

СТРУКТУРА ФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ГЕТЕРОГЕННОЙ СМЕСИ ДВУХ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ГАЗОВ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОМПОНЕНТ

О. В. Буряков, В. Ф. Куропатенко

В рамках гипотезы о локальном равенстве давлений компонент рассмотрен вопрос о структуре фронта ударной волны в смеси двух изотермических газов при наличии сил взаимодействия.

Установлено, что в зависимости от соотношения между параметрами задачи возможны четыре типа структуры фронта ударной волны.

В в е д е н и е

В [1] получено аналитическое решение задачи о движении плоского поршня в гетерогенной смеси двух изотермических газов в случае, когда силы взаимодействия компонент отсутствуют. Ударная волна распространяется по среде в виде двух сильных разрывов, движущихся с разными скоростями.

Представляет интерес вопрос о структуре фронта ударной волны при наличии сил взаимодействия компонент.

Для смеси двух идеальных газов вопрос о структуре фронта ударной волны при наличии силового взаимодействия и обмена теплом между компонентами рассматривался в [2].

В настоящей работе рассматривается вопрос о структуре фронта ударной волны при наличии силового взаимодействия компонент для гетерогенной смеси двух изотермических газов.

Установлено, что в зависимости от соотношения параметров задачи возможны четыре типа структуры фронта ударной волны. Тип структуры не зависит от величины силового взаимодействия компонент. Величина силового взаимодействия компонент оказывает влияние на ширину фронта ударной волны и форму профилей параметров течения во фронте.

1. Система уравнений плоского одномерного течения гетерогенной смеси двух изотермических газов

Система уравнений плоского одномерного течения гетерогенной смеси двух изотермических газов имеет следующий вид [1]:

$$\frac{\partial \rho_{ci}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{ci} u_i}{\partial r} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_{ci} u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{ci} u_i^2}{\partial r} + \frac{\partial a_i P_i}{\partial r} = R_{ji}; \quad (2)$$

$$\rho_{ci} = a_i \rho_i, \quad T_i = \text{const}, \quad P_i = c_i^2 \rho_i; \quad (3)$$

$$\rho = \rho_{ci} + \rho_{cj}, \quad \eta_i = \frac{\rho_{ci}}{\rho}. \quad (4)$$

Здесь a_i — объемная концентрация; η_i — массовая концентрация; ρ_i — физическая плотность; ρ_{ci} — парциальная плотность; T_i — температура; P_i — давление; u_i — скорость; $c_i = \text{const}$ — изотермическая скорость звука; ρ — плотность смеси; R_{ji} — интенсивность силового взаимодействия компонент. Нижний индекс i означает, что данная величина относится к i -й компоненте.

В качестве условия совместного деформиро-

вания приемем гипотезу о локальном равенстве давлений компонент

$$P_1 = P_2 = P \quad (5)$$

Для гетерогенной среды справедливо следующее соотношение:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\eta_i}{\rho_i} + \frac{\eta_j}{\rho_j} \quad (6)$$

Из (3)-(6) следуют соотношения

$$\rho_i = \frac{\rho}{c_i^2} (c_i^2 \eta_1 + c_2^2 \eta_2); \quad (7)$$

$$P_i = P = (c_1^2 \eta_1 + c_2^2 \eta_2) \rho; \quad (8)$$

$$a_i = \frac{c_i^2 \eta_i}{c_1^2 \eta_1 + c_2^2 \eta_2} \quad (9)$$

Учтем (4) и подставим (8), (9) в (1),(2), тогда получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \rho_{ci}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{ci} u_i}{\partial r} = 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho_{ci} u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{ci} u_i^2}{\partial r} + c_i^2 \frac{\partial \rho_{ci}}{\partial r} = R_{ji}; \quad (11)$$

$i=1, 2.$

2. Структура фронта ударной волны в гетерогенной смеси двух изотермических газов при наличии сил взаимодействия компонент

Для практики важно знать, какой характер имеет течение гетерогенной среды при наличии обмена импульсом и энергией между компонентами. В частности, представляет интерес вопрос о структуре фронта ударной волны при наличии силового взаимодействия компонент.

