УДК 519.6

СВЯЗЬ ДИВЕРГЕНТНОСТИ С КОНСЕРВАТИВНОСТЬЮ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

В.Ф.Куропатенко

Рассматривается вопрос о взаимосвязи формы разностных уравнений газовой динамики с их консервативностью. Делается попытка дальнейшего развития аппарата априорного исследования свойств разностных схем для систем нелинейных уравнений в частных производных. Доказаны теоремы о преобразуемости форм разностных уравнений. Введены и обоснованы понятия M- и s-консервативности, термодинамической корректности и сильной и слабой диссипативности разностных схем. Проведено исследование свойств многих известных разностных схем и показано, какие из них обладают указанными свойствами. Все рассуждения проводятся для дифференциальных форм разностных уравнений.

Введение

Математическое моделирование неустановившихся движений сжимаемых сред получило широкое распространение и имеет как научное, так и большое прикладное значение. Разностная схема (РС) является важным элементом математической модели. Ее свойства, достоинства и недостатки в значительной степени определяют качество математического эксперимента. Из свойств разностных законов сохранения выделим одно – консервативность. Рассмотрим разные подходы к исследованию этого свойства.

В [1-3] термины "дивергентный", "недивергентный" применяются для характеристики формы дифференциальных уравнений газовой динамики. В [4,5] речь идет о консервативной и неконсервативной форме уравнений газовой динамики. При этом в [5] подчеркивается, что термины "консервативность" и "дивергентность" являются синонимами. В то же время в [4] говорится не только о форме, но и о свойстве консервативности системы квазилинейных уравнений. В [6] дифференциальное уравнение энергии записывается в трех формах, которые называются дивергентной, недивергентной и энтропийной. Вследствие преобразуемости законов сохранения – дифференциальных уравнений в частных производных – из одной формы в другую не возникает необходимости связывать свойства уравнений с их формой. Наиболее ясно об этом сказано в [3,7].

Для системы разностных уравнений газовой динамики положение иное. Считалось общеизвестным, что разностное уравнение энергии не может быть с использованием остальных разностных уравнений преобразовано из недивергентной формы в дивергентную и наоборот [3]. Поэтому возникло естественное желание связать свойства разностных уравнений с их формой. Так, в [5] свойство схемы сохранять какую-либо величину, т.е. консервативность, отождествляется с дивергентной формой разностных уравнений при условии, что вспомогательные величины на гранях ячейки инвариантны относительно пространственного индекса. В [8] дивергентность и консервативность РС отождествляются. В [6] консервативность рассматривается как свойство РС, а в [3] дополнительно вводится свойство полной консервативности схемы. Анализ работ, посвященных исследованию свойств разностных законов сохранения, не позволяет отдать предпочтение уравнениям в дивергентной или недивергентной форме, ибо большинство авторов для уравнения энергии считает предпочтительной дивергентную форму, а для закона сохранения массы – недивергентную (плотность равна массе, деленной на объем).

Рассмотрим свойство консервативности РС и его связь с дивергентной или недивергентной формой уравнений.

Разностные уравнения в дифференциальной форме

Уравнения одномерного плоского движения идеальной среды в лагранжевых координатах при отсутствии вязкости, тепловых потоков и источников энергии имеют вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial m} = 0; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(E + 0{,}5u^2) + \frac{\partial}{\partial m}(Pu) = 0. \qquad (3)$$

Система уравнений (1)-(3) содержит четыре искомые функции (V – удельный объем; P – давление; E – удельная внутренняя энергия; u – массовая скорость), зависящие от двух аргументов (t – время; m – лагранжева координата). Из термодинамики известно, что среди множества термодинамических функций, характеризующих состояние вещества, две являются независимыми, а остальные выражаются через них. Поскольку в (1)-(3) содержатся три термодинамические функции, то для замыкания системы следует добавить одно уравнение состояния $F(P, V, E) = 0$.

Положение каждой частицы в пространстве определяется ее эйлеровой координатой $x=x(t,m)$, для определения которой можно использовать одно из уравнений

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_m - u = 0; \qquad (4)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial m}\right)_t - v = 0; \qquad (5)$$

Уравнения (I),(4),(5) зависимы: одно из них следует из двух других. Рассмотрим также ряд уравнений, являющихся следствиями системы (I)-(3) и уравнений термодинамики. Умножив (2) на u и отняв от (3), получим

$$\frac{\partial E}{\partial t} + p\frac{\partial u}{\partial m} = 0; \qquad (6)$$

Умножив далее (I) на p и сложив с (6), получим

$$\frac{\partial E}{\partial t} + p\frac{\partial v}{\partial t} = 0. \qquad (7)$$

Уравнения (I)-(7) содержат три термодинамические функции p, v, E. Пусть v и E будут независимыми. Рассмотрим энтропию $s(v,E)$. Уравнение скорости ее изменения вдоль линии тока

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_E \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{\partial s}{\partial E}\right)_v \frac{\partial E}{\partial t}$$

с помощью известных из термодинамики уравнений

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_E + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)_s \left(\frac{\partial s}{\partial E}\right)_v = 0; \quad \left(\frac{\partial E}{\partial s}\right)_v \left(\frac{\partial s}{\partial E}\right)_v = 1;$$

$$p = -\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)_s; \quad T = \left(\frac{\partial E}{\partial s}\right)_v$$

преобразуем к виду

$$T\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} + p\frac{\partial v}{\partial t}. \qquad (8)$$

Из (7), (8) следует уравнение сохранения энтропии вдоль линии тока

$$T\frac{\partial s}{\partial t} = 0. \qquad (9)$$

Уравнение (9) точно так же, как уравнения (6), (7), является следствием системы (I)-(3) и термодинамических уравнений.

