

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

МЕХ

В И Т В Е Р О Я

1972

1972

9.72

1972

1972

1972

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

ТОМ 3, № 2
1972

НОВОСИБИРСК

В.А.БЫЧЕНКОВ, В.В.ГАДЖИЕВА, В.Ф.КУРОПАТЕНКО

РАСЧЕТ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ РАЗРУШАЕМЫХ СРЕД.

В веществе при высоких давлениях и температурах имеют место испарение, плавление, полиморфные фазовые переходы и другие явления. Их описание невозможно без использования закона сохранения энергии и сложных уравнений состояния, удовлетворяющих условиям выпуклости лишь локально и, тем самым, приводящих к появлению в решении различных особенностей. Поскольку здесь давление по величине сильно превосходит компоненты девиатора напряжений, то для решения таких задач можно ограничиваться лишь гидродинамическим приближением (без учета тензора девиатора напряжений). С другой стороны, при давлениях примерно сто килобар и ниже гидродинамическое приближение не может описать всех особенностей поведения вещества. Стремление к созданию универсальной модели сжимаемой среды, описывающей поведение вещества при сжатии и растяжении в широком диапазоне давлений и температур, наложило определенный отпечаток на уравнения, которые будут обсуждены ниже.

В данной работе рассматриваются вопросы, связанные с расчетом движений вещества при низких давлениях. Используемая для этих целей модель позволяет определять объем трещин в зонах трещиноватости и объем пор в зонах дробления. В статье кратко излагается разностный метод расчета и обсуждаются результаты расчета нескольких задач.

Поведение вещества в широком диапазоне давлений в тече-

ние длительного времени являлось предметом экспериментальных исследований. В [1] дано достаточно полное описание физической стороны вопроса. Создание ЭМ привело к появлению в последние годы ряда работ, посвященных расчету неустановившихся движений среды с учетом реальных свойств вещества (упругость, пластичность, сжимаемость, разрушаемость и др.). В [2] - [5] рассматриваются как модели среды, так и разностные методы, с помощью которых проводилось интегрирование дифференциальных уравнений. Один из разностных методов был предложен А.Н.Коноваловым. Своеобразная модель, предложенная и использованная в [7], [8], позволила свести задачу о взрыве к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассматриваемые ниже среды могут быть как сплошными, так и несплошными (пористыми или трещиноватыми). И те, и другие могут быть прочными, частично прочными или непрочными.

Под действием приложенных нагрузок среда может менять свои свойства, например, прочная среда может разрушиться, в сплошной среде могут появиться трещины или поры. Возможны также и противоположные процессы (закрытие трещин, восстановление прочности и др.). Уравнения, описывающие поведение сплошных и несплошных сред, отличаются друг от друга.

Рассмотрим вначале сплошные среды. Законы сохранения массы, количества движения и энергии для сплошного вещества в одномерном случае в лагранжевых координатах имеют вид

$$\frac{\dot{V}}{V} = \frac{\partial U}{\partial r} + (\alpha-1) \frac{U}{r}, \quad \frac{\dot{U}}{V} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial r} + (\alpha-1) \frac{\sigma_i - \sigma_e}{r}, \quad (1)$$

$$\dot{r} = U, \quad \dot{E} = \sigma_2 \dot{V} + (\alpha-1) V (\sigma_2 - \sigma_1) U / r.$$

Здесь U - массовая скорость, V - удельный объем ($V=1/\rho$), E - удельная внутренняя энергия, r - эйлера координата, σ_i - напряжения, ($i = 1, 2, 3$), $\alpha = 1, 2, 3$ в зависимости от типа симметрии. Точка означает дифференцирование по времени вдоль траектории. Уравнения состояния вещества берутся в виде

$$\sigma_i = -\rho(V, E) + S_i(\epsilon_i, E), \quad (2)$$

где ρ - достаточно произвольная функция от V и E , удовлетворяющая условиям устойчивости термодинамического равновесия, а S_i компоненты тензора девиатора напряжений, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^3 S_i = 0$. Компоненты тензора девиатора деформаций в сплошной среде определяются, как обычно, по формулам

$$\dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_i - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V}, \quad (3)$$

где ϵ_i - компоненты тензора деформаций, причем $\dot{\epsilon}_1 = \frac{\partial U}{\partial r}$ независимо от α , а $\dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3 = 0$ при $\alpha=1$, $\dot{\epsilon}_2 = \frac{U}{r}$, $\dot{\epsilon}_3 = 0$ при $\alpha=2$, $\dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3 = \frac{U}{r}$ при $\alpha=3$.