В качестве отправной точки нашего исследования будем рассматривать задачу о поршне,двигающемся с постоянной скоростью в гетерогенную смесь двух изотермических газов. Как установлено в [1], такой режим воздействия на гетерогенную среду порождает в ней ударную волну. В случае отсутствия сил взаимодействия компонент ($R_{ji} = 0$) ударная волна распространяется по среде в виде совокупности двух сильных разрывов, движущихся с разными скоростями [1] и, таким образом, при $R_{ji} = 0$ не существует системы координат, в которой течение было бы стационарным.

Наличие сил взаимодействия ($R_{ji} \neq 0$) меняет дело.

Характер влияния сил взаимодействия компонент в зоне релаксации скоростей на скорости распространения сильных разрывов таков, что скорость распространения первого сильного разрыва уменьшается, а скорость распространения второго сильного разрыва увеличивается. Наконец наступает момент времени t^* , когда скорости их распространения становятся одинаковыми и равными D .

С момента времени t^* течение будет стационарным в системе координат, движущейся с постоянной скоростью D .

Время t^* выхода на стационарный режим течения зависит от величины силового взаимодействия компонент. Как будет показано ниже, окончательный вид стационарной структуры решения существенно зависит от соотношения параметров задачи.

Пусть скорость поршня $u_n > 0$, начальное состояние гетерогенной среды удовлетворяет условиям

$$u_i = 0, \quad \rho_{ci} = \rho_{ci0}, \quad i=1, 2. \quad (12)$$

В системе уравнений (10), (11) перейдем от неподвижной системы координат к системе координат, движущейся со скоростью D

$$\xi = r - Dt \quad (13)$$

В новой системе координат получим

$$\frac{\partial \rho_{ci}}{\partial t} - D \frac{\partial \rho_{ci}}{\partial \xi} + \frac{\partial \rho_{ci} u_i}{\partial \xi} = 0; \quad (14)$$

$$\frac{\partial \rho_{ci} u_i}{\partial t} - D \frac{\partial \rho_{ci} u_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \rho_{ci} u_i^2}{\partial \xi} + c_i^2 \frac{\partial \rho_{ci}}{\partial \xi} = R_{ji} \quad (15)$$

Введем безразмерные переменные

$$z^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2}, \quad \bar{P} = \frac{P}{\rho_0 c_1^2}, \quad \bar{D} = \frac{D}{c_1}, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{c_1}, \quad \bar{u}_n = \frac{u_n}{c_1} \quad (16)$$

(черту у безразмерных переменных далее опускаем).

Для стационарного течения в безразмерных переменных (16) система уравнений (14),(15) примет следующий вид:

$$(u_i - D) \frac{d \rho_{ci}}{d \xi} + \rho_{ci} \frac{d u_i}{d \xi} = 0; \quad (17)$$

$$\rho_{ci} (u_i - D) \frac{du_i}{d\xi} + \gamma_i^2 \frac{d\rho_{ci}}{d\xi} = R_{ji}, \quad (18)$$

$$\text{где } i = 1, 2; \quad \gamma_i = \begin{cases} 1, & i = 1; \\ z, & i = 2. \end{cases}$$

R_{ji} возьмем в следующем виде:

$$R_{ji} = \frac{\rho_{ci} \rho_{cj}}{\rho} F(u_j - u_i), \quad (19)$$

$$i=1, 2; \quad i \neq j.$$

Из уравнений (17), (18) следует, что

$$\begin{aligned} u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow 0 & \text{ при } z \rightarrow \infty; \\ u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow u_n & \text{ при } z \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (20)$$

Введем обозначения

$$v_i = u_i - D, \quad v_n = u_n - D, \quad v_0 = -D. \quad (21)$$

Система уравнений (17), (18) допускает следующие интегралы:

$$m_i = \rho_{ci0} v_0 = \rho_{ci} v_i = \rho_{cin} v_n; \quad (22)$$

$$\begin{aligned} M &= m_1 \left(v_0 + \frac{1}{v_0} \right) + m_2 \left(v_0 + \frac{z^2}{v_0} \right) = \\ &= m_1 \left(v_1 + \frac{1}{v_1} \right) + m_2 \left(v_2 + \frac{z^2}{v_2} \right) = \\ &= m_1 \left(v_n + \frac{1}{v_n} \right) + m_2 \left(v_n + \frac{z^2}{v_n} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Из (23) следует уравнение для определения D :

$$D^2 - u_n D = \eta_{10} + z^2 \eta_{20}. \quad (24)$$

Используя (22), запишем систему уравнений (17), (18) в следующем виде:

$$\begin{aligned} m_1 \left(1 - \frac{1}{v_1^2} \right) \frac{dv_1}{d\xi} &= R(v_2 - v_1); \\ m_2 \left(1 - \frac{z^2}{v_2^2} \right) \frac{dv_2}{d\xi} &= R(v_1 - v_2), \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$R = \frac{m_1 m_2 F}{m_1 v_2 + m_2 v_1}. \quad (26)$$