Анализ других известных термодинамических функций показывает, что среди них нет функций, значения которых сохранялись бы постоянными вдоль траектории.

Для численного интегрирования дифференциальные уравнения заменяются разностными уравнениями. Ниже будут рассмотрены разностные уравнения в дифференциальной форме, которая получается следующим образом. Пусть исходное уравнение $\frac{df}{dx} + \varphi(x) = 0$ аппроксимировано разностным уравнением

$$\frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0-(1-\alpha)h)}{h} + \varphi(x_0) = 0. \qquad (IO)$$

Разложим $f(x)$ в ряды Тейлора в точке x_0 и подставим их в (IO). В результате получим

$$\frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0-(1-\alpha)h)}{h} + \varphi(x_0) = \frac{df}{dx} + \varphi(x_0) + \omega(x_0) = 0,$$

где

$$\omega(x_0) = \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2} h(1-2\alpha) + \frac{1}{6}\frac{d^3 f}{dx^3} h^2(1-3\alpha+3\alpha^2) + \dots$$

Поскольку левая часть уравнения тождественно равна правой, то вместо (IO) можно рассматривать дифференциальное уравнение, которое и является дифференциальной формой разностного уравнения (IO). Величина ω с обратным знаком есть погрешность аппроксимации исходного уравнения разностным. Если найдется такое α, при котором члены в выражении для ω, содержащие h^{ν}, обращаются в ноль для $\nu = 1, 2, \dots, \kappa$ независимо от решения, то погрешность аппроксимации есть величина $(\kappa+1)$-го порядка малости относительно малого шага h. В рассматриваемом случае ω есть величина второго порядка малости, так как в случае $\alpha=0{,}5$ множитель при h обращается в ноль, а множитель при h^2 в ноль не обращается. Вопросы исследования дифференциальных форм разностных уравнений газовой динамики подробно рассмотрены в [9].

Разностные уравнения, аппроксимирующие (I)-(7), (9), будем исследовать в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} = \omega_1; \qquad (II)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} = \omega_2; \qquad (I2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(E+0{,}5u^2) + \frac{\partial}{\partial m}(pu) = \omega_3; \qquad (I3)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} - u = \omega_4; \qquad (I4)$$

$$\frac{\partial x}{\partial m} - v = \omega_5; \qquad (I5)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + p\frac{\partial u}{\partial m} = \omega_6; \qquad (I6)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + p\frac{\partial v}{\partial t} = \omega_7; \qquad (I7)$$

$$T\frac{\partial s}{\partial t} = \omega_8. \qquad (I8)$$

Величины ω_i ($i = 1,\dots,8$), являющиеся погрешностями аппроксимации уравнений (I)-(7),(9) соответственно уравнениями (II)-(I8), имеют вид

$$\omega_i = \sum_{\kappa=0,\,\ell=0} A_{i\kappa\ell}\,\tau^{\kappa} h^{\ell}, \quad (\kappa+\ell \geq 1), \qquad (I9)$$

где $A_{i\kappa\ell}$ содержат частные производные функций, входящих в соответствующее разностное уравнение, и не зависят от τ и h.

Преобразуемость форм разностных уравнений

Ограничимся рассмотрением разностных уравнений (II)-(I8). Расширение количества рассматриваемых уравнений за счет привлечения других термодинамических функций не имеет смысла, ибо единственная термодинамическая величина, сохраняемая вдоль линии тока (энтропия), уже вошла в систему (II)-(I8). Эта система восьми уравнений, содержащая четыре независимые функции (x, u и две термодинамические функции), является переопределенной. Для нахождения численного решения нужно использовать лишь часть уравнений. Конструирование конкретной РС заключается в выборе нужного количества конкретных уравнений из системы (II)-(I8), т.е. в выборе конкретных ω_i. Следуя установившейся терминологии[3], будем называть разностные уравнения (II)-(I3) уравнениями в дивергентной форме, уравнения (I4)-(I8)-уравнениями в недивергентной форме или проще дивергентными и недивергентными уравнениями.

Теорема I. Дивергентные разностные уравнения газовой динамики преобразуются с помощью других уравнений РС в уравнения недивергентной формы и наоборот.

Доказательство. Воспользуемся преобразуемостью левых частей уравнений (II)-(I8) и перейдем от разностных уравнений (II)-(I8) к системе уравнений, содержащих ω_i. Умножим (II) на P, сложим с (I6) и из полученного выражения вычтем (I7). Получим

$$P\omega_1 + \omega_6 - \omega_7 = 0 . \tag{20}$$

Продифференцируем (I4) по m, (I5) по t. Получим

$$\frac{\partial^2 x}{\partial m \partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} = \bar{\omega}_4 , \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial m} - \frac{\partial v}{\partial t} = \bar{\omega}_5 ,$$

где $\bar{\omega}_4 = \frac{\partial \omega_4}{\partial m}$, $\bar{\omega}_5 = \frac{\partial \omega_5}{\partial t}$. Выразим из этих уравнений $\frac{\partial u}{\partial m}$ и $\frac{\partial v}{\partial t}$, опустим для удобства черту над $\bar{\omega}_4$ и $\bar{\omega}_5$ и подставим в (II)

$$\omega_1 - \omega_4 + \omega_5 = 0 . \tag{2I}$$

Умножим (I2) на u, вычтем из полученного выражения (I3) и прибавим (I6). Получим

$$u\omega_2 - \omega_3 + \omega_6 = 0 . \tag{22}$$

Наконец, подставим (I7), (I8) в (8)

$$\omega_7 - \omega_8 = 0 . \tag{23}$$

Уравнения (20)-(23) образуют систему четырех линейных относительно ω_i уравнений с восьмью неизвестными. Ранг матрицы коэффициентов этой системы

$$A = \begin{Vmatrix} P & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -I & 0 \\ I & 0 & 0 & -I & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & -I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -I \end{Vmatrix}$$

