

МЕЖДУНАРОДНАЯ
КОНФЕРЕНЦИЯ

INTERNATIONAL
CONFERENCE

УЗБАЕБАХИНСКИЕ
НАУЧНЫЕ ЧТЕНИЯ

UZBEKISTAN
SCIENTIFIC TALKS

ТРУДЫ
PROCEEDINGS

О ТОЧНОСТИ РАСЧЕТА ОТКОЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ

В.Ф. КУРОПАТЕНКО, И.Р. МАКЕЕВА

Российский Федеральный ядерный центр — Всероссийский НИИ технической физики им. акад. Е.И. Забабахина
г. Снежинск, Челябинская область, Россия

Разностные методы для расчета как непрерывных, так и разрывных решений уравнений механики сплошных сред обладают различными дистракционными и осцилляционными свойствами. Например, метод Неймана–Рихтмайера, в котором для расчета диссипации энергии на фронте ударной волны (УВ) применяется специально вводимая псевдовязкость, дает решение с осцилляциями как за фронтом УВ, так и на волне разрежения (ВР). Амплитуда этих осцилляций затухает со временем. Метод Годунова, в котором для определения вспомогательных величин на гранях сеточной ячейки используются соотношения для распада произвольного разрыва, является монотонным, но обладает сильными дистракционными свойствами. Чем выше немонотонность или дистракция разностного метода, тем с большей погрешностью этот метод определяет места зарождения трещин или фазовых переходов. При расчете взаимодействия ударных волн и волн разрежения друг с другом или с контактными границами происходит необратимое накопление погрешностей, порождаемых осцилляционными и дистракционными свойствами разностного метода. Это еще больше увеличивает различие между характеристиками реально протекающего физического процесса и его математического образа. Поэтому одним из важных путей уменьшения погрешности численного решения задач с взаимодействующими разрывами является минимизация осцилляции и дистракции разностного метода. Излагается разностный метод расчета уравнений газодинамики, получивший название "КАМА-97", в котором минимизация осцилляционных свойств и дистракции достигается путем выбора специальной формы разностных уравнений и применением условий Гюгонио–Ренкина для описания диссипации энергии в зоне ударного слоя, которым заменяется сильный разрыв при разностном счете.

Приводится аналитическое решение задачи, моделирующей воздействие продуктов взрыва на вещество. В результате взаимодействия волны разрежения с ударной волной, а затем с встречной волной разрежения, образовавшейся после выхода ударной волны на свободную поверхность, происходит разрушение вещества в плоскости, параллельной свободной поверхности. Аналитическое решение используется для проверки точности численных методик при расчете массы отколовшегося вещества. Приведены результаты численных расчетов этой задачи по различным разностным методикам. Масса отколовшегося вещества, полученная в расчете по методике "КАМА-97", наиболее точно соответствует аналитическому решению.

1. Разностная схема расчета уравнений гидродинамики

Пусть движение вещества и изменение его термодинамических характеристик описывается системой дифференциальных уравнений газовой динамики в лагранжевых координатах:

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial m} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial m} = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad (1.3)$$

$$P = f(V, E), \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = U, \quad (1.5)$$

где V — удельный объем, U — массовая скорость, P — давление, E — удельная внутренняя энергия, t — время, m — массовая лагранжева координата, x — радиус точки.

На фронте ударной волны (УВ) справедливы соотношения Гюгонио–Ренкина:

$$(V_+ - V_-)W + (u_+ - u_-) = 0, \quad (1.6)$$

$$(u_+ + u_-)W - (P_+ - P_-) = 0, \quad (1.7)$$

$$E_+ - E_- + 0,5(P_+ + P_-)(V_+ - V_-) = 0, \quad (1.8)$$

где величины с индексом "–" характеризуют состояние вещества перед фронтом разрыва, а с индексом "+" — за фронтом, $W = dm/dt$ — скорость распространения УВ в лагранжевых координатах.

Разобьем область интегрирования системы уравнений (1.1)–(1.5) на слои (интервалы) с массой $h_{i+0,5} = m_{i+1} - m_i$. Будем определять скорость U , давление P , удельный объем V и удельную внутреннюю энергию E в центрах интервалов (в точках с половинными индексами). В точках с целыми индексами введем вспомогательные значения скорости и давления U_i^* , P_i^* .