В области упругих деформаций, определяемой неравенством

$$\sum_{i=1}^3 S_i^2 < \frac{2}{3} Y^2, \quad (4)$$

S_i связаны с ϵ_i законом Гука

$$S_i = 2\mu(V, E) \epsilon_i, \quad (5)$$

где модуль сдвига μ предполагается зависящим в общем случае от V и E .

В пластических веществах при нарушении неравенства (4) наступает пластическое течение. Предел упругости Y является одновременно и пределом текучести. В области пластичности S_i определяются с помощью уравнений Прандтля-Рейсса

$$S_i + \lambda S_i = 2\mu \epsilon_i \quad (6)$$

и условия текучести Мизеса

$$\sum_{i=1}^3 S_i^2 = \frac{2}{3} Y^2. \quad (7)$$

Предел текучести Y предполагается зависящим от ρ а множитель λ в (6) имеет вид

$$\lambda = 2\mu \frac{\sum_{i=1}^3 S_i \epsilon_i}{\frac{2}{3} Y^2} - \frac{\dot{Y}}{Y}. \quad (8)$$

В хрупких веществах при нарушении неравенства (4) происходит хрупкое разрушение. Предел упругости Y является в таких веществах критерием разрушения. Разрушенное вещество не обладает прочностью на разрыв ($\sigma_{10} = 0$). Если разрушение произошло в процессе нагрузки, то в момент разрушения термо-

динамические величины не меняются, однако меняется характер зависимости предела текучести от P . В раздробленной среде предел текучести Y пропорционален P . При разгрузке раздробленного вещества, если напряжения в нем возрастут до нуля, оно теряет сплошность - в нем возникают поры.

Хрупкое разрушение может произойти и в процессе разгрузки. В этом случае все σ_i скачком уменьшаются до нуля, скачком же меняются V , P , E , U и в веществе возникают поры с удельным объемом θ_0 . Такое вещество становится несплошным. Часто изучаемое вещество, если оно не раздроблено, обладает прочностью на разрыв $\sigma_{кр}$. Условия сохранения прочности имеют вид неравенств

$$\sigma_1 < \sigma_{кр}, \quad \sigma_2 < \sigma_{кр}. \quad (9)$$

При нарушении этих условий в веществе возникают трещины, ортогональные направлению, нарушившему (9). Если $\sigma_1 \geq \sigma_{кр}$ то возникают трещины первого класса, если $\sigma_2 \geq \sigma_{кр}$, то второго класса. При одновременном нарушении неравенств (9) в веществе образуются поры. Мы предполагаем, что трещины или поры распределены в элементе среды равномерно. Таким образом, в зависимости от вида трещин "частицы" вещества в элементе среды в одномерном случае будут иметь вид бесконечных пластин, цилиндров, сферических поверхностей или спиц, в которых в момент разрушения возникает сильный разрыв, изменяющийся скачком до нуля напряжение $\sigma_{кр}$. Этот сильный разрыв распространяется ортогонально к поверхностям трещин и на нем скачком изменяются термодинамические и упругие характеристики вещества. В то же время из деформаций терпит разрыв лишь одна: нормальная к поверхности трещин. Ограничиваясь рассмотрением только первого скачка, предполагая последующие скачки слабыми, используя, для простоты, акустическое приближение и предполагая скачок упругим, получим формулы, характеризующие изменение термодинамических величин при внезапном раскрытии трещин.

$$\Delta V = \begin{cases} -\frac{\sigma_{кр}}{a^2 + \frac{2}{3}\mu_- \rho} & \text{для трещин I-го класса,} \\ -\frac{\sigma_{кр}}{a^2 + \frac{2}{3}\frac{4-\alpha}{\alpha-1}\mu_- \rho} & \text{для трещин 2-го класса,} \end{cases} \quad (10)$$

$$\Delta E = 0,5 \sigma_{кр} \Delta V, \quad \Delta P = \rho(V_+, E_+) - P, \quad \theta = -\Delta V.$$

В (10) $\Delta f = f_+ - f_-$, где f_- и f_+ означают величины до раскрытия и после раскрытия трещин. При раскрытии трещин кинетическая энергия изменяется на величину

$$\Delta Q_{кин} = -0,5 \sigma_{кр} \Delta V. \quad (11)$$

Для определения новых значений упругих характеристик после раскрытия для трещин I-го класса имеем

$$S_{1+} = S_{1-} + \frac{4}{3}\mu_- \rho \Delta V, \quad S_{2+} = S_{2-} - \frac{2}{3}\mu_- \rho \Delta V. \quad (12)$$