Точки $\xi = \pm \infty$ являются стационарными точками системы уравнений (25). В плоскости (v_1, v_2) этим точкам отвечают сложные особые точки $v_1 = v_2 = v_0$ и $v_1 = v_2 = v_n$ обыкновенного дифференциального уравнения

обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dv_1}{dv_2} = - \frac{(v_2 - v_1) v_1^2 m_2 (v_2^2 - z^2)}{m_1 (v_1^2 - 1) (v_2 - v_1) v_2^2}. \quad (27)$$

Нас будут интересовать решения уравнения (27), для которых в любой малой окрестности особой точки $v_2 \neq v_1$. В этом случае числитель и знаменатель можно сократить на множитель $(v_2 - v_1)$. Интегрирование получающегося в результате обыкновенного дифференциального уравнения, как и следует ожидать, приводит к уравнению (23), связывающему v_1 и v_2 . Направление выхода из особой точки (v_0, v_0) и направление входа в особую точку (v_n, v_n) определяются из соотношения (23). Используя связь (23) между v_1 и v_2 , можно проинтегрировать любое из уравнений системы (25). Из вида системы обыкновенных дифференциальных уравнений (25) следует, что, если в области интегрирования имеются точки ξ , в которых выполняется одно из условий

$$v_1^2 = 1; \quad (28)$$

$$v_2^2 = z^2, \quad (29)$$

то в этих точках производные от v_1 или v_2 обращаются в бесконечность. Это отвечает наличию сильных разрывов в решении.

Пусть $z < 1$, т.е. первая компонента легкая а вторая — тяжелая.

Найдем критические соотношения параметров задачи, при которых имеют место условия (28), (29). Условие (28) обязательно выполняется при

$$D > 1. \quad (30)$$

Действительно, в начальной точке $u_1 = 0$, т.е. $\frac{1}{v_2} = \frac{1}{D} < 1$. Если $D = 1$, то условие (28) выполняется уже в начальной точке. Пусть $D > 1$, тогда $\frac{1}{v_2} < 1$, но, с другой стороны, для конечной точки из уравнения (24) получим $(D - u_n) D = v_n D = \eta_{10} + z^2 \eta_{20} < 1$ и, следовательно, $v_n^2 < 1$, т.е. $\frac{1}{v_n^2} > 1$. Поэтому в области интегрирования существует точка, где $\frac{1}{v_1^2} = 1$, т.е. выполняется условие (28).

Рассмотрим критический случай: $D = 1$ и подставим это значение D в уравнение (24), тогда получим

$$u_n = (1 - z^2) \eta_{20}. \quad (31)$$

Итак, если $u_n > (1 - z^2) \eta_{20}$, то в решении присутствует сильный разрыв в легкой компоненте.

В силу начальных условий (12) и условия (30) от точки $\xi = \infty$ вплоть до точки ξ_1 , в которой стоит этот сильный разрыв, среда находится в невозмущенном состоянии (12).

Соотношения на сильном разрыве в точке ξ_1 имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \rho_{c21} &= \rho_{c20}, \quad u_{21} = 0; \\ \rho_{c11} &= \rho_{c10} D^2, \quad (u_{11} - D) D + 1 = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Рассмотрим теперь условие (29).

Рассуждая так же, как в предыдущем случае, можно показать, что условие (29) обязательно выполнится в некоторой точке ξ_2 , если

$$D \leq u_n + z. \quad (33)$$

Рассмотрение критического случая $D = u_n + z$ приводит к следующему соотношению между параметрами задачи:

$$u_n = \frac{1 - z^2}{z} \eta_{10}. \quad (34)$$

При $u_n > \frac{1 - z^2}{z} \eta_{10}$ в решении присутствует сильный разрыв в тяжелой компоненте.

