ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

ЭНЦИКЛОПЕДИЯ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ

иерет

Серия Б
СПРАВОЧНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ, БАЗЫ И БАНКИ ДАННЫХ

Том VII – 1

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЕ

Часть 2

Под редакцией
Ю.П.Попова

МОСКВА
ЯНУС-К

Глава 6
МЕТОДЫ РАСЧЕТА УДАРНЫХ ВОЛН

СОДЕРЖАНИЕ

6.1. ВВЕДЕНИЕ

В течение почти двух столетий модели газовой динамики и плазмы развивались на основе уравнений Л.Эйлера, написанных в 1755 г. для идеальной сжимаемой среды, в которой действует единственная сила – давление. Несмотря на существенную схематизацию и упрощение свойств реальных сред этот подход оказался очень плодотворным и до настоящего времени не потерял своего значения, так как он позволяет применить достаточно строгие математические методы к решению практически важных научных и технических задач. В случае непрерывных характеристик сплошной среды законы сохранения записываются в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Уравнения Эйлера образуют ядро всех моделей механики сплошных сред. Поскольку из законов сохранения массы, импульса и энергии идеальной сжимаемой сплошной среды вытекает следствие – сохранение энтропии вдоль траектории (линии тока) любой частицы, то это ядро называют [1] адиабатическим. При необходимости учесть реальные свойства сплошной среды (вязкость, упругость, пластичность, магнитные и электрические свойства, теплопроводность и др.) в уравнения адиабатического ядра добавляют соответствующие члены. Уравнения состояния вещества (УРС) могут быть сколь угодно сложными. Из-за нелинейности законов сохранения в сплошной среде могут возникать сильные разрывы – ударные волны. На поверхности сильных разрывов законы сохранения принимают вид нелинейных алгебраических уравнений, связывающих скачки величин по обе стороны разрыва. На сильном разрыве энтропия терпит скачок. В этом заключается принципиальное различие между ударными волнами и волнами с непрерывным изменением величин.

Плазма является типичной многокомпонентной средой, образованной ионами разных сортов и электронами. Каждый компонент характеризуется физическими и парциальными величинами. При переходе к парциальным величинам каждый компонент занимает весь объем смеси так, как будто других компонентов нет [2]. Его поведение описывается системой законов сохранения и в случае непрерывных характеристик, и в случае сильных разрывов.

К сильному разрыву с обеих сторон примыкают области, в которых, как правило, все величины непрерывны. Поэтому вместе с методами расчета сильных разрывов неизбежно приходится рассматривать и поведение разностных схем на непрерывных решениях. Данная работа посвящена рассмотрению только таких методов расчета ударных волн, в которых сильный разрыв заменяется слоем конечной ширины, сравнимой с размером сеточной ячейки (дистракцией [3]). Поскольку состояние за разрывом связано ударной адиабатой с состоянием перед разрывом, то в области дистракции сильного разрыва должен действовать механизм, обеспечивающий возрастание энтропии. В методах расчета ударных волн используются четыре принципиально отличающихся друг от друга механизма диссипации энергии [4–7]. В табл.6.1 приведены данные об авторах, стране и дате первой публикации по каждому из этих методов. Основанные на них четыре метода расчета реализованы в большом количестве разностных схем. Авторы методов расчета ударных волн [4–7] предложили четыре разностных схемы. Первая попытка сравнительного анализа этих методов была предпринята Б.Л.Рождественским и Н.Н.Яненко в [8]. Авторы подробно рассмотрели вопросы аппроксимации и устойчивости.

В данной работе для каждого метода находится уравнение диссипации энергии, определяется дистракция разрывов и исследуются условия монотонности. В работе не рассматривается метод характеристик, который отличается от разностных методов для системы законов сохранения иной формой уравнений и, как правило, выделением сильных разрывов.

Таблица 6.1

Год первой публикации	Первая публикация	Авторы метода расчета ударных волн	Страна	Механизм диссипации энергии
1950 г.	[4]	Д.Нейман, Р.Рихтмайер	США	псевдовязкость
1954 г.	[5]	П.Лакс	США	аппроксимационная вязкость
1959 г.	[6]	С.К.Годунов	СССР	распад произвольного разрыва
1960 г.	[7]	В.Ф.Куропатенко	СССР	уравнения Гюгонио

6.2. РАЗНОСТНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

Для исследования принципиальных различий между методами расчета ударных волн рассматривают уравнения механики сплошной среды в самой простой постановке. Разностные законы сохранения записывают в дифференциальной форме [9]

$$\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial U}{\partial m}=\omega_1, \qquad (6.2.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial m}=\omega_2, \qquad (6.2.2)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial PU}{\partial m}=\omega_3,\ \varepsilon=E+0{,}5U^2, \qquad (6.2.3)$$

где V – удельный объем, P – давление, ε – удельная полная энергия, E – удельная внутренняя энергия, U – скорость, а функции ω_i являются погрешностями аппроксимации дифференциальных уравнений разностными. Система (6.2.1)–(6.2.3) замыкается УРС

$$P=P(V,E) \qquad (6.2.4)$$

и дополняется уравнением траектории частицы

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_m-U=\omega_4. \qquad (6.2.5)$$

Методы исследования свойств разностных уравнений в дифференциальной форме созданы и обоснованы в работах Н.Н.Яненко и его учеников [10]. В [11] в рамках первых дифференциальных приближений (ДП1) проанализированы свойства одного класса инвариантных разностных схем. Свойства методов расчета ударных волн также рассматривают в рамках первого или второго дифференциальных приближений.

Уравнения (6.2.1–6.2.5) допускают ряд следствий. Например, из уравнения

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_m-V=\omega_5, \qquad (6.2.6)$$

и уравнений (6.2.1) и (6.2.5) следует

$$\omega_1=\frac{\partial\omega_4}{\partial m}-\frac{\partial\omega_5}{\partial t}.$$

Из (6.2.2) и (6.2.3) следует уравнение для внутренней энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t}+P\frac{\partial U}{\partial m}=\omega_6=\omega_3-U\omega_2, \qquad (6.2.7)$$

а из (6.2.1) и (6.2.7) следует уравнение, содержащее только термодинамические величины

$$\frac{\partial E}{\partial t}+P\frac{\partial V}{\partial t}=\omega_7=\omega_3-U\omega_2+P\omega_1. \qquad (6.2.8)$$

Из (6.2.8) и основного уравнения термодинамики $dE+PdV=TdS$ следует

$$T\frac{\partial S}{\partial t}=\omega_8=\omega_7. \qquad (6.2.9)$$

Из (6.2.4) и определения скорости звука в лагранжевых массовых координатах

$$a^2=-\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_E+P\left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_V$$

следует еще одно уравнение, содержащее только термодинамические величины

$$\frac{\partial P}{\partial t}+a^2\frac{\partial V}{\partial t}=\omega_9=\left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_V\omega_7, \qquad (6.2.10)$$

а из (6.2.10) и (6.2.1) следует

$$\frac{\partial P}{\partial t}+a^2\frac{\partial U}{\partial m}=\omega_{10}=\omega_9-a^2\omega_1. \qquad (6.2.11)$$

В [9] показано, что построение конкретной разностной схемы равносильно выбору определенного набора трех ω_i. Все остальные ω_i можно получить с помощью соответствующего фундаментального решения.

Оценка изменения энтропии вдоль линии тока с течением времени является эффективным средством локального контроля точности вычисления термодинамических величин. В [9] свойство разностной схемы сохранять энтропию вдоль линии тока названо S-консервативностью. Там же доказана теорема о том, что необходимое и достаточное условие S-консервативности имеет вид

$$\omega_8=0.$$

Если в исследуемой разностной схеме среди независимых уравнений нет уравнения (6.2.9), то ω_8 может быть выражено через погрешности аппроксимации независимых разностных уравнений.

