В.Ф.КУРОПАТЕНКО

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Для построения модели упруго-пластического деформирования Прандтль в [I] применил метод синтеза сложного явления из элементарных. Предполагается, что сложное физическое явление есть совокупность простых явлений - его компонент. Каждое простое явление удовлетворяет некоторой системе уравнений. Совокупность систем уравнений, число которых равно числу компонент сложного явления, дополняется уравнениями связи между компонентами так, чтобы исключить индивидуальные характеристики каждой компоненты и получить уравнения, определяющие сложное явление и содержащие лишь его характеристики. В [I] был рассмотрен частный случай уравнений связи

$$\dot{e}_i = \dot{e}_i^e + \dot{e}_i^p, \quad \dot{s}_i = \dot{s}_i^e, \tag{I}$$

где s_i, e_i - компоненты девиаторов тензоров напряжений и деформаций, точка означает дифференцирование по времени вдоль траектории, индексом e помечены характеристики упругого деформирования, индексом p - пластического. Первое из уравнений (I) получило широкое распространение, как фундаментальная гипотеза упруго-пластичности [2].

В отличие от [I] рассмотрим различные уравнения связи и проанализируем уравнения упруго-пластического деформирования, которые порождаются этими связями. Ради простоты изложения ограничимся случаем одномерных деформирований (плоских, а также с осевой и центральной симметрией). Кроме того, будем рассматривать лишь зависимости между компонентами девиаторов тензоров напряжений и скоростей деформаций, поскольку поведение шаровых частей этих тензоров и термодинамика деформирования в принятой нами модели обсуждены ранее в [3].

Упругим будем называть такое деформирование, при котором все характеристики состояния (удельная энергия E, давление P, плотность ρ, температура T, s_i, e_i и др.) изменяются обратимо, и s_i^e и e_i^e удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\dot{s}_i^e = 2\mu \dot{e}_i^e, \quad J_{2e}^2 = \sum_{i=1}^{3} (s_i^e)^2 < \frac{2}{3} Y^2,$$

$$J_{2e} \dot{J}_{2e} = 2\mu \sum_{i=1}^{3} s_i^e \dot{e}_i^e, \quad \dot{W}_e = \frac{V}{2\mu} J_{2e} \dot{J}_{2e}, \tag{2}$$

где $\mu = \mu$ (P, V) - модуль сдвига, J_{2e} - второй инвариант тензора девиатора напряжений, $Y = Y(P, V)$ - предел текучести.

Пластическим будем называть деформирование, определяемое системой уравнений, которая является следствием трех предположений:
а) предел текучести Y_p постоянен, б) энергия пластического формоизменения полностью переходит в тепло, в) скорость увеличения энтропии максимальна.

$$s_i^p = \frac{2 Y_p^2 \dot{e}_i^p}{\sum_{i=1}^{3} s_i^p \dot{e}_i^p}, \quad \sum_{i=1}^{3} (s_i^p)^2 = \frac{2}{3} Y_p^2 = const,$$

$$\dot{V}^p = \dot{s}^p = 0, \quad \dot{W}_p = V \sum_{i=1}^{3} s_i^p \dot{e}_i^p > 0. \tag{3}$$

Упруго-пластическим будем называть деформирование, в котором s_i удовлетворяют условию текучести

$$\sum_{i=1}^{3} s_i^2 = \frac{2}{3} Y^2 \tag{4}$$

с переменным пределом текучести Y, причем $0 \le \sqrt{\frac{2}{3}}\, \dot{Y} \le \dot{J}_{2e}$.
Дифференцируя (4) по t, получим

$$\sum_{i=1}^{3} s_i \dot{s}_i = \frac{2}{3} Y \dot{Y}. \tag{5}$$

Величину

$$\varphi = 1 - \frac{Y \dot{Y}}{3\mu \sum_{i=1}^{3} s_i \dot{e}_i} \tag{6}$$

назовем мерой пластичности упруго-пластического деформирования. При $\varphi \to 0$ оно вырождается в упругое деформирование, при $\varphi \to 1$ – в пластическое.

Уравнения связи будем задавать в некоторой точке O, произвольно выбранной на поверхности текучести (4). В этой же точке будем получать уравнения упруго-пластического деформирования. В силу произвольности точки O, полученные уравнения будут справедливы в любой точке поверхности (4).

В точке O s_i и e_i определены однозначно, в ней нет различных s_i и e_i для пластического и упругого деформирования, т.е.

$$s_{i0}=s_{i0}^{e}=s_{i0}^{p},\ e_{i0}=e_{i0}^{e}=e_{i0}^{p}. \qquad (7)$$

Однако при упругом деформировании, начинающемся в точке O в момент t_0, эти величины будут изменяться по одному закону, при пластическом – по другому, при упруго-пластическом – по третьему. Иными словами, производные $\dot{s}_{i0}$, $\dot{s}_{i0}^{e}$, $\dot{s}_{i0}^{p}$, $\dot{e}_{i0}$, $\dot{e}_{i0}^{e}$, $\dot{e}_{i0}^{p}$ отличаются, вообще говоря, друг от друга. Поэтому уравнения связи должны содержать какие – либо из этих производных. Рассмотрим несколько моделей упруго-пластического деформирования, различающихся уравнениями связи.

