

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МОДЕЛЯХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

В.Ф. Куропатенко

*Российский федеральный ядерный центр – ВНИИ технической физики
им. акад. Е.И. Забабахина
456770, Снежинск, Челябинская обл.
e-mail: V.F.Kuropatenko@vniitf.ru*

Введение. Догадки о существовании микрочастиц высказывались философами еще до нашей эры. Теория же строения материи появилась в XIX в. и в начале XX в. Было сформулировано понятие атомного веса, создана Периодическая система элементов и обоснована электронная модель атома. Эти три великих открытия стали основой для детального изучения строения вещества на микроуровне.

Любое тело – жидкость, газ, твердое тело, плазма, состоит из микрочастиц (молекулы, атомы, электроны, ионы и т. д.), каждая из которых имеет свою массу, скорость и внутреннюю энергию. Если это многоатомная молекула, то ее внутренняя энергия складывается из энергии ее образования, энергии каждого из входящих в нее атомов, пропорциональной энергии связи электронов со «своим» ядром, энергии ядра, определяемой энергией связи нуклонов, образующих ядро атома. К середине XX в. в науке об атомном строении вещества появились атомно-молекулярные модели, объясняющие и количественно описывающие поведение вещества в любом агрегатном состоянии на микроуровне. Вершиной этих моделей можно считать теоретическое предсказание возможности расщепления ядра атома с выделением энергии связей нуклонов. Это открытие было реализовано практически и дало человечеству новый источник энергии – атомные электростанции и новый вид оружия – атомное оружие. Именно благодаря паритету в области атомного оружия двух сверхдержав СССР и США мир более 50 лет жил без больших войн.

Атомно-молекулярные модели не могут использоваться для моделирования поведения веществ в технологических процессах, поведения конструкций или машин, имеющих промышленные размеры примерно 10 см или больше. В этом случае количество микрочастиц в рассматриваемом объекте столь велико, что современные ЭВМ, работающие со скоростью 10^{16} операций в секунду, за обозримое время не могут рассчитать характеристики такого тела или процесса. Этим объясняется широкое применение моделей механики сплошной среды (МСС), основанных на понятии сплошной среды и принципе инвариантности к преобразованию Галилея. Модели МСС состоят из трех фрагментов:

- законов сохранения массы, импульса и энергии сплошной среды в виде дифференциальных уравнений в частных производных;
- уравнений состояния (УРС), связывающих термодинамические характеристики вещества – давление P , плотность ρ , удельную внутреннюю энергию E , температуру T , энтропию S , энтальпию H , свободную энергию F и т. д. Зависимость давления от ρ и T выражает свойства шаровой части тензора напряжений;

– определяющих уравнений, описывающих реальные свойства (вязкость, упругость, пластичность), являющиеся компонентами девиатора тензора напряжений, теплопроводность, взаимодействие вещества с различными излучениями и т. д.

До появления атомно-молекулярных моделей считалось, что все вокруг нас – это сплошная среда, непрерывным образом заполняющая любой объем пространства. Период создания моделей сплошных сред охватывает примерно 250 лет. Начало этому процессу было положено в 1660 г. появлением эмпирической линейной зависимости упругих напряжений от деформаций. Затем были сформулированы закон сохранения массы, закон сохранения количества движения идеальной сплошной среды, создана модель несжимаемой вязкой жидкости, открыт закон сохранения энергии. Определяющие уравнения, описывающие зависимости между тензором напряжений и тензором деформаций, создавались в те же годы, что и законы сохранения. В области низких давлений удовлетворяющие промышленность результаты давали модель несжимаемой жидкости и упругопластическая модель твердого тела, в области газовых состояний применялось простейшее уравнение состояния идеального газа.

До середины XX столетия развитие МСС шло по пути построения аналитических решений, которые, как правило, удавалось построить для упрощенных постановок задач и упрощенных свойств веществ. Ценность аналитических решений неоспорима [1]. Однако в начале XXI в. их роль стала изменяться. Поскольку к 2010 г. резко возросло быстродействие ЭВМ, то аналитические решения из основного средства решения технических проблем превратились в основное средство контроля точности методов математического моделирования, которые стали играть определяющую роль при разработке новых конструкций летательных аппаратов и кораблей, новых технологий и технологических процессов, изделий атомного машиностроения и т. д.

Исторически так сложилось, что одновременно существовало два подхода к описанию поведения вещества. В первом подходе вещество рассматривалось как сплошная среда. Это макроуровень. Во втором подходе вещество рассматривалось как дискретная среда микрочастиц. Это микроуровень. Между этими уровнями могут существовать промежуточные уровни рассмотрения вещества – мезоуровни (модели мезомеханики [2–4], молекулярной динамики [5, 6], методы частиц [7–10] и т. д.). Таким образом, микроуровень является нулевым мезоуровнем, сплошная среда является высшим мезоуровнем.

1. Законы сохранения в фиксированный момент времени. Рассмотрим дискретную среду микрочастиц. Пусть в некотором произвольном конечном объеме $\Delta\theta$ находится n микрочастиц. Каждая частица имеет номер ν , массу m_ν , скорость U_ν и удельную внутреннюю энергию E_ν . В некоторый произвольный момент времени t^* масса ΔM , количество движения ΔK и энергия ΔQ_0 всех n частиц определяются суммированием

$$\Delta M = \sum_{\nu=1}^n m_\nu, \Delta K = \sum_{\nu=1}^n m_\nu U_\nu, \Delta Q_0 = \sum_{\nu=1}^n m_\nu (E_\nu + 0,5U_\nu^2). \quad (1)$$

Назовем вещество в объеме $\Delta\theta$ мезочастицей и определим его термодинамические характеристики. Средние плотность, скорость и удельная энергия вещества мезочастицы определяются уравнениями

$$\rho_c = \frac{\Delta M}{\Delta\theta}, U_c = \frac{\Delta K}{\Delta M}, \varepsilon_c = \frac{\Delta Q_0}{\Delta M}. \quad (2)$$

Скорость U_c является поступательной скоростью мезочастицы $\Delta\theta$. Удельная энергия мезочастицы состоит из удельной внутренней энергии E_c и удельной кинетической энергии $0,5U_c^2$. Из (1) и (2) следует

$$U_c = \sum_{v=1}^n \eta_v U_v, \quad (3)$$

$$E_c + 0,5U_c^2 = \sum_{v=1}^n \eta_v (E_v + 0,5U_v^2), \quad (4)$$

где отношение $\eta_v = \frac{m_v}{\Delta M}$ называется массовой концентрацией v -й микрочастицы.

