СТРУКТУРА ВЯЗКОГО СКАЧКА В СРЕДЕ С ФАЗОВЫМ ПЕРЕХОДОМ ВТОРОГО РОДА

В.В.Гаджиева, В.Ф. Куропатенко, А.Т.Сапожников

Рассмотрим структуру фронта стационарной ударной волны в вязкой сжимаемой жидкости, претерпевающей фазовый переход второго рода.

Фазовый переход будем трактовать как точечное явление, происходящее мгновенно при некоторых связанных между собой значениях давления и температуры на кривой равновесия фаз. Таким образом, мы будем пренебрегать гетерофазными флуктуациями и кинетикой фазового перехода.

Всё сказанное ниже может быть применено и к фазовому переходу первого рода, поскольку он может быть представлен, как два последовательных фазовых перехода второго рода: между исходной фазой и смесью фаз и смесью и конечной фазой.

Изменение величин P, E, V, U (P – давление, E – удельная внутренняя энергия, V – удельный объем, U – скорость) на фронте ударной волны определяется в системе координат, связанной с фронтом, интегралами уравнений газодинамики

$$\rho u = A\ , \quad P + \rho U^2 - S = B, \quad E + \frac{P}{\rho} + \frac{U^2}{2} - \frac{U}{\rho_0 D} S = C \qquad (I)$$

где

$$A = \rho_0 D, \quad B = P_0 + \rho_0 D^2, \quad C = E_0 + \frac{P_0}{\rho_0} + \frac{D^2}{2}\ ,$$

$$S = \frac{4}{3}\ \mu \frac{dU}{dx}\ , \qquad V = \frac{1}{\rho}$$

D – скорость вещества, втекающего во фронт, S – вязкость, P_0, V_0, E_0 – начальные значения P, V, E.

μ – непрерывная функция ρ и E. Для замыкания системы (I) к ней нужно добавить уравнение состояния соответствующей фазы. Мы будем пользоваться зависимостью

$$E = E_k(P, V)\ , \qquad (2)$$

где k – номер фазы.

Исключая S и U из (I), получим связь между E и ρ

$$\rho^2(E-C) + B\rho - 0.5A^2 = 0 \qquad (3)$$

Уравнения (I) и (3) справедливы в любой точке фронта независимо от фазы. Таким образом, профиль $E(x)$ будет непрерывен при непрерывном профиле $\rho(x)$. Если ударная волна с фазовым переходом во фронте является устойчивой и не расщепляется на две, то может быть построен непрерывный профиль плотности во фронте. В противном случае такой профиль построить невозможно. Из определения фазового перехода второго рода следует, что в этом случае будет непрерывен также и профиль давления $P(x)$, а из первого уравнения системы (I) следует непрерывность профиля $U(x)$.

Из второго уравнения системы (I) следует непрерывность S и, значит, U' во фронте, в том числе и в точке фазового перехода при $\rho = \rho_ф$ где $\rho_ф$ может быть найдено из уравнения (3) и уравнения границы фаз в плоскости (ρ, E).

Здесь штрих означает дифференцирование по x. Дифференцируя первое уравнение системы (I) для каждой из фаз в отдельности и сравнивая полученные выражения для ρ', получим, что ρ' непрерывна при $\rho = \rho_ф$. Из уравнения (3) следует непрерывность E' при $\rho = \rho_ф$. Профиль $P(x)$, вообще говоря, не является гладким в точке фазового перехода. Скачок производной P' определяется дифференцированием уравнения состояния каждой из фаз. Таким образом, в точке фазового перехода наблюдается своеобразный слабый разрыв, при котором излом терпит лишь одна величина-давление.

Для примера рассмотрим фронт стационарной ударной волны в веществе с модельным уравнением состояния

$$E = \begin{cases} \dfrac{PV}{\gamma - 1} & \text{при } V \geq \theta \text{, фаза I} \\ \dfrac{P\theta}{\gamma - 1} & \text{при } \theta_1 \leq V < \theta \text{, фаза 3} \\ \dfrac{\theta}{\theta_1}\dfrac{PV}{\gamma-1} & \text{при } V < \theta_1 \text{, фаза 2} \end{cases} \qquad (4)$$

качественно описывающим поведение вещества при фазовых переходах второго рода.

