УДК 532.529.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ТЕЧЕНИЙ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ГЕТЕРОГЕННОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ СКОРОСТНОЙ И ТЕМПЕРАТУРНОЙ НЕРАВНОВЕСНОСТИ КОМПОНЕНТ

О.В.Буряков, В.Ф.Куропатенко

Предложены математическая модель и численный метод для описания ударно-волновых процессов в двухкомпонентной гетерогенной среде с учетом скоростной и температурной неравновесности компонент.

Смеси веществ широко представлены в природе и часто используются в различных технологических процессах. Смесь, компоненты которой представлены частицами, содержащими большое количество молекул (атомов) данного вещества, называют гетерогенной средой.

Ударно-волновые процессы в гетерогенных средах сопровождаются рядом специфических явлений: образованием многоволновых структур, сепарацией и т.п. Эти эффекты могут быть описаны в рамках многоскоростных моделей гетерогенных сред [I].

Определим следующие макроскопические параметры двухкомпонентной гетерогенной среды и компонент: θ_i , M_i – объем и масса i-й компоненты в элементарном объеме гетерогенной среды; $\alpha_i = \lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\theta_i}{\theta}$ – объемная концентрация i-й компоненты; $\eta_i = \lim\limits_{\theta \to 0} \frac{M_i}{M}$ – массовая концентрация i-й компоненты; $\rho_{ci} = \lim\limits_{\theta \to 0} \frac{M_i}{\theta}$ – парциальная плотность i-й компоненты; $\rho_i = \lim\limits_{\theta \to 0} \frac{M_i}{\theta_i}$ – плотность i-й компоненты; $\bar{S}$ – плоская элементарная площадка в гетерогенной среде; $\bar{S}_i$ – часть $\bar{S}$, которую занимает i-я компонента; F_{ni} – сила, действующая по нормали $\bar{n}$ к $\bar{S}_i$; $P_i = \lim\limits_{\bar{S}_i \to 0} \frac{F_{ni}}{\bar{S}_i}$ – давление i-й компоненты; $\rho = \sum\limits_{i=1}^{2} \rho_{ci}$ – плотность смеси; $P = \sum\limits_{i=1}^{2} \alpha_i P_i$ – давление смеси; u_i – скорость i-й компоненты; $\kappa_i = \frac{u_i^2}{2}$ – удельная кинетическая энергия i-й компоненты; E_i – удельная внутренняя энергия i-й компоненты; $\varepsilon_i = E_i + \kappa_i$ – удельная полная энергия i-й компоненты; $\kappa = \sum\limits_{i=1}^{2} \eta_i \kappa_i$ – удельная кинетическая энергия смеси; $E = \sum\limits_{i=1}^{2} \eta_i E_i$ – удельная внутренняя энергия смеси; $\varepsilon = \sum\limits_{i=1}^{2} \eta_i \varepsilon_i$ – удельная полная энергия смеси.

Как в [2], будем предполагать:

I) размер частиц компонент в гетерогенной среде много больше молекулярно-кинетических размеров, т.е. частицы содержат большое количество молекул;

2) размер частиц компонент много меньше расстояний, на которых макроскопические или осредненные параметры гетерогенной среды или компонент меняются существенно (вне поверхностей разрыва).

В свете этих допущений процессы в отдельной частице, ее параметры состояния, уравнения, описывающие течение этих процессов и изменение параметров, предстают как микропроцессы, микропараметры, микроуравнения по отношению к гетерогенной среде в целом, а система частиц, относящаяся к данной компоненте, – как некая сплошная среда, характеризуемая своими средними параметрами, являющимися уже макроскопическими для гетерогенной среды. Таким образом, двухкомпонентная гетерогенная среда представляется совокупностью двух сплошных сред, каждая из которых описывается своими параметрами u_i, ρ_{ci}, E_i, P_i и т.д. Эти сплошные среды взаимопроникают друг в друга и заполняют один и тот же объем.