Используя уравнение (3), а также условие, которому удовлетворяют массовые концентрации η_v

$$\sum_{v=1}^n \eta_v = 1,$$

запишем (4) в виде

$$E_c = \sum_{v=1}^n \eta_v (E_v + 0,5(U_v - U_c)^2). \quad (5)$$

Из (5) следует, что при переходе от микроуровня к мезоуровню удельная внутренняя энергия возрастает. Объясняется это достаточно просто. На микроуровне скорости v -х частиц U_v в объеме $\Delta\theta$ различаются по величине и направлению, а на мезоуровне все части массы ΔM двигаются с одной и той же скоростью U_c . Переход от беспорядка к порядку всегда сопровождается ростом энтропии. Именно поэтому

$$E_c > \sum_{v=1}^n \eta_v E_v.$$

Подчеркнем, что переход от модели микроуровня к модели мезоуровня вызван необходимостью решения технических проблем с помощью моделей, которые по силам современным ЭВМ. Каждый такой переход происходит в фиксированный момент времени и означает попытку создания такой модели, которая по возможности сохранила бы свойства вещества на микроуровне и в то же время позволила проводить расчеты макропроцессов на ЭВМ.

2. Сплошная среда. Формулы (2) определяют постоянные по объему $\Delta\theta$ значения ρ_c , U_c и ε_c . Если рассматриваемая мезочастица с объемом $\Delta\theta$ окружена другими мезочастицами, то плотность, скорость и удельная энергия оказываются кусочно-постоянными функциями с разрывами на границах мезочастиц. Чтобы перейти к непре-

ривным функциям ρ , \mathbf{U} , ε , устремим к нулю объем $\Delta\theta$ мезочастицы с массой ΔM . В результате получим

$$\rho = \left(\frac{\partial M}{\partial \theta} \right)_t = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta \theta}, \mathbf{U} = \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial M} \right)_t = \lim_{\Delta M \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{K}}{\Delta M}, \varepsilon = \left(\frac{\partial Q_0}{\partial M} \right)_t = \lim_{\Delta M \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_0}{\Delta M}.$$

Необходимым условием существования сплошной среды является непрерывность в каждой точке пространства x, y, z, t функций $M, \mathbf{K}, Q_0, \rho, \mathbf{U}, \varepsilon$. Полученные таким образом характеристики сплошной среды $\rho, \mathbf{U}, \varepsilon$ связаны с величинами микроуровня в объеме $\Delta\theta$ законами сохранения в виде

$$\int_{\Delta\theta} \rho d\theta = \Delta M = \sum_{v=1}^n m_v, \int_{\Delta\theta} \rho \mathbf{U} d\theta = \Delta \mathbf{K}, \int_{\Delta\theta} \rho \varepsilon d\theta = \Delta Q_0. \quad (6)$$

Поскольку момент времени t^* для перехода от микроуровня к мезоуровню был выбран произвольно, то законы сохранения массы, импульса и энергии (6) при переходе от микроуровня к сплошной среде справедливы в любой момент времени, а сами функции $\rho, \mathbf{U}, \varepsilon$ непрерывны в четырехмерном пространстве x, y, z, t и имеют все частные производные. Различные приемы, применяемые при переходе от дискретного к континуальному описанию вещества, и получаемые модели изложены в обзоре [11].

3. Идеальный газ в объеме мезочастицы. Для перехода с уровня микрочастиц на макроуровень сплошной среды сделаем, следуя учебникам физики [12–14], несколько предположений:

Микрочастицы имеют массу и не имеют объема.

Микрочастицы двигаются хаотически и каждая имеет свою скорость.

Микрочастицы не взаимодействуют друг с другом, а взаимодействуют только со стенками сосуда (мезочастицы), в котором они находятся.

Пусть газ в объеме мезочастицы $\Delta\theta$ является идеальным газом. Его молекулы имеют массу m_v , скорость \mathbf{U}_v и равную нулю удельную внутреннюю энергию $E_v = 0$, где v – номер микрочастицы. Масса и значения плотности ρ_c , скорости \mathbf{U}_c и энергии ε_c газа на макроуровне в объеме мезочастицы определяются уравнениями (1), (2). Скорость \mathbf{U}_c определяет кинетическую энергию мезочастицы. Поскольку в идеальном газе $E_v = 0$, то из (5) следует выражение для E_c мезочастицы

$$E_c = \sum_{v=1}^n 0,5 \eta_v (\mathbf{U}_v - \mathbf{U}_c)^2. \quad (7)$$

Предполагая столкновение молекул со стенками сосуда упругим, получим выражение силы, действующей на газ со стороны единичной площадки граней S_x, S_y, S_z , ортогональных Ox, Oy, Oz [15]:

$$\Phi_x = -\rho_c \sum_{v=1}^n \eta_v (U_{vx} - U_{cx})^2 \mathbf{i},$$

$$\Phi_y = -\rho_c \sum_{v=1}^n \eta_v (U_{vy} - U_{cy})^2 \mathbf{j},$$

$$\varphi_z = -\rho_c \sum_{v=1}^n \eta_v (U_{vz} - U_{cz})^2 \mathbf{k}.$$

Векторы $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ образованы диагональными элементами тензора φ . Согласно правилам механики, давление равно сумме диагональных членов с обратным знаком, деленной на три:

$$P_c = \frac{1}{3} \rho_c \sum_{v=1}^n \eta_v (U_v - U_c)^2. \quad (8)$$

Исключив сумму в (7) и (8), получим классическое уравнение состояния одноатомного идеального газа

$$P_c = \frac{2}{3} \rho_c E_c. \quad (9)$$

Это уравнение верно, если газ находится в мезочастице с произвольным объемом $\Delta\theta$. Если же теперь перейти к пределу при $\Delta\theta \rightarrow 0$, то уравнение (9) становится справедливым в любой точке объема $\Delta\theta$, который по способу его выбора является произвольным.