Аппроксимируем уравнения (1.1), (1.2), (1.5) разностными уравнениями

$$\frac{V_{i+0,5}^{n+1} - V_{i+0,5}^n}{t} = -\frac{U_{i+1}^* - U_i^*}{h}, \quad (1.9)$$

$$\frac{U_{i+0,5}^{n+1} - U_{i+0,5}^n}{t} = \frac{P_{i+1}^* - P_i^*}{h}, \quad (1.10)$$

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \tau U_i^*. \quad (1.11)$$

Для нахождения вспомогательных величин U_i^* , P_i^* рассмотрим вспомогательные интервалы разностной сетки $(x_{i-0,5}^n, x_{i+0,5}^n)$. Разобьем их на два класса. К первому классу отнесем интервалы, характеризующиеся условием $U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n < 0$, а ко второму — интервалы, характеризующиеся условием $U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n \geq 0$. Вспомогательные значения U_i^* , P_i^* определим следующим образом. Для интервалов первого класса:

$$U_i^* = U_{i-0,5}^n; \quad P_i^* = P_{i+0,5}^n - W(U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n), \quad \text{если } P_{i-0,5}^n > P_{i+0,5}^n, \quad (1.12)$$

$$U_i^* = U_{i+0,5}^n; \quad P_i^* = P_{i-0,5}^n - W(U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n), \quad \text{если } P_{i-0,5}^n \leq P_{i+0,5}^n.$$

Значение W определяется из соотношений (1.6)–(1.8) по известному значению

$$\Delta U = |U_{i-0,5}^n - U_{i+0,5}^n| = U_+ - U_-.$$

Для интервалов второго класса:

$$U_i^* = U_i^n - \frac{\tau}{2h}(P_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n), \quad P_i^* = \frac{P_{i+0,5}^n + P_{i-0,5}^n}{2} - \frac{\tau a_i^2}{2h}(U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n), \quad (1.13)$$

где

$$a^2 = -\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S; \quad a_i^2 = 0,5 \left((a_{i+0,5}^n)^2 + (a_{i-0,5}^n)^2 \right); \quad U_i^n = \frac{(a_{i+0,5}^n)^2 U_{i+0,5}^n + (a_{i-0,5}^n)^2 U_{i-0,5}^n}{(a_{i+0,5}^n)^2 + (a_{i-0,5}^n)^2}.$$

Далее, разобьем все основные интервалы разностной сетки на два класса. К первому классу отнесем интервалы, характеризующиеся условием $U_{i+1}^* - U_i^* < 0$, а ко второму — интервалы, характеризующиеся

условием $U_{i+1}^* - U_i^* \geq 0$. Для интервалов первого класса аппроксимируем уравнение (1.3) следующим разностным уравнением:

$$\frac{E_{i+0,5}^{n+1} - E_{i+0,5}^n}{\tau} = -\frac{1}{2}(P_{i+1}^* + P_i^*) \frac{V_{i+0,5}^{n+1} - V_{i+0,5}^n}{\tau} - \frac{1}{2}(U_{i+0,5}^{n+1} - U_i^*)(U_{i+0,5}^{n+1} - U_{i+1}^*). \quad (1.14)$$

Для интервалов второго класса новое значение энергии $E_{i+0,5}^{n+1}$ определим, интегрируя уравнение изэнтропы

$$dE + P dV = 0. \quad (1.15)$$

вместе с уравнением состояния (1.4). В обоих случаях новое значение давления находится по уравнению состояния (1.4).

2. Аналитическое решение задачи об отколе

Для проверки свойств разностных методик при расчете течений сплошных сред с образованием откола при взаимодействии двух встречных волн разрежения построим аналитическое решение задачи о распространении ударной волны и волн разрежения в конденсированном веществе в следующей постановке.

Рассмотрим систему, изображенную на рис. 1.

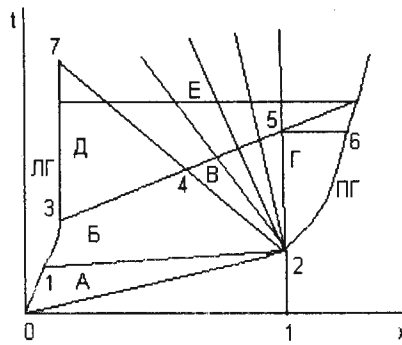


Рис. 1

Пусть при $t = 0$ характеристики вещества имеют следующие значения: $0 \leq x \leq 1$; $t_0 = 0$; $\rho_0 = 1$; $P_0 = 0$; $U_0 = 0$; $E_0 = 0$; $C_0 = 1$. Пусть правая граница (ПГ) системы является свободной ($P = 0$). На левой границе (ЛГ) системы зададим комбинированное условие $U_{лг}(t)$, обеспечивающее условия появления откола в одной точке. Зависимость $U_{лг}(t)$ изображена на рис. 2.