Поскольку все погрешности аппроксимации имеют вид

$$\omega=\sum_{k=0,\ l=0}^{\infty}A_{kl}\tau^k h^l\ (k+l\ge 1),$$

то для любой разностной схемы можно построить уравнение производства энтропии в виде

$$T\frac{\partial S}{\partial t}=\omega_8=\sum_{k=0,\ l=0}^{\infty}A_{Skl}\tau^k h^l\ (k+l\ge 1).$$

В качестве критерия диссипативности разностной схемы в [9] рекомендуется принять изменение энтропии в виде

$$T\Delta S=-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S\Delta V^3+O(\Delta S^2,\Delta V^4),$$

где ΔS – скачок энтропии, ΔV – скачок удельного объема на фронте слабой ударной волны. Температура T и производная $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S$ берутся в состоянии перед разрывом.

Если S и V зависят от времени t, а ΔS и ΔV есть изменения S и V за время τ, то второе дифференциальное приближение (ДП2) уравнения производства энтропии может быть записано в виде

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^3.$$

Скорость роста энтропии, определяемую этим уравнением, обозначают через $\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_\Phi$. Разностные схемы, для которых $\left|\frac{\partial S}{\partial t}\right| \le \left|\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_\Phi\right|$, называются слабо диссипативными, а разностные схемы, для которых $\left|\frac{\partial S}{\partial t}\right| > \left|\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_\Phi\right|$, сильно диссипативными.

Физический смысл этого критерия весьма прост: разностная схема является приемлемой, если изменение энтропии из-за погрешностей аппроксимации не превосходит ее изменения в характерных физических процессах. В сильно диссипативных разностных схемах слабые ударные волны неразличимы на фоне погрешностей.

Разностные уравнения, дающие удовлетворительные результаты для гладкого решения, оказываются часто непригодными для расчета разрывных решений. Для введения в уравнения диссипативных функций требуется отличать ячейки сетки, содержащие сильный разрыв, от ячеек с гладким решением. Условием такого разделения ячеек будет знак величины

$$K = \frac{U(x+\Delta x) - U(x)}{\Delta x}. \qquad (6.2.12)$$

Приближенное решение в ячейке сетки, в которой $K \ge 0$, называют R-волной (разрежение), приближенное решение в ячейке сетки, в которой $K < 0$, называют S-волной (сжатие) [12]. Этот критерий не является строгим, т.к. в класс R-волн попадают как непрерывные решения (волны разрежения), так и разрывные решения, когда величины перед фронтом ударной волны меняются столь быстро, что средняя плотность в ячейке уменьшается. Поскольку в этом случае вклад ударной волны в осредненный по ячейке процесс является малым, то им можно пренебречь и считать осредненный процесс в данной ячейке непрерывным. В класс S-волн попадают как разрывные решения, когда величины перед фронтом ударной волны и за фронтом меняются слабее, чем на фронте, так и непрерывные решения (волны сжатия).

Изложенный критерий впервые применен в [4] и позднее успешно использовался в [7, 9, 12–19] для введения диссипативных членов в разностные уравнения.

6.3. МЕТОД НЕЙМАНА–РИХТМАЙЕРА

Главная идея метода Неймана–Рихтмайера [4] заключается во введении в дифференциальные уравнения движения и энергии искусственной вязкости, обеспечивающей диссипацию энергии и дистракцию сильного разрыва до величины, сравнимой с размером нескольких сеточных ячеек.

В работе Неймана–Рихтмайера [4] предложена конкретная форма псевдовязкости

$$q = -\frac{C^2\Delta x_0^2}{V}\frac{\partial U}{\partial x_0}\left|\frac{\partial U}{\partial x_0}\right|$$

и конкретная разностная схема, несколько измененная в [13]. Идея введения псевдовязкости может быть реализована в виде различных разностных схем. Выражение для псевдовязкости также может быть разным [16, 18, 19]. Разностные схемы могут быть явными или неявными. Но если в уравнения вводится псевдовязкость, то все такие разностные схемы являются реализацией метода Неймана–Рихтмайера.

В разностной схеме, предложенной Нейманом и Рихтмайером в [4], термодинамические величины определяются в серединах сеточных интервалов по m, скорости и координаты – в узлах сеточных ячеек. Разностные уравнения из [13] имеют вид:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \frac{P_{i+0,5}^n + q_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n - q_{i-0,5}^n}{h} = 0,$$

$$\frac{V_{i+0,5}^{n+1} - V_{i+0,5}^n}{\tau} - \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{h} = 0,$$

$$h = \frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{V_{i+0,5}^n},$$

$$q_{i+0,5}^{n+1} = \begin{cases} \dfrac{k}{V_{i+0,5}^{n+1}}(U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1})^2 & \text{при } U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1} < 0, \\ 0 & \text{при } U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1} \ge 0, \end{cases} \qquad (6.3.1)$$

$$E_{i+0,5}^{n+1} - E_{i+0,5}^n + \left(\frac{P_{i+0,5}^{n+1} + P_{i+0,5}^n}{2} + q_{i+0,5}^{n+1}\right)(V_{i+0,5}^{n+1} - V_{i+0,5}^n) = 0, \qquad (6.3.2)$$

$$P_{i+0,5}^{n+1} = P(V_{i+0,5}^{n+1}, E_{i+0,5}^{n+1}). \qquad (6.3.3)$$

Уравнение энергии (6.3.2) и УРС (6.3.3) образуют систему нелинейных уравнений относительно P^{n+1}, E^{n+1}.

Метод условно устойчив. Соотношение шагов по времени и по пространству $æ = a\tau / h$ зависит от эмпирической константы k в (6.3.1) и реальное условие устойчивости имеет вид $æ \le 0{,}25$.

В [4] дистракция разрыва исследована следующим образом. Авторы положили в (6.2.1), (6.2.2), (6.2.8) $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = -\frac{\partial q}{\partial m}$, $\omega_7 = -q\frac{\partial V}{\partial t}$. В случае стационарной ударной волны после перехода к автомодельной переменной $\xi = m - Wt$ эти уравнения принимают вид

$$WV' + U' = 0, \qquad (6.3.4)$$

$$WU' - (P+q)' = 0, \qquad (6.3.5)$$

$$E' + (P+q)V' = 0, \qquad (6.3.6)$$

где штрих означает дифференцирование по ξ.

Для идеального газа

$$PV = (\gamma - 1)E \qquad (6.3.7)$$

и конкретного выражения для q

$$q = \frac{k^2h^2W^2}{V}(V')^2 \qquad (6.3.8)$$

система уравнений (6.3.4)–(6.3.8) сводится к одному уравнению для определения V

$$2k^2h^2\left(\frac{dV}{d\xi}\right)^2 + (\gamma+1)(V-V_0)^2 + 2V_0(V-V_0) = 0. \qquad (6.3.9)$$

Решение уравнения (6.3.9) имеет вид

$$\xi = \pm kh\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}\arcsin\left(\gamma-(\gamma+1)\frac{V}{V_0}\right). \qquad (6.3.10)$$

При $V = V_0$

$$\xi_0 = \frac{3kh\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}.$$

При $\xi = \xi_1 < 0$ $V = V_1 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}V_0$, соответственно

$$\xi_1 = -\frac{kh\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}.$$

Таким образом, ширина ударного слоя $\Delta\xi$ и дистракция D сильной ударной волны в методе Неймана–Рихтмайера равны

$$\Delta\xi = \xi_0 - \xi_1 = 2kh\pi\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}, \quad D_{\text{НР}} = \frac{\Delta\xi}{h} = 2k\pi\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}.$$

Для определения эффективной дистракции $D^{\text{Э}}_{\text{НР}}$ находятся точки пересечения прямой линии $V(\xi)$, имеющей максимальный наклон

$$V'_{\text{М}}(\xi) = \frac{V_0}{kh\sqrt{2(\gamma+1)}}$$

со значениями V_0 и V_1

$$\Delta\xi = \frac{V_0 - V_1}{V'_{\text{М}}}.$$

Подставив сюда $V'_{\text{М}}$ и значение минимального удельного объема V_1, получают после деления на h

$$D^{\text{Э}}_{\text{НР}} = 2k\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}.$$

Для определения диссипативных свойств разностной схемы Неймана–Рихтмайера нужно провести преобразования в соответствии с [9]. В результате получают уравнение производства энтропии на непрерывных решениях при $q = 0$

$$T\frac{dS}{dt} = -\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S\left(\frac{dV}{dt}\right)^3 + \frac{\tau^2h^2k}{24V}\left(\frac{1}{a^2}\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2\frac{\partial^3 V}{\partial t^3} + \ldots$$

Следовательно, разностная схема Неймана–Рихтмайера на непрерывных решениях слабо диссипативна.