М о д е л ь I. Уравнение связи между деформациями возьмем в виде

$$\dot{e}_i=\dot{e}_i^{p}=\dot{e}_i^{e}. \qquad (8)$$

Далее будем считать, что при $t \geq t_0$ напряжения связаны уравнением

$$s_i=(1-\varphi)s_i^{e}+\varphi s_i^{p}. \qquad (9)$$

Продифференцировав (9) по t и воспользовавшись (7) и (3), получим второе уравнение связи

$$\dot{s}_i=(1-\varphi)\dot{s}_i^{e}. \qquad (10)$$

Умножим (10) на s_i, просуммируем по i, заменим $\dot{s}_i^{e}$ через $\dot{e}_i^{e}$ с помощью (2) и (8), из полученного уравнения выразим φ, и подставим его в (10)

$$\dot{s}_i=2Y\dot{Y}\dot{e}_i \Big/ 3\sum_{i=1}^{3} s_i\dot{e}_i. \qquad (11)$$

Упростим (II), воспользовавшись (8) и первым уравнением из (3), записанным в точке O ,

$$\dot{s}_i = s_i \dot{Y}/Y \quad \text{или} \quad s_i = s_{i0} Y/Y_0 . \tag{I2}$$

М о д е л ь 2. Разностный аналог этой модели предложен Уилкинсом в [4]. Первое уравнение связи имеет вид (8). Относительно напряжений предполагается, что $s_i = \varphi s_i^e$ при $t \geq t_0$. Из (7) следует, что $\varphi = 1$ при $t = t_0$. Продифференцировав s_i по t , получим в точке O

$$\dot{s}_i = \dot{s}_i^e + s_i \dot{\varphi}. \tag{I3}$$

Найдем $\dot{\varphi}$ так же, как φ в модели I.

$$\dot{\varphi} = \dot{Y}/Y - 3\mu \sum_{i=1}^{3} s_i \dot{e}_i / Y^2 . \tag{I4}$$

Из (I3) и (I4) следует уравнение Прандтля - Рейсса

$$\dot{s}_i + s_i \left(3\mu \sum_{i=1}^{3} s_i \dot{e}_i / Y^2 - \dot{Y}/Y \right) = 2\mu \dot{e}_i . \tag{I5}$$

М о д е л ь 3. Эта модель предложена Прандтлем в [I]. Уравнения связи берутся в виде (I). После исключения $\dot{e}_i^e, \dot{s}_i^e, \dot{e}_i^p$ из (I), (2) и (3) приходим к уравнению (I5).

М о д е л ь 4. Уравнения связи возьмем в виде

$$\dot{e}_i = (1-\varphi)\dot{e}_i^e + \varphi \dot{e}_i^p , \quad \dot{s}_i = \dot{s}_i^e . \tag{I6}$$

Исключив $\dot{s}_i^e, \dot{e}_i^e, \dot{e}_i^p$ из (I6), (2) и (3), получим

$$Y \dot{Y} \dot{s}_i + s_i \left[\left(3\mu \sum_{i=1}^{3} s_i \dot{e}_i / Y \right)^2 - \dot{Y}^2 \right] = 6\mu^2 \dot{e}_i \sum_{i=1}^{3} s_i \dot{e}_i . \tag{I7}$$

М о д е л ь 5. Уравнения связи возьмем в виде

$$\dot{e}_i = (1-\varphi)\dot{e}_i^e + \varphi \dot{e}_i^p , \quad \dot{s}_i = (1-\varphi)\dot{s}_i^e + \varphi \dot{s}_i^p . \tag{I8}$$

Исключив $\dot{s}_i^e, \dot{e}_i^e, \dot{s}_i^p, \dot{e}_i^p$ из (I8), (2) и (3), получим уравнение (I5).

Легко показать, что уравнение Прандтля-Рейсса получается тогда, когда в уравнениях связи перед $\dot{e}_i^e$, и $\dot{s}_i^e$ стоит один и тот же коэффициент. Все другие уравнения связи приводят к уравнениям упруго-пластического деформирования, отличным от уравнения Прандтля-Рейсса.