4. Переход от одного мезоуровня к другому. Такой переход также совершается с помощью законов сохранения массы, импульса и энергии при $t = \text{const}$. Пусть произвольный объем $\Delta\theta$ заполнен N мезочастицами с характеристиками

$$\Delta\theta_i, \Delta M_i, \Delta \mathbf{K}_i, \Delta Q_{0i}, \rho_{ci}, \mathbf{U}_{ci}, \varepsilon_{ci}, E_{ci},$$

где

$$\rho_{ci} = \frac{\Delta M_i}{\Delta\theta_i}, \mathbf{U}_{ci} = \frac{\Delta \mathbf{K}_i}{\Delta M_i}, \varepsilon_{ci} = \frac{\Delta Q_{0i}}{\Delta M_i}, E_{ci} = \varepsilon_{ci} - 0,5 \mathbf{U}_{ci}^2. \quad (10)$$

Мгновенные законы сохранения при переходе от i -х мезочастиц низшего уровня к мезочастице высшего уровня имеют вид

$$\Delta\theta = \sum_{i=1}^N \Delta\theta_i, \Delta M = \sum_{i=1}^N \Delta M_i, \Delta \mathbf{K} = \sum_{i=1}^N \Delta \mathbf{K}_i, \Delta Q_0 = \sum_{i=1}^N \Delta Q_{0i}. \quad (11)$$

Введение массовой и объемной концентраций i -й мезочастицы

$$\eta_{ci} = \frac{\Delta M_i}{\Delta M}, \alpha_{ci} = \frac{\Delta\theta_i}{\Delta\theta} \quad (12)$$

позволяет связать средние значения $\rho_c, \mathbf{U}_c, \varepsilon_c$ «большой» мезочастицы

$$\rho_c = \frac{\Delta M}{\Delta\theta}, \mathbf{U}_c = \frac{\Delta \mathbf{K}}{\Delta M}, \varepsilon_c = \frac{\Delta Q_0}{\Delta M} \quad (13)$$

с соответствующими средними характеристиками мезочастиц низшего уровня

$$\rho_c = \sum_{i=1}^N \alpha_{ci} \rho_{ci}, \mathbf{U}_c = \sum_{i=1}^N \eta_{ci} \mathbf{U}_{ci}, \varepsilon_c = \sum_{i=1}^N \eta_{ci} \varepsilon_{ci}. \quad (14)$$

Поскольку $\Delta\theta > \Delta\theta_i > 0$, то при предельном переходе $\Delta\theta \rightarrow 0$ уравнения (14) принимают вид

$$\rho = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i, \mathbf{U} = \sum_{i=1}^N \eta_i \mathbf{U}_i, \varepsilon = \sum_{i=1}^N \eta_i \varepsilon_i. \quad (15)$$

Величины $\alpha_i \rho_i$, $\eta_i \mathbf{U}_i$, $\eta_i \varepsilon_i$ называются парциальными величинами, определенными в каждой точке объема $\Delta\theta$ «большой» мезочастицы. Это значит, что в каждой точке объема $\Delta\theta$ одновременно находятся все вещества мезочастиц низшего уровня в парциальном состоянии и их характеристики непрерывны во всем объеме $\Delta\theta$. Одновременно в каждой точке этого же объема находится «смесь» i -х мезочастиц с характеристиками ρ , \mathbf{U} , ε , которые также непрерывны. Таким образом уравнения (15) справедливы в каждой точке объема $\Delta\theta$.

Из (10)–(12) следует связь α_{ci} с η_{ci}

$$\rho_c \eta_{ci} = \alpha_{ci} \rho_{ci},$$

которая после предельного перехода $\Delta\theta \rightarrow 0$ превращается в уравнение

$$\rho \eta_i = \alpha_i \rho_i. \quad (16)$$

С помощью (16) второе и третье из уравнений (15) преобразуются к виду

$$\rho \mathbf{U} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i \mathbf{U}_i, \rho \varepsilon = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i \varepsilon_i. \quad (17)$$

Момент времени t^* , при котором проводятся все приведенные выше преобразования и переход от одного мезоуровня к другому, выбран произвольно. Это значит, что все перечисленные выше функции непрерывно зависят и от t . Из произвольности выбора двух соседних мезоуровней следует, что непрерывные физические и парциальные величины можно определять на любом мезоуровне.

Подставив в уравнение (17) уравнения, связывающие удельные полную, внутреннюю и кинетическую энергии, получим в каждой точке «большой» мезочастицы, т. е. в объеме $\Delta\theta$, выражение для удельной внутренней энергии

$$E = \sum_{i=1}^N \eta_i (E_i + 0,5(\mathbf{U}_i - \mathbf{U})^2). \quad (18)$$

5. Мезочастицы – разные вещества. Выше ничего не говорилось о том, какие вещества находятся в объемах $\Delta\theta_i$ мезочастиц. Для применения «мгновенных» законов сохранения при $t = \text{const}$ это и не нужно, так как не возникает необходимости в определении сил, действующих на мезочастицы. Для учета свойств конкретных мезочастиц и для использования их уравнений состояния необходимо остановиться на двух мезоуровнях. На высшем из них свойства всех веществ объединены в результате суммирования. Это смесь. На низшем мезоуровне каждая мезочастица – это конкретное вещество со своими индивидуальными характеристиками и свойствами. Это компоненты смеси. Уравнения (15) связывают таким образом характеристики смеси ρ , \mathbf{U} , ε с характеристиками компонентов ρ_i , \mathbf{U}_i , ε_i . Следует подчеркнуть, что законы сохранения переводят величины с низшего мезоуровня (характеристики компонентов) в величины верхнего уровня (характеристики смеси) при $t = \text{const}$.

6. Смесь. Низший мезоуровень. Законы сохранения. Парциальные величины i -го компонента смеси $\alpha_i, \rho_i, \eta_i U_i, \eta_i \varepsilon_i$, непрерывны в пространстве x, y, z, t вместе со своими частными производными. В дифференциальной форме законы сохранения массы, импульса и энергии i -го компонента имеют вид [16, 17]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i) + \nabla(\alpha_i \rho_i \mathbf{U}_i) = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i \mathbf{U}_i) + \nabla \alpha_i P_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha_i \rho_i \mathbf{U}_i U_{ik} + \alpha_i \mathbf{F}_{ik}) - \mathbf{R}_i = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i \varepsilon_i) + \nabla(\alpha_i \mathbf{U}_i (P_i + \rho_i \varepsilon_i)) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha_i \mathbf{F}_{ik} \mathbf{U}_i) + \nabla \alpha_i \mathbf{Q}_i - S_i = 0. \quad (21)$$

