УДК 518.5

О ПОЛНОЙ КОНСЕРВАТИВНОСТИ РАЗНОСТНЫХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

В.Ф. Куропатенко

Формулируются условия интегральной и локальной консервативности разностных законов сохранения массы, количества движения и энергии. Для исследования свойств разностных уравнений они записываются в дифференциальной форме. Доказана теорема преобразуемости форм разностных уравнений. Построено уравнение производства энтропии для дивергентных и недивергентных разностных уравнений.

Рассмотрим систему законов сохранения массы, количества движения и энергии

$$\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial U}{\partial m}=0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial m}=0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(E+0,5U^2)+\frac{\partial}{\partial m}(PU)=0 \tag{3}$$

и следствия из нее

$$\frac{\partial E}{\partial t}+P\frac{\partial U}{\partial m}=0, \quad \frac{\partial E}{\partial t}+P\frac{\partial V}{\partial t}=0 . \tag{4}$$

Здесь V – удельный объем; E – удельная внутренняя энергия; U – массовая скорость; P – давление; t – время; m – Лагранжева координата. Уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial U}{\partial m}=\omega_1 ; \tag{5}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial m}=\omega_2 ; \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(E+0,5U^2)+\frac{\partial}{\partial m}(PU)=\omega_3 ; \tag{7}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}+P\frac{\partial U}{\partial m}=\omega_4 ; \tag{8}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}+P\frac{\partial V}{\partial t}=\omega_5 \tag{9}$$

аппроксимируют уравнения (1)–(4) так, что погрешности аппроксимации имеют вид

$$\omega_i=\sum_{k=0,\ell=0}^{\infty}A_{ik\ell}\,\tau^k h^\ell, \quad k+\ell\geq 1 , \tag{10}$$

где $A_{ik\ell}$ конечны и не зависят от шагов сетки τ и h. Уравнения (5)–(9) есть разностные уравнения в дифференциальной форме [1]. Рассмотрим также уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial t}-\frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial t}+P\frac{\partial V}{\partial t}\right)=0; \quad \frac{\partial x}{\partial t}-U=0, \quad \frac{\partial x}{\partial m}-V=0 , \tag{11}$$

справедливые вдоль линии тока

$$\frac{dm}{dt}=0, \quad \frac{dx}{dt}=\frac{\partial x}{\partial t}=U \tag{12}$$

и аппроксимирующие их разностные уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\omega_6 ; \tag{13}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}-U=\omega_7 ; \tag{14}$$

$$\frac{\partial x}{\partial m}-V=\omega_8 ; \tag{15}$$

$$\frac{dm}{dt}=\omega_9 . \tag{16}$$

Термины "дивергентность", "недивергентность" используем для обозначения формы уравнений и по аналогии с дифференциальными уравнениями в работе [2] будем называть (7), (8) и (9) уравнениями энергии в дивергентной форме, а (5) и (15) – уравнениями неразрывности в дивергентной и в недивергентной форме. Термин "консервативность" используем для обозначения свойства разностного уравнения или разностной схемы сохранять значение какой-либо функции или комбинации функций.

Запишем разностные уравнения (5)–(7) в интегральной форме

$$\oint (V dm - u dt) = \int_0^{t_1}\int_0^{m_1} \omega_1 \, dt\, dm = J_{1M} ; \qquad (17)$$

$$\oint (u dm + P dt) = \int_0^{t_1}\int_0^{m_1} \omega_2 \, dt\, dm = J_2 ; \qquad (18)$$

$$\oint ((E + 0{,}5 u^2) dm + P u dt) = \int_0^{t_1}\int_0^{m_1} \omega_3 \, dt\, dm = J_{3E} . \qquad (19)$$

При этом, вообще говоря, появляются погрешности аппроксимации краевых условий. Для простоты будем считать, что краевые условия рассчитываются точно. Тогда из уравнений (17)–(19) и законов сохранения в интегральном виде следуют интегральные условия консервативности уравнений (5)–(7)

$$J_{1M} = 0, \quad J_2 = 0, \quad J_{3E} = 0.$$

Выполнение интегрального условия консервативности $J_{3E} = 0$ не гарантирует безошибочное перераспределение энергии из одного вида в другой. Чтобы устранить этот эффект, в работе [2] построен класс разностных схем, в которых разностное уравнение энергии в недивергентной форме сводится к дивергентной форме и наоборот. Проводимое нами рассмотрение разностных уравнений в дифференциальной форме позволяет показать, что этим свойством обладают все разностные уравнения.

Теорема о преобразуемости форм разностных уравнений

Разностное уравнение энергии или неразрывности с помощью других разностных уравнений системы законов сохранения и следствий из нее преобразуется от дивергентной формы к недивергентной и наоборот.