6.4. МЕТОД ЛАКСА

Идея, лежащая в основе предложенного Лаксом [5] метода расчета ударных волн, заключается в том, что необходимая диссипация энергии обеспечивается главными членами погрешностей аппроксимации. Позднее этот метод стали называть методом аппроксимационной вязкости.

Все величины определяются в серединах сеточных интервалов по m. Разностные уравнения имеют вид

$$\frac{V^{n+1}_{i+0,5} - V^n_{i+0,5}}{\tau} - \frac{U^*_{i+1} - U^*_i}{h} = 0, \qquad (6.4.1)$$

$$\frac{U^{n+1}_{i+0,5} - U^n_{i+0,5}}{\tau} + \frac{P^*_{i+1} - P^*_i}{h} = 0, \qquad (6.4.2)$$

$$\frac{\varepsilon^{n+1}_{i+0,5} - \varepsilon^n_{i+0,5}}{\tau} + \frac{(PU)^*_{i+1} - (PU)^*_i}{h} = 0, \qquad (6.4.3)$$

$$E^{n+1}_{i+0,5} = \varepsilon^{n+1}_{i+0,5} - 0,5(U^{n+1}_{i+0,5})^2, \qquad (6.4.4)$$

где $f_i = f(m_i)$, $f^* = f(t^*)$, $f^n = f(t^n)$. Вообще говоря, уравнения (6.4.1)–(6.4.4) являются общими до тех пор, пока не конкретизированы уравнения для определения вспомогательных величин U^*_i, P^*_i, $(PU)^*_i$. В [5] Лаксом предложена разностная схема, в которой вспомогательные величины U^*, P^* и на ударных волнах, и на непрерывных решениях определяются уравнениями

$$U^*_i = \frac{1}{2}(U^n_{i+0,5} + U^n_{i-0,5}) + \frac{h}{2\tau}(V^n_{i+0,5} - V^n_{i-0,5}), \qquad (6.4.5)$$

$$P^*_i = \frac{1}{2}(P^n_{i+0,5} + P^n_{i-0,5}) - \frac{h}{2\tau}(U^n_{i+0,5} - U^n_{i-0,5}), \qquad (6.4.6)$$

$$(PU)^*_i = \frac{1}{2}((PU)^n_{i+0,5} + (PU)^n_{i-0,5}) - \frac{h}{2\tau}(\varepsilon^n_{i+0,5} - \varepsilon^n_{i-0,5}). \qquad (6.4.7)$$

В дифференциальной форме разностные уравнения (6.4.1)–(6.4.3) вместе с (6.4.5)–(6.4.7) имеют вид (6.2.1), (6.2.2), (6.2.3) с погрешностями аппроксимации

$$\omega_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial m^2}\frac{h^2}{\tau} + O(\tau^2, h^2), \qquad (6.4.8)$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial m^2}\frac{h^2}{\tau} + O(\tau^2, h^2), \qquad (6.4.9)$$

$$\omega_3 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial m^2}\frac{h^2}{\tau} + O(\tau^2, h^2). \qquad (6.4.10)$$

При $h \to 0$ и $\tau = \text{const}$ соответствующие слагаемые в уравнениях (6.4.8)–(6.4.10) стремятся к нулю. Однако, при $\tau \to 0$ члены, пропорциональные $\frac{h^2}{\tau}$ в (6.4.8)–(6.4.10), стремятся к 0 лишь в том случае, если $\lim\limits_{\substack{\tau\to 0\\ h\to 0}} \frac{h^2}{\tau} = 0$. Если это условие не выполнено, то сходимость уравнений (6.2.1)–(6.2.3) к исходным дифференциальным уравнениям отсутствует, т.к. уменьшение τ при постоянном h приводит к увеличению погрешности.

Согласно [9] уравнение производства энтропии для разностных схем с независимыми ω_1, ω_2, ω_3 имеет вид

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \omega_3 - U\omega_2 + P\omega_1. \qquad (6.4.11)$$

С помощью (6.2.1)–(6.2.3), заменяют в (6.4.8)–(6.4.10) вторые производные по t производными по m и подставляют их в (6.4.11). Предполагая еще, что $\frac{\partial S}{\partial m} \approx 0$, получают уравнение производства энтропии в виде

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_m = \left(a^2\left(\frac{\partial U}{\partial m}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial m}\right)^2\right)\frac{\tau}{2æ^2}(1-æ^2) + O(\tau^2, h^2).$$

При $æ = \frac{\tau a}{h} \to 1$ скорость производства энтропии становится величиной второго порядка малости. При $æ = 0$ скорость производства энтропии бесконечна. Поскольку скорость изменения энтропии $\left|\frac{\partial S}{\partial t}\right| > \left|\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_Ф\right|$, то разностная схема Лакса является, согласно [9], сильно диссипативной.

Для определения дистракции стационарного разрыва в методе Лакса переходят к переменной $\xi = m - Wt$. Уравнения (6.2.1)–(6.2.3) принимают вид

$$WV' + U' + \frac{h^2}{2\tau}(1-æ^2)V'' + O(\tau^2, h^2) = 0,$$

$$WU' - P' + \frac{h^2}{2\tau}(1-æ^2)U'' + O(\tau^2, h^2) = 0,$$

$$W\varepsilon' - (PU)' + \frac{h^2}{2\tau}(1-æ^2)\varepsilon'' + O(\tau^2, h^2) = 0.$$

После интегрирования этих уравнений по ξ и определения постоянных интегрирования при $\xi = +\infty, U = U_0, V = V_0, P = P_0, E = E_0, \varepsilon = \frac{1}{2}U_0^2 + E_0$, получают

$$WV + U + AV' - WV_0 - U_0 + O(\tau^2, h^2) = 0,$$

$$WU - WU_0 - P + P_0 - AWV' + O(\tau^2, h^2) = 0,$$

$$W\varepsilon - W\varepsilon_0 - PU + A\varepsilon' + P_0U_0 + O(\tau^2, h^2) = 0, \qquad (6.4.12)$$

где $A = \frac{h^2}{2\tau}(1-æ^2)$. Из уравнений (6.4.12) и УРС идеального газа выражают все величины через V, а производные через V'. В результате получают обыкновенное дифференциальное уравнение, определяющее профиль $V(\xi)$

$$\frac{4A}{W(\gamma+1)}\frac{dV}{d\xi} + \frac{(V-V_0)(V-V_1)}{V} = O(\tau^2, h^2), \qquad (6.4.13)$$

где

$$V_1 = V_0\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{a_0}{W}\right)^2\right).$$

Решение этого уравнения после отбрасывания членов второго порядка малости имеет вид

$$\xi = \frac{2h^2(1-æ^2)}{\tau W(\gamma+1)(V_0 - V_1)}(V_1\ln(V - V_1) - V_0\ln(V_0 - V)). \qquad (6.4.14)$$

Из (6.4.14) следует, что $\xi_0 = +\infty$ при $V = V_0$, $\xi_1 = -\infty$ при $V = V_1$. Таким образом, дистракция сильного разрыва в методе Лакса бесконечна $D_Л = \infty$.

Для определения эффективной дистракции дифференцируют (6.4.13) и из условия $V'' = 0$ находят $V_М$ и максимальное значение $V'_М$

$$V_М = \sqrt{V_0 V},\ V'_М = \frac{(\gamma+1)æ}{2h(1-æ^2)}(\sqrt{V_0} - \sqrt{V_1})^2. \qquad (6.4.15)$$

Из (6.4.15) и (6.3.10) получают

$$D_Л^Э = \frac{2(1-æ^2)}{(\gamma+1)æ}\left(\frac{\sqrt{V_0}+\sqrt{V_1}}{\sqrt{V_0}-\sqrt{V_1}}\right). \qquad (6.4.16)$$

Из (6.4.16) видно, что эффективное значение $D_Л^Э \to 0$ при $æ \to 1$ и $D_Л^Э \to \infty$ при $æ \to 0$ или $V_1 \to V_0$.