К системе уравнений (19)–(21) нужно добавить уравнение состояния (УРС) в виде

$$P_i = P_i(\rho_i, E_i), T_i = T_i(\rho_i, E_i) \quad (22)$$

и выражение ε_i через E_i и $0,5\mathbf{U}_i^2$

$$\varepsilon_i = E_i + 0,5\mathbf{U}_i^2. \quad (23)$$

Новыми по сравнению с [18–21] в этих уравнениях являются вектор \mathbf{F}_{ik} , образованный элементами k -й строки тензора F_i , и вектор \mathbf{Q}_i . Обмены импульсом и энергией i -го компонента с каждым из остальных компонентов определяются формулами парных взаимодействий [18–22]

$$\mathbf{R}_i = \sum_{j=1}^N \mathbf{R}_{ij}, R_{ij} = \alpha_i \alpha_j \frac{a_{ij} \rho_i \rho_j}{\tau_{ij}^U} (\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_i), \quad (24)$$

$$S_i = \sum_{j=1}^N S_{ij}, S_{ij} = \alpha_i \alpha_j \left(\frac{b_{ij}}{\tau_{ij}^P} (P_j - P_i) - \frac{C_{ij}(\rho_i C_{ij} + \rho_j C_{ij})}{\tau_{ij}^T} (T_j - T_i) \right). \quad (25)$$

Уравнения (19)–(25) замыкаются уравнением для объемной концентрации α_i .

7. Многокомпонентная среда (МКС). Макроуровень. Величины макроуровня $P, \rho, E, \mathbf{U}, \varepsilon, T$ являются характеристиками некоторой сплошной среды (смеси). Запишем законы сохранения массы, импульса и энергии для смеси идеальных веществ без теплопроводности. Они имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{U} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{U}) + \mathbf{U} \nabla(\rho \mathbf{U}) + \rho(\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U} + \nabla P + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{F}_k = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \nabla \mathbf{U}(P + \rho \varepsilon) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k}(\mathbf{U} \mathbf{F}_k) + \nabla \mathbf{Q} = 0. \quad (28)$$

В рамках принятых выше гипотез уравнение состояния смеси не существует. Тензор взаимодействия F и поток энергии Q должны быть такими, чтобы законы сохранения смеси были бы согласованы с законами сохранения компонентов, т. е. получались путем суммирования соответствующих законов сохранения компонентов.

8. Необходимые условия согласованности законов сохранения. При отсутствии химических реакций законы сохранения массы i -го компонента и смеси имеют вид (19) и (26). Поскольку справедливы уравнения (15) и (17), то просуммировав (19), получим (26). Таким образом, закон сохранения массы смеси получается после суммирования законов сохранения масс компонентов без каких-либо необходимых или достаточных условий.

Просуммируем по i закон сохранения количества движения i -го компонента (20):

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \alpha_i \rho_i \mathbf{U}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\alpha_i \rho_i \mathbf{U}_i U_{ik} + \alpha_i \mathbf{F}_{ik}) + \nabla \alpha_i P_i \right) = 0. \quad (29)$$

С помощью первого уравнения (17) и уравнения

$$P = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i$$

преобразуем (29) к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{U}) + \mathbf{U} \nabla (\rho \mathbf{U}) + \rho (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U} + \nabla P + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{F}_k + \omega_1 = 0, \quad (30)$$

где

$$\omega_1 = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^N (\alpha_i \rho_i \mathbf{U}_i U_{ik} + \alpha_i \mathbf{F}_{ik}) - \mathbf{F}_k - \rho \mathbf{U} U_k \right) = 0. \quad (31)$$

Из сравнения (27) и (30) следует, что необходимое условие получения закона сохранения количества движения смеси путем суммирования по всем компонентам уравнений (20) имеет вид $\omega_1 = 0$. Сила $\alpha_i \mathbf{F}_{ik}$ действует на i -й компонент со стороны смеси как совокупности компонентов. Сила \mathbf{F}_k — это равнодействующая сил, с которыми каждый компонент действует на смесь. Согласно третьему закону Ньютона

$$\mathbf{F}_k = - \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{F}_{ik}. \quad (32)$$

Подставив (32) в (31) и приравняв ω_1 нулю, получим уравнение

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^N (2\alpha_i \mathbf{F}_{ik} + \alpha_i \rho_i \mathbf{U}_i U_{ik}) - \rho \mathbf{U} U_k \right) = 0. \quad (33)$$

С помощью (17) представим $\rho \mathbf{U} U_k$ в виде суммы по компонентам

$$\rho \mathbf{U} U_k = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i ((\mathbf{U}_i - \mathbf{U}) U_k + \mathbf{U} U_{ik}). \quad (34)$$

Из (31) и (34) следует уравнение

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^N (2\alpha_i \mathbf{F}_{ik} + \alpha_i \rho_i (\mathbf{U}_i - \mathbf{U})(U_{ik} - U_k)) \right) = 0.$$

Приравняв нулю каждое слагаемое в сумме по i , получим выражение для вектора \mathbf{F}_{ik}

$$\mathbf{F}_{ik} = -0,5\rho_i (\mathbf{U} - \mathbf{U}_i)(U_k - U_{ik}). \quad (35)$$

На i -й компонент со стороны смеси на площадке, ортогональной оси Ok , действует сила $\alpha_i \mathbf{F}_{ik}$.

Рассмотрим далее закон сохранения энергии. Просуммируем (21) по всем компонентам, добавим и отнимем величину

$$\nabla(P\mathbf{U} + \rho\varepsilon\mathbf{U} + \mathbf{Q}) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{F}_k \mathbf{U}$$

и полученное уравнение преобразуем к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \nabla\mathbf{U}(P + \rho\varepsilon) + \nabla\mathbf{Q} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{F}_k \mathbf{U} + \omega_2 = 0, \quad (36)$$

где

$$\omega_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\alpha_i ((P_i + \rho_i \varepsilon_i)(U_{ik} - U_k) + Q_{ik} + \mathbf{F}_{ik}(\mathbf{U}_i + \mathbf{U}))) - \nabla\mathbf{Q}. \quad (37)$$

Из сравнения (36) с законом сохранения энергии смеси (28) видно, что необходимое условие получения закона сохранения энергии смеси путем суммирования законов сохранения энергии компонентов имеет вид $\omega_2 = 0$.

