УДК 532.529

АВТОМОДЕЛЬНАЯ ВОЛНА РАЗРЕЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ ГЕТЕРОГЕННОЙ СМЕСИ ДВУХ ПОЛИТРОПНЫХ ГАЗОВ

О.В.Буряков, В.Ф.Куропатенко

В рамках предположения о локальном равенстве давлений компонент при отсутствии сил взаимодействия построено точное решение задачи о поршне, выдвигающемся с достаточно большой скоростью из гетерогенной смеси двух политропных газов для одной, получившей широкое распространение модели гетерогенной среды, учитывающей скоростную неравновесность компонент.

Полученное решение вместе с полученным ранее решением аналогичной задачи в рамках другой, также широко распространенной модели гетерогенной среды позволило сравнить эти два типа моделей на данном классе решений.

В настоящее время широкое распространение получили два типа моделей гетерогенных сред. Характерным представителем первого типа является модель [1] , а второго – модель [2] . Отвлекаясь от особенностей описания обменных членов, можно отметить следующие различия: в моделях первого типа в уравнениях движения компонент вместе с давлением объемная концентрация содержится под знаком градиента, а в моделях второго типа – объемная концентрация стоит перед знаком градиента давления. В [3] показана качественная и количественная близость решений, получаемых в рамках моделей обоих типов в случае стационарных течений смесей газов с твердыми частицами. В данной работе проведено сравнение моделей обоих типов еще на одном классе решений.

Полученное решение представляет самостоятельный интерес, так как с одной стороны, позволяет изучить качественные особенности моделей гетерогенных сред второго типа, а с другой – является тестом для численных методик расчета неустановившихся течений гетерогенных сред с учетом скоростной неравновесности компонент, реализующих модели данного типа.

Непрерывное плоское одномерное течение двух политропных газов описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial \rho_{ci}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{ci} u_i}{\partial r} = 0 ; \qquad (1)$$

$$\rho_{ci} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial r} \right) + \frac{\partial a_i P_i}{\partial r} = R_{ji} ; \qquad (2)$$

$$\rho_{ci} = a_i \rho_i ; \quad \rho = \rho_{c1} + \rho_{c2} ; \quad \eta_i = \frac{\rho_{ci}}{\rho} ; \quad P_i = A_i \rho_i^n ;$$

$$i = 1, 2 . \qquad (3)$$

Для модели гетерогенной среды (1)–(3) с $R_{ji} = 0$ в предположении равенства давлений компонент в [4] получено точное решение задачи о движении поршня. Решение имеет следующий качественный характер.

Если поршень вдвигается в смесь с постоянной скоростью, то по смеси распространяется ударная волна в виде совокупности двух сильных разрывов, движущихся с разными скоростями. На поршне скорости компонент совпадают и равны скорости поршня.

Если поршень выдвигается из смеси с постоянной скоростью, то по смеси распространяется волна разрежения. Течение в этом случае является автомодельным. В зависимости от скорости поршня возможны два типа течения: с полной сепарацией в волне разрежения, когда скорость поршня достаточно велика, и с частичной сепарацией компонент, когда скорость поршня достаточно мала. В последнем случае решение имеет вид волны разрежения, распространяющейся по смеси, которая сопряжена с ударной волной в виде совокупности двух сильных разрывов перед областью постоянного течения у поршня.

Рассмотрим теперь другую модель гетерогенной среды, которая получается из (1)–(3) при

$$R_{ji} = P_i \frac{\partial a_i}{\partial r}. \qquad (4)$$

Так же, как в [4], в качестве условия совместного деформирования компонент примем предположение о локальном равенстве их давлений

$$P_1 = P_2 . \qquad (5)$$

Для гетерогенной среды справедливо соотношение

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\eta_i}{\rho_i} + \frac{\eta_j}{\rho_j} . \qquad (6)$$

Из (3), (5), (6) следуют соотношения

$$\rho_i = \frac{\rho}{A_i^{1/n}} (A_1^{1/n} \cdot \eta_1 + A_2^{1/n} \eta_2) ; \qquad (7)$$

$$P_i = P = (A_1^{1/n} \eta_1 + A_2^{1/n} \eta_2)^n \cdot \rho^n ; \qquad (8)$$

$$a_i = \frac{A_i^{1/n} \cdot \rho_{ci}}{(A_1^{1/n} \eta_1 + A_2^{1/n} \eta_2)\rho} . \qquad (9)$$