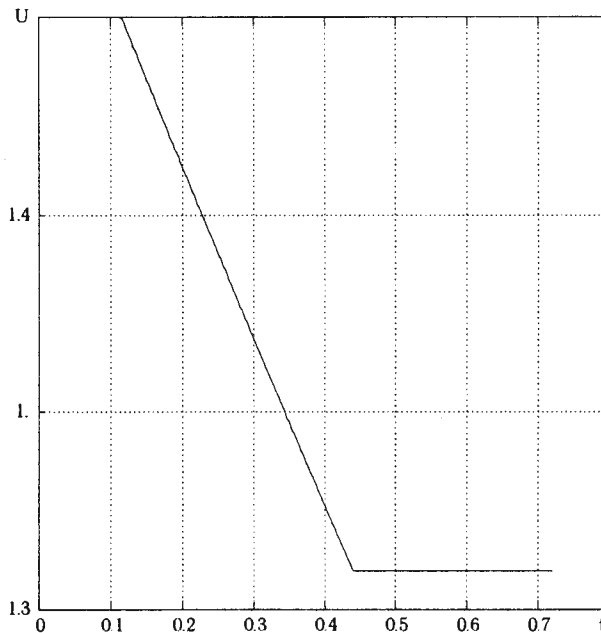


Рис. 2. Зависимость $U_{лг}(t)$

Уравнение состояния возьмем в виде:

$$P = (\gamma - 1) \rho E + C_{ок}^2 (\rho - \rho_{ок}), \quad (2.1)$$

при $\gamma = 3$, $\rho_{ок} = 1$, $C_{ок} = 1$. Решение состоит из нескольких областей (рис. 1).

Область А. В области А течение за фронтом УВ является стационарным. Параметры течения определяются соотношениями Гюгонио–Ренкина на сильном разрыве и граничным условием $U_{лр} = U_1 = \text{const}$. Для данного уравнения состояния

$$P_1 = U_1^2 + \sqrt{(U_1^2)^2 + U_1^2}. \quad (2.2)$$

$$E_1 = 0,5U_1^2; \quad \rho_1 = \frac{P_1 + 1}{2E_1 + 1}; \quad c_1 = \left(\frac{3P_1 + 1}{\rho_1} \right)^{0,5}. \quad (2.3)$$

$$f_1(s) = (1 + 3P_1) \rho_1^{-3} - 1. \quad (2.4)$$

Скорость УВ

$$D_1 = U_1 + \sqrt{1 + U_1^2}; \quad W_1 = D_1. \quad (2.5)$$

Время выхода ударной волны на ЛГ

$$t_2 = 1/D_1. \quad (2.6)$$

Время смены граничного условия t_1 определим так. Проведем характеристику из точки t_2 , x_2 так, чтобы она прошла через точку t_1 , x_1 .

$$x_1 = x_2 + (U_1 + C_1)(t_1 - t_2). \quad (2.7)$$

Значения t_1 и x_1 связаны условием

$$x_1 = U_1 t_1, \quad (2.8)$$

а значения t_2 , x_2 — условием

$$x_2 = D t_2. \quad (2.9)$$

Из (2.7)—(2.9) следует

$$t_1 = t_2 \frac{U_1 + C_1 - D}{U_1}; \quad x_1 = t_2 (U_1 + C_1 - D). \quad (2.10)$$

Область Б. В области Б находится волна разрежения. Решение определяется уравнениями

$$\frac{x - x_{лр}}{t - t_{лр}} = U + C, \quad U - C = U_1 - C_1. \quad (2.11)$$

Из (2.11) следует, что в области Б:

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{x - x_{лр}}{t - t_{лр}} + U_1 - C_1 \right), \quad C = \frac{1}{2} \left(\frac{x - x_{лр}}{t - t_{лр}} - U_1 + C_1 \right). \quad (2.12)$$

$$P(x, t) = \frac{1}{3} \left[\rho_1 C_1^2 \left(\frac{C(x, t)}{C_1} \right)^3 - 1 \right], \quad \rho(x, t) = \frac{\rho_1}{C_1} C(x, t). \quad (2.13)$$

$$E(x, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{P(x, t) + 1}{\rho(x, t)} - 1 \right). \quad (2.14)$$

Граничное условие на ЛГ в промежутке $t_1 \leq t \leq t_3$ подбирается в виде функции $U = F(t)$ так, чтобы имитировать динамическое импульсное воздействие на вещество. Это может быть либо воздействие излучения, либо воздействие продуктов взрыва. При этом траектория левой границы имеет вид

$$x(t) = x_1 + \int_{t_1}^t F(t) dt. \quad (2.15)$$

В некоторой точке 3 на левой границе скорость принимает значение $U_3 = F(t_3)$. Уравнение характеристики 2—4 имеет вид

$$x = x_2 + (U_1 - C_1)(t - t_2). \quad (2.16)$$

На ней справедливы уравнения (2.11)—(2.14).