В силу наличия обмена импульсом между компонентами в областях непрерывного течения и условия (33) для стационарности этого сильного разрыва необходимо, чтобы от точки ξ_2 , в которой стоит этот сильный разрыв, вплоть до точки $\xi = -\infty$ гетерогенная среда находилась в конечном состоянии

$$u_1 = u_2 = u_n, \quad \rho_{c1} = \rho_{c1n}, \quad \rho_{c2} = \rho_{c2n}. \quad (35)$$

Соотношения на сильном разрыве в точке ξ_2 имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_{c12} &= \rho_{c11} = \rho_{c1n}, \quad u_{12} - u_1 = u_n; \\ \rho_{c22} &= \rho_{c21} = \rho_{c2n} \frac{u_2 - D}{u_n - D}, \quad u_n = D + \frac{z^2}{u_2 - D}. \end{aligned} \quad (36)$$

Из соотношений (36) определяется скорость u_2 перед сильным разрывом

$$u_2 = D + \frac{z^2}{u_n - D}, \quad (37)$$

по которой находится точка ξ_2 .

Из условий (31), (34) следуют четыре возможных типа структуры фронта ударной волны в гетерогенной смеси двух изотермических газов при наличии силового взаимодействия компонент.

1. Пусть $u_n > (1 - z^2) \eta_{20}$ и $u_n > \frac{1 - z^2}{z} \eta_{10}$.

В этом случае свяжем подвижную систему координат с первым разрывом. Решение имеет следующую структуру.

В точке $\xi_1 = 0$ находится сильный разрыв (32). Далее, вплоть до точки ξ_2 , в которой выполняется условие (37), решение получается в результате численного интегрирования одного из уравнений системы (25) с использованием связи (23). В точке ξ_2 стоит сильный разрыв (36), за которым имеют место условия (35).

Для гетерогенной среды с параметрами

$$\eta_{10} = 0,2, \quad z^2 = 0,1 \quad (38)$$

данная структура фронта ударной волны реализуется, например, при $u_n = 2$.

Профили $u_n(\xi)$, $P(\xi)$, $\eta_1(\xi)$, отвечающие параметрам гетерогенной среды (38) и данной скорости поршня, изображены на рис.1.

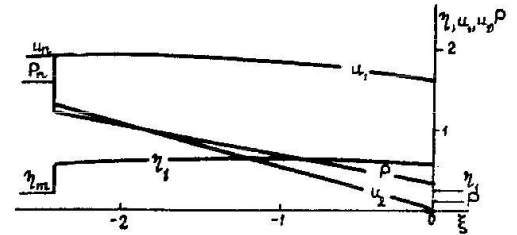


Рис. 1. Структура фронта ударной волны в смеси двух изотермических газов: $\eta_{10} = 0,2$; $z^2 = 0,1$; $u_n = 2$; $F = 1$; $u_n > (1 - z^2) \eta_{20}$;

$$u_n > \frac{1 - z^2}{z} \eta_{10}$$

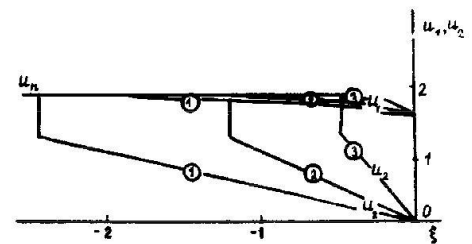


Рис. 2. Профили скоростей компонент во фронте ударной волны. 1-й тип структуры фронта: 1 - $F = 1$; 2 - $F = 2$; 3 - $F = 10$

На рис. 2 показано, как меняются профили скоростей компонент в рамках данной структуры фронта ударной волны с увеличением коэффициента сопротивления F в (19).

2. Пусть $u_n < (1 - z^2) \eta_{20}$, $u_n > \frac{1 - z^2}{z} \eta_{10}$.

В этом случае $D < 1$ и сильный разрыв в легкой компоненте отсутствует. Решение строится следующим образом. Отстаем от точки $\xi = \infty$ в некоторую точку ξ_0 , в которой $u_{10} = 10^{-6}$.

Точка ξ_0 находится так. В окрестности точки v_0 первое уравнение системы уравнений (25) с помощью (23) может быть представлено (с точностью до членов первого порядка малости по v_1) в виде

$$\frac{dv_1}{d\xi} = -\Gamma_0 (v_1 - v_0), \quad (39)$$

где

$$\Gamma_0 = F \frac{m_1 v_0 (v_0^2 - 1) + m_2 v_0 (v_0^2 - z^2)}{(m_1 + m_2) (v_0^2 - 1) (v_0^2 - z^2)}. \quad (40)$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$v_1 - v_0 = e^{-\Gamma_0 \xi}. \quad (41)$$

Из этого уравнения, полагая $v_1 - v_0 = u_{10} = 10^{-6}$, найдем ξ_0 .