Выражение (37) содержит вектор \mathbf{Q} и векторы \mathbf{Q}_i . Вектор \mathbf{Q} – это поток энергии, направленный к смеси от всех компонентов, вектор $\alpha_i \mathbf{Q}_i$ – поток энергии, направленный к i -му компоненту. Согласно закону сохранения энергии, должно быть

$$\mathbf{Q} = -\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{Q}_i. \quad (38)$$

Из (23), (35), (37), (38) и условия $\omega_2 = 0$ следует уравнение

$$\sum_{i=1}^N (\nabla(2\alpha_i \mathbf{Q}_i - \alpha_i (\mathbf{U} - \mathbf{U}_i)(P_i + \rho_i E_i))) = 0.$$

Приравняв нулю каждое слагаемое, получим выражение для потока энергии

$$\mathbf{Q}_i = 0,5(\mathbf{U} - \mathbf{U}_i)(P_i + \rho_i E_i). \quad (39)$$

Рассматриваемая модель содержит новый тип взаимодействия компонентов – кластерное взаимодействие, или взаимодействие каждого компонента со смесью в целом. Этот вид взаимодействия описывается универсальными силами \mathbf{F}_{ik} (35) и потоками энергии \mathbf{Q}_i (39), не зависящими ни от физических свойств компонентов, ни от их уравнений состояния. В основе модели лежат два требования – строгое выполнение законов сохранения и соблюдение инвариантности к преобразованию Галилея.

9. Замыкание системы уравнений. Система уравнений i -го компонента содержит $11N$ величин

$$P_i, \rho_i, E_i, \varepsilon_i, T_i, U_i, \alpha_i, R_i, S_i, F_{ik}, Q_i$$

и 10 N независимых уравнений:

- 3 N законов сохранения (19)-(21),
- N уравнений, связывающих удельные значения полной, внутренней и кинетической энергий (23),
- 2 N уравнений состояния (22),
- 4 N уравнений для функций взаимодействия (24), (25), (35), (39).

Чтобы система уравнений стала замкнутой, нужно к перечисленным выше уравнениям добавить N уравнений для определения α_i . Эти уравнения не должны зависеть от уже имеющихся уравнений.

В качестве первого шага продифференцируем уравнение

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1.$$

вдоль траектории смеси

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + U \nabla \alpha_i \right) = 0. \quad (40)$$

Полученное уравнение (40) инвариантно к преобразованию Галилея. В нем каждое слагаемое не равно нулю, так как α_i изменяются со временем вдоль траектории смеси. Добавим к (40) функцию Ω_i , удовлетворяющую следующим условиям:

1. Функция Ω_i должна быть инвариантна к преобразованию Галилея.
2. Сумма Ω_i должна быть равна нулю

$$\sum_{i=1}^N \Omega_i = 0. \quad (41)$$

После сложения (40) и (41) получим уравнение

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + U \nabla \alpha_i + \Omega_i \right) = 0. \quad (42)$$

Следующее условие, которому должна удовлетворять функция Ω_i , – она должна обращать в ноль каждое слагаемое в сумме (42). Таким образом, для определения α_i получается уравнение

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + U \nabla \alpha_i + \Omega_i = 0. \quad (43)$$

Объемная концентрация α_i зависит от взаимодействия компонентов. Две функции R_i и S_i , описывающие парные взаимодействия компонентов, удовлетворяют перечисленным выше условиям. Поскольку уравнение (43) скалярное, то естественно взять функцию Ω_i в виде, близком к функции S_i . Эти функции имеют разные размерности, поскольку являются слагаемыми в разных уравнениях. Функцию Ω_i возьмем в виде

$$\Omega_i = \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j f_{ij} S_{ij},$$

где

$$f_{ii} = \frac{1}{(c_i + c_i)(\rho_i c_i + \rho_i c_i)}$$

10. Ударная волна в смеси. Во многих ранее опубликованных работах [23–29] ударные адиабаты смесей определялись экспериментально путем измерения скорости ударной волны D в смеси и восстановления массовой скорости U методом отражения по скоростям в экранах или ударниках. Как правило, ударная адиабата смеси определялась в предположении, что смесь является однородным веществом. Такой подход может быть оправдан для компонентов с близкими свойствами и в узком диапазоне объемных концентраций. В случае, когда плотности компонентов сильно различаются или объемная концентрация одного из них близка к нулю или единице, справедливость такого подхода вызывает сомнения. Одна из убедительных попыток поколебать классический подход к определению ударной адиабаты смеси изложена в [29]. Показано, что в некоторых смесях с объемной концентрацией тяжелого компонента $\alpha = 0,2$ давление на ударной волне изменяется вследствие релаксационных процессов задолго до того, как ее догонит волна разгрузки от тыльной поверхности ударника.

Многочисленные экспериментальные и теоретические исследования по изучению распространения ударных волн в многокомпонентных средах [23–31] позволяют сделать вывод, что ударная волна в МКС не расщепляется на несколько сильных разрывов. Основываясь на этих наблюдениях, введем в рассмотрение скорость распространения сильного разрыва в смеси в лагранжевых координатах $W = \frac{dm}{dt}$. Сильный разрыв – это поверхность на которой все характеристики компонентов и смеси изменяются скачком. Независимо от состояния компонентов перед разрывом их состояние за разрывом всегда неравновесно: $U_i \neq U_j$, $P_i \neq P_j$, $T_i \neq T_j$. На поверхности сильного разрыва (за ним) начинаются релаксационные процессы установления равновесия $U_i - U_j \rightarrow 0$, $P_i - P_j \rightarrow 0$, $T_i - T_j \rightarrow 0$. Эти процессы протекают в области конечного размера Δx , которая трактуется как ширина фронта ударной волны. Таким образом, условия на ударной волне в смеси – это законы сохранения, записанные для состояний вещества перед сильным разрывом и в конце области релаксации. Изложенная выше структура величин в ударной волне качественно согласуется с экспериментальными данными, полученными в [29].

Следуя известной [16] процедуре перехода от дифференциальных уравнений (19)–(21) и (43) к уравнениям на разрыве, получим три закона сохранения i -го компонента и уравнение для объемной концентрации на поверхности сильного разрыва в виде

$$\frac{1}{\rho_{i+}} W_i + U_{i+} = \frac{1}{\rho_{i-}} W_i + U_{i-}, \quad (44)$$

$$U_{i+} W_i - P_{i+} - F_{i+} = U_{i-} W_i - P_{i-} - F_{i-}, \quad (45)$$

$$\varepsilon_{i+} W_i - U_{i+} (P_{i+} + F_{i+}) - Q_{i+} = \varepsilon_{i-} W_i - U_{i-} (P_{i-} + F_{i-}) - Q_{i-}, \quad (46)$$

$$\alpha_{i+} = \alpha_{i-}. \quad (47)$$

Величины с индексом «-» в уравнениях (44)–(47) предполагаются известными. Они характеризуют состояние перед сильным разрывом. Величины с индексом «+» нужно определить. Для замыкания системы уравнений (44)–(47) к ним добавляется ряд уравнений. Одно из них – это уравнение состояния

$$P_{i+} = P_i(\rho_{i+}, E_{i+}). \quad (48)$$

Входящая в него удельная внутренняя энергия E_{i+} выражается через ε_{i+} и U_{i+} с помощью уравнения

$$E_{i+} = \varepsilon_{i+} - 0,5U_{i+}^2. \quad (49)$$

Еще два уравнения – это выражения для функций кластерного взаимодействия F_{i+} и Q_{i+} :

$$F_{i+} = -0,5\rho_{i+}(U_{i+} - U_+)^2, Q_{i+} = 0,5(U_+ - U_{i+})(P_{i+} + \rho_{i+}E_{i+}). \quad (50)$$