равен четырем, следовательно, система (20)-(23) имеет фундаментальные решения, каждое из которых состоит из четырех линейно независимых решений. Количество фундаментальных решений $\kappa \leq C_8^4 = 70$. Рассмотрим их. Рассмотрение начнем с наиболее часто встречающегося в литературе типа РС, в котором независимыми являются $\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$. Перенесем члены уравнений, соответствующие элементам 2-5 столбцов, в правые части уравнений. В результате получим систему линейных относительно ω_i неоднородных уравнений. Матрица этой системы

$$A_1 = \begin{Vmatrix} P & I & -I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & -I \end{Vmatrix}$$

и расширенная матрица

$$B_1 = \begin{Vmatrix} P & I & -I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & \omega_4 - \omega_5 \\ 0 & I & 0 & 0 & \omega_3 - u\omega_2 \\ 0 & 0 & I & -I & 0 \end{Vmatrix}$$

имеют ранг $r = 4$. Следовательно, система совместна, фундаментальное решение существует и имеет вид

$$\omega_1 = \omega_4 - \omega_5 ; \quad \omega_6 = \omega_3 - u\omega_2 ;$$

$$\omega_7 = P(\omega_4 - \omega_5) + \omega_3 - u\omega_2 ; \quad \omega_8 = P(\omega_4 - \omega_5) + \omega_3 - u\omega_2 .$$

Проведя аналогичное рассмотрение для всех 70 систем, получим, что только 35 систем совместны и, следовательно, существуют 35 фундаментальных решений. Это означает, что существуют 35 различных типов РС для уравнений газовой динамики. Ограничимся построением фундаментальных решений для типов РС, которые уже встречаются в литературе. Номера этих типов РС и соответствующие им наборы независимых и зависимых ω_i приведены в таблице.

Соответствие наборов ω_i типам РС

Тип РС	Независимые ω_i				Зависимые ω_i			
I	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_1	ω_6	ω_7	ω_8
2	ω_2	ω_4	ω_5	ω_6	ω_1	ω_3	ω_7	ω_8
3	ω_2	ω_4	ω_5	ω_7	ω_1	ω_3	ω_6	ω_8
4	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
5	ω_1	ω_2	ω_4	ω_6	ω_3	ω_5	ω_7	ω_8
6	ω_1	ω_2	ω_4	ω_7	ω_3	ω_5	ω_6	ω_8

Из существования этих фундаментальных решений следуют утверждения:

I. Если в РС используется уравнение энергии (I3) в дивергентной форме, то с помощью соответствующего фундаментального решения оно преобразуется к любому из уравнений (I6)-(I8) в недивергентной форме (РС типа I).

2. Если в РС используется уравнение энергии (I6) или (I7) в недивергентной форме, то с помощью соответствующего фундаментального решения оно преобразуется в уравнение (I3) в дивергентной форме (РС типа 2,3).

3. Если в РС используется уравнение сохранения массы (II) в дивергентной форме, то оно преобразуется в уравнение сохранения массы (I5) в недивергентной форме (РС типа 4,5,6).

4. Если в РС используется уравнение сохранения массы (I5) в недивергентной форме, то оно преобразуется в уравнение (II) в дивергентной форме (РС типа I,2,3).

Теорема доказана.

Консервативность разностной схемы

Определение. Консервативность - свойство разностной схемы сохранять без изменения какую-либо функцию или комбинацию функций, входящих в уравнения (II)-(I8), либо интегралы от комбинаций функций по заданным областям или контурам.

Среди функций, входящих в (I)-(7),(9), только S и m являются постоянными вдоль линии тока. Поэтому ограничимся рассмотрением свойств РС сохранять точно или приближенно S и m вдоль линии тока. Поскольку эти свойства проявляются на каждой линии тока, то они являются локальными свойствами консервативности.

Теорема 2. Необходимое и достаточное условие M-консервативности разностной схемы имеет вид

$$\bar{\omega}_5 = \omega_M, \tag{24}$$

где

$$\omega_M = -\sum_{K=1}^{\infty} \frac{\Delta m^{2K}}{2^{2K}(2K+1)!} \frac{\partial^{2(K+1)}x}{\partial t\, \partial m^{2K+1}}.$$

Доказательство. Рассмотрим разностное уравнение сохранения массы в недивергентной форме

$$\frac{\Delta x}{\Delta m} = V, \tag{25}$$

где $\Delta x = x_1 - x_{-1}$. Разложим x_1 и x_{-1} в ряды Тейлора в точке $x_0 = 0{,}5(x_1 + x_{-1})$ и подставим в (25). Получим

$$\frac{\Delta x}{\Delta m} - V = \frac{\partial x}{\partial m} - V + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\Delta m^{2K}}{2^{2K}(2K+1)!} \frac{\partial^{2K+1}x}{\partial m^{2K+1}} = 0.$$

Вычтем из этого уравнения (I5)

$$\omega_5 + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\Delta m^{2K}}{2^{2K}(2K+1)!} \frac{\partial^{2K+1}x}{\partial m^{2K+1}} = 0. \tag{26}$$

Продифференцируем (26) по t и выразим из полученного выражения $\frac{\partial \Delta m}{\partial t}$

$$\frac{\partial \Delta m}{\partial t} = \frac{\omega_M - \bar{\omega}_5}{\sum\limits_{K=1}^{\infty} \frac{2K\Delta m^{2K-1}}{2^{2K}(2K+1)!} \frac{\partial^{2K+1}x}{\partial m^{2K+1}}}. \tag{27}$$

Необходимость. Предположим, что (24) не имеет места, т.е. $\bar{\omega}_5 \neq \omega_M$. Тогда из (27) следует, что вдоль линии тока $\frac{\partial \Delta m}{\partial t} \neq 0$, и масса не сохраняется.

