. Плоская задача о поршне

Пусть гетерогенная среда с состоянием

$$u_{i0}=0,\quad R_{i0}=const_i\tag{50}$$

находится в полубесконечной плоской трубе $x\geq0$, закрытой с левого конца поршнем. В момент времени $t=0$ поршень начинает двигаться вправо со скоростью $u_n>0$.

В этом случае в гетерогенной среде будет распространяться ударная волна. В силу независимости систем (9) на поршне должно быть

$$u_1=u_2=u_n.\tag{51}$$

Из раздела 3 следует, что для гетерогенной среды данного вида могут существовать ударные волны двух типов:

1) на фронте скорость первого компонента меняется скачком, скорость второго компонента не меняется;

2) на фронте скорость второго компонента меняется скачком; скорость первого компонента не меняется.

Таким образом, состояние перед фронтом (50) и состояние на поршне (51) могут быть связаны лишь совокупностью разрывов 1 и 2.

В выражениях (33)-(41) перейдем к безразмерным переменным (13) и положим

$$\bar D_i=\frac{D_i}{C_1},\ \bar P=\frac{P}{\rho_0C_1^2},\ \delta=\frac{\rho}{\rho_0},\ \delta_i=\frac{\rho_i}{\rho_0}.\tag{52}$$

Из выражений (51) и (32) находим

$$\bar D_1=\frac{M_n+\sqrt{M_n^2+4}}{2},\quad \bar D_2=\frac{M_n+\sqrt{M_n^2+4z^2}}{2}.\tag{53}$$

Пусть $z<1$, тогда $\bar D_1>\bar D_2$, т.е. разрыв 1 движется впереди разрыва 2. Обозначим через 0 состояние в покоящейся среде; 1 - состояние за фронтом разрыва 1; 2 - состояние за фронтом разрыва 2.

Получим:

1) за фронтом разрыва 1

$$M_{11}=M_n;\tag{54}$$

$$M_{21}=0;\tag{55}$$

$$\bar P_1=\bar P_0+\alpha_{10}\delta_{10}(\bar D_1^2-1);\tag{56}$$

$$\delta_1=\delta_0+\alpha_{10}\delta_{10}(\bar D_1^2-1);\tag{57}$$

$$\delta_{11}=\delta_{10}+\alpha_{10}\delta_{10}(\bar D_1^2-1);\tag{58}$$

$$\delta_{21}=\delta_{20}+\alpha_{10}\delta_{20}(\bar D_1^2-1);\tag{59}$$

$$\alpha_{11}=\frac{\alpha_{10}\bar D_1^2}{1+\alpha_{10}(\bar D_1^2-1)};\tag{60}$$

$$\alpha_{21}=\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{20}+(1-\alpha_{20})(\bar D_1^2-1)};\tag{61}$$

$$\eta_{11}=\frac{\eta_{10}\bar D_1^2}{1+\eta_{10}(\bar D_1^2-1)};\tag{62}$$

$$\eta_{21}=\frac{\eta_{20}}{\eta_{20}+(1-\eta_{20})\bar D_1^2};\tag{63}$$

2) за фронтом разрыва 2

$$M_{12} = M_{11} = M_n ; \quad (64)$$

$$M_{22} = M_n ; \quad (65)$$

$$\bar{p}_2 = \bar{p}_1 + \alpha_{20}\delta_{20}(\bar{D}_2^2 - z^2); \quad (66)$$

$$\delta_2 = \delta_1 + \frac{\alpha_{20}\delta_{20}}{z^2}(\bar{D}_2^2 - z^2); \quad (67)$$

$$\delta_{12} = \delta_{11} + \alpha_{20}\delta_{20}(\bar{D}_2^2 - z^2); \quad (68)$$

$$\delta_{22} = \delta_{21} + \frac{\alpha_{20}\delta_{20}}{z^2}(\bar{D}_2^2 - z^2); \quad (69)$$

$$\alpha_{12} = \frac{\alpha_{11}\delta_{11}}{\delta_{11} + \alpha_{20}\delta_{20}(\bar{D}_2^2 - z^2)} ; \quad (70)$$

$$\alpha_{22} = \frac{\alpha_{21}\delta_{21}\bar{D}_2^2}{z^2\delta_{21} + \alpha_{20}\delta_{20}(\bar{D}_2^2 - z^2)} ; \quad (71)$$

$$\eta_{12} = \frac{\eta_{11}}{1 + \frac{(1-\eta_{11})}{z^2}(\bar{D}_2^2 - z^2)} ; \quad (72)$$

$$\eta_{22} = \frac{\eta_{21}\bar{D}_2^2}{z^2 + \eta_{21}(\bar{D}_2^2 - z^2)} . \quad (73)$$

Из выражения (62) следует, что при $D_1 > 1$ за первым разрывом увеличивается концентрация 1-го компонента, а за вторым – 2-го. В пределе $M_n \to \infty$, $\eta_{11} \to 1$, $\eta_{22} \to 1$, т.е. практически весь 1-й компонент концентрируется между разрывами 1 и 2.

Список литературы

1. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.

2. Крайко А.Н., Нигматулин Р.И., Старков В.К., Стернин Л.Е. Механика многофазных сред: ИН. и Т. – Гидромеханика, 1972, т. 6.

3. Яненко Н.Н., Солоухин Р.И., Папырин А.Н., Фомин В.М. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц. Новосибирск: Наука, 1980.

4. Harlow F., Amsden A. Numerical calculation of multiphase fluid flow. – J. Comput. Phys., 1975, v. 17, N 1.

5. Harlow F., Amsden A. Flow of asuterpenetrating material phases. – Ibid., 1975, v. 18, N 4.

6. Stewart H.. Calculation of transient boiling flow in channels. – Ibid., 1979, v. 30, N 1.

Статья поступила в редакцию 14.05.81.