Для рассмотрения монотонности разностной схемы Лакса выражают давление P и скорость U через инварианты α и β

$$P = \frac{\alpha+\beta}{2},\quad U = \frac{\alpha-\beta}{2a}. \qquad (6.4.17)$$

Для вещества с УРС

$$P = a^2(V_0 - V) \qquad (6.4.18)$$

заменяют V через P в уравнении (6.4.1) и после подстановки в него уравнения (6.4.5) получают

$$P_{i+0,5}^{n+1} = \frac{1}{2}(P_{i+1,5}^n + P_{i-0,5}^n) - \frac{\tau a^2}{2h}(U_{i+1,5}^n - U_{i-0,5}^n). \qquad (6.4.19)$$

Подставив (6.4.17) в (6.4.19) и (6.4.2) вместе с (6.4.6), получают

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} + \beta_{i+0,5}^{n+1} = 0{,}5((1+æ)(\alpha_{i-0,5}^n + \beta_{i+1,5}^n) +$$
$$+(1-æ)(\alpha_{i+1,5}^n + \beta_{i-0,5}^n)), \qquad (6.4.20)$$

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} - \beta_{i+0,5}^{n+1} = 0{,}5((1+æ)(\alpha_{i-0,5}^n - \beta_{i+1,5}^n) +$$
$$+(1-æ)(\alpha_{i+1,5}^n - \beta_{i-0,5}^n)). \qquad (6.4.21)$$

Уравнения для $\alpha_{i+0,5}^{n+1}$ и $\beta_{i+0,5}^{n+1}$ получаются после сложения (6.4.20) и (6.4.21) и вычитания (6.4.21) из (6.4.20)

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} = \frac{1-æ}{2}\alpha_{i+1,5}^n + \frac{1+æ}{2}\alpha_{i-0,5}^n,$$

$$\beta_{i+0,5}^{n+1} = \frac{1+æ}{2}\beta_{i+1,5}^n + \frac{1-æ}{2}\beta_{i-0,5}^n. \qquad (6.4.22)$$

Из (6.4.22) следует, что при $0 \le æ \le 1$ все коэффициенты перед значениями инвариантов в правых частях неотрицательны и т.о. разностная схема Лакса, согласно теореме С.К.Годунова [6], монотонна.

6.5. МЕТОД ГОДУНОВА

Согласно [6] все величины, характеризующие поведение среды, определяются в серединах сеточных интервалов по m. Координаты x_i определяются в узлах сетки. Разностные уравнения имеют вид (6.4.1–6.4.3). Вспомогательные значения P_i^*, U_i^* определяются следующим образом. Все табличные функции в момент t^n предполагаются кусочно-постоянными. Следовательно, в узлах сетки возникают произвольные разрывы. При $t > t^n$ они распадаются. Значения давления и скорости на контактном разрыве принимаются в качестве вспомогательных величин. Если произвольный разрыв таков, что вправо от x_i распространяется ударная волна, а влево волна разрежения, то уравнения для величин на контактном разрыве имеют вид

$$P_i^* + a_{i-0,5}^n U_i^* = P_{i-0,5}^n + a_{i-0,5}^n U_{i-0,5}^n,$$

$$P_i^* - W_{i+0,5} U_i^* = P_{i+0,5}^n - W_{i+0,5} U_{i+0,5}^n.$$

В общем случае $W_{i+0,5}$ зависит от P_i^* и U_i^*, поскольку задача о распаде произвольного разрыва является нелинейной. Однако, в случае слабой ударной волны при $W_{i+0,5} = a + O(h)$, $a_{i-0,5} = a + O(h)$ выражения P_i^*, U_i^* принимают вид

$$P_i^* = \frac{P_{i+0,5}^n + P_{i-0,5}^n}{2} - \frac{a}{2}(U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n), \qquad (6.5.1)$$

$$U_i^* = \frac{U_{i+0,5}^n + U_{i-0,5}^n}{2} - \frac{1}{2a}(P_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n). \qquad (6.5.2)$$

Запишем разностные уравнения (6.4.1)–(6.4.3), (6.5.1), (6.5.2) в дифференциальной форме (6.2.1)–(6.2.3). Погрешности аппроксимации ω_1, ω_2, ω_3 имеют вид

$$\omega_1 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{h}{2a}\frac{\partial^2 P}{\partial m^2} + O(\tau^2, h^2),$$

$$\omega_2 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{ah}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial m^2} + O(\tau^2, h^2),$$

$$\omega_3 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \frac{ah}{2}U\frac{\partial^2 U}{\partial m^2} + \frac{ah}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial m}\right)^2 + \frac{h}{2a}\left(\frac{\partial P}{\partial m}\right)^2 + \frac{h}{2a}P\frac{\partial^2 P}{\partial m^2} + O(\tau^2, h^2).$$

Поскольку ω_1, ω_2, ω_3 являются независимыми, то согласно [9], правая часть уравнения производства энтропии имеет вид (6.4.11). После подставки ω_1, ω_2, ω_3 в (6.4.11) и замены производных по t производными по m с помощью (6.2.1–6.2.3) и их производных получают уравнение производства энтропии

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{h}{2W}(1-æ)\left(\left(\frac{\partial P}{\partial m}\right)^2 + W^2\left(\frac{\partial U}{\partial m}\right)^2\right) + O(\tau^2, h^2). \qquad (6.5.3)$$

Из (6.5.3) следует, что при $æ = \frac{\tau\alpha}{h} < 1$ рассмотренная разностная схема, являющаяся акустическим приближением к схеме Годунова, сильно диссипативна. Поскольку главный член в правой части (6.5.3) неотрицателен, то энтропия растет и на ударных волнах и на волнах разрежения. Скорость роста энтропии ограничена и достигает максимума при $æ = 0$

$$T\frac{\partial S}{\partial t} < \frac{h}{2W}\left(\left(\frac{\partial P}{\partial m}\right)^2 + W^2\left(\frac{\partial U}{\partial m}\right)^2\right).$$

Исследуем дистракцию ударной волны в разностной схеме Годунова. Для этого перейдем к автомодельной переменной $\xi = m - Wt$ и запишем разностные уравнения в дифференциальной форме

$$WV' + U' - \frac{\tau W^2}{2}V'' - \frac{h}{2W}P'' + O(\tau^2, h^2) = 0, \qquad (6.5.4)$$

$$WU' - P' - \frac{\tau W^2}{2}U'' + \frac{hW}{2}U'' + O(\tau^2, h^2) = 0, \qquad (6.5.5)$$

$$W\varepsilon' - (PU)' - \frac{\tau W^2}{2}\varepsilon'' + \frac{hW}{2}(UU')' + \frac{h}{2W}(PP')' + O(\tau^2, h^2) = 0. \qquad (6.5.6)$$

Проинтегрировав (6.5.4)–(6.5.6) по ξ и исключив $P, U, \varepsilon, P', U', \varepsilon'$, получим для идеального газа уравнение для $V(\xi)$

$$\frac{2h(1-æ)}{(\gamma+1)}\cdot\frac{dV}{d\xi} + \frac{(V-V_0)(V-V_1)}{V} + O(\tau^2, h^2) = 0. \qquad (6.5.7)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\xi = \frac{2h(1-æ)}{(\gamma+1)(V_0 - V_1)}(V_1 \ln(V - V_1) - V_0 \ln(V_0 - V)).$$

Из этого уравнения следует, что $\xi_0 = +\infty$ при $V = V_0$, $\xi_1 = -\infty$ при $V = V_1$. Таким образом, дистракция разрыва в методе Годунова при $æ < 1$ бесконечна $D_\Gamma = \infty$, а при $æ = 1$ дистракция $D_\Gamma = 0$.