В случае трещин второго класса, которые возможны лишь при $\alpha > 1$, те же величины имеют вид

$$S_{1+} = S_{1-} - \frac{2}{3}\mu_- \rho \Delta V, \quad S_{2+} = S_{2-} + \frac{2}{3}\frac{4-\alpha}{\alpha-1}\mu_- \rho \Delta V. \quad (13)$$

В (10) вошла величина a_- - акустический импеданс, определяемый выражением

$$a_-^2 = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_E - VP \left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_V.$$

Поскольку уравнения (10)-(13) являются приближенными, то σ_{1+} в случае трещин первого класса и σ_{2+} в случае трещин второго класса после раскрытия трещин могут быть не равны нулю. Чтобы ликвидировать эту погрешность, будем определять S_{1+} в случае трещин первого класса из уравнения $\sigma_{1+} = 0$. Уравнения же (12) позволяют выразить S_{2+} через S_{1+} . Таким образом, вместо (12) получим

$$S_{1+} = P_+, \quad S_{2+} = S_{2-} + 0,5(S_{1-} - P_+).$$

Аналогично в случае трещин второго класса вместо (13) получим:

$$S_{2+} = P_+, \quad S_{1+} = S_{1-} - \frac{\alpha-1}{4-\alpha}(P_+ - S_{2-}).$$

При одновременном нарушении неравенств (10) и σ_1 и σ_2 обращаются в нуль и, следовательно, $S_{1+} = S_{2+} = P_+$. При $\alpha=1$ и $\alpha=3$ $S_1 = S_2$. Поэтому S_{1+} , S_{2+} и P_+ в момент разрушения могут скач-

ком измениться только до нуля, а $\Delta V, \Delta E$ и ΔQ должны быть вычислены интерациями по (I0), (II).

Перейдем к описанию несплошных сред. Чтобы описать поведение пористого или трещиноватого вещества, уравнения (I) должны быть записаны в ином виде. Для этого заменим прерывное вещество непрерывным с некоторыми значениями удельного объема V_* и напряжений σ_{i*} . Объем занимаемый единичной массой сплошного вещества, равен V . Если же это вещество раздробить, то оно займет объем $V + \theta$, где V - объем, занимаемый непосредственно веществом, и θ - объем, занимаемый порами или трещинами. Таким образом

$$V_* = V + \theta. \quad (I4)$$

Для сплошного вещества с удельным объемом V_* справедливы уравнения (I). Подставляя (I4) в первое из уравнений (I), получим

$$(\dot{V} + \dot{\theta}) / (V + \theta) = \frac{\partial U}{\partial r} + (\alpha - 1) U / r. \quad (I5)$$

В пористом разрушенном веществе частички предполагаются настолько малыми, что в них мгновенно реализуется условие механического равновесия с порами

$$\sigma_i = 0. \quad (I6)$$

Из (I) и (I6) следует, что в таком веществе будет

$$E = 0, \quad \dot{U} = 0, \quad E = const, \quad U = const. \quad (I7)$$

Рассмотрим далее трещиноватое вещество. На простом примере декартовых координатах установим связь между σ_i и σ_{i*} . Пусть трещины направлены вдоль оси Ox , а само вещество имеет форму столбиков или спиц, также направленных вдоль Ox . В спицах реализуется условие механического равновесия с трещинами $\sigma_Y = \sigma_Z = 0$. В трещинах $\sigma_x = 0$, а в спицах $\sigma_x \neq 0$. Проведем плоскость, ортогональную оси Ox , и выделим на ней площадку F . Пусть суммарная площадь оснований спиц, проходящих через площадку F , равна F_3 . Сила, действующая на площадку F_3 , равна $\Pi = \sigma_x F_3$. Поскольку на площадке $F - F_3$ напряжение σ_x равно нулю, то результирующая сила, действующая на площадку F , также будет равна Π . Обозначая через σ_{x*} напряжение, непрерывное на площадке F , получим

$$\Pi = \sigma_x F_3 = \sigma_{x*} F. \quad (I8)$$

Из (I8) следует формула усреднения напряжения σ_x

$$\sigma_{x*} = \sigma_x F_3 / F. \quad (I9)$$

Преобразуем формулу (I9). С этой целью умножим числитель и знаменатель на одну и ту же величину Δx . Масса вещества с удельным объемом V , находящегося в элементарном объеме $F_3 \Delta x$, равна массе вещества с удельным объемом V_* , находящегося в объеме $F \Delta x$.