Дифференцируя уравнение состояния для первой и третьей фаз, получим выражение для скачка производной

$$P'_{(3)} = P'_{(1)} + \frac{P}{\theta} V'_{(1)} \; . \tag{5}$$

Поскольку во фронте $V' < 0$, то кривая $p(x)$ при $V < \theta$ идёт более полого, чем в фазе I, причём с увеличением давления излом становится всё более заметным.

Влияние фазового перехода на структуру фронта ударной волны проверялось с помощью расчётов по явной, условно устойчивой разностной схеме

$$V^{n+1}_{i+1/2} = V^{n}_{i+1/2} + \frac{\tau}{h}(U^{n+1}_{i+1} - U^{n+1}_{i}),$$

$$U^{n+1}_{i} = U^{n}_{i} - \frac{\tau}{h}(P^{n}_{i+1/2} - P^{n}_{i-1/2} - S^{n}_{i+1/2} + S^{n}_{i-1/2}),$$

$$S^{n+1}_{i+1/2} = \frac{4}{3}\mu \frac{U^{n}_{i+1} - U^{n}_{i}}{h} \cdot \rho^{n}_{i+1/2} \; ,$$

$$E^{n+1}_{i+1/2} = E^{n}_{i+1/2} - \sum_{k=1}^{z} (P_{i+1/2})_k \frac{\Delta V}{z} + \frac{1}{2}(S^{n}_{i+1/2} + S^{n+1}_{i+1/2})\Delta V,$$

где
$$\Delta V = V^{n+1}_{i+1/2} - V^{n}_{i+1/2}.$$

Давление определялось из уравнения состояния (4). Условие устойчивости было найдено по методу Неймана в виде

$$y \le \sqrt{1 + z^2} - z \; ,$$

где
$$z = \frac{4}{3}\frac{\mu\rho_0}{\sigma h} \; , \quad y = \frac{\tau\sigma}{h} \; , \quad \sigma^2 = \frac{\gamma P}{V} - \frac{(\gamma-1)S}{V} \; . \tag{6}$$

Результаты расчетов приведены на рис. I

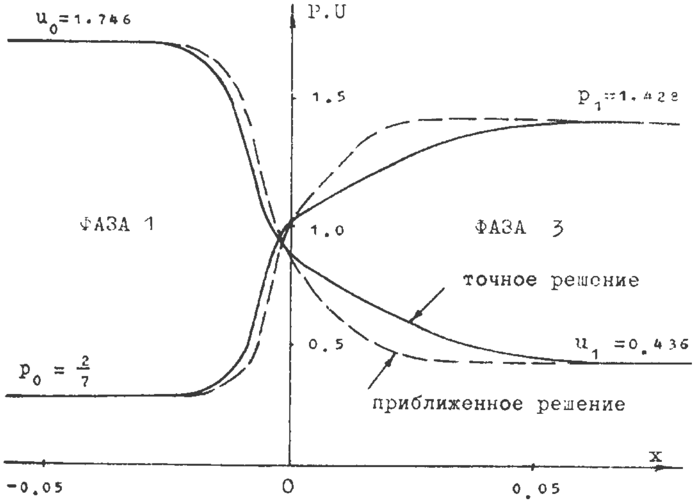


Рис. I.

Максимальное различие между аналитическим и численным решением достигает 10% и не уменьшается при измельчении сетки. Различие наступает после перехода вещества из фазы I в фазу 3 и объясняется наличием излома в давлении. В аналогичных расчётах, проведённых для идеального газа различие между аналитическим и численным решением не превосходило I %. Несмотря на указанную выше погрешность, из рис. I видно, что в точке фазового перехода в профиле давления имеется излом.