Система уравнений законов сохранения гетерогенной смеси двух веществ в одномерном случае имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho_{ci}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}(\rho_{ci} u_i)+\frac{(\nu-1)\rho_{ci} u_i}{r}=0; \qquad (I)$$

$$\rho_{ci}\frac{d_i u_i}{dt}+\frac{\partial \alpha_i P_i}{\partial r}=R_{ji}; \qquad (2)$$

$$\rho_{ci}\frac{d_i E_i}{dt}+\frac{\partial}{\partial r}(\alpha_i P_i u_i)+\frac{(\nu-1)\alpha_i P_i u_i}{r}=\Phi_{ji}; \qquad (3)$$

$$T_i=f_{T_i}(\rho_i, E_i), \quad P_i=f_{P_i}(\rho_i, E_i); \qquad (4)$$

$$\frac{d_i}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u_i\frac{\partial}{\partial r}; \qquad (5)$$

$$\alpha_1+\alpha_2=1, \quad \eta_1+\eta_2=1, \quad \sum_{i,j}R_{ji}=\sum_{i,j}\Phi_{ji}=0; \qquad (6)$$

$$\rho_{ci1}(D-u_{i1})=\rho_{ci0}(D-u_{i0}); \qquad (7)$$

$$\alpha_{i1}P_{i1}+\rho_{ci1}(D-u_{i1})^2=\alpha_{i0}P_{i0}+\rho_{ci0}(D-u_{i0})^2+R_{ji\sigma}; \qquad (8)$$

$$\alpha_{i1}P_{i1}(D-u_{i1})+\rho_{ci1}(D-u_{i1})\left[\frac{(D-u_{i1})^2}{2}+E_{i1}\right]= \qquad (9)$$

$$=\alpha_{i0}P_{i0}(D-u_{i0})+\rho_{ci0}(D-u_{i0})\left[\frac{(D-u_{i0})^2}{2}+E_{i0}\right]+\Phi_{ji\sigma}.$$

$$i=1,2$$

Здесь (I)-(3) - уравнения в области непрерывного течения компонент; (4) - уравнения состояния компонент; (7)-(9) соотношения на поверхности сильного разрыва σ, движущейся со скоростью D; ν - показатель симметрии; r - эйлеров радиус; t - время; R_{ji}, Φ_{ji} - интенсивности силового и энергетического взаимодействий компонент; $R_{ji\sigma}$, $\Phi_{ji\sigma}$ - поверхностные распределения R_{ji}, Φ_{ji} на σ

Для интенсивностей силового и энергетического взаимодействий компонент примем следующее представление:

$$R_{ji}=\frac{\rho_{ci}\rho_{cj}}{\rho}(u_j-u_i)\cdot F; \qquad (I0)$$

$$\Phi_{ji}=R_{ji}u_i+b_i R_{ji}(u_j-u_i)-P_i\frac{d_i\alpha_i}{dt}+\frac{d_i Q^*_{ji}}{dt}; \qquad (II)$$

$$F=F(|u_j-u_i|, d_i, d_j, \mu_i, \mu_j, \ldots), \qquad (I2)$$

где

d_i - характерный размер частиц i-й компоненты;

μ_i - коэффициент вязкости i-й компоненты.

Первый член в правой части (II)- мощность сил взаимодействия на перемещении, связанном с полем скорости i-й компоненты. Существование силового взаимодействия приводит к диссипации кинетической энергии гетерогенной среды в единицу времени на величину $(u_j-u_i)R_{ji}$. Диссипированная кинетическая энергия полностью переходит в тепло. Распределение тепла по компонентам регулирует коэффициент b_i. Изменение внутренней энергии компоненты связано не только с работой внешних сил на относительном перемещении, обусловленном полем скорости u_i, но и с обменом энергией между компонентами в процессе реализации условий совместного деформирования. Этот обмен может происходить, с одной стороны, как обмен теплом и поэтому в уравнении энергии i-й компоненты должен присутствовать член $d_i Q^*_{ji}/dt$, учитывающий этот теплообмен, а с другой стороны,-как дополнительная работа, совершаемая компонентой при перемещении межкомпонентных поверхностей раздела. Эта работа связана с реализацией условий совместного деформирования, а не с полем скорости u_i. Выражение для этой дополнительной работы представлено третьим членом в (II).