Область В. В точке x_2, t_2 происходит распад разрыва, в результате которого в момент t_2 свободная граница при $P_{\text{пр}} = 0$ приобретает скорость $U_{\text{пр}2}$, а влево пройдет центрированная волна разрежения (область В). Характеристики второго семейства в области В определяются уравнением

$$U - C = \frac{x - x_2}{t - t_2}. \quad (2.17)$$

Слева в эту область приходят β характеристики из области Б с уравнениями

$$U + C = \frac{x - x_2}{t - t_{\text{пр}}} + \frac{t_2 - t_{\text{пр}}}{t - t_{\text{пр}}}(U_1 + C_1). \quad (2.18)$$

Из (2.17), (2.18) следуют уравнения для величин в области В

$$\left. \begin{aligned} U(x, t) &= \frac{1}{2} \left[\frac{x - x_2}{t - t_2} + \frac{x - x_2 + (t_2 - t_{\text{пр}})(u_1 + c_1) \left(\frac{F(t) - u_1 + c_1}{c_1} \right)^2}{t - t_{\text{пр}}} \right] \\ C(x, t) &= \frac{1}{2} \left[\frac{x - x_2 + (t_2 - t_{\text{пр}})(u_1 + c_1) \left(\frac{F(t) - u_1 + c_1}{c_1} \right)^2}{t - t_{\text{пр}}} - \frac{x - x_2}{t - t_2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Величины $P(x, t)$, $\rho(x, t)$, $E(x, t)$ в области В находятся по уравнениям (2.13)—(2.14) после постановки в них $C(x, t)$, полученного из (2.19).

Найдем теперь зависимость $P(t)$ на характеристике 2—5.

В момент t_2 после распада разрыва значение скорости ПГ $U_{\text{пр}2}$ удовлетворяет уравнению

$$U_{\text{пр}2} + C_{\text{пр}} = U_1 + C_1. \quad (2.20)$$

Значение $C_{\text{пр}}$ находится из уравнения, связывающего C с P

$$C^2 = C_1^2 \left(\frac{1}{\rho_1 C_1^2} (3P + 1) \right)^{2/3}. \quad (2.21)$$

При $P = 0$ из (2.21) следует

$$C_{\text{пр}} = \left(\frac{C_1}{\rho_1} \right)^{1/3}. \quad (2.22)$$

Таким образом, характеристика 2—5 (крайняя правая характеристика центрированной волны разрежения) имеет вид

$$x - x_2 = (U_{\text{пр}2} + C_{\text{пр}})(t - t_2). \quad (2.23)$$

На ней

$$U - C = U_{\text{пр}2} - C_{\text{пр}}. \quad (2.24)$$

С помощью (2.20) преобразуем (2.24) к виду

$$U - C = U_1 + C_1 - 2C_{\text{пр}}. \quad (2.25)$$

Решая систему уравнений (2.18) и (2.25) получим выражение для C вдоль характеристики 2—5

$$C = \frac{1}{2} \left[\frac{x - x_2}{t - t_{\text{лр}}} + \frac{t_2 - t_{\text{лр}}}{t - t_{\text{лр}}} (U_1 + C_1) - (U_1 + C_1) + 2C_{\text{лр}} \right], \quad (2.26)$$

которое с помощью (2.19) и (2.23) преобразуем к виду

$$C_{25}(t) = C_{\text{лр}} \frac{t_2 - t_{\text{лр}}}{t - t_{\text{лр}}}. \quad (2.27)$$

Подставим полученную зависимость $C(t)$ в выражение $P(C)$ (2.19). В результате получим зависимость $P(t)$ вдоль характеристики 2—5 в виде

$$P(t) = \frac{1}{3} \left(\frac{\rho_1}{C_1} \left(C_{\text{лр}} \frac{t_2 - t_{\text{лр}}}{t - t_{\text{лр}}} \right)^3 - 1 \right). \quad (2.28)$$

При $t = t_2$ эта формула дает

$$P(t_2) = \frac{1}{3} \left(\frac{\rho_1 C_{\text{лр}}^3}{C_1} - 1 \right). \quad (2.29)$$

Из (2.22) и (2.29) следует, что $P(t_2) = 0$. При $t \rightarrow \infty$ из (2.28) следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = -1/3$. Дифференцируя $P(t)$, получим вдоль характеристики 2—5

$$\frac{dP}{dt} = - \left(\frac{\rho_1}{C_1} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{(t_2 - t_{\text{лр}})^3}{(t - t_{\text{лр}})^4} < 0.$$

Это означает, что вдоль характеристики 2—5 давление $P(t)$ убывает при $t > t_2$. Уменьшаясь, давление может достигнуть значения $P_\sigma < 0$, при котором в веществе образуется трещина. Если $P_\sigma > -1/3$, то произойдет разрушение если же $P_\sigma \leq -1/3$, то разрушения не будет. Обозначим эту точку номером 5. В момент разрушения давление в точке 5 скачком увеличится с $P = P_\sigma < 0$, до $P = 0$, а в обе стороны от точки разрушения пойдут ударные волны с начальной амплитудой $\Delta P = -P_\sigma$.