$$M = F_3 \Delta x / V = F \Delta x / V_*. \quad (20)$$

Из (I9), (20) и (I4) следует $\sigma_{x*} = \sigma_x V / (V + \theta)$. Поскольку все оси равноправны, значок x у σ может быть опущен или заменен другим значком

$$\sigma_{i*} = \sigma_i \frac{V}{V + \theta}. \quad (21)$$

С учетом всего вышесказанного уравнения (I) принимают вид

$$\frac{\dot{V}}{V + \theta} = \frac{\partial \sigma_{i*}}{\partial r} + (\alpha - 1) \frac{\sigma_{1*} - \sigma_{2*}}{r}, \quad (22)$$

$$\dot{E} = \sigma_{1*} (\dot{V} + \dot{\theta}) + (\alpha - 1) (V + \theta) (\dot{\sigma}_{2*} - \dot{\sigma}_{1*}) / r. \quad (23)$$

Будем предполагать, что пока в элементе среды есть трещины, напряжение, ортогональное трещинам, равно нулю, а соответствующая ему деформация вещества не совпадает с деформацией элемента среды. Эти предположения позволяют написать уравнения, определяющие изменение величин θ , V , E , в элементе среды с раскрытыми трещинами.

В качестве примера приведем такие уравнения для вещества с трещинами второго класса. Ограничимся случаем упругих деформаций.

Уравнения, описывающие поведение трещиноватой среды, рассматриваемой как сплошная, имеют вид (I5), (22), (23). Кроме того, в такой среде

$$\sigma_{2*} = 0, \quad \dot{\sigma}_{2*} = 0. \quad (24)$$

Поведение вещества, из которого состоят спицы, определяется уравнениями

$$\dot{V} = \frac{\partial U}{\partial r} + (\alpha-1)\dot{\epsilon}_2, \quad \dot{E} = \sigma, \dot{V} - (\alpha-1)V\sigma_1\dot{\epsilon}_2, \quad (25)$$

$$\dot{\sigma}_2 = 0, \quad \dot{\sigma}_1 = 0. \quad (26)$$

Из (25) следует

$$\dot{E} = \sigma, V \frac{\partial U}{\partial r}. \quad (27)$$

Из (15) и (25) выражается $\dot{\sigma}_2$ через $\dot{\epsilon}_2$

$$\dot{\sigma}_2 = \sigma_2 \left[\frac{\partial U}{\partial r} + (\alpha-1) \frac{U}{r} \right] + (\alpha-1)V \left(\frac{U}{r} - \dot{\epsilon}_2 \right). \quad (28)$$

Для определения $\dot{\epsilon}_2$ запишем вначале (26) в виде

$$2\mu\dot{\epsilon}_2 - \left(\frac{\partial \rho}{\partial V} \right)_E \dot{V} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial E} \right)_V E = 0, \quad (29)$$

а затем выразим $\dot{\epsilon}_2$ с помощью (25), (27) и (3)

$$\dot{\epsilon}_2 = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\frac{2}{3}\mu + V \left(\frac{\partial \rho}{\partial V} \right)_E + \sigma, V \left(\frac{\partial \rho}{\partial E} \right)_V}{\frac{2}{3}\mu(4-\alpha) - (\alpha-1)V \left(\frac{\partial \rho}{\partial V} \right)_E}. \quad (30)$$

Аналогично получаются уравнения для среды с трещинами первого класса в упругой области, а также для среды с трещинами того и другого классов в области пластического течения.

После закрытия трещин прочность среды в направлении, ортогональном закрытым трещинам, восстанавливается лишь в случае, если температура станет близка к температуре плавления.

Все высказанные выше соображения о поведении вещества, были учтены при создании программы для расчетов на ЭВМ. В программе была реализована разностная схема I из [II], несколько измененная для учета $\theta_1, \theta_2, \xi_1, \xi_2$. Ударные фронты "размазывались" с помощью линейноквадратичной псевдовязкости из [12], обобщенной на случай $\alpha > 1$. Выпишем разностные уравнения, применявшиеся для расчетов. Заметим, что если нижние индексы у всех величин, входящих в уравнение, одинаковы, то они опускаются. Индекс i уменьшается при возрастании r .

$$U_i^{n+1} = U_i^n \frac{2\sigma}{m_{i-0.5}^n + m_{i+0.5}^n} \left[(\bar{\sigma}_{i*})_{i-0.5}^n - (\bar{\sigma}_{i*})_{i+0.5}^n \right] + (\alpha-1)\psi_i^n \sigma. \quad (31)$$

Здесь приняты обозначения

$$m_{i-0.5}^n = (r_{i-1}^n - r_i^n) / (V_n)_{i-0.5}^n, \quad \bar{\sigma}_{i*} = (\sigma_i - \bar{\rho})V / (V + \theta), \quad (32)$$

$$\psi_i^n = \frac{(\sigma_{i+0.5}^n - \sigma_i^n)_{i+0.5}^n + (\sigma_{i-0.5}^n - \sigma_i^n)_{i-0.5}^n}{\rho_{i+0.5}^n (r_{i+1}^n + r_i^n) + \rho_{i-0.5}^n (r_i^n + r_{i-1}^n)}. \quad (33)$$