Эффективное значение дистракции получается так же, как в методе Лакса, и имеет вид

$$D_\Gamma^Э = \frac{2}{(\gamma+1)}(1-æ)\left(\frac{\sqrt{V_0} + \sqrt{V_1}}{\sqrt{V_0} - \sqrt{V_1}}\right).$$

Для определения немонотонности разностной схемы Годунова переходят к инвариантам, выражают P и U через α и β и для уравнения состояния (6.4.18) заменяют V на P в уравнении (6.4.1). В результате при $a = W$ получают

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} + \beta_{i+0,5}^{n+1} = \alpha_{i+0,5}^n + \beta_{i+0,5}^n +$$

$$+æ(\beta^n_{i+1,5}-\alpha^n_{i+0,5}-\beta^n_{i+0,5}+\alpha^n_{i-0,5}), \quad (6.5.8)$$

$$\alpha^{n+1}_{i+0,5}-\beta^{n+1}_{i+0,5}=\alpha^n_{i+0,5}-\beta^n_{i+0,5}+$$

$$+æ(-\beta^n_{i+1,5}-\alpha^n_{i+0,5}+\beta^n_{i+0,5}+\alpha^n_{i-0,5}) \quad (6.5.9)$$

Сложив (6.5.8) и (6.5.9), а затем отняв (6.5.9) от (6.5.8), получают уравнения для α и β инвариантов

$$\alpha^{n+1}_{i+0,5}=\alpha^n_{i+0,5}(1-æ)+\alpha^n_{i-0,5}æ,$$

$$\beta^{n+1}_{i+0,5}=\beta^n_{i+0,5}(1-æ)+\beta^n_{i-0,5}æ.$$

При $0\le æ\le 1$ все множители при значениях α и β неотрицательны и согласно теореме Годунова разностная схема, являющаяся акустическим вариантом схемы Годунова, монотонна.

6.6. МЕТОД КУРОПАТЕНКО

Как и в методе Неймана–Рихтмайера, разностные уравнения записываются по-разному для волн сжатия и для волн разрежения. В качестве критерия для разделения решений используется знак величины K (6.2.12). Основная идея метода [7] заключается в следующем.

В интервалах сетки, где решение непрерывно (на волнах разрежения), вспомогательные величины определяются с помощью разностных уравнений, аппроксимирующих дифференциальные уравнения.

В интервалах сетки, содержащих «сеточную» ударную волну (волну сжатия) вспомогательные величины находятся как решение системы законов сохранения на сильном разрыве

$$P_1-P_0-W(U_1-U_0)=0, \quad (6.6.1)$$

$$U_1-U_0+W(V_1-V_0)=0, \quad (6.6.2)$$

$$P_1U_1-P_0U_0-W(E_1-E_0)-\frac{W}{2}(U_1^2-U_0^2)=0. \quad (6.6.3)$$

Состояние перед разрывом (P_0, V_0, E_0, U_0) отождествляется с решением в сеточном интервале в момент t^n. В качестве величины за разрывом берется одна из сеточных величин, либо на границе интервала, либо в соседнем интервале. После этого из (6.6.1)–(6.6.3) и УРС находятся остальные величины за разрывом. Они и выбираются в качестве вспомогательных. Так, например, если задать U_1 [7], то из (6.6.1)–(6.6.3) находятся P_1, V_1, E_1, W, если же задать P_1 [19], то находятся V_1, E_1, U_1, W.

Метод допускает реализацию на разных сетках [7, 9, 12, 14, 15, 17, 19]. Рассмотрим две разностные схемы, реализующие этот метод.

6.6.1. Недивергентная разностная схема изложена в [7]. Сетки для скорости и для термодинамических величин различаются. Значения P, V, E определяются в серединах сеточных интервалов по массе, значения скорости – в узлах сетки t^n, m_i.

В случае волны разрежения при $K\ge 0$ разностные уравнения имеют вид

$$\frac{U_i^{n+1}-U_i^n}{\tau}+\frac{P^n_{i+0,5}-P^n_{i-0,5}}{h}=0, \quad (6.6.4)$$

$$x_i^{n+1}=x_i^n+\tau U_i^{n+1}, \quad (6.6.5)$$

$$V^{n+1}_{i+0,5}=\frac{x^{n+1}_{i+1}-x^{n+1}_i}{h}, \quad (6.6.6)$$

$$E^{n+1}_{i+0,5}-E^n_{i+0,5}+\frac{1}{2}(P^{n+1}_{i+0,5}+P^n_{i+0,5})(V^{n+1}_{i+0,5}-V^n_{i+0,5})=0. \quad (6.6.7)$$

Разностные уравнения (6.6.4)–(6.6.7) в дифференциальной форме имеют вид (6.2.2), (6.2.5), (6.2.6), (6.2.8), где

$$\omega_2=-\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2U}{\partial t^2}-\frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3U}{\partial t^3}-\frac{h^2}{24}\frac{\partial^3P}{\partial m^3}+O(\tau^3,h^3), \quad (6.6.8)$$

$$\omega_4=\frac{\tau}{2}\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^2U}{\partial t^2}+O(\tau^3), \quad (6.6.9)$$

$$\omega_5=-\frac{h^2}{24}\frac{\partial^3x}{\partial m^3}+O(h^3), \quad (6.6.10)$$

$$\omega_7=-\frac{\tau}{24}\frac{\partial^3E}{\partial t^3}-\frac{\tau^2}{24}P\frac{\partial^3V}{\partial t^3}+\frac{\tau^2}{8}\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial^2P}{\partial t^2}+O(\tau^3). \quad (6.6.11)$$

Продифференцируем (6.2.8) два раза по t и подставим $\frac{\partial^3E}{\partial t^3}$ в (6.6.11). Затем воспользуемся уравнениями

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S\frac{\partial V}{\partial t},\quad \frac{\partial^2P}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial^2P}{\partial V^2}\right)_S\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S\frac{\partial^2V}{\partial t^2}$$

для преобразования (6.6.11). В результате получим уравнение производства энтропии

$$T\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^2P}{\partial V^2}\right)_S\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^3+O(\tau^4).$$

Поскольку $\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)=\left|\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_\Phi\right|$, то разностная схема (6.6.4)–(6.6.7) термодинамически нормальна и слабо диссипативна.

В более поздних работах [20–22] вместо уравнения (6.6.7) на волнах разрежения использовалось интегрирование вдоль изэнтропы в виде

$$E^{n+1}-E+\int_{V^n}^{V^{n+1}}P(V,E)dV=0,\ P=P(V,E). \quad (6.6.12)$$

Такой расчет внутренней энергии и давления обеспечивает любую необходимую точность определения энтропии, а уравнение производства энтропии принимает вид

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_m=0.$$

Для волн сжатия выполняется условие $K < 0$ (6.2.12). В этом случае в уравнениях (6.6.4), (6.6.7) вместо P используется динамическое давление $\overline{P}$, которое является решением уравнений на сильном разрыве. В качестве величин перед сильным разрывом берутся величины в сеточном интервале в момент t^n

$$V_0 = V^n_{i+0,5},\ P_0 = P^n_{i+0,5},\ E_0 = E^n_{i+0,5},$$

а в качестве скачка скорости берется разность сеточных значений U в момент t^{n+1}

$$|U_1 - U_0| = |U^{n+1}_{i+1} - U^{n+1}_i|.$$

Подставив эти значения в уравнения на сильном разрыве, получим

$$\overline{P}^{n+1}_{i+0,5} = P^n_{i+0,5} - W(U^{n+1}_{i+1} - U^{n+1}_i). \qquad (6.6.13)$$

На волнах сжатия уравнения (6.6.4), (6.6.7) принимают вид

$$\frac{U^{n+1}_i - U^n_i}{\tau} + \frac{\overline{P}^n_{i+0,5} - \overline{P}^n_{i-0,5}}{h} = 0, \qquad (6.6.14)$$

$$E^{n+1}_{i+0,5} - E^n_{i+0,5} + \frac{1}{2}(\overline{P}^{n+1}_{i+0,5} + \overline{P}^n_{i+0,5})(V^{n+1}_{i+0,5} - V^n_{i+0,5}) = 0. \qquad (6.6.15)$$