ОБ ОДНОЙ НОВОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В.П.Громов, Б.Г.Кузнецов

I. Задача о плоском неустановившемся течении вязкой несжимаемой жидкости ставится обычно так: требуется найти функции u, v, p переменных x, y, t, удовлетворяющие в области $\Omega \times [0, T]$ системе уравнений:

$$u_t + uu_x + vu_y + p_x = \nu(u_{xx} + u_{yy}),$$
$$v_t + uv_x + vv_y + p_y = \nu(v_{xx} + v_{yy}), \qquad (I.1)$$
$$u_x + v_y = 0$$

при условиях:

$$u = u_0(x,y), \quad v = v_0(x,y), \quad t = 0, \quad x,y \in \bar{\Omega}, \qquad (I.2)$$

$$u = U(x,y,t), \quad v = V(x,y,t), \quad (x,y,t) \in \gamma \times [0,T],$$

$$p(x_0, y_0, t) = 0, \quad (x_0, y_0) \in \bar{\Omega}, \quad \forall t \in [0, T] \qquad (I.3)$$

Предполагается, что область Ω конечная, односвязная, её граница γ достаточно гладкая и

$$u_{0x} + v_{0y} = 0, \qquad \oint_{\gamma} Udy - Vdx = 0, \quad \forall t \in [0,T]. \qquad (I.4)$$

В некоторых случаях (например, при численном решении) удобно перейти от задачи (I.I)-(I.4) к следующей задаче: найти функции u, v, φ переменных x, y, t, удовлетворяющие в $\Omega \times [0, T]$ системе уравнений:

$$u_t + \varphi_y = \nu(u_{xx} + u_{yy}),$$
$$v_t - \varphi_x = \nu(v_{xx} + v_{yy}), \qquad (1.5)$$
$$vu_t - uv_t + u\varphi_x + v\varphi_y = \nu(\varphi_{xx} + \varphi_{yy})$$

при условиях (I.2), (I.4) и дополнительном условии

$$\varphi(M,t) = \nu(u_y - v_x) - \int\limits_{M_0M} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dy - \frac{\partial v}{\partial t} dx \right), \qquad (I,6)$$
$$M_0M \in \gamma, \quad t \in [0, T].$$

Докажем, что первая задача (I.I)-(I.4) и вторая задача (I.5), (I.6), (I.2), (I.4) в некотором смысле эквивалентны: из решения первой задачи можно найти с помощью квадратур решение второй и обратно из решения второй задачи с помощью квадратур находится решение первой.

Действительно, пусть u, v, p - некоторое, достаточно гладкое решение первой задачи (I.I)-(I.4). Дифференцируя первое уравнение (I.I) по x, второе - по y и используя третье уравнение, получим

$$\frac{\partial}{\partial x}(uu_x + vu_y + p_x) + \frac{\partial}{\partial y}(uv_x + vv_y + p_y) = 0$$

Отсюда следует, что существует такая функция $\varphi(x,y,t)$, что

$$uu_x + vu_y + p_x = \varphi_y, \quad uv_x + vv_y + p_y = -\varphi_x. \qquad (I.7)$$

Подставляя эти соотношения в первые два уравнения (I.I), получим первые два уравнения системы (I.5). Пользуясь уравнением неразрывности из (I.I), перепишем эти два уравнения в виде:

$$\varphi_x = v_t + \nu\frac{\partial}{\partial x}(u_y - v_x), \quad \varphi_y = -u_t + \nu\frac{\partial}{\partial y}(u_y - v_x) \qquad (I.8)$$

Это означает, что соотношение (I.6) имеет место не только на границе γ, но и всюду в $\bar{\Omega} \times [0, T]$.

Из (I.7) и уравнения неразрывности следует, что

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = u\frac{\partial}{\partial x}(u_y - v_x) + v\frac{\partial}{\partial y}(u_y - v_x).$$

Подставляя выражение $\frac{\partial}{\partial x}(u_y - v_x)$, $\frac{\partial}{\partial y}(u_y - v_x)$ из (I.8) в предыдущее, получим третье уравнение системы (I.5). Таким образом, действительно, с помощью решения первой задачи находится решение второй, причем, функция φ определяется из (I.7) с помощью квадратур.