После нахождения скоростей U_i^{n+1} из (31), находятся:

$$r_i^{n+1} = r_i^n + U_i^{n+1} \sigma, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{i-0.5} = \frac{(U_{i-1} - U_i)}{r_{i-1} - r_i}, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{i+0.5} = \frac{(U_i - U_{i+1})}{r_i - r_{i+1}},$$

после чего определяются $\dot{\epsilon}_1^{n+1}$ и $\dot{\epsilon}_2^{n+1}$ по формулам:

а) $\theta^n > 0$, вещество раздроблено:

$$\dot{\epsilon}_1^{n+1} = 0, \quad \dot{\epsilon}_2^{n+1} = 0. \quad (34)$$

б) $\theta^n > 0$, трещины I-го класса:

$$\dot{\epsilon}_1^{n+1} = (\alpha-1) \frac{U}{r} \frac{\frac{2}{3}\mu^2 + V^n \left(\frac{\partial \rho}{\partial V} \right)_E + V \sigma_2^n \left(\frac{\partial \rho}{\partial E} \right)_V + \sigma_2^n \Omega_1 - \Omega_2}{\frac{2}{3}\mu^2 - V^n \left(\frac{\partial \rho}{\partial V} \right)_E + \Omega_2}, \quad (35)$$

$$\dot{\epsilon}_2^{n+1} = \frac{U}{r}, \quad (36)$$

в) $\theta^n > 0$, трещины 2-го класса:

$$\dot{\epsilon}_1^{n+1} = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (37)$$

$$\dot{\epsilon}_2^{n+1} = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\frac{2}{3}\mu^2 + V^n \left(\frac{\partial \rho}{\partial V} \right)_E + V \sigma_1^n \left(\frac{\partial \rho}{\partial E} \right)_V + \sigma_1^n \Omega_1 - (\alpha-1)\Omega_2}{(4-\alpha)\frac{2}{3}\mu^2 - (\alpha-1)V^n \left(\frac{\partial \rho}{\partial V} \right)_E + (\alpha-1)\Omega_2}, \quad (38)$$

г) во всех остальных случаях:

$$\dot{\epsilon}_1^{n+1} = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \dot{\epsilon}_2^{n+1} = \frac{U}{r}. \quad (39)$$

В (35) и (38) входят Ω_1, Ω_2 , которые определяются по формулам

$$\Omega_1 = \mathbb{F} \left[\rho^2 \mu^2 / \frac{2}{3} (V^n)^2 - V^n \left(\frac{\partial \rho}{\partial E} \right)_V \left(\frac{d \ln Y}{d \ln \rho} \right)^2 \right], \quad (40)$$

$$\Omega_2 = \mathbb{F} \left[V^n \left(\frac{\partial \rho}{\partial V} \right)_E \left(\frac{d \ln Y}{d \ln \rho} \right)^2 - 2\mu^2 (\rho^n)^2 / \frac{2}{3} (V^n)^2 \right],$$

где $\mathbb{F} = 0$ в упругой области и $\mathbb{F} = 1$ в пластической области (случай "щебенки" без пор описывается формулами (39)).

Далее определяется объем трещин или пор

$$\theta^{n+1} = 0, \quad \text{если } \theta^n = 0, \quad (41)$$

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \tau (V^n \theta^n) \left[\frac{\partial U}{\partial r} + (\alpha-1) \frac{U}{r} \right] - \tau \Delta, \text{ если } \theta^n \neq 0. \quad (41)$$

Здесь

$$\Delta = \begin{cases} 0 & \text{в раздробленной среде,} \\ V^n [\dot{\epsilon}_i + (\alpha-1) \frac{U}{r}], & \text{в области трещин I-го класса,} \\ V^n \left[\frac{\partial U}{\partial r} + (\alpha-1) \dot{\epsilon}_2 \right], & \text{в области трещин 2-го класса.} \end{cases}$$