Уравнения (50) содержат массовую скорость смеси U_+ , которая выражается через скорости компонентов:

$$U_+ = \sum_{i=1}^N \eta_{i+} U_{i+}, \quad (51)$$

где

$$\eta_{i+} = \alpha_{i+}\rho_{i+}/\rho_+, \quad \rho_+ = \sum_{i=1}^N \alpha_{i+}\rho_{i+}. \quad (52)$$

Уравнения (44)–(52) образуют систему уравнений для определения $9N + 2$ величин $W_i, P_{i+}, \rho_{i+}, E_{i+}, U_{i+}, \alpha_{i+}, \varepsilon_{i+}, F_{i+}, Q_{i+}, \eta_{i+}, U_+, \rho_+$. Уравнений (44)–(52) недостаточно, чтобы построить ударную адиабату смеси. Дело в том, что значения W_i не связаны друг с другом. Тем более они не связаны со скоростью распространения сильного разрыва W в смеси, которая в уравнениях отсутствует.

11. Скорость распространения скачка и скорость звука смеси. Рассмотрим в одномерной постановке покоящийся объем Δx , в котором находится N компонентов с известными физическими характеристиками. Ограничимся простейшей моделью, когда все компоненты являются плоскими слоями, имеющими массу Δm_i , которые удовлетворяют законам сохранения:

$$\Delta m = \sum_{i=1}^N \Delta m_i.$$

Время прохождения ударной волной слоя с массой Δm_i равно

$$\Delta t_i = \frac{\Delta m_i}{W_i}.$$

На последовательное прохождение ударной волной всех N слоев ей потребуется время

$$\Delta t_i = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta m_i}{W_i}. \quad (53)$$

Определим среднюю скорость ударной волны в рассматриваемой слоистой смеси уравнением

$$W = \frac{\Delta m}{\Delta t}.$$

Подставив сюда выражения для Δt (53), получим связь W с W_i в виде

$$\frac{1}{W} = \sum_{i=1}^N \frac{\eta_i}{W_i}, \quad (54)$$

где η_i – массовая концентрация i -го компонента ($\eta_i = \Delta m_i / \Delta m$). По определению

$$W = \rho(D - U), W_i = \rho_i(D_i - U_i).$$

Подставив W , W_i и $\eta_i = \alpha_i \rho_i / \rho$ в (54), получим уравнение

$$\frac{1}{D - U} = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{D_i - U_i}. \quad (55)$$

Вопрос о нахождении скорости звука смеси по скоростям звука и концентрациям компонентов до последнего времени разными авторами решался в предположении, что смесь имеет уравнение состояния и скорость звука может быть определена по классической формуле

$$C^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S,$$

где ρ, P, S – плотность, давление и энтропия смеси. При этом, как правило, неявно делались предположения, что $P_i = P$, α_i и η_i не зависят от P и S , $= \text{const}$ одновременно с S [25–27, 31–33].

Откажемся от всех таких неявных предположений, поскольку, как отмечалось выше, смесь не имеет УРС. Будем исходить из уравнения (55). Акустические возмущения (бесконечно слабые ударные волны) распространяются вдоль характеристик первого и второго семейства, определяемых уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = D = U \pm C, \quad \frac{dx}{dt} = D_i = U_i \pm C_i. \quad (56)$$

Из (55) и (56) следует зависимость скорости звука смеси от скоростей звука и объемных концентраций компонентов

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{C_i}. \quad (57)$$

Легко убедиться, что формула (57) намного точнее, чем другие зависимости, описывает экспериментальные данные по многим многокомпонентным составам.

12. Скорость распространения скачка в компоненте смеси. Рассмотрим условие на поверхности сильного разрыва в i -м компоненте при отсутствии кластерного взаимодействия, являющееся следствием уравнений (44)–(46), (49):

$$H_{i+} - H_{i-} = 0,5W_i^2 (V_{i-}^2 - V_{i+}^2),$$

где $V_i = 1/\rho_i$, H_i – энтальпия $H_i = E_i + P_i V_i$. Добавим уравнение, определяющее изменение энтальпии вдоль луча, касательного к изоэнтропе в точке P_{i-}, V_{i-} :

$$H_{i+}^S - H_{i-} = 0,5(\rho_{i-} C_{i-})^2 (V_{i-}^2 - V_{i+}^2).$$

Отношение

$$\frac{H_{i+} - H_{i-}}{H_{i+}^S - H_{i-}} = \frac{W_i^2}{(\rho_{i-} C_{i-})^2}$$

приближенно характеризует диссипацию энергии на сильном разрыве в i -м компоненте. Аналогично получается уравнение

$$\frac{H_+ - H_-}{H_+^S - H_-} = \frac{W^2}{(\rho_- C_-)^2},$$

приближенно характеризующее диссипацию энергии на сильном разрыве в смеси. Потребуем, чтобы разность между диссипацией энергии во всех компонентах и диссипацией энергии в смеси была минимальна. Для этого рассмотрим функцию

$$F = \sum_{i=1}^N \eta_i \left(\frac{W_i^2}{(\rho_{i-} C_{i-})^2} - \frac{W^2}{(\rho_- C_-)^2} \right)^2$$

и приравняем нулю все ее частные производные по W_i . В результате получим N уравнений, выражающих W_i через W и через величины $\rho_{i-}, C_{i-}, \rho_-, C_-$, характеризующие состояние i -го компонента и смеси перед разрывом:

$$W_i = W \left(\frac{\rho_{i-} C_{i-}}{\rho_- C_-} \right). \quad (58)$$

Уравнение (58) добавляет к системе уравнений (44)–(52) еще N уравнений и одну величину W . В результате полная система уравнений (44)–(52), (58) содержит $10N + 2$ уравнений и $10N + 3$ величин и является типичной ударной адиабатой, определяющей состояние за поверхностью сильного разрыва в зависимости от одного параметра W .