Уравнение притока тепла в компоненту с учетом (II) имеет вид

$$\frac{d_i E_i}{dt}-\frac{P_i}{\rho_i^2}\frac{d_i\rho_i}{dt}=\frac{b_i R_{ji}}{\rho_{ci}}(u_j-u_i)+\frac{1}{\rho_{ci}}\frac{d_i Q^*_{ji}}{dt}. \qquad (I3)$$

В качестве условия совместного деформирования компонент будем пользоваться предположением о локальном равенстве давлений компонент

$$P_i=P_j=P. \qquad (I4)$$

Теплообмен между компонентами будем описывать уравнением

$$\frac{d_i Q^*_{ji}}{dt} = T_{F_{ji}} (T_j - T_i), \tag{15}$$

в котором функция $T_{F_{ji}}$ зависит от теплофизических свойств компонент и $T_{F_{ji}} \in [0, \infty)$. В крайних точках области изменения $T_{F_{ji}}$ реализуются полярные гипотезы: об отсутствии теплообмена и о тепловом равновесии компонент.

В общем случае функции F в (10) и $T_{F_{ji}}$ в (15) зависят от физико-химических свойств компонент, структуры гетерогенной среды и параметров течения.

В численном методе интегрирования системы уравнений математической модели гетерогенной среды (1)-(15) используется следующее разбиение по физическим процессам.

Этап 1. В лагранжевой системе координат компоненты рассчитывается ее движение и деформация с учетом силового воздействия со стороны другой компоненты. В результате получаются индивидуальные (несогласованные с условиями совместного деформирования) значения параметров компонент.

Этап 2. В эйлеровой системе координат определяется пространственное соответствие компонент, после чего локально осуществляется перевод их индивидуальных термодинамических состояний в состояния, удовлетворяющие условию совместного деформирования.

Для каждой компоненты введем в рассмотрение индивидуальную лагранжеву систему координат, связанную с полем скорости этой компоненты.

Лагранжеву массовую переменную введем по формуле

$$d_i M_i = \rho_{ci} r^{\nu-1} (d_i r - u_i\, dt). \tag{16}$$

Уравнения, описывающие движение i-й компоненты в ее лагранжевой системе координат, имеют вид

$$\frac{\partial_i V_{ci}}{\partial t} - \frac{\partial r^{\nu-1} u_i}{\partial M_i} = 0; \tag{17}$$

$$\frac{\partial_i u_i}{\partial t} + r^{\nu-1} \frac{\partial \alpha_i P_i}{\partial M_i} = V_{ci} R_{ji}; \tag{18}$$

$$\frac{\partial_i E_i}{dt} + \frac{\partial \alpha_i P_i u_i r^{\nu-1}}{\partial M_i} = V_{ci} \Phi_{ji}; \tag{19}$$

$$V_{ci} = \frac{1}{\rho_{ci}}, \quad \frac{\partial_i r}{\partial t} = u_i; \tag{20}$$

$$W_{ci} = \frac{1}{V_{ci1}} (D - u_{i1}) = \frac{1}{V_{ci0}} (D - u_{i0}); \tag{21}$$

$$W_{ci} (V_{ci1} - V_{ci0}) = (u_{i1} - u_{i0}); \tag{22}$$

$$W_{ci} (u_{i1} - u_{i0}) = \alpha_{i1} P_{i1} - \alpha_{i0} P_{i0} + R_{ji\sigma}; \tag{23}$$

$$E_{i1} = E_{i0} + \frac{1}{2}(u_{i1}^2 - u_{i0}^2) + \frac{1}{W_{ci}} \left[\alpha_{i1} P_{i1} u_{i1} - \alpha_{i0} P_{i0} u_{i0}\right] + \frac{\Phi_{ji\sigma}}{W_{ci}}. \tag{24}$$

В общем случае, ввиду (10)-(12),(14),(15), для замыкания системы уравнений (17)-(23) необходимо также привлечь законы сохранения для j-й компоненты, записанные в лагранжевой системе координат i-й компоненты.

