

ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ДЛЯ РАСЧЕТА ОТКОЛЬНЫХ РАЗРУШЕНИЙ

Куропатенко В.Ф., Серебряков А.В.¹

e-mail: anton@mail.snz.ru

Задача ставится следующим образом (см. рис.1): имеется неподвижная пластина мишень с геометрическими размерами $H_T \times L_T$ и пластина ударник с геометрическими размерами $H_I \times L_I$, материалы тел одинаковы, плоскости соударения параллельны, а их центры совпадают. Задача симметрична относительно плоскости YOZ проходящей через середины пластин. Будем считать среду идеальной и ее движение описывать законами сохранения [1]

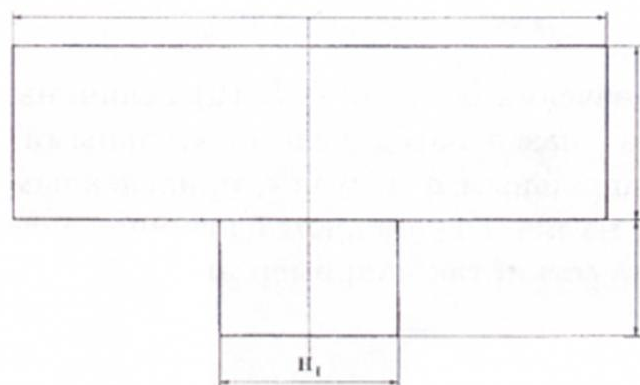


Рис. 1: Задача о соударении

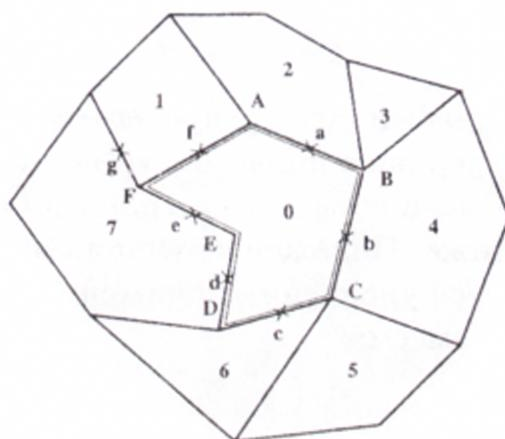


Рис. 2: Произвольная ячейка

Система законов сохранения замыкается простейшим уравнением состояния (УРС) конденсированной среды в безразмерном виде:

$$P = (\gamma - 1)\rho E + \rho - 1, \quad a^2 = \gamma\rho P + \rho. \quad (1)$$

Рассмотрим общий случай ячейки, у которой может быть произвольное количество граней. Ячейка задана набором из n вершин (рис.2). Примем обозначения аналогичные [2]: цифры (0, 1, ...) нумеруют ячейки и ассоциированы с их центрами; заглавные латинские буквы (A, B, ...) обозначают вершины ячеек по часовой стрелке;

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 04-01-00050.

малые латинские буквы (a, b, \dots) обозначают центры граней; \vec{n} - вектор нормали (\vec{n}_{a0} - нормаль к грани a внешняя к ячейке 0), l - длина грани (l_a - длина грани центр которой обозначен как a), m_0 - масса соответствующей ячейки, \vec{u}_0 - скорость в ячейке 0. Механические и термодинамические величины задаются в центрах ячеек, т.е. на одной сетке.

Рассмотрим выделенную ячейку 0 содержащую 6 вершин. Разностные законы сохранения запишем в виде:

$$\begin{aligned} \rho_0^{n+1} &= \frac{\theta_0^n}{\theta_0^{n+1}} \rho_0^n, \quad \vec{u}_0^{n+1} = \vec{u}_0^n - \frac{\tau}{m_0} \sum_{j=a}^f (P_n \vec{n}_{0j} l)_j^*, \\ \epsilon_0^{n+1} &= \epsilon_0^n - \frac{\tau}{m_0} \sum_{j=a}^f (P_n \vec{u} \vec{n}_{0j} l)_j^*. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь: индекс j пробегает все значения от a до f . В (2) величины с верхним индексом * ("звездочка") называются "вспомогательными" и вычисляются на грани по специальным формулам, приведенным ниже. Положение вершин ячеек на $n+1$ временном слое определяются уравнением движения узлов сетки, так например для вершины A имеем:

$$\vec{r}_A^{n+1} = \vec{r}_A^n + \vec{u}_A^* \tau,$$

Вспомогательные величины вычисляются по разным формулам в зависимости от типа течения: происходит ли сжатие вещества и как следствие рост энтропии (течение с ударными волнами) или течение содержит только области гладкого течения, разделенные слабыми разрывами (течения с волнами разрежения). Рассмотрим процедуру определения вспомогательных величин на грани a , между ячейками 1 и 0. Критерием наличия ударной волны, может служить выполнение неравенства $(\vec{u}_0 - \vec{u}_1) \vec{n}_{0a} > 0$. В этом случае на границе между ячейками основной сетки, в качестве вспомогательных величин \vec{u}_{0a}^* и P_{0a}^* , возьмем скорость и давление за фронтом ударной волны, значения перед фронтом которой известны. Эти величины должны удовлетворять законам сохранения, в виде условий Ренкина-Гюгонно:

$$\begin{aligned} (V_0 - V_1)W &= -(\vec{u}_0 - \vec{u}_1) \vec{n}, \quad (\vec{u}_0 - \vec{u}_1)W = (\vec{P}_{n0} - \vec{P}_{n1}), \\ (\epsilon_0 - \epsilon_1)W &= (\vec{P}_{n0} \vec{u}_0 - \vec{P}_{n1} \vec{u}_1), \end{aligned} \quad (3)$$

Будем считать, что нормаль \vec{n} к поверхности фронта ударной волны совпадает с нормалью к грани \vec{n}_{0a} , тогда $\vec{P}_{n0} = \vec{n}_{0a} P_0$.

В случае $P_0 > P_1$, следуя [3], будем считать состояние 1 состоянием перед разрывом, а в качестве скорости за разрывом возьмем \vec{u}_0 (если же $P_0 < P_1$, то наоборот). Скорость \vec{u}_0 и давление, полученное из уравнений (3), берутся в качестве вспомогательных величин \vec{u}_{0a}^* и P_{0a}^* . Для УРС (1) из системы (3) следует выражение для давления за ударной волной,

$$|W| = \rho \frac{\gamma + 1}{4} |\vec{u}_1 - \vec{u}_0| \vec{n} + \sqrt{\left(\rho \frac{\gamma + 1}{4} |\vec{u}_1 - \vec{u}_0| \vec{n} \right)^2 + a_1^2}.$$

$$P_a^* = P_1^n + |W| * (u_0^n \vec{n}_{a0} - u_1^n \vec{n}_{a0}),$$

В случае $(\vec{u}_0 - \vec{u}_1) \vec{n}_{0a} \leq 0$ вспомогательные величины \vec{u}_a^* и P_a^* находятся из разностных уравнений

$$\vec{u}_a^* = \frac{\vec{u}_0^n + \vec{u}_1^n}{2} - \frac{\tau^*}{m_a} (\vec{P} n_{n1} - \vec{P} n_{n0}),$$

$$P_0^* = \frac{P_0^n + P_1^n}{2} - a^2 \frac{\tau^*}{m_a} (\vec{u}_1^n - \vec{u}_0^n) \vec{n}_{0a}.$$

Здесь: τ^* вспомогательный шаг по времени, будем считать его $\tau^* = \tau/2$.

Подавления немонотонности численного решения на слабых разрывах осуществлялось по алгоритму из [4].

Для проверки численного метода использовалось аналитическое решение задачи о соударении пластин [1]. Задача ставится следующим образом: имеются две одинаковых пластины толщиной L и бесконечной длиной. Считаем материалы одинаковыми, а задачу рассматриваем в симметричной постановке. Левая пластина (рис.3) имеет скорость $u > 0$, правая $-u$. Контакт пластин происходит в точке $x = 0$. Пластины являются толстыми

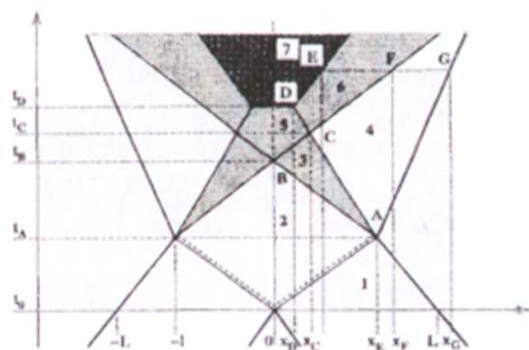


Рис. 3: Траектории разрывов и области решения

пластинами, а задачу рассматриваем в симметричной постановке. Левая пластина (рис.3) имеет скорость $u > 0$, правая $-u$. Контакт пластин происходит в точке $x = 0$. Пластины являются толстыми

$P = 0$, плотность $\rho = 1$, скорость звука $c = 1$. Показатель адиабаты $\gamma = 3$.