В дифференциальной форме разностные уравнения имеют вид (6.2.2), (6.2.5), (6.2.6), (6.2.8). При этом ω_4 и ω_5 совпадают с (6.6.9), (6.6.10), а ω_2 и ω_7 изменяются

$$\omega_2 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + hW\frac{\partial^2 U}{\partial m^2} + \tau\frac{\partial^2 P}{\partial t \partial m} + O(\tau^2, h^2), \qquad (6.6.16)$$

$$\omega_7 = -\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial t} + P\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right) + hW\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial m} + O(\tau^2, h^2, \tau h). \qquad (6.6.17)$$

Для определения дистракции недивергентной разностной схемы переходят к автомодельной переменной $\xi = m - Wt$. Уравнения (6.2.2), (6.2.5), (6.2.6), (6.2.8) с погрешностями аппроксимации (6.6.9), (6.6.10), (6.6.16), (6.6.17) принимают вид

$$WU' - P' - \frac{\tau W^2}{2}U'' + hWU'' - \tau WP'' + O(\tau^2, h^2) = 0,$$

$$Wx' + U - \frac{\tau W}{2}U' + O(\tau^2) = 0,$$

$$x' - V + O(\tau^2) = 0,$$

$$E' + PV' - \frac{\tau W}{2}(E'' - P'V' + PV'') - hWVU' + O(\tau^2, h^2) = 0.$$

Дифференцируя эти уравнения, исключая x', E'', U', P' и интегрируя полученные уравнения по ξ, получают дифференциальное уравнение для $V(\xi)$, совпадающее с аналогичным уравнением в разностной схеме Годунова. Следовательно, первое дифференциальное приближение недивергентной РС Куропатенко имеет ту же дистракцию, что и ДП-1 разностной схемы Годунова.

Для исследования немонотонности недивергентной разностной схемы на волне сжатия уравнения (6.6.5), (6.6.6), (6.6.13), (6.6.14) и УРС (6.4.18) преобразуют к виду

$$P^{n+1}_{i+0,5} - P^n_{i+0,5} + \frac{\tau a^2}{h}(U^{n+1}_{i+1} - U^{n+1}_i) = 0, \qquad (6.6.18)$$

$$U^{n+1}_i - U^n_i + \frac{\tau}{h}(P^{n-1}_{i+0,5} - P^{n-1}_{i-0,5}) - æ(U^n_{i+1} - 2U^n_i + U^n_{i-1}) = 0. \qquad (6.6.19)$$

В (6.6.18) и (6.6.19) с помощью (6.4.17) переходят к инвариантам

$$\alpha^{n+1}_{i+0,5} + \beta^{n+1}_{i+0,5} =$$
$$= -æ(\alpha^{n+1}_{i+1} - \beta^{n+1}_{i+1}) + æ(\alpha^{n+1}_i - \beta^{n+1}_i) + \alpha^n_{i+0,5} + \beta^n_{i+0,5}, \qquad (6.6.20)$$

$$\alpha^{n+1}_i - \beta^{n+1}_i =$$
$$= \alpha^n_i - \beta^n_i - æ(\alpha^{n-1}_{i+0,5} + \beta^{n-1}_{i+0,5}) + æ(\alpha^{n-1}_{i-0,5} + \beta^{n-1}_{i-0,5}) +$$
$$+ æ(\alpha^n_{i+1} - \beta^n_{i+1}) - 2æ(\alpha^n_i - \beta^n_i) + æ(\alpha^n_{i-1} - \beta^n_{i-1}). \qquad (6.6.21)$$

Уравнения (6.6.20) и (6.6.21) преобразуют так, чтобы в правых частях стояли только величины с временным индексом «n». Для этого записывают (6.6.20) для предыдущего шага по времени

$$\alpha^n_{i+0,5} + \beta^n_{i+0,5} + æ(\alpha^n_{i+1} - \beta^n_{i+1}) - æ(\alpha^n_i - \beta^n_i) =$$
$$= \alpha^{n-1}_{i+0,5} + \beta^{n-1}_{i+0,5}. \qquad (6.6.22)$$

Затем в (6.6.22) уменьшают пространственный индекс на единицу и полученное уравнение вместе с (6.6.22) подставляют в (6.6.21). В результате (6.6.21) преобразуется к виду

$$\alpha^{n+1}_i - \beta^{n+1}_i = (1 - 2æ + æ^2)(\alpha^n_i - \beta^n_i) +$$
$$+ æ(1 - æ)(\alpha^n_{i+1} - \beta^n_{i+1} + \alpha^n_{i-1} - \beta^n_{i-1}) -$$
$$- æ(\alpha^n_{i+0,5} + \beta^n_{i+0,5} - \alpha^n_{i-0,5} - \beta^n_{i-0,5}). \qquad (6.6.23)$$

В уравнении (6.6.23) увеличивают пространственный индекс на единицу и полученное уравнение вместе с (6.6.23) подставляют в (6.6.20). После уменьшения пространственного индекса на 0,5 это уравнение имеет вид

$$\alpha^{n+1}_i + \beta^{n+1}_i = (1 - 2æ^2)(\alpha^n_i + \beta^n_i) +$$
$$+ æ^2(\alpha^n_{i+1} + \beta^n_{i+1} + \alpha^n_{i-1} + \beta^n_{i-1}) -$$
$$- æ^2(1 - æ)(\alpha^n_{i+1,5} - \beta^n_{i+1,5} - \alpha^n_{i-1,5} + \beta^n_{i-1,5}) -$$
$$- æ(1 - 3æ + 3æ^2)(\alpha^n_{i+0,5} - \beta^n_{i+0,5} - \alpha^n_{i-0,5} + \beta^n_{i-0,5}). \qquad (6.6.24)$$

После сложения (6.6.23) и (6.6.24) получается уравнение для α_i^{n+1}. В случае бегущей волны, когда α инвариант зависит от m, а β инвариант постоянен, это уравнение имеет вид

$$2\alpha_i^{n+1} = -\alpha_{i+1,5}^n \text{æ}^2(1-\text{æ}) + \alpha_{i+1}^n \text{æ} - \alpha_{i+0,5}^n \text{æ}(1-3\text{æ}+3\text{æ}^2) +$$
$$+\alpha_i^n 2(1-\text{æ}) + \alpha_{i-0,5}^n \text{æ}(1-3\text{æ}+3\text{æ}^2) + \alpha_{i-1}^n \text{æ} + \alpha_{i+1,5}^n \text{æ}^2(1-\text{æ}). \qquad (6.6.25)$$

Поскольку при $\text{æ} < 1$ в правой части (6.6.25) есть отрицательные коэффициенты, то согласно теореме Годунова рассматриваемая разностная схема немонотонна. Если вычесть (6.6.23) из (6.6.24), то получается уравнение, выражающее $\beta_i^{n+1}-\beta_i^n$ через значения α в момент t^n. Величина $\max|\beta_i^{n+1}-\beta_i^n|$ характеризует меру немонотонности β. После представления всех значений α, входящих в это уравнение, в виде рядов Тейлора в точке t^n, m_i получается зависимость $\beta_i^{n+1}-\beta_i^n$ от соотношения шагов æ

$$\beta_i^{n+1}-\beta_i^n = -\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial m^2}\right)_i^n \text{æ}(1-2\text{æ})+O(h^3). \qquad (6.6.26)$$

Видно, что главный член этого разложения обращается в ноль при $\text{æ} = 0{,}5$. Это и есть условие, минимизирующее немонотонность.