Обратно, пусть u, v, φ – решение второй задачи (I.5) (I.6), (I.2), (I.4). Покажем, прежде всего, что функции u, v удовлетворяют уравнению неразрывности. Действительно, из первых двух уравнений (I.5) следует, что функция $\theta = u_x + v_y$ удовлетворяет уравнению

$$\theta_t = \nu(\theta_{xx} + \theta_{yy}) . \qquad (I.9)$$

Причем, в силу перього соотношения (I.4) имеет место начальное условие

$$\theta = 0, \quad t = 0, \quad (x,y) \in \bar{\Omega} . \qquad (I.10)$$

Найдем граничное условие для θ. Дифференцируя соотношение (I.6) вдоль границы, получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \tau_x[\nu(u_{xy} - v_{xx}) + \frac{\partial v}{\partial t}] + \tau_y[\nu(u_{yy} - v_{xy}) - \frac{\partial u}{\partial t}] .$$

Здесь τ_x, τ_y – компоненты орта касательной к границе γ. С другой стороны, из первых двух уравнений (I.5) следует, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \tau_x[v_t - \nu(v_{xx} + v_{yy})] + \tau_y[\nu(u_{xx} + u_{yy}) - u_t] .$$

Приравнивая правые части выражений для $\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$, найдем:

$$\tau_x \frac{\partial}{\partial y}(u_x + v_y) - \tau_y \frac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y) = 0$$

или, что то же

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0, \qquad (I.11)$$

где $\vec{n}$ внутренняя нормаль к γ.

Таким образом, на решении u, v системы (I.5) функция θ удовлетворяет уравнению (I.9) при условиях (I.10), (I.11). Нетрудно видеть, что существует только тривиальное решение этой задачи $\theta = 0$, что и доказывает наше утверждение относительно выполнения уравнения неразрывности.

Из первых двух уравнений (I.5) и уравнения неразрывности следует, что в $\Omega \times [0,T]$ выполняются соотношения (I.8), то есть (I.6) имеет место всюду в $\bar{\Omega} \times [0, T]$. Дифференцируя его по x и y подставляя найденные выражения φ_x, φ_y в левую часть третьего уравнения (I.5), найдём:

$$u(u_{xy} - v_{xx}) + v(u_{yy} - v_{xy}) = \varphi_{xx} + \varphi_{yy}$$

или, пользуясь уравнением неразрывности, можем переписать его так:

$$\frac{\partial}{\partial x}[u(u_y - v_x)] + \frac{\partial}{\partial y}[v(u_y - v_x)] = \varphi_{xx} + \varphi_{yy}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial}{\partial x}(uu_y) = \frac{\partial}{\partial y}(uu_x), \quad \frac{\partial}{\partial y}(vv_x) = \frac{\partial}{\partial x}(vv_y),$$

поэтому, предыдущее соотношение можно переписать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv_x + vv_x + \varphi_x) = \frac{\partial}{\partial y}(uu_x + vu_y - \varphi_y).$$

Но это означает, что существует функция $p(x,y,t)$, определяемая соотношениями

$$p_x = \varphi_y - uu_x - vu_y, \quad p_y = -\varphi_x - uv_x - vu_y \qquad \text{(I.12)}$$

с точностью до аддитивной функции времени. Распоряжаясь этой функцией, можно удовлетворить условию (I.3).

Подставляя выражения φ_x, φ_y из (I.12) в первые два уравнения системы (I.5), получим первые два уравнения (I.1), что и завершает доказательство эквивалентности.