По $r_i^{n+1}, \dot{\epsilon}_i^{n+1}, \dot{\epsilon}_n^{n+1}, \theta^{n+1}$ вычисляются

$$V_{i-0,5}^{n+1} = (V^n + \theta^n) \frac{(r_{i-1}^{n+1}) - (r_i^{n+1})^\alpha}{i-0,5 (r_{i-1}^n)^\alpha - (r_i^n)^\alpha} - \theta_{i-0,5}^{n+1}, \quad (42)$$

$$S_1^{n+1} = S_1^n + 2\mu^n \left(\tau \dot{\epsilon}_1^{n+1} - \frac{1}{3} \frac{V^{n+1} - V^n}{V^{n+1} + V^n} \right), \quad (43)$$

$$S_2^{n+1} = S_2^n + 2\mu^n \left(\tau \dot{\epsilon}_2^{n+1} - \frac{1}{3} \frac{V^{n+1} - V^n}{V^{n+1} + V^n} \right), \quad (44)$$

$$S_3^{n+1} = -S_1^{n+1} - S_2^{n+1}. \quad (45)$$

Если $\sum_{k=1}^3 (S_k^{n+1})^2 \geq \frac{2}{3} (Y^n)^2$, то для выполнения (7) умножим $(S_1, S_2, S_3)^{n+1}$ на множитель $\sqrt{\frac{2}{3} (Y^n)^2 / \sum_{k=1}^3 (S_k^{n+1})^2}$ аналогично тому, как это делается в [4]. Совершаемая при этом ошибка в определении S_k есть величина $O(\tau^2)$.

Далее вычисляются

$$E^{n+1} = E^n - 0,5 (\bar{p}^n + \bar{p}^{n+1}) (V^{n+1} - V^n) + \tau g_s, \quad (46)$$

$$\rho^{n+1} = \rho (V^{n+1}, E^{n+1}), \quad (47)$$

где $g_s = 0,25 (V^2 + V^{n+1}) \left[(S_1^{n+1} + S_1^n) \dot{\epsilon}_1^{n+1} + (\alpha-1) (S_2^{n+1} + S_2^n) \dot{\epsilon}_2^{n+1} \right]$, $\bar{p}_k^{n+1} = -\bar{p}_k^{n+1} + S_k^{n+1}$, (48)

$$\bar{p}^{n+1} = \begin{cases} \rho^{n+1} \text{ при } \Delta U = U_{i-1}^{n+1} - U_i^{n+1} \geq 0, \\ \rho^* - \Delta U (\alpha^n - C_0 \rho^n \Delta U) \text{ при } \Delta U < 0, \end{cases} \quad (49)$$

$$\rho_{i-0,5}^* = \rho_{i-0,5}^n \text{ при } \Delta U < 0, U_* = U_{i-1}^n + U_i^n < 0, \quad (50)$$

$$\rho_{i-0,5}^* = \rho_{i-0,5}^n - (\alpha-1) (a^0)_{i-0,5}^n V_{i-0,5}^n \tau U_* / (r_{i-1}^n + r_i^n). \quad (50)$$

Величина Y^n , входящая в (40), определяется так

а) в нераздробленной среде: $Y^n = \min(C_2, Y_0 + C_3 P^n)$,

б) в раздробленной среде: $Y^n = \min(C_4, C_5 P^n)$.

В данной работе не обсуждаются погрешности аппроксимации и другие свойства разностных уравнений, поскольку они практически такие же, как в схеме I из [II]. Шаг по времени в используемой разностной схеме ограничен условием устойчивости $\tau \leq m / (a + \frac{1}{3} \rho \mu)$.

Результаты расчетов, проведенных по этой схеме, хорошо согласуются с данными опытов. Приведем некоторые результаты расчета двух задач.

1. Взрыв в граните, $Q = 5$ кг (Харджет). Расчет сделан в предположении, что в начальный момент внутренняя энергия Q равномерно распределена в сфере радиуса 1 м, наполненной идеальным газом с $\gamma = 4/3$, $\rho_0 = 0,71$ г/см. Уравнение состояния гранита бралось в виде

$$p = (\gamma-1) \rho E + \frac{\rho_0 C_0^2}{\alpha} \left[\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-1} \beta^n + \frac{\alpha(\gamma-1)}{\alpha-1} \beta - \gamma \right] \quad (51)$$

с параметрами $\rho_0 = 2,67$ г/см³, $\alpha = 2,72$, $\gamma = 2,18$, $C_0 = 3,66$ км/сек, $\nu = 0,27$, $a_{xp} = 77$ бар, $C_2 = 28$ кбар, $Y_0 = 2$ кбар, $C_3 = 1,85$, $C_4 = 0,5$ кбар, $C_5 = 1$. Гранит предполагался хрупким. Результаты расчетов приведены на рис. 1, 2. Там же для сравнения приведены результаты опыта и расчета по программе SOC из [5]. В расчетах была взята сетка по r со следующими параметрами: а) в полости число точек $N_1 = 15$ равномерно по r , б) в граните было взято $N_2 = 400$ на участке $1 \text{ м} \leq r \leq 250 \text{ м}$, причем интервалы $\Delta r_{i-0,5}$ возрастали при увеличении r по геометрической прогрессии. Величина интервала Δr , примыкающего к границе полости, была равна $0,1 \text{ м}$.