На рис. 3 приняты следующие обозначения: 1. Исходное вещество, 2. Область за фронтом УВ, 3. Отраженная ВР, 4. Постоянное течения с нулевым давлением, 5. Область интерференции, 6. Волна разрежения, отраженная от противоположной границы, 7. Зона откола (область пыли).

В момент столкновения пластин (область 1) образуется две ударных волны, распространяющихся влево и вправо (траектория $0A$), а также контактный разрыв (траектория $0D$) который, из-за симметричности постановки задачи, покоится. Из системы (3) при $u_1 < 0$ и $u_0 = 0$ находим скорость УВ, момент и координату выхода её на правую границу пластин:

$$D = \sqrt{u_1^2 + c_1^2}, \quad t_A = \frac{L}{D - u_1}, \quad x_A = L \frac{D}{D + u_1}.$$

При выходе УВ на границу она отражается центрированной волной разрежения. Решение в области 3 имеет вид:

$$u_3 = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{x - x_A}{t - t_A} + c_2 \right), \quad c_3 = \frac{2}{\gamma + 1} c_2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(\frac{x - x_A}{t - t_A} \right)$$

Из уравнения траектории слабого разрыв AB $x = x_A - (t - t_A)c_2$ находится момент его выхода на плоскость симметрии $t_B = t_A + x_A/c_2$ при $(x = 0)$. При $t > t_B$ происходит взаимодействие волн разрежения. В области 4 течение изэнтропично, а давление $P_4 = P_0 = 0$ то

$$\rho_4 = \rho_2 \left(\frac{\gamma P_2 + \rho_{0k} c_{0k}^2}{\rho_{0k} c_{0k}^2} \right)^{-1/\gamma} \quad u_4 = \frac{2c_2}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{\rho_{0k} c_{0k}^2}{\rho_1 c_1^2} \right)^{\gamma - 1/2\gamma} \right)$$

Траектории границы AF и разрыва AC имеют вид:

$$x = x_A + u_4(t - t_A), \quad x = x_A - c_4(t - t_A).$$

Поскольку характеристики прямые то, координаты точки C определяются уравнениями:

$$t = t_A + \frac{2x_A}{c_2 - (u_4 - c_4)}, \quad x = x_A \left(1 + 2 \frac{(u_4 - c_4)}{c_2 - (u_4 - c_4)} \right)$$

В области 5 давление P_5 и скорость u_5 имеют вид

$$P_5 = \frac{1}{\gamma} \left(\rho \left(\frac{x_A}{t - t_A} \right)^2 - \rho_{0k} c_{0k}^2 \right), \quad u_5 = \frac{x}{t - t_A},$$

при $t > t_C$ $P_5 < 0$.

Когда давление P_5 становится равным пределу прочности на растяжение P_σ , вещество во всей области 5 разрушается т.к. P_5 зависит только от t . В момент разрушения давление скачком меняется с P_σ до $P = 0$ и от зоны откола в среду распространяется УВ, которая в свою очередь, может отразившись от противоположной границы ВР породить новый откол. Однако, в данной постановке параметры подобраны таким образом, что создаются условия для существования лишь одной откольной области. Разрушение может и не произойти, если давление P_5 меньше минимального давления, достигаемого в точку пересечения характеристики АС и плоскости $x = 0$, определяемого выражением:

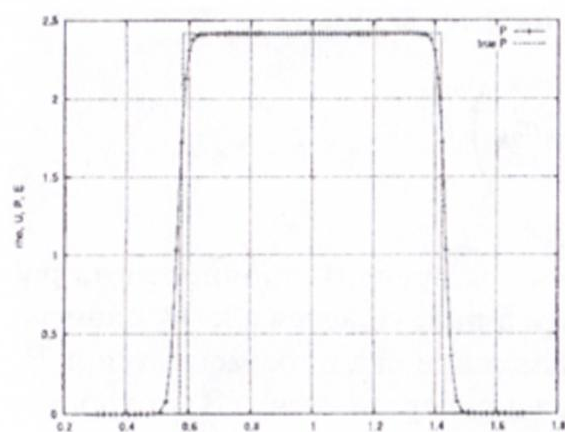
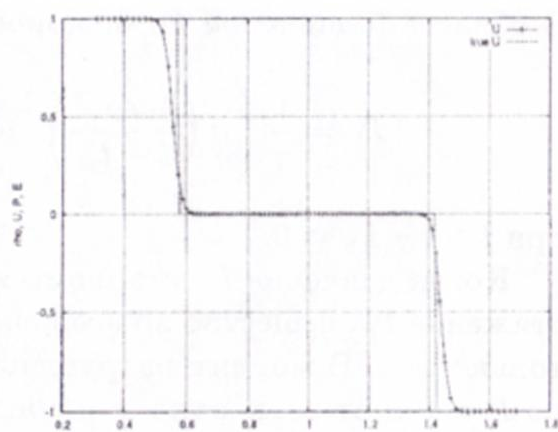
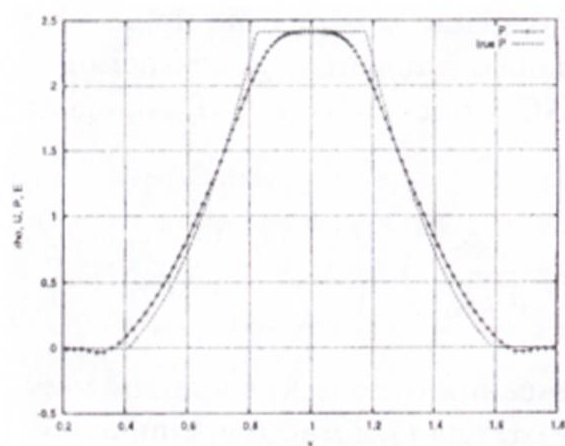
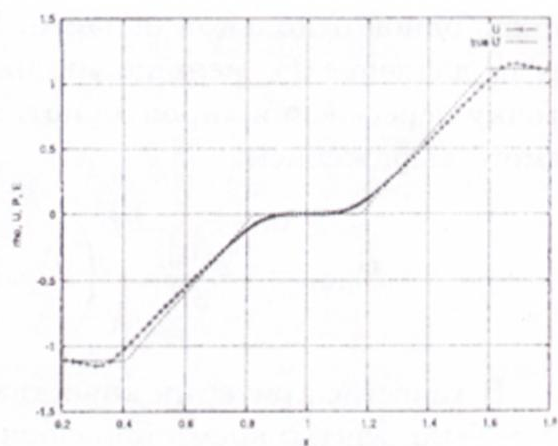
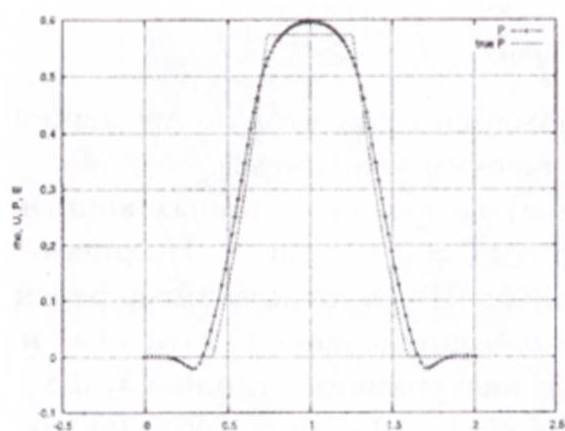
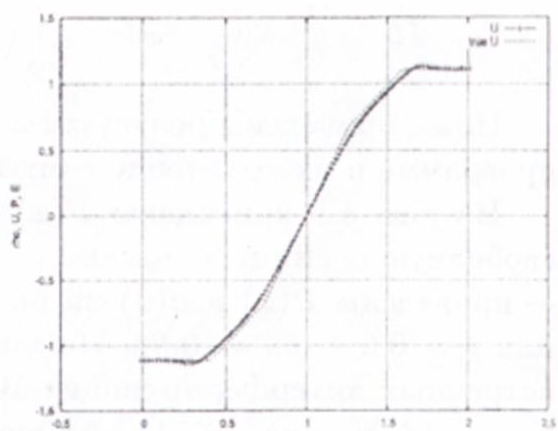
$$P_{min} = \frac{\rho_{0k} c_{0k}^2}{3} \left(\left(2 - \left(1 + \frac{3P_2}{\rho_{0k} c_{0k}^2} \right)^{1/3} \right)^3 - 1 \right)$$