6.6.2. Дивергентная разностная схема изложена в [19]. Все термодинамические величины и скорости определены в серединах сеточных интервалов, узлы сетки имеют координаты t^n, m_i. Разностные уравнения имеют вид (6.4.1–6.4.3). Для определения вспомогательных величин P_i^*, U_i^* решение на вспомогательном промежутке $m_{i-0,5} \le m \le m_{i+0,5}$ делится на два типа. Если внутри вспомогательной ячейки $K \ge 0$, то P_i^*, U_i^* определяются разностными уравнениями (6.2.2), (6.2.11) в виде

$$U_i^* = U_i^n - \frac{\tau}{2h}(P_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n),$$
$$P_i^* = P_i^n - \frac{\tau a^2}{2h}(U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n).$$

Вспомогательные величины P_i^*, U_i^* используются только в уравнениях (6.4.1), (6.4.2) для нахождения $V_{i+0,5}^{n+1}$, $U_{i+0,5}^{n+1}$. Вместо уравнения энергии (6.4.3) на волне разрежения используется следствие из законов сохранения в виде (6.6.12). Применение этого уравнения обеспечивает любую наперед заданную точность определения энтропии и устраняет ложную диссипацию энергии.

Рассмотрим дивергентную РС на волне сжатия. Вспомогательные величины вычисляются из уравнений на поверхности сильного разрыва (6.6.1–6.6.3). Величины по обе стороны разрыва задаются следующим образом.

Если $U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n < 0$, то

1. $U_1 = U_{i-0,5}^n$, $(P,V,E,U)_0 = (P,V,E,U)_{i+0,5}^n$ при $P_{i-0,5}^n > P_{i+0,5}^n$,

2. $U_1 = U_{i+0,5}^n$, $(P,V,E,U)_0 = (P,V,E,U)_{i-0,5}^n$ при $P_{i-0,5}^n < P_{i+0,5}^n$.

Остальные величины с индексом «1» находятся из (6.6.1)–(6.6.3). Если ограничиться рассмотрением только случая $W > 0$, то P_i^*, U_i^* определятся уравнениями

$$U_i^* = U_{i-0,5}^n,\quad P_i^* = P_{i+0,5}^n - W(U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n). \qquad (6.6.27)$$

Рассмотрим монотонность этой РС на волне сжатия. Основные уравнения вместе со вспомогательными значениями (6.6.27) примут вид

$$P_{i+0,5}^{n+1} = P_{i+0,5}^n - \frac{\tau a^2}{h}(U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n),$$
$$U_{i+0,5}^{n+1} = U_{i+0,5}^n -$$
$$-\frac{\tau}{h}(P_{i+1,5}^n - P_{i+0,5}^n - a(U_{i+1,5}^n - 2U_{i+0,5}^n + U_{i-0,5}^n)).$$

Заменим P и U инвариантами α и β в соответствии с (6.4.17)

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} + \beta_{i+0,5}^{n+1} = \alpha_{i+0,5}^n + \beta_{i+0,5}^n -$$
$$-\text{æ}(\alpha_{i+0,5}^n - \beta_{i+0,5}^n - \alpha_{i-0,5}^n + \beta_{i-0,5}^n),$$
$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} - \beta_{i+0,5}^{n+1} = \alpha_{i+0,5}^n - \beta_{i+0,5}^n -$$
$$-\text{æ}(\alpha_{i+1,5}^n + \beta_{i+1,5}^n - \alpha_{i+0,5}^n - \beta_{i+0,5}^n) +$$
$$+\text{æ}(\alpha_{i+1,5}^n - \beta_{i+1,5}^n - 2\alpha_{i+0,5}^n + 2\beta_{i+0,5}^n + \alpha_{i-0,5}^n - \beta_{i-0,5}^n).$$

Сложим эти два уравнения

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} = \alpha_{i+0,5}^n(1-\text{æ}) + \text{æ}\alpha_{i-0,5}^n -$$
$$-\text{æ}\beta_{i+1,5}^n + 4\text{æ}\beta_{i+0,5}^n - \text{æ}\beta_{i-0,5}^n. \qquad (6.5.28)$$

В случае $\beta = \text{const}$ уравнение (6.5.28) принимает вид

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} = \alpha_{i+0,5}^n(1-\text{æ}) + \alpha_{i-0,5}^n\text{æ}.$$

Оба коэффициента положительны при $0 \le \text{æ} \le 1$ и, таким образом, дивергентная разностная схема Куропатенко на бегущей волне сжатия монотонна.

Для исследования дистракции ударной волны разностные законы сохранения (6.4.1)–(6.4.3) вместе со вспомогательными величинами (6.6.27) записываются в дифференциальной форме (6.2.1)–(6.2.3) с погрешностями аппроксимации

$$\omega_1 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{h}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial m^2} + O(\tau^2, h^2),$$
$$\omega_2 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - hW\frac{\partial^2 U}{\partial m^2} - \frac{h}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial m^2} + O(\tau^2, h^2),$$

$$\omega_3 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial m}\left(U\frac{\partial P}{\partial m}\right) + \frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial m}\left(P\frac{\partial U}{\partial m}\right) +$$
$$+hW\frac{\partial}{\partial m}\left(U\frac{\partial U}{\partial m}\right) + O(\tau^2, h^2).$$

После перехода к автомодельной переменной $\xi = m - Wt$ уравнения (6.2.1–6.2.3) вместе с погрешностями аппроксимации ω_1, ω_2, ω_3 принимают вид

$$WV' + U' - \frac{\tau W^2}{2}V'' - \frac{h}{2}U'' + O(\tau^2, h^2) = 0, \quad (6.6.29)$$

$$WU' - P' - \frac{\tau W^2}{2}U'' - \frac{h}{2}P'' + hWU'' + O(\tau^2, h^2) = 0. \quad (6.6.30)$$

$$W\varepsilon' - (PU)' - \frac{\tau W}{2}PU'' - \frac{h}{2}(UP')' +$$
$$+\frac{h}{2}(PU')' - hW(UU')' + O(\tau^2, h^2) = 0. \quad (6.6.31)$$

Проинтегрировав эти уравнения по ξ, получают

$$WV + U - \frac{\tau W^2}{2}V' - \frac{h}{2}U' = WV_0 + U_0 + O(\tau^2, h^2), \quad (6.6.32)$$

$$WU - P - \frac{\tau W^2}{2}U' - \frac{h}{2}P' + hWU' = W_0U_0 - P_0 + O(\tau^2, h^2), \quad (6.6.33)$$

$$W\varepsilon - PU - \frac{\tau W}{2}(PU)' - \frac{h}{2}UP' + \frac{h}{2}PU' - hWUU' =$$
$$= W\varepsilon_0 - P_0U_0 + O(\tau^2, h^2). \quad (6.6.34)$$

С помощью (6.6.29)–(6.6.31) заменяют в (6.6.32)–(6.6.34) U' и P' на V'. Затем с помощью (6.6.32)–(6.6.34) заменяют U и P на V. В результате для идеального газа получается уравнение, описывающее профиль $V(\xi)$. Это уравнение с точностью до членов второго порядка малости совпадает с (6.5.7). Следовательно, дистракция и эффективная дистракция этой разностной схемы совпадают с D и $D^Э$ схемы Годунова.

6.7. ДРУГИЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

6.7.1. Из других разностных схем заслуживает внимания схема Лакса и Вендрофа [23], [24], поскольку она достаточно широко используется в публикациях. Лакс и Вендроф предложили вспомогательные величины P_i^*, U_i^* в (6.4.1–6.4.3) определять с помощью уравнений

$$P_i^* = P_i^n - \left(\frac{\tau}{2h}(a_i^n)^2 + \frac{B\Delta a_i^n}{4}\right)\Delta U_i^n,$$

$$U_i^* = U_i^n - \left(\frac{\tau}{2h} + \frac{B\Delta a_i^n}{4(a_i^n)^2}\right)\Delta P_i^n,$$

$$(PU)_i^* = (PU)_i^n - \left(\frac{\tau}{2h} + \frac{B\Delta a_i^n}{4(a_i^n)^2}\right)(P_i^n\Delta P_i^n + (a_i^n)^2U_i^n\Delta U_i^n),$$

