В.И.Богородская, В.Ф.Куропатенко

О ЗАХЛОПЫВАНИИ ПУЗЫРЬКОВ В ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Задача о захлопывании пузырьков в жидкости представляет практический интерес, поскольку считается, что высокие давления, возникающие при таком захлопывании, являются главной причиной износа лопастей гребных винтов и гидротурбин, работающих в условиях кавитации.

В 1917 г. Рэлей [1] рассмотрел задачу в предположении, что жидкость является идеальной (невязкой) и несжимаемой, и нашел зависимость скорости поверхности пузырька u_1 и максимального давления P_{max} от радиуса пузырька r_1:

$$u_1 = -Ar_1^{-1,5}, \quad P_{max} = P_0 2^{-8/3}(R_1/r_1)^3, \qquad (1)$$

где P_0 – начальное давление в жидкости, R_1 – начальный размер пузырька. Максимальное давление P_{max} достигается на расстоянии $h = 0,586\ r_1$ от поверхности пузырька. Если, например, R_1=1мм, P_0 =1бар, то при r_1=0,01мм P_{max} = =157,5кбар на радиусе r_{max} =0,0158мм.

В 1945 г. К.П.Станюкович построил автомодельное решение этой задачи для случая идеальной сжимаемой жидкости с уравнением состояния

$$P = A\rho^{\gamma}. \qquad (2)$$

В 1952 г. И.М.Гельфандом с сотрудниками было установлено, что существует множество предельных решений, соответствующих различным значениям показателя автомодельности k. Однако, независимо от численного значения $k > 1$, скорость $u_1 = -Ar_1^{1-k}$ обращается в $-\infty$ при $r_1 \to 0$. Иными словами, в идеальной сжимаемой жидкости пузырек всегда захлопывается (подробное обсуждение всех особенностей автомодельного решения см. в [2], [3]). Большое значение при исследовании этих автомодельных решений имели расчеты, проведенные под руководством К.А.Семендяева, которые показали, что k зависит от γ в (2) и меняется от 1 до 2,5 при изменении γ от 1 до ∞ [4] .

В 1960 г. Е.И.Забабахин решил задачу, предположив жидкость вязкой и несжимаемой [5] . В сферическом случае в несжимаемой жидкости сумма членов, содержащих вязкость, в уравнении движения равна нулю всюду, кроме поверхности пузырька, где нулю равно напряжение

$$\sigma_1 = -P + S_1 \qquad (3)$$

(S_1 - радиальная компонента девиатора тензора вязких напряжений). Решение, полученное в [5] , принципиально отличается от предыдущих. Здесь имеется критическое значение числа Рейнольдса $Re_{кр}$, которое разделяет два типа решений:

$$\text{I.}\quad u_1 = -Ar_1^{-3/2} \quad \text{при} \quad Re > Re_{кр},$$

$$\text{2.}\quad u_1 = -Ar_1 \quad \text{при} \quad Re < Re_{кр}.$$

На линии раздела решений ($Re = Re_{кр}$) $u_1 \sim r_1^{-1}$. Таким образом, при $Re < Re_{кр}$ заполнение пузырька происходит за бесконечное время, ибо $u_1 \to 0$ при $r_1 \to 0$.

Реальные среды обладают и вязкостью, и сжимаемостью, поэтому все приведенные выше решения являются решениями приближенных задач. Рассмотрим задачу о захлопывании пузырька в вязкой, сжимаемой жидкости, для которой законы сохранения массы, количества движения и энергии в сферическом случае имеют вид:

$$\frac{\dot{v}}{v} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r}, \qquad (4)$$

$$\frac{\dot{u}}{v} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial S_1}{\partial r} + \frac{3S_1}{r}, \tag{5}$$

$$\dot{E} + p\dot{v} = S_1\dot{v} - \frac{3S_1 uv}{r}, \tag{6}$$

где u – скорость, v – удельный объем, p – давление, E – удельная внутренняя энергия. Точка сверху означает дифференцирование по времени вдоль траектории частицы

$$\dot{r} = u = \frac{\partial r}{\partial t}. \tag{7}$$

Система (4)-(6) замыкается уравнением для вязкости

$$S_1 = \frac{4}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right), \tag{8}$$

где вязкость μ предполагается постоянной, и уравнением состояния жидкости $p = f(v,E)$.Наиболее часто используется так называемое двучленное уравнение состояния вида

$$p = (\gamma - 1)\rho E + C_{00}^2(\rho - \rho_{00}) \tag{9}$$

или его "холодная" разновидность

$$p = \frac{\rho_{00}C_{00}^2}{\gamma}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_{00}}\right)^{\gamma} - 1\right]. \tag{10}$$

Для решения уравнений (4)-(8) использовалась следующая разностная аппроксимация.

$$r_i^{n+1} = r_i^n + \tau u_i^{n+1}, \tag{11}$$

$$v_{i+0,5}^{n+1} = \left[(r_{i+1}^{n+1})^3 - (r_i^{n+1})^3\right]/M_{i+0,5}, \tag{12}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{2\tau}{m_{i+0,5}^n + m_{i-0,5}^n}(P_{i+0,5}^n - S_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n + S_{i-0,5}^n) +$$