С учетом (3)–(9) система уравнений (1), (2) может быть записана в виде

$$\frac{1}{c_{10}} \frac{\partial \rho_{ci}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{ci} u_i}{\partial r} = 0; \qquad (10)$$

$$\rho_{ci} \left(\frac{1}{c_{10}} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial r} \right) +$$

$$+ \frac{\gamma_i}{n} \frac{\rho_{ci}}{\rho_{c1} + Z\rho_{c2}} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_{c1} + Z\rho_{c2})^n = 0, \qquad (11)$$

где

$$u_i = \frac{u_i}{c_{10}} ; \qquad \rho_{ci} = \frac{\rho_{ci}}{\rho_{10}} ; \qquad (12)$$

$$Z = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{1/n} ; \qquad \gamma_i = \begin{cases} 1, & i = 1; \\ Z, & i = 2; \end{cases}$$

ρ_{10} – плотность; $c_{10} = \sqrt{A_1 \cdot n \cdot \rho_{10}^{n-1}}$ – скорость звука первой компоненты в некоторый характерный момент времени, например, при $t = 0$.

Пусть гетерогенная смесь двух политропных газов с состояниями компонент

$$u_i = u_{i0} = 0; \quad \rho_{ci} = \rho_{ci0}; \quad r \geqslant 0; \quad t = 0; \quad i = 1, 2 \qquad (13)$$

находится в полубесконечной плоской трубе $r \geqslant 0$, закрытой с левого конца поршнем. В момент времени $t = 0$ поршень начинает двигаться влево с постоянной скоростью $u_n < 0$. В этом случае в среде будет распространяться волна разрежения.

Из-за отсутствия для модели гетерогенной среды этого типа соотношений на поверхности сильного разрыва, которые сводились бы только к алгебраическим соотношениям между скоростями и парциальными плотностями компонент, до конца решение может быть построено в случае достаточно большой скорости поршня, когда в волне разрежения происходит полная сепарация компонент. Рассматриваемое течение будет автомодельным.

Введем автомодельную переменную

$$\xi = \frac{r}{c_{10} \cdot t} . \qquad (14)$$

Переходя в системе уравнений (10), (11) к автомодельной переменной ξ и учитывая условие на поршне, получаем

$$(u_i - \xi) \frac{d\rho_{ci}}{d\xi} + \rho_{ci} \frac{du_i}{d\xi} = 0; \qquad (15)$$

$$\rho_{ci} (u_i - \xi) \frac{du_i}{d\xi} +$$

$$+ \frac{\gamma_i}{n} \frac{\rho_{ci}}{(\rho_{c1} + Z\rho_{c2})} \frac{d}{d\xi} (\rho_{c1} + Z\rho_{c2})^n = 0; \qquad (16)$$

$$u_1 = u_2 = 0; \quad \rho_{ci} = \rho_{ci0} \quad \text{при} \quad \xi = \infty ; \qquad (17)$$

$$u = u_n = \text{const} < 0 \qquad \text{при} \quad \xi_n = \xi = u_n . \qquad (18)$$

Условие приводимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений (15), (16) к нормальному виду представляет собой уравнение

$$(u_1 - \xi)^2 (u_2 - \xi)^2 - Z^2 \rho_{c2} (\rho_{c1} + Z\rho_{c2})^{n-2} (u_1 - \xi)^2 -$$

$$- \rho_{c1} (\rho_{c1} + Z\rho_{c2})^{n-2} (u_2 - \xi)^2 = 0. \qquad (19)$$

С помощью уравнения (19) система обыкновенных дифференциальных уравнений приводится к нормальному виду

$$\frac{du_1}{d\xi} = 2 B_2 \Gamma ; \qquad \frac{du_2}{d\xi} = 2 Z B_1 \Gamma ; \qquad (20)$$

$$\frac{d\rho_{c1}}{d\xi} = -2\rho_{c1}\frac{B_2}{B_1}\Gamma; \quad \frac{d\rho_{c2}}{d\xi} = -2\rho_{c2}Z\frac{B_1}{B_2}\Gamma, \tag{20}$$