Найдем момент разрушения из (2.27) при $P = P_\sigma$ в виде

$$t_5 = t_{\text{лр}} + (t_2 - t_{\text{лр}})(3P_\sigma + 1)^{-1/3}. \quad (2.30)$$

Из уравнений (2.19), (2.23) для характеристики 2—5 найдем x_5

$$x_5 = x_2 + (U_1 + C_1 - 2C_{\text{лр}})(t_5 - t_2). \quad (2.31)$$

В точке t_5 , x_5 скорость и скорость звука принимают значения

$$\left. \begin{aligned} C_5 = C_\sigma = \left(\frac{C_1}{\rho_1} (3P_\sigma + 1) \right)^{1/3} = C (3P_\sigma + 1)^{1/3}, \\ U_5 = U_1 + C_1 + C_5 - 2C, \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

Определим координаты точки 4 — точки пересечения α характеристики 3—4—5 и β — характеристики 2—4

$$\left. \begin{aligned} x_4 - x_2 &= (U_1 - C_1)(t_4 - t_2), \\ x_5 - x_4 &= (U_5 + C_5)(t_5 - t_4). \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

Сложив оба уравнения, получим

$$x_5 - x_2 = (U_1 - C_1)t_4 - (U_5 + C_5)t_4 - (U_1 - C_1)t_2 + (U_5 + C_5)t_5.$$

Подставим x_5 из (2.31) в это уравнение и выразим t_4

$$t_4 = t_2 + (t_5 - t_2) \frac{U_5 + C_5 - U_{\text{лр}2} + C_{\text{лр}}}{U_5 + C_5 - U_1 + C_1}. \quad (2.34)$$

Значение x_4 находится по найденному t_4 из (2.39).

Точка № 3 смены краевого условия. Чтобы не допустить разрушения в точках отличных от точки 5, нужно, что бы при $t > t_3$ краевое условие генерировало бы волну сжатия или хотя бы постоянное течение в области Д. Чтобы выполнить это условие определим вначале координаты точки 3.

Найдем координаты точки 3 из уравнения характеристики 3–4–5

$$x_5 - x_3 = (U_5 + C_5) (t_5 - t_3). \quad (2.35)$$

и уравнения левой границы (2.15). В момент t_3 скорость левой границы имеет значение $U_3 = F(t_3)$. Это значение задается в качестве краевого условия при $t \geq t_3$.

Свободная граница. На свободной границе $2-6P = 0$. На нее же выходят α -характеристики из области Б.

$$\frac{x - x_{лг}}{t - t_{лг}} = U + C. \quad (2.36)$$

Поскольку на ПГ при $P = 0$

$$C_{лг} = \left(\frac{C_1}{\rho_1} \right)^{1/3} = \text{const}, \quad (2.37)$$

то из (2.36) следует зависимость $U_{лг}(x, t)$

$$U_{лг} = \frac{x - x_{лг}}{t - t_{лг}} - C_{лг}. \quad (2.38)$$

Поскольку

$$U_{лг} = \frac{dx}{dt},$$

то траектория ПГ определится уравнением

$$\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t - t_{лг}} = -C_{лг} - \frac{x_{лг}}{t - t_{лг}}. \quad (2.39)$$

Его решение имеет вид

$$x_{лг} = x_{лг} + (U_1 + C_1)(t - t_{лг}) + C (t - t_*) \ln \frac{x_2 - x_{лг}}{t - t_{лг}}. \quad (2.40)$$

Подставив $x_{лг}(t)$ в (2.38) получим уравнение для $U_{лг}(t)$

$$U_{лг} = U_1 + C_1 - C_{лг} \left(1 + \ln \frac{x_2 - x_{лг}}{t - t_{лг}} \right). \quad (2.41)$$

Область Г. В каждой точке x, t области Г пересекаются характеристики первого и второго семейств

$$U_r + C_r = \frac{x_r - x_{лг}}{t_r - t_{лг}}. \quad (2.42)$$

$$U_r + C_r = \frac{x_r - x_k}{t_r - t_k}. \quad (2.43)$$

где точка x_k, t_k лежит на правой границе. Значения x_k, t_k удовлетворяют уравнению (2.40) в виде

$$x_k = x_{лг} + (t_k - t_{лг}) \left(U_1 + C_1 - C_{лг} \ln \frac{t_k - t_{лг}}{t_2 - t_{лг}} \right). \quad (2.44)$$

Точка x_r, t_r в области Г связана с точкой x_k, t_k уравнением

$$\frac{x_r - x_k}{t_r - t_k} = U_{лг}(t_k) - C_{лг}. \quad (2.45)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} x_r &= x_{лг} + (U_1 + C_1)(t_k - t_{лг}) + C_{нр}(t_k - t_{лг}) \ln \frac{t_2 - t}{t_k - t} + (t_r - t_k) \left(U_1 + C_1 - 2C_{нр} - C_{нр} \ln \frac{t_k - t_{лг}}{t_2 - t_{лг}} \right) = \\ &= x_{лг} + (t_r - t_{лг}) \left(U_1 + C_1 - C_{нр} \ln \frac{t_k - t_{лг}}{t_2 - t_{лг}} \right) - 2C (t_r - t_k). \end{aligned} \quad (2.46)$$

После того, как x_r и x_k выражены через t_k , значения U_r и C_r находятся по формулам

$$U_r = \frac{1}{2} \left(\frac{x_r(t_k) - x_{лг}}{t_r - t_{лг}} + \frac{x_r(t_k) - x_k(t_k)}{t_r - t_k} \right); \quad (2.47)$$

$$C_r = \frac{1}{2} \left(\frac{x_r(t_k) - x_{лг}}{t_r - t_{лг}} - \frac{x_r(t_k) - x_k(t_k)}{t_r - t_k} \right). \quad (2.48)$$

Значения P_r , ρ_r , E_r находятся с помощью (2.13)—(2.14).