В предлагаемом методе численного интегрирования системы уравнений (1)-(9) используется уравнение движения j-й компоненты в лагранжевой системе координат i-й компоненты

$$\frac{\partial_i u_i}{\partial t} + (u_j - u_i) \rho_{ci} r^{\nu-1} \frac{\partial u_j}{\partial M_i} + \frac{\rho_{ci}}{\rho_{cj}} r^{\nu-1} \frac{\partial \alpha_j P_j}{\partial M_i} = V_{cj} R_{ij}. \tag{25}$$

На этапе расчета движения компоненты используется разностная схема, обобщающая схему [3] на случай двухкомпонентной смеси.

Для каждой компоненты строится ее индивидуальная сетка. На сетке компоненты, помимо величин данной компоненты, в области смеси определены величины другой компоненты. Последние получаются в результате интерполяции величин той, другой, компоненты, определенных на ее собственной сетке, на сетку данной компоненты.

Из-за взаимопроникающего движения сетка компоненты может состоять, вообще говоря, из интервалов трех типов: чистого интервала (целиком принадлежащего однокомпонентной среде); смешанного интервала (часть принадлежит однокомпонентной среде, а часть - смеси); гетерогенного интервала (целиком принадлежащего смеси).

В численном методе для обеспечения необходимой точности расчета процессов сепарации и взаимопроникновения компонент движение границ смеси отслеживается и рассчитывается как движение особых поверхностей, разделяющих однокомпонентную среду и смесь.

Суть разностной схемы для гетерогенного интервала состоит в следующем.

По известным значениям параметров на момент времени t^n определяются скорости компонент в узлах сетки i-й компоненты на момент времени $t^{n+1}=t^n+\tau$

$$u_{\kappa i}^{n+1}=u_{\kappa i}^{n}-\tau f_{\kappa i}^{n}-\tau\kappa_{\kappa j i}^{n}\,\frac{u_{\kappa i}^{n}-u_{\kappa j}^{n}-\tau\left(f_{\kappa i}^{n}-f_{\kappa j}^{n}\right)}{\left[1+\tau\left(\kappa_{\kappa i j}^{n}+\kappa_{\kappa j i}^{n}\right)\right]}\ ; \qquad (26)$$

$$u_{\kappa j}^{n+1}=u_{\kappa j}^{n}-\tau f_{\kappa j}^{n}+\tau\kappa_{\kappa i j}^{n}\,\frac{u_{\kappa i}^{n}-u_{\kappa j}^{n}-\tau\left(f_{\kappa i}^{n}-f_{\kappa j}^{n}\right)}{\left[1+\tau\left(\kappa_{\kappa j i}^{n}+\kappa_{\kappa i j}^{n}\right)\right]}\ , \qquad (27)$$

где

$$\kappa_{\kappa j i}^{n}=\left(\frac{\rho_{c i}}{\rho}\cdot F\right)_{\kappa}^{n}\ ; \qquad (28)$$

$$f_{\kappa i}^{n}=\frac{(\bar{\alpha}\bar{P})_{(\kappa+0,5)i}^{n}-(\bar{\alpha}\bar{P})_{(\kappa-0,5)i}^{n}}{0,5\left(m_{(\kappa+0,5)i}^{n}+m_{(\kappa-0,5)i}^{n}\right)}\ ; \qquad (29)$$

$$f_{\kappa j}^{n}=\left(u_{\kappa j}^{n}-u_{\kappa i}^{n}\right)\xi_{\kappa j}^{n}\rho_{\kappa c i}^{n}+\frac{\rho_{\kappa c i}^{n}}{\rho_{\kappa c j}^{n}}\,\frac{(\bar{\alpha},\bar{P})_{(\kappa+0,5)j}^{n}-(\bar{\alpha}\bar{P})_{(\kappa-0,5)j}^{n}}{0,5\left(m_{(\kappa+0,5)i}^{n}+m_{(\kappa-0,5)i}^{n}\right)}\ ; \qquad (30)$$