Достаточность. Пусть $\frac{\partial \Delta m}{\partial t} = 0$. Тогда из (25) следует (24), что и требовалось доказать.

Следствие I. РС, содержащая уравнение сохранения массы (I5) в недивергентном виде, всегда M-консервативна.

Следствие 2. РС, содержащая уравнение сохранения массы (II) в дивергентном виде, M-консервативна при условии $\bar{\omega}_4 - \omega_1 = \omega_M$. Действительно, в РС типов 4,5,6 ω_1 и $\bar{\omega}_4$ известны. Согласно теореме I с помощью соответствующего фундаментального решения получим

$$\bar{\omega}_5 = \bar{\omega}_4 - \omega_1. \tag{28}$$

Если определяемое (28) $\bar{\omega}_5$ удовлетворяет (24), то РС типов 4,5,6 M-консервативны. Если же $\bar{\omega}_5 \neq \omega_M$, то РС M-неконсервативна.

Поскольку ω_M и $\bar{\omega}_5$ есть погрешности аппроксимации вида (I9), то уравнение производства массы (27) в M-неконсервативных РС имеет вид

$$\frac{\partial \Delta m}{\partial t} = \sum_{\substack{K=0,\ell=0 \\ (K+\ell \geq 1)}}^{\infty} B_{MK\ell}\, \tau^K h^\ell. \tag{29}$$

Определение. n-е дифференциальное приближение РС является M-консервативным, если в уравнении производства массы (29) $B_{MK\ell} = 0$ для всех $K + \ell \leq n$.

Теорема 3. Необходимое и достаточное условие S-консервативности разностной схемы имеет вид

$$\omega_8 = 0. \tag{30}$$

Необходимость. Предположим, что $\omega_8 \neq 0$. Подставив ω_8 в (I8), получим $\frac{\partial S}{\partial t} \neq 0$. Энтропия изменяется.

Достаточность. Пусть $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$. Подставив $\frac{\partial S}{\partial t}$ в (I8), получим (30), что и требовалось доказать.

Среди типов РС, приведенных в таблице, нет РС с независимым ω_8. Для каждого типа РС ω_8 должно быть выражено через независимые ω_i. Эти уравнения имеют вид

$$\begin{array}{ll} \text{Тип I} & \omega_8 = P(\bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_5) + \omega_3 - u\omega_2; \\ \text{Тип 2} & \omega_8 = P(\bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_5) + \omega_6; \\ \text{Тип 3} & \omega_8 = \omega_7; \\ \text{Тип 4} & \omega_8 = P\omega_1 + \omega_3 - u\omega_2; \\ \text{Тип 5} & \omega_8 = P\omega_1 + \omega_6; \\ \text{Тип 6} & \omega_8 = \omega_7. \end{array} \tag{3I}$$

Оценка изменения энтропии вдоль линии тока с течением времени является эффективным средством локального контроля точности вычисления термодинамических величин. Поскольку все ω_i имеют вид (I9), то из (3I) и (I8) следует уравнение производства энтропии в общем виде

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \sum_{\substack{K=0,\ell=0 \\ (K+\ell \geq 1)}}^{\infty} B_{SK\ell}\, \tau^K h^\ell. \tag{32}$$

Определение. n-е дифференциальное приближение РС является S-консервативным, если в уравнении производства энтропии (32) $B_{SK\ell} = 0$ для всех $K + \ell \leq n$.

Рассмотрим РС типов I,4 с дивергентным уравнением энергии (I3). Из (3I) следует, что правая часть уравнения производства энтропии (32) может содержать значения массовой скорости u и производные $\frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu}$. Это означает, что в классе РС с дивергентным уравнением энергии есть схемы, в которых при поступательном движении или ускорении недеформируемого вещества энтропия будет меняться, что противоречит термодинамике.

Определение. РС назовем термодинамически нормальной, если в ней скорость производства энтропии не зависит от массовой скорости вещества и его ускорений.

Определение. n-е дифференциальное приближение РС назовем термодинамически нормальным, если функции $B_{SK\ell}$ в (32), для которых $K + \ell \leq n$, не содержат массовой скорости вещества и его ускорений $\frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu}$.

Чтобы определить, является ли дивергентная РС термодинамически нормальной, нужно исследовать правую часть (32) и показать, что она не зависит от u и $\frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu}$.