где

$$B_1 = u_1 - \xi; \quad B_2 = u_2 - \xi; \quad c = \rho_{c1} + Z\rho_{c2};$$

$$\Gamma = c^{n-1}\frac{\rho_{c1}B_2^3 + Z^2\rho_{c2}B_1^3}{B_2^4\rho_{c1}[3c^{n-1} + (n-2)B_1^2] + Z^2B_1^4\rho_{c2}[3Zc^{n-1} + (n-2)B_2^2]}. \tag{21}$$

Автомодельное решение будем строить, двигаясь от точки $\xi = \infty$ в сторону уменьшения ξ.

Точка сопряжения постоянного решения (13) с решением системы уравнений (20) определяется после подстановки (13) в уравнение (19)

$$\xi_n = c_0 = \sqrt{a_{10}c_{10}^2 + a_{20}c_{20}^2}. \tag{22}$$

Соотношение (22) можно рассматривать как определение скорости звука в покоящейся смеси для данной модели гетерогенной среды.

Таким образом, область $[\xi_n, \infty]$ – область постоянного течения;

$$u_1 = u_2 = 0; \quad \rho_{ci} = \rho_{ci0}; \quad i = 1, 2. \tag{23}$$

При $\xi < \xi_n$ решение получается численным интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений (20) с начальными данными (13) в точке ξ_n.

Это решение справедливо вплоть до точки ξ^*, в которой массовая концентрация одной из компонент обращается в ноль (в волне разрежения происходит полная сепарация компонент; у поршня накапливается легкая компонента).

Пусть 1-я компонента – легкая, тогда в точке ξ^* решение системы уравнений (20) должно быть сопряжено с решением системы уравнений (15), (16), которое имеет вид

$$u_1 - \xi = -\rho_{c1}^{\frac{n-1}{2}}; \tag{24}$$

$$\frac{n+1}{n-1}\rho_{c1}^{\frac{n-1}{2}} = \xi + \text{const}. \tag{25}$$

После выполнения процедуры сопряжения получим

$$\rho_{c1} = [\rho_{c1}^{\frac{n-1}{2}}|_{\xi^*} + \frac{n-1}{n+1}(\xi - \xi^*)]^{\frac{2}{n-1}}. \tag{26}$$

Решение (24),(26) справедливо в области $[\xi^{**}, \xi^*]$, где ξ^{**} – точка, в которой либо скорость легкой компоненты (теперь уже как однокомпонентной среды) достигает значения скорости поршня, либо ρ_{c1} обращается в ноль.

В первом случае область $[\xi_п, \xi^{**}]$ – область постоянного течения однокомпонентной среды у поршня

$$u_1 = u_n; \qquad \rho_{c1} = \rho_1 = \rho_{c1}|_{\xi^{**}} \tag{27}$$

Во втором случае область $[\xi, \xi^{**}]$ – вакуум. На границе газа с вакуумом

$$u_1 = u_1|_{\xi^{**}}; \qquad \rho_{c1} = \rho_1 = 0. \tag{28}$$

Рассмотренный режим течения, например, реализуется для гетерогенной среды с параметрами

$$n = 2; \quad Z^n = 0{,}1; \quad \eta_{10} = 0{,}6 \tag{29}$$

при $u_n = -1{,}7$.

Большой интерес представляет вопрос о качественном и количественном отличиях описания динамики смесей в рамках двух основных типов моделей гетерогенных сред.

На рис. 1 изображены зависимости $\eta_1(\xi)$, $\alpha_1(\xi)$, $u_i(\xi)$ для моделей гетерогенных сред обоих типов, когда параметры гетерогенной среды и течения имеют значения (29).