$$\rho_{\kappa c i}^{n}=\frac{M_{(\kappa+0,5)i}+M_{(\kappa-0,5)i}}{\left(\tau_{(\kappa+1)i}^{n}\right)^{\nu}-\left(\tau_{(\kappa-1)i}^{n}\right)^{\nu}}\ ; \qquad (31)$$

$$\rho_{\kappa c j}^{n}=\frac{M_{(\kappa+0,5)j}+M_{(\kappa-0,5)j}}{\left(\tau_{(\kappa+1)i}^{n}\right)^{\nu}-\left(\tau_{(\kappa-1)i}^{n}\right)^{\nu}}\ ; \qquad (32)$$

$$\xi_{\kappa j}^{n}=\begin{cases}\dfrac{u_{(\kappa+1)j}^{n}-u_{\kappa j}^{n}}{m_{(\kappa+0,5)i}^{n}}\ , \text{ если } \quad \left(u_{\kappa j}^{n}-u_{\kappa i}^{n}\right)<0\ ;\\[2ex] \dfrac{u_{\kappa j}^{n}-u_{(\kappa-1)j}^{n}}{m_{(\kappa-0,5)i}^{n}}\ , \text{ если } \quad \left(u_{\kappa j}^{n}-u_{\kappa i}^{n}\right)>0\ ;\end{cases} \qquad (33)$$

$$m_{(\kappa+0,5)i}^{n}=\rho_{(\kappa+0,5)ci}^{n}\left(\tau_{(\kappa+1)i}^{n}-\tau_{\kappa i}^{n}\right)\ ; \qquad (34)$$

$$m_{(\kappa-0,5)i}^{n}=\rho_{(\kappa-0,5)ci}^{n}\left(\tau_{\kappa i}^{n}-\tau_{(\kappa-1)i}^{n}\right)\ . \qquad (35)$$

После этого рассчитываются новые координаты узлов сетки и диссипация кинетической энергии на шаге τ

$$\tau_{\kappa i}^{n+1}=\tau_{\kappa i}^{n}+\tau u_{\kappa i}^{n+1}\ ; \qquad (36)$$

$$\Delta Q_{\kappa j i}^{n+1}=\kappa_{\kappa j i}^{n}\left(u_{\kappa i}^{n+1}-u_{\kappa j}^{n+1}\right)^{2}\cdot\tau\ . \qquad (37)$$

На этапе расчета движения компоненты предполагается

$$b_i=0, \quad \frac{\partial_i Q_{ji}^{*}}{\partial t}=0, \quad \frac{\partial_i \alpha_i}{\partial t}=0, \qquad (38)$$

т.е. учитывается только силовое взаимодействие компонент (за счет R_{ji}). В ячейке своей сетки на этом этапе компонента деформируется так, как будто другой компоненты нет.

Предположения (38) позволяют определить индивидуальные термодинамические параметры компонент на момент времени t^{n+1} .

Пусть $\Delta u_i=u_{(\kappa+1)i}^{n+1}-u_{\kappa i}^{n+1}<0$.

Будем считать, что в этом случае в интервале находится ударная волна. Величины $(\bar{P}, \bar{E}, \bar{V})_{(\kappa+0,5)i}^{n+1}$ определяются в результате решения следующей системы трех уравнений:

$$\left[\bar{P}_{(\kappa+0,5)i}^{n+1}-P_{(\kappa+0,5)i}^{n}\right]\left[\bar{V}_{(\kappa+0,5)i}^{n+1}-V_{(\kappa+0,5)i}^{n}\right]=-\left(\Delta u_i\right)^{2}; \qquad (39)$$

$$\bar{E}_{(\kappa+0,5)i}^{n+1}=E_{(\kappa+0,5)i}^{n}+\frac{1}{2}\left(\Delta u_i\right)^{2}-P_{(\kappa+0,5)i}^{n}\left[\bar{V}_{(\kappa+0,5)i}^{n+1}-V_{(\kappa+0,5)i}^{n}\right]; \qquad (40)$$

$$\bar{P}_{(\kappa+0,5)i}^{n+1}=f_{P_i}\left(\bar{V}_{(\kappa+0,5)i}^{n+1}, \bar{E}_{(\kappa+0,5)i}^{n+1}\right). \qquad (41)$$