Очевидно, что изменение энтропии из-за погрешностей аппроксимации не должно превосходить ее изменения в характерных физических процессах. В качестве такого процесса рассмотрим слабую ударную волну, на фронте которой справедливо уравнение

$$E - E_0 = -0{,}5\,(P + P_0)(V - V_0), \qquad (33)$$

связывающее значения P_0, V_0, E_0 перед разрывом со значениями P, V, E за разрывом. Предоставим E и P в виде рядов Тейлора в точке P_0, V_0, E_0.

$$E = E_0 + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S \Delta V + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\right)_S \Delta V^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 E}{\partial V^3}\right)_S \Delta V^3 + \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V \Delta S + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2}\right)_V \Delta S^2 + \ldots;$$

$$P = P_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S \Delta V + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S \Delta V^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V \Delta S + \cdots,$$

где $\Delta V = V - V_0$, $\Delta S = S - S_0$. Подставим E и P в (33) и, воспользовавшись соотношениями $T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V$, $P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S$, получим

$$T_0 \Delta S = -\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S \Delta V^3 + O(\Delta V^4, \Delta S^2). \qquad (34)$$

Таким образом, изменение энтропии на слабой ударной волне пропорционально кубу изменения удельного объема. Это известное [10] уравнение (34) будем использовать в качестве критерия точности вычисления энтропии. Считая, что ΔS и ΔV есть изменения S и V на одном шаге τ по времени, поделив на τ и τ^3 и перейдя к пределу при $\tau \to 0$ в выражениях $\frac{\Delta S}{\tau}$ и $\frac{\Delta V}{\tau}$, получим $T\frac{\partial S}{\partial t} = \omega_S$, где

$$\omega_S = -\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^3 + \cdots \qquad (35)$$

Уравнение (35) дает возможность разделить все РС на сильно диссипативные и слабо диссипативные.

Определение. РС назовем сильно диссипативной, если первое дифференциальное приближение (ДП) ее уравнения производства энтропии S-неконсервативно.

Определение. РС назовем слабо диссипативной, если ДП ее уравнения производства энтропии S-консервативно.

Анализ S-консервативности некоторых разностных схем для уравнений газовой динамики

Рассмотрим, с какой точностью выполняется закон сохранения энтропии в РС с дивергентным и недивергентным уравнением энергии. Подробный анализ изменения энтропии в некоторых РС дан в [11]. Здесь мы частично повторим этот анализ в иной форме и для более широкого класса уравнений.

Исследуем вначале свойства S-консервативности РС типа 4. Пусть искомые величины P, V, E, u, S, T определены в точках сетки с полуцелыми индексами (отнесены к серединам сеточных интервалов). Запишем, следуя [11], разностные уравнения в общем виде

$$\frac{V^{n+1}_{i+0,5} - V^{n}_{i+0,5}}{\tau} - \frac{u^*_{i+1} - u^*_i}{h} = 0;$$

$$\frac{u^{n+1}_{i+0,5} - u^{n}_{i+0,5}}{\tau} + \frac{P^*_{i+1} - P^*_i}{h} = 0; \qquad (36)$$

$$\frac{E^{n+1}_{i+0,5} - E^{n}_{i+0,5}}{\tau} + \frac{(u^{n+1}_{i+0,5})^2 - (u^{n}_{i+0,5})^2}{2\tau} + \frac{P^*_{i+1}u^*_{i+1} - P^*_i u^*_i}{h} = 0.$$

Величины со звездочкой являются вспомогательными.

Исследуем характер изменения энтропии в некоторых разностных схемах из двухпараметрического семейства схем ША из [11], в которых вспомогательные величины определяются по формулам

$$u^*_i = 0{,}5\left((1-\ell_1)(u^n_{i+0,5} + u^n_{i-0,5}) + \ell_1(u^{n+1}_{i+0,5} + u^{n+1}_{i-0,5})\right);$$
$$P^*_i = 0{,}5\left((1-\ell_2)(P^n_{i+0,5} + P^n_{i-0,5}) + \ell_2(P^{n+1}_{i+0,5} + P^{n+1}_{i-0,5})\right). \qquad (37)$$

При значениях параметров $\ell_1 = 0$, $\ell_2 = 1$ u^*_i, P^*_i принимают вид

$$u^*_i = 0{,}5(u^n_{i+0,5} + u^n_{i-0,5}); \quad P^*_i = 0{,}5(P^{n+1}_{i+0,5} + P^{n+1}_{i-0,5}). \qquad (38)$$

Подставим (38) в (36) и запишем полученные уравнения в дифференциальной форме (11)-(13) с погрешностями аппроксимации в виде

$$\omega_1 = -0{,}5\,\tau \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + O(\tau^2, h^2);$$

$$\omega_2 = 0{,}5\,\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^2, h^2); \qquad (39)$$

$$\omega_3 = -0{,}5\,\tau \left(\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - P\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - u\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + O(\tau^2, h^2).$$

Все три погрешности аппроксимации есть величины первого порядка малости относительно шага по времени τ. Подставив (39) в (31) и (18), получим

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = -0{,}5\,\tau\left(\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right) + O(\tau^2, h^2). \qquad (40)$$

Правая часть в (40) зависит не только от изменений удельного объема, но и от изменения скорости со временем. Таким образом, рассматриваемая РС является термодинамически аномальной.