Чтобы понять различия между моделями I и 3 составим разность $\Delta \dot{s}_{i(1,3)} = \dot{s}_{i(1)} - \dot{s}_{i(3)}$. Вычитая (I5) из (II), получим

$$\Delta \dot{s}_{i(1,3)} = \left(\frac{3\mu}{Y^2}\sum_{i=1}^{3} s_i \dot{e}_i - \frac{\dot{Y}}{Y}\right)\left(s_i - \frac{2Y^2\dot{e}_i}{3\sum\limits_{i=1}^{3} s_i\dot{e}_i}\right). \qquad (I9)$$

Первая скобка в (I9) обращается в ноль, если упруго-пластическое деформирование вырождается в упругое, вторая - если в пластическое. Кроме того, вторая скобка равна нулю в плоском и сферическом случаях. При $\alpha = 1$ и 3 $s_2 = s_3 = -0.5\, s_1$, $e_2 = e_3 = -0.5 e_1$ уравнение (4) в этих случаях принимает вид $s_1^2 = 4\,Y^2/9$, $s_2^2 = s_3^2 = Y^2/9$, а сумма, входящая в (I9), выражается через s_i и $\dot{e}_i$ с одним номером

$$\sum_{i=1}^{3} s_i \dot{e}_i = 1.5\, s_1 \dot{e}_1 = 6\, s_2 \dot{e}_2 . \qquad (20)$$

Подставляя $s_i = s_i(Y)$ и (20) в (I9), получим, что $\Delta \dot{s}_{i(1,3)} = 0$. Таким образом, модели I и 3 могут различаться лишь при цилиндрически симметричных деформированиях сжимаемых веществ, не вырождающихся ни в упругое, ни в пластическое (легко показать, что $\Delta \dot{s}_{i(1,3)} = 0$ при $\dot{V} = 0$).

Проделав аналогичные выкладки для моделей 3 и 4, получим

$$\Delta \dot{s}_{i(3,4)} = \frac{3\mu}{Y\dot{Y}}\left(\sum_{i=1}^{3} s_i \dot{e}_i\right)\Delta \dot{s}_{i(1,3)} . \qquad (2I)$$

Таким образом, $\Delta \dot{s}_{i(3,4)}$ обращается в ноль одновременно с $\Delta \dot{s}_{i(1,3)}$ кроме одного случая, когда упруго-пластическое деформирование вырождается в пластическое. В этом случае обращается в ноль как $\Delta \dot{s}_{i(1,3)}$, так и $\dot{Y}$, и, чтобы найти $\Delta \dot{s}_{i(3,4)}$, нужно раскрывать неопределенность типа $0/0$.

Для проверки различий между моделями I,3 и 4 при деформировании с осевой симметрией и $\dot{V} \neq 0$ уравнения (II), (I5) и (I7) были проинтегрированы численно. Деформированию подвергалась медь с уравнением состояния

$$P = (\gamma - 1)\rho E + C_0^2(\rho - \rho_0)$$

и параметрами $\rho_0 = 8.90$ г/см^3, $C_0 = 3{,}96$ км/сек, $\gamma = 5$, $\mu = 1{,}2$ мбар , $Y = 28\, exp\left[-4.27\,(P\,\text{мбар} - 0.75)\right]$ кбар.

Давление P изменялось в диапазоне $0 \leq P \leq 2$ мбар. Значения $\dot{\varepsilon}_1$ и $\dot{\varepsilon}_2$ были взяты зависимыми друг от друга: $\frac{u}{r} = -0.5\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial r} < 0$.

Близкие соотношения между $\dot{\varepsilon}_1$ и $\dot{\varepsilon}_2$ имеют место при движении вещества вслед за фронтом ударной волны при взрыве заряда, расположенного вдоль оси цилиндрического медного слитка. Результаты интегрирования показывают, что модели I,3 и 4 практически совпадают, ибо максимальные относительные различия между ними в S_1 равны $|\Delta S_1/S_1| \approx 10^{-3}$ и $|\Delta S_1/\sigma_1| \approx 10^{-4}$. Эти различия заметно меньше тех погрешностей, которые получаются при экспериментальном определении Y [5].

Применение метода элементарных явлений для построения модели упруго-пластического деформирования показывает, что к уравнению Прандтля-Рейсса приводят различные уравнения связи, а не только те, которые рассматривались Прандтлем. Таким образом, соотношение (I) не является исключительным среди других уравнений связи. Одно из двух новых уравнений упруго-пластического деформирования является более простым, чем уравнение Прандтля-Рейсса.

Литература.

I. L. Prandtl. Spannungsverteilung in plastischen Körper. Proc. 1 st. Jnt. Congr. Appl. Mech. Delft, p 43, 1924.

2. П.Пэжина "Основные вопросы вязко-пластичности", Мир,М., I968.

3. В.А.Быченков, В.В.Гаджиева, В.Ф.Куропатенко."Расчет неустановившихся движений разрушаемых сред". Численные методы механики сплошной среды, т.3, № 2, I972.

4. М.Уилкинс. "Расчет упруго-пластических течений", сб."Вычисл.методы в гидродинамике", Мир, М., 2I2, I967.

5. Л.В.Альтшулер, М.И.Бражник, Г.С.Телегин."Прочность и упругость железа и меди при высоких давлениях ударного сжатия", ПМТФ, № 6, I59, I97I.