После этого $E_{(\kappa+0,5)i}^{n+1}$ находится из уравнения

$$E_{(\kappa+0,5)i}^{n+1}=E_{(\kappa+0,5)i}^{n}-0,5\left[\bar{P}_{(\kappa+0,5)i}^{n}+\bar{P}_{(\kappa+0,5)i}^{n+1}\right]\left[V_{(\kappa+0,5)i}^{n+1}-V_{(\kappa+0,5)i}^{n}\right]. \qquad (42)$$

Пусть теперь $\Delta u_i=u_{(\kappa+1)i}^{n+1}-u_{\kappa i}^{n+1}\geq 0$.

Будем считать, что в этом случае в интервале нет сильных разрывов. Величины $(P, E)_{(\kappa+0,5)i}^{n+1}$ получаются в результате интегрирования уравнения изэнтропы i-й компоненты с необходимой точностью.

После определения индивидуальных термодинамических параметров компонент осуществляется этап 2-го расчета, в результате которого получаются новые значения α_i^{n+1} , $P_i^{n+1}=P_j^{n+1}$, E_i^{n+1}, E_j^{n+1}, $\bar{\alpha}_i^{n+1}$, $\bar{P}_i^{n+1}=\bar{P}_j^{n+1}$, $\bar{E}_i^{n+1}$, $\bar{E}_j^{n+1}$.

На этом вычислительный цикл заканчивается.

Исследование устойчивости разностной схемы приводит к следующему ограничению на шаг по времени τ :

$$\tau_i\leq\frac{h_i}{G_{ci0}}\,\frac{\bar{\kappa}_{ji}h_i+4G_{ci0}}{4G_{ci0}}\ , \qquad (43)$$

где

$$G_{ci0}=\rho_{ci0}\left(\Gamma\left|\Delta u_i\right|+c_{i0}\right);$$

$\Gamma=const\approx 4$; c_{i0} – скорость звука;

$\kappa_{ji}=\kappa_{ji}/\rho_{ci0}$; h_i – шаг сетки по плоской массе.

Кроме критерия устойчивости (43) при определении τ из соображений точности учитываются ограничения на деформацию интервала и на изменение объемной концентрации в интервале.

В [4] получено точное решение задачи о движении поршня в гетерогенной смеси двух изотермических газов в случае отсутствия сил взаимодействия компонент. В качестве условия совместного деформирования компонент использовалось предположение (I4).

В переменных скорость, парциальная плотность компонент решение имеет следующий качественный характер.

Если поршень вдвигается в смесь с постоянной скоростью, то по смеси распространяется ударная волна в виде совокупности двух сильных разрывов, движущихся с разными скоростями. На поршне скорости компонент совпадают и равны скорости поршня. За фронтом первого сильного разрыва смесь существенно обогащена легкой компонентой, а за фронтом второго – тяжелой.

Если поршень выдвигается из смеси с постоянной скоростью, то по смеси распространяется волна разрежения в виде совокупности двух волн разрежения, распространяющихся по компонентам. Течение в этом случае является автомодельным. В области постоянного течения у поршня смесь существенно обогащена легкой компонентой.