В общем случае для рассматриваемого семейства схем

$$\omega_1 = (\ell_1 - 0{,}5)\,\tau \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + O(\tau^2, h^2);$$
$$\omega_2 = (\ell_2 - 0{,}5)\,\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^2, h^2); \qquad (41)$$
$$\omega_3 = (\ell_1 - 0{,}5)\,\tau \left(u\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial t}\right) - (\ell_2 - 0{,}5)\,\tau\left(P\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right) + O(\tau^2, h^2).$$

Подставив (41) в (31) и (18), получим

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = (\ell_1 - \ell_2)\,\tau\left(P\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + u\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial t}\right) + (\ell_2 - 0{,}5)\,\tau\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial t}\right) + O(\tau^2, h^2). \qquad (42)$$

Из (42) следует, что среди схем ША схемы с $\ell_1 \neq \ell_2$ или $\ell_1 = \ell_2 \neq 0{,}5$ термодинамически некорректны и сильно диссипативны. У единственной разностной схемы этого семейства с $\ell_1 = \ell_2 = 0{,}5$ ω_i имеют вид

$$\omega_1 = \frac{\tau^2}{12}\frac{\partial^3 V}{\partial t^3} + O(\tau^3, h^2);$$

$$\omega_2 = \frac{\tau^2}{12}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + O(\tau^3, h^2); \qquad (43)$$

$$\omega_3 = -\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + P\frac{\partial^3 V}{\partial t^3} - u\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right) + O(\tau^3, h^2).$$

Подставив (43) в (31) и (18), получим

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right) + O(\tau^3, h^2). \qquad (44)$$

Иными словами, у этой разностной схемы ДП1 является S-консервативным, а второе дифференциальное приближение (ДП2) – термодинамически нормальным.

Воспользуемся уравнениями

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S \frac{\partial V}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

и упростим (44). Получим

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_s\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^3 + O(\tau^3, h^2). \qquad (45)$$

Таким образом, главный член в (45) совпадает с (35) и, значит, погрешности при определении энтропии в этой схеме не превосходят ее изменения на слабых ударных волнах. Иными словами, среди РС семейства ША из [II] только одна РС с $\ell_1 = \ell_2 = 0{,}5$ слабо диссипативна. Остальные РС термодинамически аномальны и не могут рекомендоваться для расчетов. Покажем, что диссипативные свойства РС семейства ША не изменятся, если уравнение сохранения массы (II) заменить недивергентным уравнением (I5) в виде $\frac{x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1}}{h} - V_{i+0,5}^{n+1} = 0$ и взять уравнение линии тока в виде $\frac{x_i^{n+1} - x_i^n}{\tau} - u_i^* = 0$. РС, содержащая эти уравнения, относится к типу I. Если взять u_i^*, P_i^* в виде (37), то независимые погрешности аппроксимации ω_2, ω_3 совпадают с ω_2, ω_3 из (4I), а $\tilde{\omega}_4, \tilde{\omega}_5$ имеют следующий вид:

$$\tilde{\omega}_4 = (\ell_1 - 0{,}5)\tau\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial m} + \frac{\tau^2}{12}\frac{\partial^3 u}{\partial m\,\partial t^2} + \frac{h^2}{8}\frac{\partial^3 u}{\partial m^3} + \ldots;$$

$$\tilde{\omega}_5 = -\frac{h^2}{24}\frac{\partial^3 u}{\partial m^3} + \ldots$$

Подставив $\omega_2, \omega_3, \tilde{\omega}_4, \tilde{\omega}_5$ в (3I) и (I8), получим (42). Следовательно, при $\ell_1 \neq \ell_2$, $\ell_1 \neq 0{,}5$ или $\ell_2 \neq 0{,}5$ РС термодинамически аномальны и сильно диссипативны. Уравнение производства энтропии у РС этого типа с $\ell_1 = \ell_2 = 0{,}5$ имеет вид (45). Схема также слабо диссипативна и термодинамически нормальна.

Рассмотрим далее второе двухпараметрическое семейство схем ШБ из [II], в которых вспомогательные величины определяются уравнениями

$$\begin{aligned} u_i^* &= 0{,}5(u_{i+0,5}^n + u_{i-0,5}^n) - \frac{\tau\ell_3}{h}(P_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n); \\ P_i^* &= 0{,}5(P_{i+0,5}^n + P_{i-0,5}^n) - \frac{\tau\ell_4}{h}(u_{i+0,5}^n - u_{i-0,5}^*). \end{aligned} \qquad (46)$$

В дифференциальной форме уравнения (36) вместе с (46) принимают вид (II)-(I3), где

$$\omega_1 = (\ell_3 - 0{,}5)\tau\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + O(\tau^2, h^2);$$

$$\omega_2 = \tau\left(\ell_4\frac{\partial^2 u}{\partial m^2} - 0{,}5\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + O(\tau^2, h^2);$$

$$\omega_3 = \tau\left(0{,}5\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial t} + \ell_4\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 - 0{,}5u\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \ell_4 u\frac{\partial^2 u}{\partial m^2}\right) - \tau(\ell_3 - 0{,}5)\left(P\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right) + O(\tau^2, h^2).$$

Подставив $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ в (3I) и (I8), получим

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \tau\left((\ell_3 - 0{,}5)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(0{,}5\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s + \ell_4\right)\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right) + O(\tau^2, h^2). \qquad (47)$$

Из (47) следует, что первые дифференциальные приближения схем этого семейства с $\ell_3 \neq 0{,}5$ термодинамически аномальны.

Схема С.К.Годунова [I2] получается из семейства ШБ при $\ell_3 = \frac{h}{2\tau a}$, $\ell_4 = \frac{ha}{2\tau}$, где $a = \sqrt{-\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s}$ – скорость звука. Таким образом, в этой схеме $\ell_3 = 0{,}5$, и $\ell_4 = 0{,}5a^2$ лишь при соотношении шагов сетки $\frac{\tau a}{h} = $ I. При других соотношениях шагов $\frac{\tau a}{h} <$ I ДПП этой схемы термодинамически аномально.