Откол. В момент t_5 давление в точке 5 достигает значения, при котором происходит разрушение. Определим отколовшуюся массу.

$$m = \int_{x_5}^{x_{нр}(t_5)} \rho_r(x) dx. \quad (2.49)$$

Из (2.13) следует, что в области Г

$$\rho_r = \frac{\rho_1}{C_1} C_r(t_k). \quad (2.50)$$

Подставим $\rho_r(t_k)$ в (2.49) и перейдем к новой переменной интегрирования t_k . Значение $dx = \frac{dx_r}{dt_k} dt_k$ получим дифференцированием (2.46)

$$dx = C_{нр} \left(2 - \frac{t_k - t}{t_5 - t} \right) dt_k. \quad (2.51)$$

В результате интегрирования с учетом (2.28) получим

$$m_{отк}(t_5) = \frac{(t_5 - t_2)(t_2 - t_{лг})}{C_{нр}(t_5 - t_{лг})}. \quad (2.52)$$

Зависимость минимального P от m . Минимальное P достигается на характеристике 2—5. Чтобы убедиться в этом рассмотрим производные $\frac{\partial P}{\partial m}$ справа и слева от линии 2—5.

В области Г

$$\frac{\partial P}{\partial m} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dC} \cdot \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (2.53)$$

Запишем (2.48) с помощью (2.45) и (2.46) в виде

$$C_r = \frac{t_k - t}{t_A - t}. \quad (2.54)$$

Поскольку t_k при фиксированных t_r зависит от x_r , то

$$\frac{dC}{dx} = \frac{dC_r}{dt_k} \cdot \frac{dt_k}{dx} = \frac{C_{нр}}{t_A - t_{лг}} \cdot \frac{1}{\frac{dx_r}{dt_k}}. \quad (2.55)$$

Из (2.46) следует

$$\frac{dx_r}{dt_k} = C_{нр} \left(2 - \frac{t - t_{лг}}{t_k - t_{лг}} \right). \quad (2.56)$$

Обозначим

$$\xi = \frac{t - t_{\text{нр}}}{t_k - t_{\text{нр}}} \quad (2.57)$$

На ПГ $\xi = 0$, т. к. $t = t_k$. Максимальное значение ξ достигается на характеристике 2—5

$$\xi_{25} = \frac{t - t_{\text{нр}}}{t_2 - t_{\text{нр}}} \quad (2.58)$$

Из (2.56), (2.58) следует

$$\frac{dx_r}{dt_k} \geq C_n(2 - \xi_{25}) \quad (2.59)$$

Из (2.30) следует, что

$$\xi_{25} = \frac{t - t_{\text{нр}}}{t_2 - t_{\text{нр}}} = \frac{1}{(3P_{25} + 1)^{1/3}} \quad (2.60)$$

Поскольку

$$P_6 \leq P_{25} \leq 0, \quad (2.61)$$

то

$$1 \leq \xi_{25} \leq \xi_6 \quad (2.62)$$

Следовательно $\frac{dx_r}{dt_k} \geq C_n(2 - \xi_6)$. Реально значения P_6 достигают значений — (0,04÷0,05). Это значит, что

$\max \xi_6 \approx 1,04 \div 1,05$. Подставив эти значения в (2.60) получим, что

$$\frac{dx_r}{dt_k} \geq 0 \quad (2.63)$$

Таким образом, минимальное значение P достигается на характеристике 2—5.

Это давление зависит от t в соответствии с (2.28)

$$\min P = \frac{1}{3} \left(\frac{\rho_1}{C_1} \left(C_{\text{нр}} \frac{t_2 - t_{\text{нр}}}{t - t_{\text{нр}}} \right)^3 - 1 \right) \quad (2.64)$$

Масса вещества, находящегося правее этой характеристики, определяется уравнением (2.52) и имеет вид

$$m = \frac{\rho_1 C_{\text{нр}}^2}{C_1} \cdot \frac{(t - t_2)(t_2 - t_{\text{нр}})}{(t - t_{\text{нр}})} \quad (2.65)$$

Выразим отсюда t и подставим в (2.70)

$$t = t_{\text{нр}} + \frac{(t_2 - t_{\text{нр}})^2}{(t_2 - t_{\text{нр}}) - m_{\text{отк}} C_{\text{нр}}} \quad (2.66)$$