От точки ξ_0 до точки ξ_2 , в которой выполняется условие (37) решение получается в результате численного интегрирования первого уравнения системы уравнений (25) с использованием связи (23) с начальными данными $u_1 = u_{10} = 10^{-6}$ в точке ξ_0 .

В точке ξ_2 стоит сильный разрыв (36), за которым имеют место условия (35).

Для гетерогенной среды с параметрами (28) данная структура фронта ударной волны реализуется, например, при $u_n = 0,6$.

Профили $u_i(\xi)$, $P(\xi)$, $\eta_1(\xi)$, отвечающие этому случаю, изображены на рис. 3.

На рис. 4 показано, как меняются профили скоростей компонент в рамках данной структуры фронта ударной волны с увеличением коэффициента сопротивления F в (19).

3. Пусть $u_n < (1 - z^2) \eta_{20}$, $u_n < \frac{1 - z^2}{z} \eta_{10}$.

В области интегрирования любого из уравнений (25) с использованием связи (23) от точки ξ_0 (смотри предыдущий случай) до точки ξ_n , где выполняются условия (35), сильные разрывы отсутствуют.

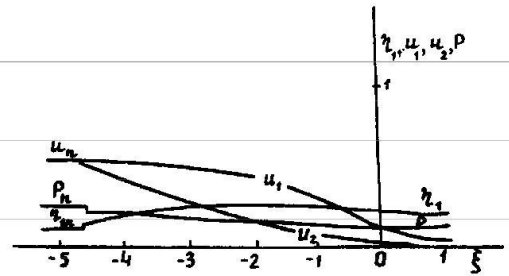


Рис. 3. Структура фронта ударной волны в смеси двух изотермических газов: $\eta_{10} = 0,2$; $z^2 = 0,1$; $u_n = 0,6$; $F = 1$; $u_n < (1 - z^2) \eta_{20}$; $u_n > \frac{1 - z^2}{z} \eta_{10}$

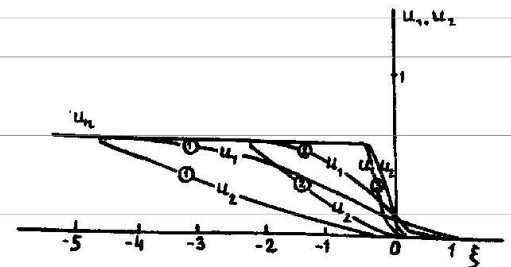


Рис. 4. Профили скоростей компонент во фронте ударной волны. 2-й тип структуры фронта: 1 - $F = 1$; 2 - $F = 2$; 3 - $F = 10$

Для гетерогенной среды с параметрами (28) данная структура фронта ударной волны реализуется, например, при $u_n = 0,3$.

Профили $u_i(\xi)$, $P(\xi)$, $\eta_1(\xi)$, отвечающие этому случаю, изображены на рис. 5.

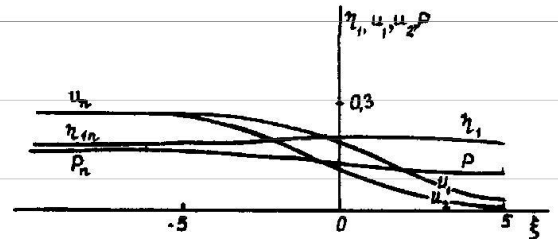


Рис. 5. Структура фронта ударной волны в смеси двух изотермических газов: $\eta_{10} = 0,2$; $z^2 = 0,1$; $u_n = 0,3$; $F = 1$; $u_n < (1 - z^2) \eta_{20}$; $u_n < \frac{1 - z^2}{z} \eta_{10}$

На рис. 6 показано, как меняются профили скоростей компонент в рамках данной структуры фронта ударной волны с увеличением коэффициента сопротивления F в (19).