Аналогичное доказательство проходит и в стационарном случае. При этом задача формулируется так: найти функции u, v, φ, удовлетворяющие в Ω системе уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_y &= \nu(u_{xx} + u_{yy}), \\ \varphi_x &= -\nu(v_{xx} + v_{yy}), \\ u\varphi_x + v\varphi_y &= \nu(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}). \end{aligned} \qquad \text{(I.13)}$$

При условиях:

$$u = U(x,y), \qquad v = V(x,y) \ ,$$

$$\varphi = \nu(u_y - v_x), \qquad (x,y) \in \gamma \ , \tag{I.I4}$$

$$\oint_\gamma (Udy - Vdx) = 0.$$

2. Были проведены расчеты некоторых стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости при использовании уравнений (I.I3), аналогом которых для всех внутренних точек являются следующие разностные уравнения:

$$\nu(\int u_{ik} - 4u_{ik}) = \frac{h}{2}(\varphi_{ik+1} - \varphi_{ik-1}) \ ,$$

$$\nu(\int v_{ik} - 4v_{ik}) = \frac{h}{2}(\varphi_{i-1k} - \varphi_{i+1k}) \ ,$$

$$\nu(\int \varphi_{ik} - 4\varphi_{ik}) = \eta\{hU_{ik}[\alpha(\varphi_{i+1k} - \varphi_{ik}) +$$

$$+ (1-\alpha)(\varphi_{ik} - \varphi_{i-1k})] + hV_{ik}[\beta(\varphi_{ik+1} - \varphi_{ik}) +$$

$$+ (1-\beta)(\varphi_{ik} - \varphi_{ik-1})]\} + (1-\eta)\{\frac{h}{2}u_{ik}(\varphi_{i+1k} -$$

$$- \varphi_{i-1k}) + \frac{h}{2}v_{ik}(\varphi_{ik+1} - \varphi_{ik-1})\} \ ,$$

где

$$\int f_{ik} = f_{i+1k} + f_{ik+1} + f_{i-1k} + f_{ik-1} \ .$$

При этом предполагается, что при $\eta = 1$:

$$\alpha = 0 \text{ если } U_{ik} > 0, \qquad \alpha = I \text{ если } u_{ik} \le 0,$$
$$\beta = 0 \text{ если } V_{ik} > 0, \qquad \beta = I \text{ если } v_{ik} \le 0.$$

Это означает, что соответствующие производные аппроксимируются односторонними разностями. При $\eta = 0$ имеем аппроксимацию центральными разностями.

Поставленная задача была реализована для равномерной сетки I4xI4. Причем, алгоритмы решения задачи предусматривает сетки и с большим числом узлов. Для решения разностных уравнений (2.I) применим схему расщепления. На первом полушаге

$t \in [n\tau, (n+1/2)\tau]$ решается система:

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \nu \frac{\Delta_1\Delta_{-1}}{h^2}(u^n + u^{n+1/2}) - \frac{\Delta_2 + \Delta_{-2}}{2h}\varphi^n,$$

$$\frac{v^{n+1/2} - v^n}{\tau} = \nu \frac{\Delta_1\Delta_{-1}}{h^2}(v^n + v^{n+1/2}) + \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h}\varphi^n,$$

$$\frac{\varphi^{n+1/2} - \varphi^n}{\tau} = \nu \frac{\Delta_1\Delta_{-1}}{h^2}(\varphi^n + \varphi^{n+1/2}) +$$

$$+ \eta \frac{u^n + u^{n+1/2}}{2}\left[\left(\alpha \frac{\Delta_1}{h} + (1-\alpha)\frac{\Delta_{-1}}{h}\right)(\varphi^n + \varphi^{n+1/2})\right] - \qquad (2.2)$$

$$- (1-\eta)(u^n + u^{n+1/2})\frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{4h}(\varphi^n + \varphi^{n+1/2}).$$

На втором полушаге $t = [(n+1/2)\tau, \quad (n+1)\tau\ ]$ – система:

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \nu \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h^2} (u^{n+1/2} + u^{n+1}) - \frac{\Delta_2 + \Delta_{-2}}{2h} \varphi^{n+1/2},$$

$$\frac{v^{n+1} - v^{n+1/2}}{\tau} = \nu \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h^2} (v^{n+1/2} + v^{n+1}) + \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} \varphi^{n+1/2}$$