2. Взрыв в плексигласе шарика из ТЭНа $r = 5$ мм, $\rho = 1,53$ г/см³. Расчет выполнен в предположении, что происходит мгновенная детонация ВВ. Уравнение состояния ВВ бралось в виде $p = A \rho^n$ с параметрами $\rho_0 = 1,53$ г/см³, $A = 2,54$, $n = 3$. Уравнение плексигласа бралось в виде (51) с параметрами

$C_0 = 2,37$ км/сек, $\rho_0 = 1,19$ г/см³, $\gamma = 5/3$, $n = 3,5$, $\nu = 0,335$, $Y_0 = 3,6$ кбар, $C_2 = \infty$, $C_3 = 1$, $C_4 = 0,3$ кбар, $C_5 = 0,5$. Результаты расчетов на рис. 3,4 сравниваются с результатами опыта [6] и с результатами расчетов [8]. Можно отметить лучшее, чем в [8], согласие с опытом. В ВВ было взято 25 точек равномерно по r , в плексиглазе $N_2 = 100$ на участке $0,5 \text{ см} \leq r \leq 100 \text{ см}$ причем $\Delta r \approx 0,5$ возрастали по геометрической прогрессии при увеличении r , а величина интервала, граничного с ВВ, была равна 0,1 см.

С целью определения чувствительности предложенной в данной работе модели к изменениям параметров уравнения состояния, кроме основного варианта расчета задачи I, были рассчитаны еще четыре варианта, отличающиеся от основного численным значением одной из величин C_0, γ, n, Y_0 . Каждая из них увеличивалась на 10%. Сравнивались величины на фронте ударной волны в момент ее прихода на радиус $r = 26,7$ м. Результаты сравнения приведены в таблице I.

ТАБЛИЦА I.

$\rho_0 = 2,67 \text{ г/см}^3$ $C_0 = 3,66 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$ $n = 2,72$ $\gamma = 2,218$ $Y_0 = 2 \text{ кбар}$.					
Величина	Основной вариант	$C_{01} = 1,1 C_0$	$\gamma_1 = 1,1 \gamma$	$n_1 = 1,1 n$	$Y_{01} = 1,1 Y_0$
c	1,42141	1,55836	1,44168	1,42807	1,41139
ρ	1,38821	1,52527	1,40848	1,39487	1,37829
ν	0,36111	0,36238	0,36097	0,36111	0,36127
U	0,1475	0,1508	0,1509	0,1488	0,1467

На основании этой таблицы можно вычислить приближенные значения логарифмических производных, характеризующих чувствительность величин на фронте ударной волны к изменениям параметров уравнения состояния.

Конечно, эта оценка является частной. Аналогичные оценки могут быть сделаны для каждой из интересующих величин, однако, это связано с увеличением объема вычислений. Приближенные значения логарифмических производных приведе-

ны в таблице 2. В этой таблице в строчку расположены дифференциалы функций, а в столбик дифференциалы аргументов. ТАБЛИЦА 2.

	$\partial \ln C_0$	$\partial \ln \rho$	$\partial \ln \nu$	$\partial \ln U$
$\partial \ln C_0$	-0,96	0,98	0,035	0,22
$\partial \ln \rho$	0,14	0,15	-0,00005	0,23
$\partial \ln \nu$	0,047	0,048	0	0,088
$\partial \ln Y_0$	0,070	-0,072	0,004	-0,054

Из таблицы 2 видно, что ударная волна наиболее чувствительна к изменению C_0 . Следовательно, C_0 должна определяться более аккуратно, чем остальные величины.

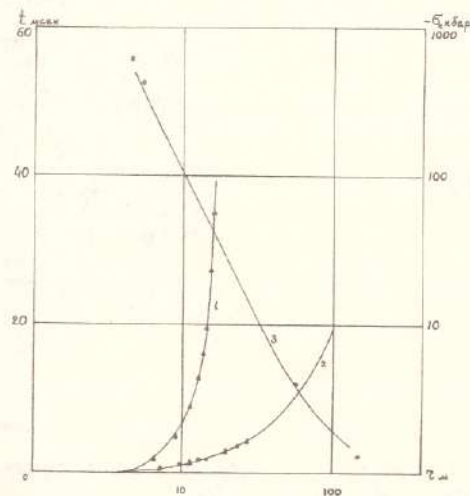


Рис. I.

Варив "Хардджет". 1-зависимость радиуса полости от времени 2-положение фронта волны, 3-радиальное напряжение на фронте. Сплошные линии - наш расчет, \circ - эксперимент из [5], Δ - расчет по программе SDC.