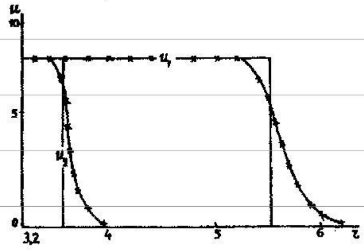

Рис.I. Решение задачи о поршне, вдвигающемся в смесь двух изотермических газов: ––– – точное решение; –×–×– – численное решение

На рис. I изображены точное и численное решения задачи о поршне, вдвигающемся со скоростью $u = 8$ в гетерогенную смесь двух изотермических газов с уравнениями состояния компонент $P_i = \rho_i c_i^2$, $c_i = const$. Момент времени $t = 0,3986$, параметры компонент:

$u_{10} = 0$, $c_1 = 9$, $\rho_{10} = I$, $\alpha_{10} = 0,6$, $P_{10} = 8I$;

$u_{20} = 0$, $c_2 = 3$, $\rho_{20} = 9$, $\alpha_{20} = 0,4$, $P_{20} = 8I$.

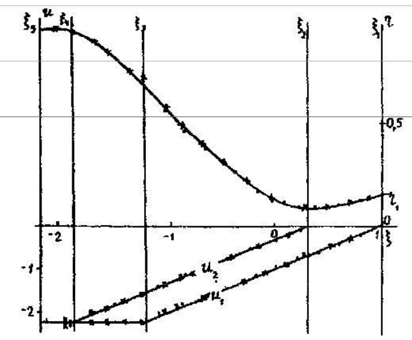

Рис.2. Решение задачи о поршне, выдвигающемся из смеси двух изотермических газов: ––– – точное решение; · · · – численное решение, $t = 0,5I5$; × × × – численное решение, $t = 0,893$

На рис. 2 в виде безразмерных зависимостей скоростей компонент и массовой концентрации первой (легкой) компоненты от автомодельной переменной $\xi = r/c_{10} \cdot t$ приведены точное и численное решения задачи о поршне, выдвигающемся с постоянной скоростью $u = 22,2222$ из гетерогенной смеси двух изотермических газов. Результаты расчета приведены на два момента времени $t_1 = 0,5I5$, $t_2 = 0,893$, параметры компонент:

$u_{10} = 0$, $c_1 = I0$, $\rho_{10} = 0,0I$, $\alpha_{10} = 0,6$, $P_{10} = I$;

$u_{20} = 0$, $c_2 = 3,3333$, $\rho_{20} = 0,09$, $\alpha_{20} = 0,4$, $P_{20} = I$.

В [5] в рамках гипотезы о локальном равенстве давлений компонент в предположении отсутствия сил взаимодействия за счет разницы скоростей компонент построено точное решение задачи о поршне для смеси двух политропных газов. Решение этой задачи имеет следующий качественный характер.

Если поршень вдвигается в смесь с постоянной скоростью, то по смеси распространяется ударная волна в виде совокупности двух сильных разрывов, движущихся с разными скоростями. На поршне скорости компонент совпадают и равны скорости поршня. За фронтом первого сильного разрыва смесь существенно обогащена легкой компонентой, а за фронтом второго – тяжелой. В отличие от случая смеси изотермических газов на каждом разрыве терпят скачок скорость и парциальная плотность обеих компонент.

Если поршень выдвигается из смеси с постоянной скоростью, то по смеси распространяется волна разрежения. Течение в этом случае является автомодельным. В зависимости от величины скорости поршня возможны два типа течения: с полной сепарацией компонент в волне разрежения, когда скорость поршня достаточно велика, и с частичной сепарацией компонент, когда скорость поршня достаточно мала. В последнем случае решение имеет вид волны разрежения, распространяющейся по смеси, которая сопряжена с ударной волной в виде совокупности двух сильных разрывов перед областью постоянного течения у поршня. В первом случае у поршня накапливается чистая легкая компонента, а во втором - смесь, обогащенная легкой компонентой.