где

$$P_i^n = 0{,}5(P_{i+0,5}^n + P_{i-0,5}^n),$$

$$U_i^n = 0{,}5(U_{i+0,5}^n + U_{i-0,5}^n),$$

$$a_i^n = 0{,}5(a_{i+0,5}^n + a_{i-0,5}^n),$$

$$\Delta U_i^n = U_{i+0,5}^n + U_{i-0,5}^n,$$

$$\Delta P_i^n = P_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n,$$

$$\Delta a_i^n = |a_{i+0,5}^n - a_{i-0,5}^n|,$$

$$(PU)_i^n = 0{,}5((PU)_{i+0,5}^n + (PU)_{i-0,5}^n).$$

Использование этих уравнений для расчета ударных волн равносильно введению в дифференциальные уравнения (6.2.1–6.2.3) трех псевдовязкостей

$$q_p = -\frac{B}{4}h^2\left|\frac{\partial a}{\partial m}\right|\frac{\partial U}{\partial m}, \quad q_u = -\frac{B}{4}\frac{h^2}{a^2}\left|\frac{\partial a}{\partial m}\right|\frac{\partial P}{\partial m},$$

$$q_{pu} = -\frac{B}{4}\frac{h^2}{a^2}\left|\frac{\partial a}{\partial m}\right|\left(P\frac{\partial P}{\partial m} + a^2U\frac{\partial U}{\partial m}\right).$$

Поскольку эти псевдовязкости не являются аппроксимационными, то Р.С. Лакса–Вендрофа является реализацией метода Неймана–Рихтмайера. Эта разностная схема содержит эмпирическую константу $B \approx 1 \div 2$, которая влияет на границу области устойчивости. Условие устойчивости имеет вид $æ\left(æ + \frac{1}{2}B\right) \le 1$.

Схема немонотонна.

6.7.2. Разностные схемы в Эйлеровых координатах широко применяются для решения задач аэродинамики. Подробный анализ достоинств и недостатков этих Р.С. приведен в [25], [26]. Любую из таких Р.С. можно рассматривать, как состоящую из двух этапов. На первом этапе сетка рассматривается как Лагранжева и применяется один из рассмотренных выше методов расчета ударных волн в Лагранжевых координатах. На втором этапе происходит пересчет величин с Лагранжевой сетки на Эйлерову. Наличие решения, полученного на первом этапе, облегчает определение потоков массы, количества движения и энергии через поверхности Эйлеровых ячеек.

6.7.3. Для подавления немонотонности численного решения разработаны приемы сглаживания уже полученного решения без нарушения законов сохранения. Эти приемы могут применяться в связке с любым из вышеперечисленных методов расчета ударных волн. Как правило, при разработке таких методов вопросы диссипации энергии и сохранения энтропии на непрерывных решениях не обсуждаются.

6.8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение приведем сравнительные характеристики рассмотренных методов расчета ударных волн в виде табл.6.2. Выражение эффективного значения дистракции в методах Годунова и Куропатенко имеют вид

$$D^{Э} = \frac{2(1-æ)}{\gamma+1}\left(\frac{\sqrt{V_0}+\sqrt{V_1}}{\sqrt{V_0}-\sqrt{V_1}}\right).$$

Таблица 6.2

Характеристика разностной схемы	Разностные схемы				
	Неймана-Рихтмайера	Лакса	Годунова	Куропатенко	
				недивергентная	дивергентная
Дистракция, D	$2k\pi\sqrt{2/(\gamma+1)}$	∞	∞	∞	∞
Эффективная дистракция, $D^{Э}$	$2k\sqrt{2/(\gamma+1)}$	$\frac{1+æ}{æ}D^{Э}$	$D^{Э}$	$D^{Э}$	$D^{Э}$
Монотонность на ударной волне	нет	есть	есть	нет	есть
Эмпирические константы	есть	нет	нет	нет	нет
Условие устойчивости	$æ \le \sqrt{\gamma}/2k$	$æ \le 1$	$æ \le 1$	$æ \le 1$	$æ \le 1$
Поведение энтропии на непрерывных решениях	по критерию слабой УВ	сильно растет	сильно растет	постоянна	постоянна

Список литературы

1. *Куропатенко В.Ф.* Мезомеханика однокомпонентных и многокомпонентных материалов // Физическая мезомеханика. –2001. – Т.4, №3. –С.49–55.

2. *Куропатенко В.Ф.* Обмен импульсом и энергией в неравновесных многокомпонентных средах // Прикладная механика и техническая физика. – 2005.– Т.46, №1. – С.7–15.

3. *Куропатенко В.Ф., Макеева И.Р.* Исследование дистракции разрывов в методах расчета ударных волн // Математическое моделирование. – 2006. – Т.18, №3. – С.120–128.

4. *Neumann J., Richtmayer R.* A method for the numerical calculation of hydrodynamical shocks // J. Appl. Phys. – 1950. – V.21, #3 – pp.232–237.

5. *Lax P.D.* Weak solution of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computations // Comn. Pure and Appl. Math. – 1954. – V.7 – pp.159–193.

6. *Годунов С.К.* Разностный метод счета разрывных решений уравнений газодинамики // Матем. сб. –1959. – №47(89), вып.3. – С.271–306.

7. *Куропатенко В.Ф.* Метод расчета ударных волн // ДАН СССР. – 1960. – В.3, №4. – 771 с.

8. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.К.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1968. – 592 с.

9. *Куропатенко В.Ф.* Локальная консервативность разностных схем для уравнений газовой динамики // Журнал выч. матем. и матем. физики.– М., – 1985. – Т.25, №8. – С.1176–1188.

10. *Яненко Н.Н., Шокин Ю.И.* Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике.– Новосибирск: Наука, 1985. – 364 с.

11. *Шокин Ю.И., Федотова З.И.* Об одном классе инвариантных разностных схем // ЧМСС. – Новосибирск, – 1972. – Т.3, №5. – С.85–94.

12. *Куропатенко В.Ф.* О разностных методах для уравнений гидродинамики // Труды матем. инст. им. В.А.Стеклова. – 1966. – Т.74, ч.1. – С.107–137.

13. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач // Мир, 1972. – 418 с.

14. *Куропатенко В.Ф.* Метод построения разностных схем для численного интегрирования уравнений газодинамики // Известия ВУЗов. Сер. Математика. – 1962. – №3(28). – С.75–83.

15. *Куропатенко В.Ф.* Об одной форме псевдовязкости // Изв. СО АН СССР., Сер. технич. – 1967. – №3, вып.3. – С.81–82.

16. *Уилкинс М.Л.* Расчет упругопластических течений // Вычисл. методы в гидродинамике – М.: Мир, 1967. – С.212–263.

17. Куропатенко В.Ф., Макеева И.Р. Разностный метод расчета ударных волн с повышенными свойствами монотонности // Препринт ВНИИТФ. – 1997. – №120.

18. *Самарский А.А., Арсенин В.Я.* О численном решении уравнений газодинамики с различными типами вязкостей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – Т.1, №2. – С.357–380.

19. *Куропатенко В.Ф.* Об одном разностном методе расчета ударных волн // Журнал вычисл. математики и математической физики. – 1963. – Т.3, №1. – С.201–204.

20. *Куропатенко В.Ф.* Математическое моделирование неустановившихся движений сред с равновесными фазовыми переходами // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы. – Москва, 1999. – Вып.4(6). – С.3–12.

21. *Алексеева Т.И., Куропатенко В.Ф.* Аддитивный безусловно устойчивый разностный метод расчета мелких неоднородностей гидродинамического потока // ЧММСС. – Новосибирск, 1981. – Т.12, №4. – С.3–15.

22. *Куропатенко В.Ф.* Явный безусловно устойчивый разностный метод расчета течений жидкости // ЧММСС. – Новосибирск, 1984. – Т.15, №4. – С.84–92.

23. *Lax P.D., Wendroff B.* System of Conservation Laws // Comp. Pure Appl. Math. – №13. – 1960. – p.217.

24. *Lax P.D., Wendroff B.* Difference Schemes for Hyperbolic Equation with High Order of Accuracy // Comp. Pure Appl. Math. – №17. – 1964. – p.381.

25. *Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.* Нестационарный метод «крупных частиц» для газодинамических расчетов // Журнал вычислительной математики и математической физики. –1971. – 11, №1. – С.182–207.

26. *Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.* Метод «крупных частиц» в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. – М.: Наука, 1982. – 392 с.