Доказательство. Умножим (6) на u и вычтем из (7)

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial u}{\partial m} = \omega_3 - u \omega_2 . \qquad (20)$$

Умножим уравнение (5) на P и сложим с (20)

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t} = \omega_3 - u \omega_2 + P \omega_1 . \qquad (21)$$

Поскольку все ω_i принадлежат к одному и тому же классу функций (10), то при ограниченных u и P функции

$$A_{4kl} = A_{3kl} - u A_{2kl} , \; A_{5kl} = A_{3kl} - u A_{2kl} + P A_{1kl} \qquad (22)$$

также будут ограничены. Из уравнений (22) и (10) получим

$$\omega_4 = \omega_3 - u \omega_2 , \quad \omega_5 = \omega_3 - u \omega_2 + P \omega_1 .$$

Преобразование уравнений (8), (9) к дивергентной форме доказывается аналогично и дает соотношения

$$\omega_3 = \omega_4 + u \omega_2 , \quad \omega_3 = \omega_5 - P \omega_1 + u \omega_2 .$$

Чтобы преобразовать уравнение (5) к виду (15), подставим уравнение (14) в (5), проинтегрируем по t и возьмем ω_8 в виде

$$\omega_8 = - \int \left(\omega_1 + \frac{\partial \omega_7}{\partial m} \right) dt .$$

Для обратного преобразования уравнения (15) к виду (5) продифференцируем уравнение (15) по t, подставим уравнение (14) и возьмем ω_1 в виде

$$\omega_1 = \frac{\partial \omega_7}{\partial m} - \frac{\partial \omega_8}{\partial t}$$

ч.и.т.д.

Следствие 1. В разностных схемах с уравнением энергии (8) или (9) интегральные условия консервативности имеют вид

$$J_{4E} = \int_0^{t_1}\int_0^{m_1} (\omega_4 + u \omega_2)\, dt\, dm = 0, \quad J_{5E} = \int_0^{t_1}\int_0^{m_1} (\omega_5 - P \omega_1 + u \omega_2)\, dt\, dm = 0.$$

Следствие 2. В разностных схемах с недивергентным уравнением неразрывности (15) интегральное условие консервативности имеет вид

$$J_{8M} = \int_0^{m_1} \omega_8 \, dm = 0 .$$

Интегральные условия консервативности ответственны за верность только средних значений величин. Поэтому при исследовании свойств разностных схем они должны быть дополнены локальными условиями консервативности, ответственными за верность значений величин в точке.

Из уравнений (11), (12) следует, что $m = const$, $S = const$ на линии тока. Соответственно, существуют два свойства локальной консервативности: M-и S-консервативность. Они похожи на свойства M-и K-инвариантности [3] разностных уравнений относительно группы преобразований, допускаемых системой законов сохранения.

M – консервативность. В разностных схемах с недивергентным уравнением неразрывности известны ω_7 и ω_8. В выражение полной производной

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \omega_9 = 0 \qquad (23)$$

подставим $\frac{\partial m}{\partial t} = - \frac{u}{V}$ и u и V из уравнений (14) и (15)

$$\frac{\partial m}{dt} = \frac{V \omega_7 - u \omega_8}{V(V + \omega_8)} . \qquad (24)$$

Из уравнений (23), (24) следует условие M-консервативности

$$V\omega_7 - u\omega_8 = 0. \qquad (25)$$

В схемах с уравнением неразрывности (5) известны ω_1 и ω_7. Преобразуем уравнение (5) к недивергентному виду и в уравнение (25) подставим ω_8. Получим условие M-консервативности уравнения (5)

$$V\omega_7 + u\int\left(\omega_1 + \frac{\partial\omega_7}{\partial m}\right)dt = 0.$$

<u>S – консервативность.</u> Если S является одной из независимых термодинамических переменных, то условие S-консервативности $\frac{\partial S}{\partial t} = \omega_6 = 0$ вытекает из уравнения (13).

При других независимых переменных следует преобразовать уравнение энергии к недивергентной форме (9), подставить его в (11) и получить уравнение производства энтропии [4]

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \begin{cases} \omega_3 - u\omega_2 + P\omega_1 & \text{для уравнений (7);} \\ \omega_4 + P\omega_1 & \text{для уравнения (8);} \\ \omega_5 & \text{для уравнения (9).} \end{cases} \qquad (26)$$

Приравняв к нулю правые части уравнения (26), получим условия S-консервативности уравнений (7)–(9).

Как правило, в конкретных разностных схемах интегральные и локальные условия консервативности выполняются приближенно, т.е. им удовлетворяет n-е дифференциальное приближение ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Примеры исследования свойств консервативности разностных схем из работ [2, 5] приведены в работе [4].

Автор благодарен Н.Н.Яненко за плодотворные обсуждения проблемы и полезные советы.

Список литературы

1. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. О первом дифференциальном приближении разностных схем для гиперболических систем уравнений.–Сиб.матем. журнал, 1969, т.10, № 5, с.1173.

2. Попов Ю.П., Самарский А.А. Полностью консервативные разностные схемы.– ЖВММФ, 1969, т.9, № 4.

3. Шокин Ю.И., Федотова З.И., Марчук А.Г. О связи консервативности разностных схем и свойств их первых дифференциальных приближений.–ДАН СССР, 1978, т.242, № 2, с.290.

4. Куропатенко В.Ф. О точности вычисления энтропии в разностных схемах для уравнений газовой динамики.– Численные методы механики сплошной среды, 1978, т. 9, № 7.

5. Куропатенко В.Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики.–Труды МИ АН СССР, им. В.А.Стеклова, 1966, т. 74, ч. 1.

Статья поступила в редакцию 24.04.82.