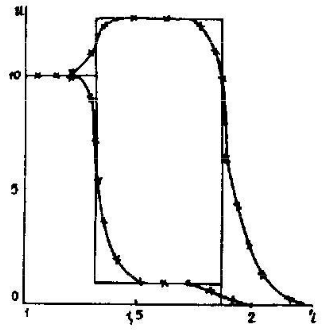

Рис.3. Решение задачи о поршне, вдвигающемся в смесь двух политропных газов: ——— -точное решение; —×—×— -численное решение

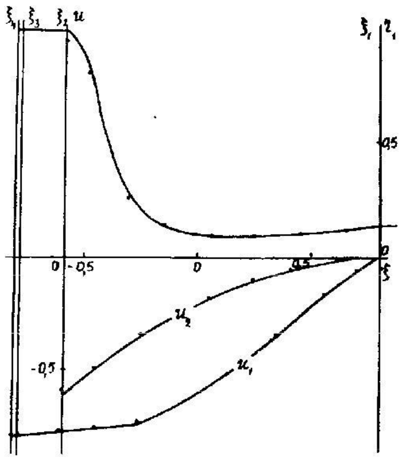

Рис.4. Решение задачи о поршне, выдвигающемся из смеси двух политропных газов. Режим с полной сепарацией компонент в волне разрежения: ——— - точное решение; • • • - численное решение

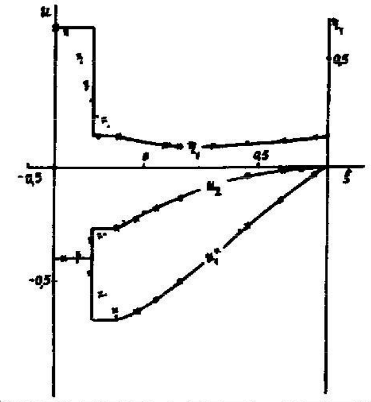

Рис.5. Решение задачи о поршне, выдвигающемся из смеси двух политропных газов. Режим с частичной сепарацией компонент: ——— - точное решение; • • • - численное решение, $t = 0,153$; × × × - численное решение, $t = 0,226$

На рис.3-5 изображены точные и численные решения задачи для смеси газов с уравнениями состояния $p_i = A_i \rho_i^3$ и следующими начальными значениями параметров компонент:

$u_{10} = 0$, $A_1 = 5000$, $\rho_{10} = 0,1$, $\alpha_{10} = 0,41$,
$p_{10} = 5$, $\eta_{10} = 0,13$;
$u_{20} = 0$, $A_2 = 50$, $\rho_{20} = 0,4642$, $\alpha_{20} = 0,59$,
$p_{20} = 5$, $\eta_{20} = 0,87$.

На рис.3 на момент времени $t = 0,088$ приведены точное и численное решения задачи о поршне, вдвигающемся в смесь со скоростью $u \doteq 10$. На рис.4,5 в виде безразмерных зависимостей скоростей компонент и массовой концентрации первой (легкой) компоненты от автомодельной переменной $\xi = r/c_{10}t$ приведены точные и численные решения задачи о поршне, выдвигающемся с постоянной скоростью $u = -9,8$ (рис.4) и $u = -5$ (рис.5) из гетерогенной смеси двух политропных газов. Для $u = -9,8$ реализуется режим течения с полной сепарацией компонент, а для $u = -5$ - с частичной сепарацией компонент. На рис.4 результаты приведены на момент времени $t = 0,198$, а на рис.5 - на моменты времени $t = 0,153$ и $t = 0,226$.

Список литературы

1. Яненко Н.Н., Солоухин Р.И., Папырин А.Н., Фомин В.М. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности компонент. Новосибирск: Наука, 1980.

2. Н и г м а т у л и н Р.И. Основы механики гетерогенных сред.М.:Наука,1978.

3. К у р о п а т е н к о В.Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики.- В кн.: Тр. мат. ин-та им. В.А.Стеклова,т.74,1966, с.107-137.

4. Б у р я к о в О.В.,К у р о п а т е н к о В.Ф. Распространение волны разрежения и ударной волны в гетерогенной смеси двух изотермических газов.- ВАНТ.Сер.Методики и программы численного решения задач математической физики, 1981,вып.2(8),с.3-7.

5. Б у р я к о в О.В.,К у р о п а т е н к о В.Ф. Решение задачи о движении поршня в смеси двух газов.- ВАНТ,Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики,1985, вып.1,с.13-18.

Статья поступила в редколлегию 31.01.86,
в редакцию 13.03.86.