13. Ударные волны в парафино-вольфрамовой смеси. С целью проверки модели были взяты экспериментальные данные из [27]. Для уточнения зависимостей $D(U)$ вольфрама и парафина были использованы данные из работ [25, 28–30] и из различных справочников. Рассматривались две парафино-вольфрамовые смеси:

- легкая смесь $\rho_0 = 2,43972 \text{ г/см}^3, \alpha_{W'} = 0,084, \eta_{W'} = 0,662$;
- тяжелая смесь $\rho_0 = 4,52934 \text{ г/см}^3, \alpha_{W''} = 0,198, \eta_{W''} = 0,840$.

Теоретические ударные адиабаты $P(D)$ смесей были получены для УРС компонентов вида

$$P = (\gamma(\rho) - 1)\rho E + C_{0k}^2 (\rho - \rho_{0k}),$$

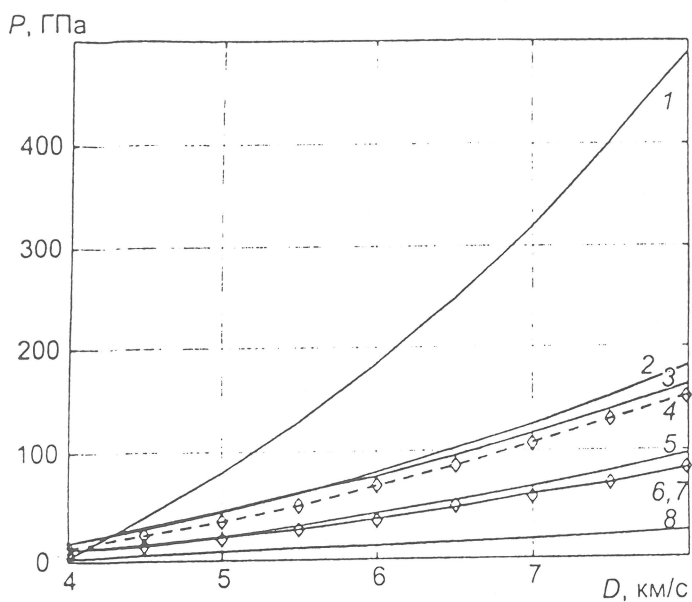


Рис. 1.

где функция $\gamma(\rho)$ для вольфрама и парафина подбиралась с целью наилучшей аппроксимации экспериментальных зависимостей $D(U)$ в виде

$$\gamma(\rho) = \gamma_x + (\gamma_M - \gamma_x) e^{-a(x_M - x)^2}$$

($x = \rho_{ок} / \rho$). Для вольфрама $\gamma_x = 1,6667$, $\gamma_M = 4,2247$, $x_M = 1,19$, $a = 2,303$, для парафина $\gamma_x = 1,6667$, $\gamma_M = 4,45$, $x_M = 1,05$, $a = 3,189$. На рис. 1 изображены: 1 – ударная адиабата $P(D)$ вольфрама, 8 – ударная адиабата парафина, 2, 5 – зависимости $P(D)$ на сильном разрыве в тяжелой и легкой смесях, полученные без учета кластерного взаимодействия, 3, 6 – экспериментальные

ударные адиабаты из [27], 4, 7 (\diamond) – теоретические зависимости $P(D)$ на сильном разрыве в тяжелой и легкой смесях, полученные с приближенным учетом кластерного взаимодействия.

Зависимости $P(D)$ 2, 4 и 5, 7 построены без учета влияния зоны релаксации P, T, U на скачок. Скачок в смеси нестационарен. Используемые для обработки экспериментальных измерений $D(x, T), U(x, T)$ в [27] метод «отражения» и метод «торможения» этого не учитывают. Нестационарность разрыва приводит к тому, что измеренные на некотором конечном расстоянии от границы образца значения D и U отличаются от тех, которые вырабатываются при распаде произвольного разрыва в момент удара ударника по образцу.

Влияние зоны релаксации P, T, U в смеси за сильным разрывом изучено в [29]. По существу, в этой работе сделана серьезная попытка обоснования нестационарности ударной волны в смеси из-за наличия зоны релаксации за сильным разрывом. Схе-

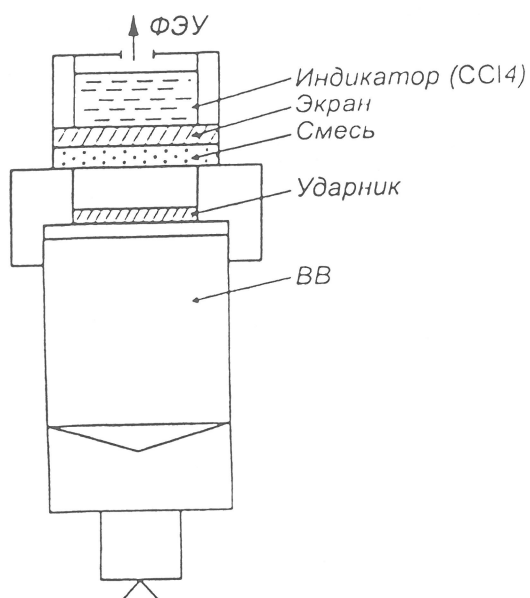


Рис. 2.

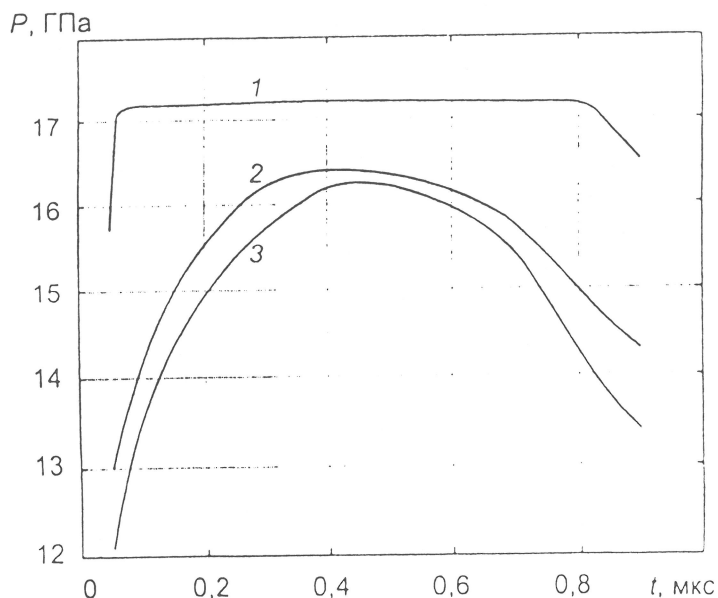


Рис. 3.