Подставим (2.66) в (2.64)

$$\min P = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{C_{\text{нр}}} \left(1 - \frac{m C_{\text{нр}}}{t_2 - t_{\text{нр}}} \right)^3 - 1 \right] \quad (2.67)$$

Если полная масса системы равна M , то зависимость $\min P$ от массовой лагранжевой координаты будет выражаться формулой

$$\min P = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{C_{\text{нр}}} \left(1 - \frac{(M - m) C_{\text{нр}}}{t_2 - t_{\text{нр}}} \right)^3 - 1 \right] \quad (2.68)$$

3. Результаты численного решения задачи о выходе стационарной УВ на свободную поверхность

Рассмотрим задачу о выходе стационарной УВ на свободную поверхность конденсированного вещества.

Пусть в области с начальными координатами $x = 0$, $x = 1$ находится конденсированное вещество с уравнением состояния

$$P = (\gamma - 1) \rho E + C_{0k}^2 (\rho - \rho_{0k})$$

и следующими начальными параметрами

и следующими начальными параметрами

$$\rho_0 = 1; \quad E_0 = 0; \quad U_0 = 0; \quad P_0 = 0; \quad \gamma = 3; \quad \rho_{ок} = 1; \quad C_{ок} = 1.$$

На левой границе системы задана постоянная скорость $U = 0,75$, на правой границе задано давление $P = 0$. При таких начальных и граничных условиях получим, согласно [4], следующие параметры за фронтом УВ:

$$U_1 = 0,75; \quad P_1 = 1,5; \quad \rho_1 = 1,6; \quad E_1 = 0,28125; \quad W = 2.$$

После выхода УВ на свободную поверхность и распада разрыва получают следующие параметры течения у правой границы системы

$$U_{пг} = 1,5537, \quad P_{пг} = 0, \quad \rho_{пг} = 0,906426, \quad E_{пг} = 0,051617.$$

При выходе УВ на правую границу происходит распад произвольного разрыва. Этот процесс протекает мгновенно за время $\Delta t = 0$. При этом вещество сначала мгновенно нагружается вдоль ударной адиабаты до состояния за фронтом ударной волны, а затем разгружается вдоль изэнтропы до давления $P = 0$. На рис. 3 приведена (P, U) -диаграмма для данной задачи. При расчете этой задачи по однородным разностным методикам, которые размывают сильные и слабые разрывы, распад произвольного разрыва происходит за конечное время $\Delta t > 0$. При этом свободная граница начинает двигаться, как только в последний интервал сетки приходит "носик" размазанной УВ. Поэтому вещество начинает разгружаться, не успев достигнуть состояния за фронтом УВ. Это приводит к образованию энтропийных следов в последних интервалах разностной сетки.

Так как в методике "КАМА-97" для расчета вспомогательных величин используются соотношения Гюнио на сильном разрыве, удалось добиться того, что вещество сначала нагружается до состояния за фронтом УВ, а потом происходит изэнтропическая разгрузка (рис. 4). Поэтому в расчетах по новой методике энтропийные следы практически отсутствуют

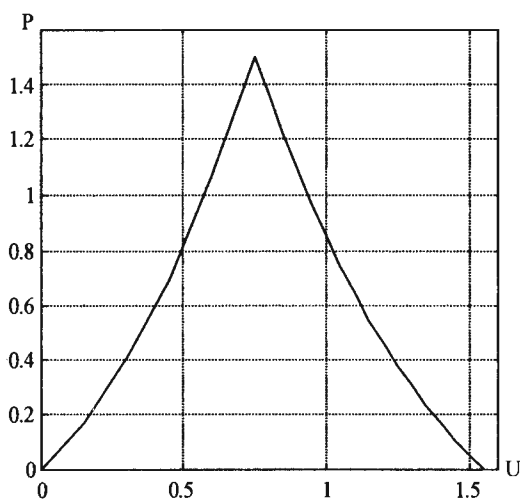


Рис. 3. Задача о распаде разрыва при выходе ударной волны на свободную поверхность, (P, U) -диаграмма

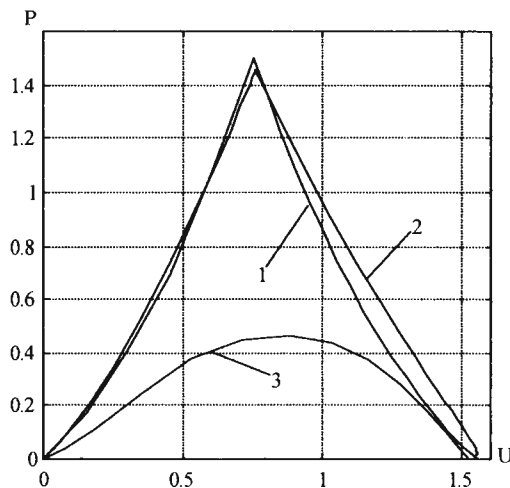


Рис. 4. Задача о распаде разрыва при выходе ударной волны на свободную поверхность, (P, U) -диаграмма:

1 — точное решение, 2 — "КАМА-97", 3 — метод из [3].