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1/2}}{\tau} = \nu \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h^2} (\varphi^{n+1/2} + \varphi^{n+1}) - \eta \frac{v^{n+1/2} + v^{n+1}}{2} \times \quad (2.3)$$

$$\times \left[\left(\beta \frac{\Delta_2}{h} + (1-\beta) \frac{\Delta_{-2}}{h}\right)(\varphi^{n+1/2} + \varphi^{n+1}) \right] -$$

$$-(1-\eta)(v^{n+1/2} + v^{n+1}) \frac{\Delta_2 + \Delta_2}{4h} (\varphi^{n+1/2} + \varphi^{n+1}).$$

Здесь:

Δ_1, Δ_2 – разностные операторы по направлениям x и y соответственно (правые разности);

Δ_{-1}, Δ_{-2} – левые разности;

$\Delta_1 + \Delta_{-1}$, $\Delta_2 + \Delta_{-2}$ – центральные разности;

$\Delta_1 \Delta_{-1}$, $\Delta_2 \Delta_{-2}$ – оператор, аппроксимирующий вторую производную.

Покажем, что выбранная схема обладает полной аппроксимацией. Пусть

$$\frac{u^n + u^{n+1/2}}{2}, \quad \frac{v^n + v^{n+1/2}}{2}, \quad \frac{\varphi^n + \varphi^{n+1/2}}{2}$$

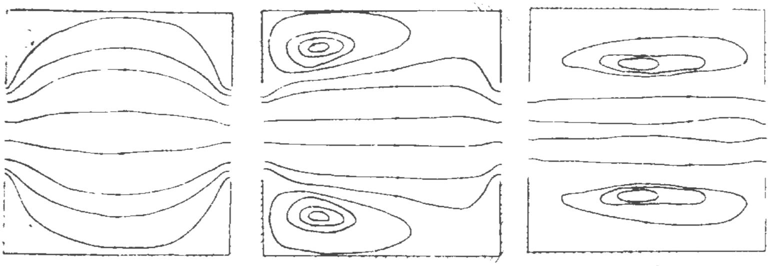
сходятся к функциям u, v, φ соответственно, а

u^n, v^n, φ^n и $u^{n+1/2}$, $v^{n+1/2}$, $\varphi^{n+1/2}$

сходятся – к функциям $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{\varphi}$ и $u^{1/2}$, $v^{1/2}$, $\varphi^{1/2}$. Подставляя $\frac{u^n + u^{n+1/2}}{2}$, $\frac{v^n + v^{n+1/2}}{2}$ и $\frac{\varphi^n + \varphi^{n+1/2}}{2}$ в предельные уравнения (2.3), получим:

$$
\begin{aligned}
\tilde{u} &= u^{1/2} + 2\tau\nu \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h^2} u - \tau \frac{\Delta_2 + \Delta_{-2}}{2h} \varphi^{n+1/2} , \\
\tilde{v} &= v^{1/2} + 2\tau\nu \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h^2} v + \tau \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} \varphi^{n+1/2} , \\
\tilde{\varphi} &= \varphi^{1/2} + 2\tau\nu \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h^2} \varphi - 2\eta\tau v \Big[\beta \frac{\Delta_2}{h} + (1-\beta) \frac{\Delta_{-2}}{h}\Big]\varphi - \\
&\quad - \tau(1 - \eta)\, v \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h} \varphi .
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Подставляя значения $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ и $\tilde{\varphi}$ из (2.4) в предельные соотношения (2.2), найдем, что получившиеся в результате уравнения аппроксимируют исходные уравнения системы (I.I3) с точностью $O(h^2)$, причем, порядок аппроксимации не зависит от параметра τ. По данной схеме был проведен ряд расчетов для прямоугольных областей с различными граничными условиями. На рис. I показаны линии тока для следующей задачи.