В схеме П.Лакса [I3], которая получается из семейства ШБ при $\ell_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\tau a}\right)^2$, $\ell_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\tau}\right)$ и соотношении шагов $\frac{\tau a}{h} <$ I ДПП также термодинамически аномально.

Рассмотрим диссипативные свойства РС из [I4] типа 4, в которой вспомогательные величины определяются через функции, терпящие разрыв на контактных границах. В уравнениях сохранения массы и количества движения в (36) вспомогательные значения скорости и давления взяты в виде

$$u_i^* = 0{,}25\left[u_{i+0,5}^n + u_{i-0,5}^n + u_{i+0,5}^{n+1} + u_{i-0,5}^{n+1} - \frac{h}{\tau}\left(V_{i+0,5}^{n+1} - V_{i+0,5}^n - V_{i-0,5}^{n+1} + V_{i-0,5}^n\right)\right];$$

$$P_i^* = 0{,}25\left[P_{i+0,5}^n + P_{i-0,5}^n + P_{i+0,5}^{n+1} + P_{i-0,5}^{n+1} + \frac{h}{\tau}\left(u_{i+0,5}^{n+1} - u_{i+0,5}^n - u_{i-0,5}^{n+1} + u_{i-0,5}^n\right)\right].$$

В уравнении энергии (36) вспомогательное значение $(Pu)_i^*$ выбирается по формуле

$$(Pu)_i^* = 0{,}5\left[(Pu)_{i+0,5}^{n+1} + (Pu)_{i-0,5}^{n+1}\right] + \frac{h}{4\tau}\left(\mathcal{E}_{i+0,5}^{n+1} - \mathcal{E}_{i+0,5}^n - \mathcal{E}_{i-0,5}^{n+1} + \mathcal{E}_{i-0,5}^n\right),$$

где $\mathcal{E} = E + 0{,}5u^2$. Погрешности аппроксимации в этой РС имеют вид

$$\omega_1 = \frac{1}{12}\frac{\partial^3 V}{\partial t^3}\tau^2 - \frac{1}{12}\frac{\partial^3 u}{\partial m^3}h^2 + O(\tau^3, h^3);$$

$$\omega_2 = \frac{1}{12}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\tau^2 + \frac{1}{12}\frac{\partial^3 P}{\partial m^3}h^3 + O(\tau^3, h^3);$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + u\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)\tau - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 \mathcal{E}}{\partial t^3}\tau^2 + \frac{1}{12}\frac{\partial^3 (Pu)}{\partial m^3}h^2 + O(\tau^3, h^3).$$

Подставив эти выражения для $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ в (3I) и (I8), получим

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\tau}{2}\left[\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + u\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] + O(\tau^2, h^2).$$

Следовательно, РС из [I4] на адиабатических решениях термодинамически аномальна и сильно диссипативна.

Рассмотрим теперь РС типов 5,6 с уравнением энергии в недивергентном виде. В [3] рекомендуется "полностью консервативная" РС с $\sigma_1 =$ I, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_4 = 0{,}5$, в которой разностные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{V_{i+0,5}^{n+1} - V_{i+0,5}^n}{\tau} - \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} = 0; \\ &\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{P_{i+0,5}^{n+1} - P_{i-0,5}^{n+1}}{h} = 0; \\ &\frac{E_{i+0,5}^{n+1} - E_{i+0,5}^n}{\tau} + P_{i+0,5}^{n+1}\frac{u_{i+1}^n + u_{i+1}^{n+1} - u_i^n - u_i^{n+1}}{2h} = 0. \end{aligned} \qquad (48)$$

Запишем первые два уравнения в дифференциальной форме (II), (I2) с погрешностями аппроксимации

$$\omega_1 = -0{,}5\tau\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + O(\tau^2, h^2);$$

$$\omega_2 = 0{,}5\tau\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^2, h^2).$$

Третье уравнение (48) запишем в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P\frac{\partial u}{\partial m} = \omega_6,$$

где

$$\omega_6 = -0{,}5\tau\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial t} + O(\tau^2, h^2).$$

Подставив ω_1 и ω_6 в (3I) и (I8), получим

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = -0{,}5\tau\frac{\partial}{\partial t}\left(P\frac{\partial V}{\partial t}\right) + O(\tau^2, h^2). \qquad (49)$$

Таким образом, в этой РС ДПП S-неконсервативно.

Уравнение (49) означает, что погрешности аппроксимации в рассмотренной "полностью консервативной" схеме являются источниками производства энтропии более мощными, чем физические источники (слабые ударные волны). Полная консервативность не устраняет этих источников.

В классе полностью консервативных схем есть слабо диссипативные РС, в которых вычислительные источники производства энтропии по порядку величины не превосходят физических. Примером является схема из [3] с $\sigma_1 = 0,5$, $\sigma_2 = 0,5$, $\sigma_4 = 0,5$, совпадающая со схемой из [15]. В этих схемах погрешности аппроксимации есть величины порядка τ^2 и их ДШ S-консервативны.