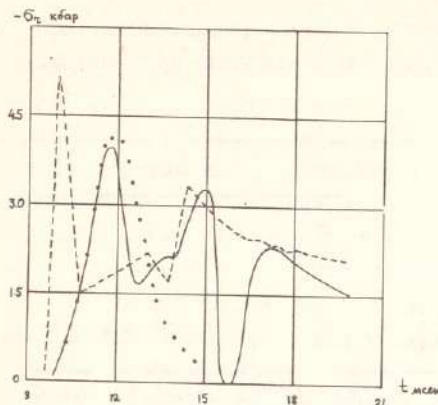


Рис. 2

Взрыв "Хардхет". Зависимость радиального напряжения от времени на расстоянии 62 м. от центра взрыва. Сплошные линии — наш расчет, пунктирные линии — расчет по программе SBC , \circ — эксперимент из [5].

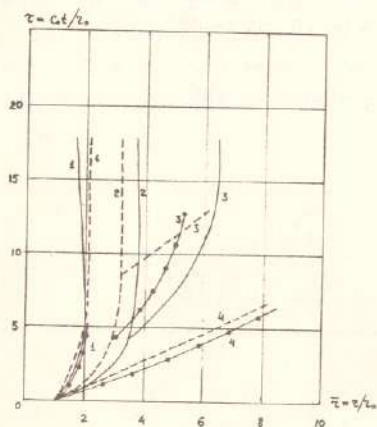


Рис. 3.

Взрыв в плексигласе, 1 — положение полости, 2 — границы области пластического течения, 3 — границы области трещин второго класса (область трещин между линиями 2 и 3), 4 — положение фронта ударной волны. Сплошные линии — наш расчет, пунктирные — результаты расчета из [8], \circ — эксперимент из [6].

Л и т е р а т у р а .

1. Л.В.Альтшулер, "Применение ударных волн в физике высоких давлений", УЭН, т.85, вып.2, 1965, 197.
2. Л.В.Альтшулер, А.В.Балабанов, В.А.Баталов, В.А.Родионов, Д.М.Тарасов, "Рентгенографическое исследование начальной стадии развития камуфлетной полости в песчаном грунте", ФГВ, № 3, 1970.
3. Д.Майнчен, С.Сак, "Метод расчета "Тензор", Выч, методы в гидродинамике, изд. "МИР", 1967.

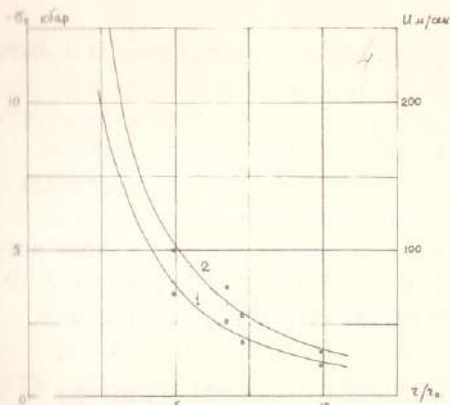


Рис. 4.

Взрыв в плексигласе. 1 — радиальное напряжение, 2 — массовая скорость на фронте ударной волны. Сплошные линии — наш расчет, \circ — эксперимент из [6].

4. М.Уилкинс, "Расчет упруго-пластических течений", Выч. методы в гидродинамике, изд. "Мир", 1967.
5. Д.Черри, "Машинный расчет воронок, образующихся при взрыве", сб. "Механика", № 6, 106, 1967.
6. В.В.Адушкин, А.П.Сухотин, "О разрушении твердой среды взрывом", ПМТФ, № 4, 1961.
7. С.С.Григорян, "Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород" ПММ, т.31, вып. 4, 1967.
8. А.Б.Багдасарян, С.С.Григорян, "О действии взрыва в органическом стекле", ПМТФ, № 3, 1967.
9. J. Butkovich, *Calculation of the shock wave from an underground nuclear explosion in granite*, J. Geophys. Res., 70(40), 885-891, 1965
10. E. Teller, W. Talley, Gary H. Higgins, G. Johnson, *The constructive uses of nuclear explosive*, Chapter 4, 143, New York, Mc Graw-Hill, 1958.
11. В.Ф.Куропатенко "О разностных методах для уравнения гидродинамики", Труды МИ АН СССР им.В.А.Стеклова, т.74, Ч.1, 1966, 107-137.
12. В.Ф.Куропатенко "Об одной форме псевдовязкости", Известия СО АН СССР, сер.техн. № 13, вып.3, 1967, 81-83.

Поступила 1.VI.197г.