а) $\nu = 10^{1}$ б) $\nu = 10^{2}$ в) $\nu = 10^{3}$

Рис. I

Начальные условия: $u^0_{im} = v^0_{im} = \varphi^0_{im} = 0$

Граничные условия:

I. $U = I, \quad V = 0$ при $x = 0, \; x = I, \; \frac{1}{2} - \delta \le y \le \frac{1}{2} + \delta;$

2. $U = V = 0$ при $0 \le x \le 1, \; y = 0, \; y = 1,$

$$x = 0, \; x = 1, \quad \frac{1}{2} + \delta < y \le 1, \; 0 \le y < \frac{1}{2} - \delta.$$

Расчеты велись при $\nu = 1, 10^{-1}, 10^{-2}$ и 10^{-3}; $0 \le \delta < \frac{1}{2}$.

Была решена также задача:

I. $U = \frac{1}{2\delta}$ при $x = 0$, и $\frac{1}{2} - \delta \le y \le \frac{1}{2} + \delta$;

$U = -\frac{1}{2\delta}$ при $x = I$,

2. $U = \frac{1}{2\delta}$ при $y = 0$ и $\frac{1}{2} - \delta \le x \le \frac{1}{2} + \delta$;

$U = -\frac{1}{2\delta}$ при $y = I$

3. $U = V = 0$ при $x = 0, \; x = I, \; \frac{1}{2} + \delta < y \le 1,$

$0 \le y < \frac{1}{2} - \delta,$

при $y = 0, \; y = 1, \; \frac{1}{2} + \delta < x \le 1,$

$0 \le x < \frac{1}{2} - \delta.$

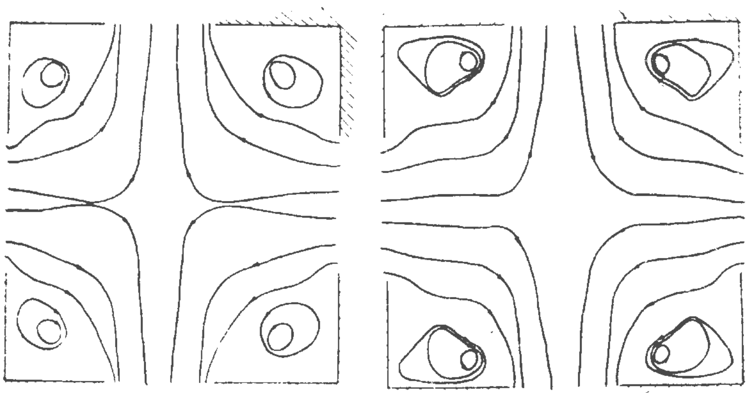
Вначале счёт вёлся для $Re = I$. После сходимости для данного Re вёлся счёт для увеличенного в I0 раз Re и за начальные данные брались уже насчитанные функции u^n, v^n, φ^n и $u^{n+1/2}, v^{n+1/2}, \varphi^{n+1/2}$ для меньшего Re. Таким образом, процесс счёта повторяется и для $Re = 10^2, 10^3$. Сходимость определялась следующим образом.

$$\max_{i,m} \left| u^{n+1}_{im} - u^n_{im} \right| < \varepsilon, \quad \max_{i,m} \left| v^{n+1}_{im} - v^n_{im} \right| < \varepsilon.$$

Если для выхода на стационарное решение для чисел $Re = I, I0$ нужно 80 итераций (при $\varepsilon = I0^{-6}$), то для $Re = I000 - (2000 - 2500)$ итераций. Результаты расчётов сравнивались с двумя точными решениями.

В частности, для решения задачи Пуазейля полученный результат расчета перепада давления в точках P_0 и P_N совпадает с точным для $Re = 10^3$ с точностью до 5 знаков, а для $Re = 1$, I0 – до 8 знаков.

Проведенные расчеты показали, что скорость сходимости процесса мало зависит от значения , но предпочтение следует отдать $\eta = 0$. Особенно это видно в задаче для встречных потоков (рис. 2).



а) $\nu = 10^{-2}$ б) $\nu = 10^{-3}$

Рис. 2 .