Рассмотрим теперь РС с недивергентным уравнением энергии (17). Следуя [11], аппроксимируем (7) однопараметрическим семейством РС

$$\frac{E^{n+1}-E^n}{\tau}+\left[(1-\beta)P^{n+1}+\beta P^n\right]\frac{V^{n+1}-V^n}{\tau}=0. \qquad (50)$$

Преобразуя (50) к дифференциальной форме (17), получаем

$$\omega_7=\tau\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s(\beta-0,5)-\tau^2\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_s\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^3\left(\beta^2-\beta+\frac{1}{3}\right)-\tau^2\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\times$$
$$\times 2(\beta-0,5)^2+O(\tau^3). \qquad (51)$$

При $\beta = 1$ из (50),(51),(31) и (18) следует

$$T\frac{\partial S}{\partial t}=0,5\tau\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s+O(\tau^2); \qquad (52)$$
$$\frac{E^{n+1}-E^n}{\tau}+P^n\frac{V^{n+1}-V^n}{\tau} \qquad (53)$$

Будем считать, что наши рассуждения верны лишь для уравнений состояния, удовлетворяющих условиям $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s < 0$, $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_s > 0$. Тогда главный член в (52) оказывается отрицательным, т.е. применение (53) для вычислен..я E^{n+1} приводит к ничем не компенсируемому у..ыванию энтропии. ДШ уравнения производства энтропии этой РС S-неконсервативно, схема сильно диссипативна.

При $\beta = 0$ из (50),(51),(31) и (18) следует

$$T\frac{\partial S}{\partial t}=-0,5\tau\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2+O(\tau^2);$$
$$\frac{E^{n+1}-E^n}{\tau}+P^{n+1}\frac{V^{n+1}-V^n}{\tau}=0. \qquad (54)$$

Поскольку $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s < 0$, то применение (54) для вычисления E^n приводит к увеличению энтропии. ДШ уравнения производства энтропии этой РС S-неконсервативно, схема сильно диссипативна.

При $\beta = 0,5$ из (50),(51),(31) и (18) следует

$$T\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_s\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^3+O(\tau^3);$$
$$\frac{E^{n+1}-E^n}{\tau}+\left(\frac{P^{n+1}+P^n}{2}\right)\frac{V^{n+1}-V^n}{\tau}=0. \qquad (55)$$

В этой схеме скорость изменения энтропии из-за погрешности аппроксимации есть величина второго порядка малости относительно τ. ДШ уравнения производства энтропии этой РС S-консервативно, схема слабо диссипативна.

Разностное уравнение энергии (55) впервые использовалось Нейманом и Рихтмайером в [16]. К этому же классу относятся разностные схемы из [17, 18].

Таким образом, среди множества РС с уравнением энергии (50) все схемы термодинамически нормальны и только в одной схеме при $\beta = 0,5$ ДШ S-консервативно. В остальных схемах с $\beta \neq 0,5$ ДШ S-неконсервативно.

Заключение

Проведенное исследование, а также ряд других примеров, изложенных в [19], позволяют утверждать:

1. Свойства M- и S-консервативности не связаны с дивергентной или недивергентной формой разностных уравнений.

2. Построение уравнения производства энтропии для каждой РС позволяет определить ее диссипативные свойства.

3. Среди РС с дивергентным уравнением энергии (13) есть термодинамически аномальные.

4. Большинство РС с недивергентным уравнением энергии (16) или (17) термодинамически нормальны. Среди них есть слабо диссипативные РС.

5. Среди полностью консервативных (в соответствии с [3]) РС есть сильно диссипативные.

6. Сильно диссипативные РС создают "вычислительный шум", из-за которого становится неразличимым целый класс физических процессов (например, слабые ударные волны).

Список литературы

1. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.

2. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.

3. Попов Ю.П., Самарский А.А. Полностью консервативные разностные схемы// Журнал вычисл.мат.и мат.физ. 1969. Т. 9, № 4. С. 953-958.

4. Рождественский Б.Л. Разрывные решения систем квазилинейных уравнений гиперболического типа// Успехи математических наук. 1960. Т. 15. Вып. 6(96). С. 59-117.

5. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.

6. Самарский А.А. О консервативных разностных схемах// Проблемы прикладной математики и механики. М.: Наука, 1971. С.129-136.

7. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980.

8. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.

9. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. О первом дифференциальном приближении разностных схем для гиперболических систем уравнений// Сибирский математический журнал. 1969. Т. 10, № 5. С. 1173.

10. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн. М.: Физматгиз, 1963.

11. Куропатенко В.Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики// Тр.матем. ин-та им. В.А.Стеклова. 1966. Т. 74. С. 107.

12. Годунов С.К. Разностный метод счета разрывных решений уравнений газодинамики//

Математический сборник. 1959. Т. 47(89). Вып.3. С. 271.

13. Lax P. Weak solution of nonlinear hyperbolic equations and numerical computations// Commun.Pure and Appl.Math. 1954. Vol. 7, N 1. P. 159.

14. Гаджиев А.Д., Писарев В.Н. Неявный конечно-разностный метод "Ромб" для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью// Журнал вычисл.мат. и мат.физ. 1979. Т. 19, № 5. С. 1288.

15. Гольдин В.Я., Ионкин Н.И., Калиткин Н.Н. Об энтропийной схеме расчета газодинамики// Там же.1969. Т. 9, № 6. С. 41.

16. Neumann J., Richtmyer R. A method for the numerical calculation of hydrodynamical shocks// J.Appl.Phys. 1950.Vol.21, N 3. P. 232.

17. Самарский А.А., Арсенин В.Я. О численном решении уравнений газодинамики с различными типами вязкости// Журнал вычисл. мат. и мат.физ. 1961. Т. 1, № 2. С. 357.

18. Куропатенко В.Ф. Метод расчета ударных волн// Докл. АН СССР. 1960. Т. 133, № 4. С. 771.

19. Куропатенко В.Ф. О точности вычисления энтропии в разностных схемах для уравнений газовой динамики// Числ.методы мех. спл.среды. 1978. Т. 9, № 7. С. 49-59.

Статья поступила в редакцию 12.02.85.