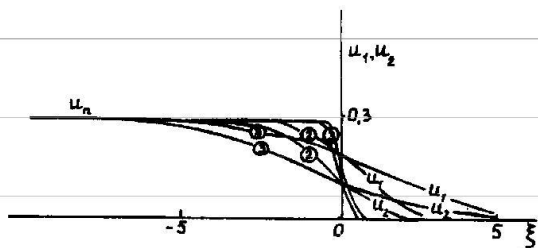


Рис. 6. Профили скоростей компонент во фронте ударной волны. 3-й тип структуры фронта: 1 - $F = 1$; 2 - $F = 2$; 3 - $F = 10$

4. Пусть

$$u_n > (1 - z^2) \eta_{20}, \quad u_n < \frac{1 - z^2}{z} \eta_{10}.$$

Сильный разрыв в тяжелой компоненте отсутствует. Решение имеет следующую структуру.

В точке $\xi_1 = 0$ находится сильный разрыв (32). Далее, вплоть до точки ξ_n , в которой выполняются условия (35), решение получается в результате численного интегрирования одного из уравнений системы уравнений (25) с использованием связи (23).

Для гетерогенной среды с параметрами

$$\eta_{10} = 0,503, \quad z^2 = 0,1. \quad (42)$$

данная структура фронта ударной волны реализуется, например, при $u_n = 1$.

Профили $u_i(\xi)$, $P(\xi)$, $\eta_1(\xi)$, отвечающие этому случаю, изображены на рис. 7.

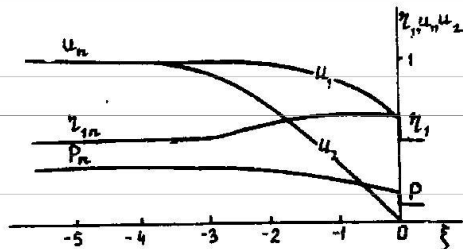


Рис. 7. Структура фронта ударной волны в смеси двух изотермических газов: $\eta_{10} = 0,503$; $z^2 = 0,1$; $u_n = 1$; $F = 1$; $u_n > (1 - z^2) \eta_{20}$;

$$u_n < \frac{1 - z^2}{z} \eta_{10}$$

На рис. 8 показано, как меняются профили скоростей компонент в рамках данной структуры фронта ударной волны с увеличением коэффициента сопротивления F в (19).

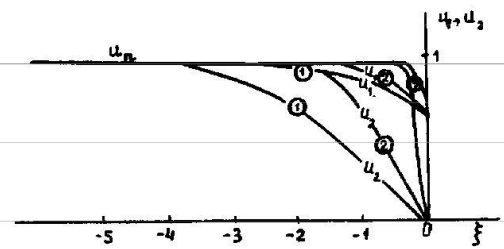


Рис. 8. Профили скоростей компонент во фронте ударной волны. 4-й тип структуры фронта: 1 - $F = 1$; 2 - $F = 2$; 3 - $F = 10$

В заключение отметим, что вопросы структуры фронта ударной волны при наличии силового взаимодействия и обмена теплом между компонентами рассматривались в [2] для смеси двух идеальных газов. В [2] установлено следующее.

1. Если $v_0 < a_{10}$, то существует непрерывный переход из начального состояния в конечное, причем при $v_n < a_{2n}$ интегральная кривая проходит через особую точку типа узла при конечном ξ . Здесь a_i - скорость звука i -й компоненты.

2. Если $v_0 > a_{10}$, то решение имеет разрыв (типа (32)) с последующей единственной непрерывной зоной релаксации, причем, если $v_n < a_{2n}$, то после скачка интегральная кривая при конечном ξ проходит через особенность типа узла. Отличие рассмотренного случая смеси двух изотермических газов состоит в том, что при определенных значениях параметров задачи возможны структуры с сильным разрывом в тяжелой компоненте.

Подчеркнем также то обстоятельство, что тип структуры фронта ударной волны определяется соотношением между параметрами задачи и не зависит от величины силового взаимодействия компонент.

Величина силового взаимодействия оказывает влияние на ширину фронта ударной волны и форму профилей параметров течения во фронте.

Список литературы

1. Буряков О.В., Куропатенко В.Ф. Распространение волны разрежения и ударной волны в гетерогенной смеси двух изотермических газов. - ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики, 1981, вып. 2(8), с. 3-7.

2. Руев Г.А., Фомин В.М., Яненко Н.Н. Структура ударной волны в смеси газов. - Докл. АН СССР. Сер. Математика, 1981, т.261, № 2.

Статья поступила в редколлегию 03.02.85, в редакцию 14.03.85.