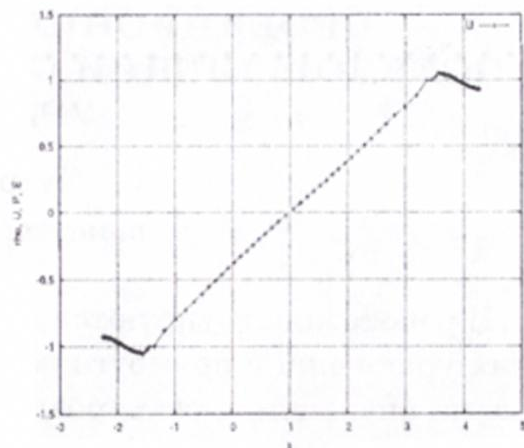
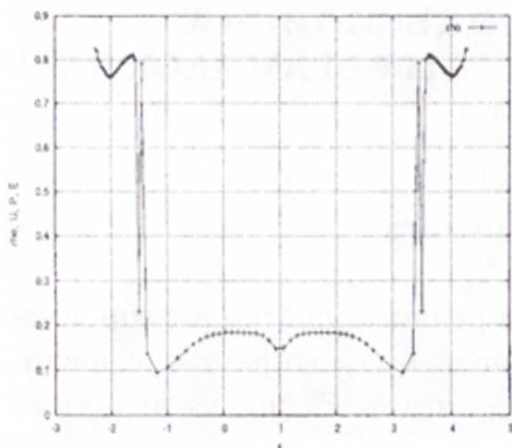
В качестве критерия качества описания откола численным методом были взяты: время образования откола t_4 и масса в зоне откола (область 5). Момент времени образования откола находится как

$$t_D = \frac{l}{c_\sigma}, \text{ где } c_\sigma = c_2 \left(\left(1 - \frac{3\sigma}{\rho_{0k} c_{0k}^2} \right) \left(\frac{\rho_{0k} c_{0k}^2}{\rho_2 c_2^2} \right) \right)^{1/3}$$

Ниже приведены результаты одномерных расчетов по двумерной программе и их сравнение с аналитическим решением.

На рис. 4-5 приведены $P(x)$ и $u(x)$ до выхода ударных волн на свободную границу в момент $t = 0.3 < t_A = 0.41$ (рис.3). На рис. 6-7 — приведены $P(x)$ и $u(x)$ на встречных ВР до начала интерференции $t = 0.6 < t_B = 0.68$. На рис. 8-9 — приведены $P(x)$ и $u(x)$ на встречных интерферирующих ВР до наступления откола $t = 0.8 < t_D = 1.18$. На рис. 10-11 — приведены $\rho(x)$ и $u(x)$ после образования откола $t = 3 > t_D$. Расчеты проводились с числом точек сетки в области пластин $N = 101$.

Рис. 4: График $P(x)$, $t = 0.3$ Рис. 5: График $u(x)$, $t = 0.3$ Рис. 6: График $P(x)$, $t = 0.6$ Рис. 7: График $u(x)$, $t = 0.6$ Рис. 8: График $P(x)$, $t = 0.8$ Рис. 9: График $u(x)$, $t = 0.8$

Рис. 10: График $\rho(x)$, $t = 3.0$ Рис. 11: График $u(x)$, $t = 3.0$

Список литературы

- [1]. Глушак Б.Л., Куропатенко В.Ф., Новиков С.А., Исследование прочности материалов при динамических нагрузках. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ие, 1992, 295с.
- [2]. Куропатенко В.Ф., Кузнецова И.И., Макеева И.Р., Мурашко А.С., Уваров В.Н., Исследование влияния пульсирующего вдува в поток возле обтекаемого тела // Вопросы атомной науки и техники // серия: Математическое моделирование физических процессов. выпуск.3, 2001, С.60-71.
- [3]. Куропатенко В.Ф., Об одном разностном методе расчета ударных волн // Журнал вычисл. математики и математической физики. Т.3, № 1, 1963, С.201-204.
- [4]. Куропатенко В.Ф., Макеева И.Р., О точности расчета откольного разрушения // Труды V Забабахинских научных чтений.— Снежинск. — 1998. — с.649 - 659.