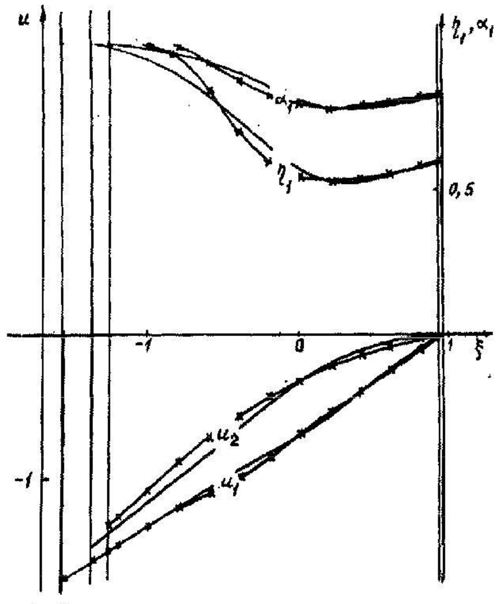

Рис. 1. Автомодельная волна разрежения в смеси двух политропных газов. Случай полной сепарации в волне разрежения при $n = 2$; $Z^n = 0{,}1$; $\eta_{10} = 0{,}6$; $u_n = -1{,}7$; ——— – решение для модели гетерогенной среды с α_i под знаком градиента давления; –×–×– – решение для модели гетерогенной среды с α_i перед знаком градиента давления

На рис. 2 изображены эти же зависимости (фрагмент решения до точки перехода из двухкомпонентной в однокомпонентную среду), когда параметры гетерогенной среды и течения имеют значения

$$n = 2; \quad Z^n = 0{,}1; \quad \eta_{10} = 0{,}1; \quad u_n = -1{,}7. \qquad (30)$$

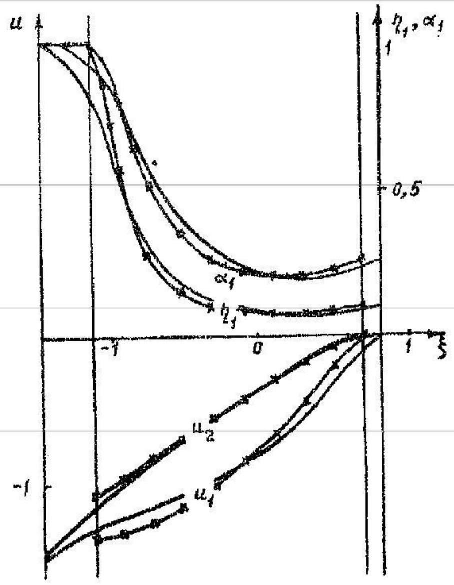

Рис. 2. Автомодельная волна разрежения в смеси двух политропных газов. Случай полной сепарации в волне разрежения при $n = 2$; $Z^n = 0{,}1$; $\eta_{10} = 0{,}1$; $u_n = -1{,}7$. Фрагмент решения: ——— – решение для модели гетерогенной среды с a_i под знаком градиента давления; -x-x- – решение для модели гетерогенной среды с a_i перед знаком градиента давления

В волне разрежения объемная концентрация легкой компоненты изменяется от своего начального значения до единицы, поэтому для параметров (29) характерно малое изменение объемной концентрации легкой компоненты в волне разрежения, а для параметров (30) – большое. В первом случае имеет место качественная и количественная близость решений для моделей гетерогенной среды обоих типов. Во втором случае качественная близость решений сохраняется, близость основных параметров течений (скоростей, плотностей) также имеет место в широком диапазоне изменения ξ, однако некоторые характеристики течения, например, точки перехода из двухкомпонентной в однокомпонентную среду заметно отличаются.

Следует заметить, что построенные решения содержат в себе максимальную скоростную неравновесность, так как получены без учета сил взаимодействия компонент. Учет последних вызовет уменьшение скоростной неравновесности, а следовательно, и отличия в решениях, получаемых по моделям этих двух типов.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что и на данном классе решений обе модели гетерогенных сред дают качественно и количественно близкие результаты.

Список литературы

1. Струминский В.В. Влияние диффузионной скорости на течение газовых смесей. – ПММ, 1974, т. 38, вып. 2, с. 203.

2. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.

3. Яненко Н.Н., Солоухин Р.И., Папырин А.Н., Фомин В.М. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц. Новосибирск: Наука, 1980.

4. Буряков О.В., Куропатенко В.Ф. Решение задачи о движении поршня в смеси двух газов.– ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики, 1985, вып. 1, с. 13–18.

Статья поступила в редколлегию 31.01.86,
в редакцию 13.08.86.