4. Результаты численного решения задачи об отколе

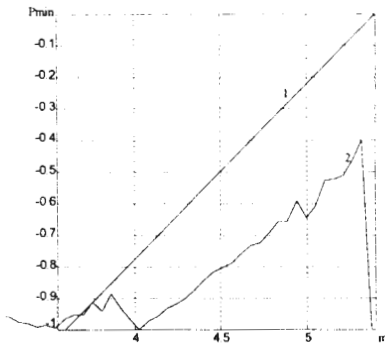
Задача о выходе нестационарной УВ на свободную поверхность вещества и образовании откола численно решалась в постановке, соответствующей построенному в 2 аналитическому решению. Были заданы следующие начальные параметры:

$$\rho_0 = 2,7; \quad E_0 = 0; \quad U_0 = 0; \quad P_0 = 0; \quad \gamma = 3; \quad \rho_{ок} = 2,7; \quad C_{ок} = 3; \quad \gamma = 3.$$

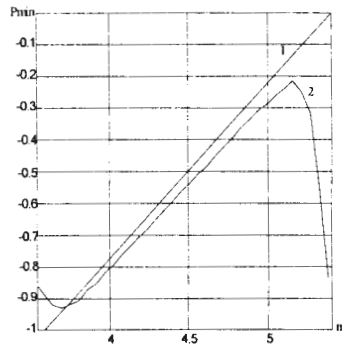
На левой границе системы было задано переменное граничное условие $U(t)$, вид которого приведен на рис. 2.

Задача была рассчитана по методике "КАМА-97" и методикам [1—4]. На рисунках 5—9 приведены зависимости P_{min} от массовой координаты, соответствующие расчетам по этим методикам. Зависимость

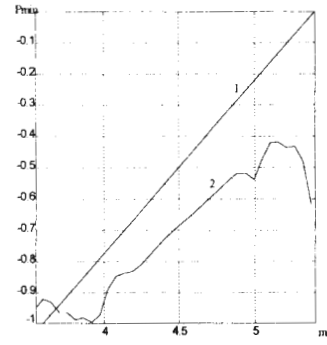
$P_{min}(m)$, полученная при расчете по методу "КАМА-97" (рис. 9) удовлетворительно согласуется с аналитическим решением (2.68). Видно, что при расчете по монотонному методу [2], минимальное давление не достигает давления при котором происходит разрушение, а при расчетах по методикам [1, 3, 4] разрушение наступает раньше, чем в аналитическом решении.

Рис. 5. Зависимость $P_{min}(m)$:

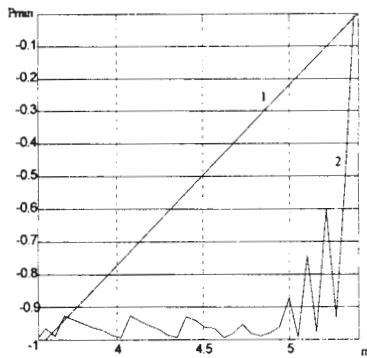
1 — аналитическое решение;
2 — расчет по методу [1].

Рис. 6. Зависимость $P_{min}(m)$:

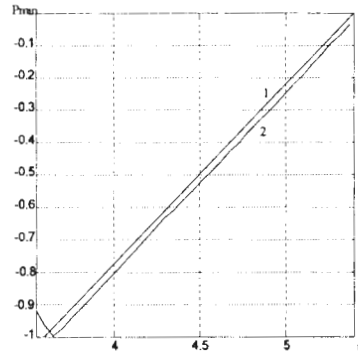
1 — аналитическое решение;
2 — расчет по методу [2].

Рис. 7. Зависимость $P_{min}(m)$:

1 — аналитическое решение;
2 — расчет по методу [3].

Рис. 8. Зависимость $P_{min}(m)$:

1 — аналитическое решение;
2 — расчет по методу [4].

Рис. 9. Зависимость $P_{min}(m)$:

1 — аналитическое решение;
2 — расчет по методу "КАМА-97".

Список литературы

1. Neumann J., Richtmyer R. A method for the numerical calculation of hydrodynamical shocks // J. Appl. Phys. — 1950. — 21. — № 3. — P. 232—237.
2. Годунов С.К. Разностный метод счета разрывных решений уравнений газодинамики: Матем. сб. 1959. — Т. 47(89), вып. 3. — С. 271—306.
3. Куропатенко В.Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики / Труды матем. инст. им. В.А. Стеклова. — Москва, 1966. — Т. 74. — С. 107—137.
4. Lax P., Wendroff B. System of conservation laws // Comm. Pure Appl. Math. — 1960. — 13, 217.