ма экспериментальной установки из [29] приведена на рис. 2. Зависимости $P(t)$ на сильном разрыве в индикаторе, полученные в [29], приведены на рис. 3.

Здесь 1 – зависимость $P(t)$ на скачке в чистом однородном веществе, 2 – зависимость $P(t)$ в смеси вольфрам–парафин с $\alpha_w = 0,2$, 3 – такая же зависимость в смеси с $\alpha_w = 0,084$.

Заключение. Изложенная модель многокомпонентной среды построена так, что законы сохранения массы, импульса и энергии выполняются при любых преобразованиях уравнений мезоуровня к уравнениям макроуровня. Все независимые ^{уравнение} модели инвариантны к преобразованию Галилея. Уравнения состояния компонентов могут быть сколь угодно сложными [34, 35]. Модель содержит новые силы и потоки энергии, которые универсальны и не зависят от физических свойств или УРС компонентов. Модель МКС, содержащая кластерное взаимодействие компонентов, является наиболее общей и физически наиболее обоснованной моделью.

Работа выполнена при поддержке РФФИ. Грант №10-01-0032, №10-01-96001.

Список литературы

1. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М: Наука, 1981. 368 с.
2. Панин В.Е., Лихачев В.А., Гршпяев Ю.В. Структурные уровни деформации твердых тел. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-е, 1985. 229 с.
3. Панин В.Е., Егорушкин В.Е., Макаров П.В. и др. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов. Новосибирск: Наука, 1995. Т. 1. 298 с.; Т. 2. 320 с.
4. Куропатенко В.Ф. Мезомеханика однокомпонентных и многокомпонентных материалов // Физическая мезомеханика. 2001. Т. 4, № 3. С. 49–55.
5. Alder B.J., Wenwright T.E. Studies in molecular dynamics. I. General method // J. Chem. Phys. 1959. Vol. 31, N. 2. P.459–466.
6. Verlet L. Computer «experiments» on classical fluids. I. Thermodynamical properties of Lennard-Jones molecules // Phys.Rev. 1967. V. 159, N 1. P. 98–103.
7. Harlow F.H., Dickman D.O., Harris D.E., Martin R.E. Two dimensional hydrodynamic calculation. Los Alamos Scientific Lab. Rep NLA–2301, 1959.
8. Харлоу Ф.Х. Численный метод «частиц в ячейках» для задач гидродинамики // Вычислительные методы в гидродинамике / Под ред. Григоряна С.С. и Шмыглевского Ю.Д. М.: Мир, 1967. 383 с.
9. Вычислительные методы в физике плазмы. Под ред. Олдера Б., Фернбаха С., Ротенберга М. М.: Мир, 1974. 514 с.
10. Хокки Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987. 638 с.
11. Механика – от дискретного к сплошному / Под. ред. Фомина В.М. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. 343 с.
12. Гиршфельдер Д., Кертис Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 929 с.
13. Френкель Я.И. Статистическая физика. М.: Изд-во АН СССР, 1948.
14. Радченко И.В. Молекулярная физика. М.: Наука, 1965. 479 с.
15. Куропатенко В.Ф. Молекулярно-кинетическое обоснование модели многокомпонентной среды // Физика экстремальных состояний / Под ред. Фортова В.Е. Черноголовка, 2008. С. 26–29.
16. Куропатенко В.Ф. Модели механики сплошных сред. Челябинск: Челябинский гос. университет, 2007. 302 с.

17. Куропатенко В.Ф. Модель многокомпонентной среды // Докл. РАН. 2005. Т. 403, № 6. С. 761–763.
18. Нигматуллин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 332 с.
19. Рахматуллин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // ПММ. 1956. Т. 20, вып. 27. С. 184–195.
20. Крайко А.Н., Нигматуллин Р.И., Старков В.К., Стернин Л.Б. Механика многофазных сред // Итоги науки и техники. Гидромеханика. 1973. Т. 6. С. 93–174.
21. Яненко Н.Н., Солоухин Р.И., Папырин А.Н., Фомин В.М. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц. Новосибирск: Наука, 1980. 158 с.
22. Струминский В.В. Влияние диффузной скорости на течение газовых смесей // ПММ. 1974. Т. 38, вып. 2. С. 203–210.
23. Николаевский В.Н. Гидродинамический анализ ударных адиабат гетерогенных смесей веществ // ПМТФ. 1969. № 3. С. 82–88.
24. Дремин А.Н., Карпухин И.А. Метод определения ударных адиабат для дисперсных веществ // ПМТФ. 1960. № 3.
25. Богачев Г.Н., Николаевский В.Н. Ударные волны в смеси материалов. Гидродинамические приближения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 4. С. 113–125.
26. Ляхов Г.М. Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. М.: Наука, 1982. 286 с.
27. Алексеев Ю.Ф., Альтшулер Л.В., Крушников В.П. Ударное сжатие двухкомпонентных парафино-вольфрамовых смесей // ПМТФ. 1971. № 4. С. 152.
28. Мак-Куин Р., Марш С., Тейлор Дж., Фритц Дж., Каргер У. Уравнение состояния твердых тел по результатам исследований ударных волн. // Высокоскоростные ударные явления / Под ред. Николаевского В.Н. М.: Мир, 1973. С. 299–427.
29. Долгобородов А.Ю., Воскобойников И.М., Толстов И.К., Стариков А.В. Особенности распространения ударных волн в смесях // ФГВ. 1992. Т. 28, № 3. С. 106–111.
30. Бушман А.В., Ломоносов И.В., Фортон В.Е. Уравнения состояния металлов при высоких плотностях энергии // Черноголовка. 1992. 196 с. (Препринт; Инст. хим. физ.).
31. Ляхов Г.М., Охитин В.Н. Сферические взрывные волны в многокомпонентных средах // ПМТФ. 1974. № 2. С. 75–84.
32. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 246 с.
33. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
34. Куропатенко В.Ф. Уравнения состояния в математических моделях механики и физики // Экстремальные состояния вещества: Сб. науч. тр. АН СССР. М.: ИВТАН, 1991. С. 3–38.
35. Куропатенко В.Ф. Уравнения состояния компонентов плотной низкотемпературной плазмы // Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Серия Б, Т. VII-1. М.: Янус-К, 2008. С. 436–450.