В.Ф.Куропатенко, стр.69

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ОТДЕЛЕНИЕ МЕХАНИКИ
И ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

информационный бюллетень

Том 1, № 5
1970

НОВОСИБИРСК

В.Ф.КУРОПАТЕНКО

ДРОБЛЕНИЕ ВЕЩЕСТВА ПРИ СИММЕТРИЧНОМ СТОЛКНОВЕНИИ ДВУХ ПЛАСТИН.

Рассмотрим две пластины из одного и того же материала, движущиеся навстречу друг-другу с постоянными скоростями u_0 и $-u_0$. Пусть толщина каждой пластин: равна ℓ, а давление P, плстность ρ и энергия E принимают значения

$$P_0 = 0, \quad \rho_0, \quad E_0 = 0.$$

Ограничимся рассмотрением задачи в гидродинамическом приближении, когда единственной действующей в веществе силой является давление P. Будем считать также, что вещество подчиняется двучленному уравнению состояния [I] с согласованными n и γ

$$P = (n-1)\rho E + c_0^2(\rho - \rho_0). \tag{I}$$

Начало координат поместим в точку соударения пластин, ось Ox направим по нормали к поверхности пластины. Поскольку задача симметрична относительно оси Ot, будем рассматривать лишь правую полуплоскость и находить решение для $x \geq 0$. Уравнения гидродинамики в плоском случае с уравнением состояния (I) при $n=3$ приводятся к характеристическому виду

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = u + c, \qquad u + c = \alpha = const, \tag{2}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = u - c\,, \qquad u - c = \beta = const. \tag{3}$$

В области O решение совпадает с начальными данными

$$u = -u_o\,, \quad \rho = \rho_o\,, \quad c = c_o\,, \quad p = 0. \tag{4}$$

Внутреннюю энергию E в дальнейшем рассматривать не будем, поскольку ее всегда можно выразить через ρ и C. Давление же P будем привлекать для построения решения в тех случаях, когда это окажется необходимым.

В момент соударения из точки O вправо начинает распространяться ударная волна OB. За фронтом этой ударной волны в области I все величины постоянны. Скорость u_1 равна нулю из соображений симметрии. Остальные величины определяются с помощью условий на фронте ударной волны

$$P_1 = \rho_o u_o \left(u_o + \sqrt{u_o^2 + c_o^2}\right), \tag{5}$$

$$\rho_1 = \rho_o \left(1 + \frac{u_o}{\sqrt{u_o^2 + c_o^2}}\right). \tag{6}$$

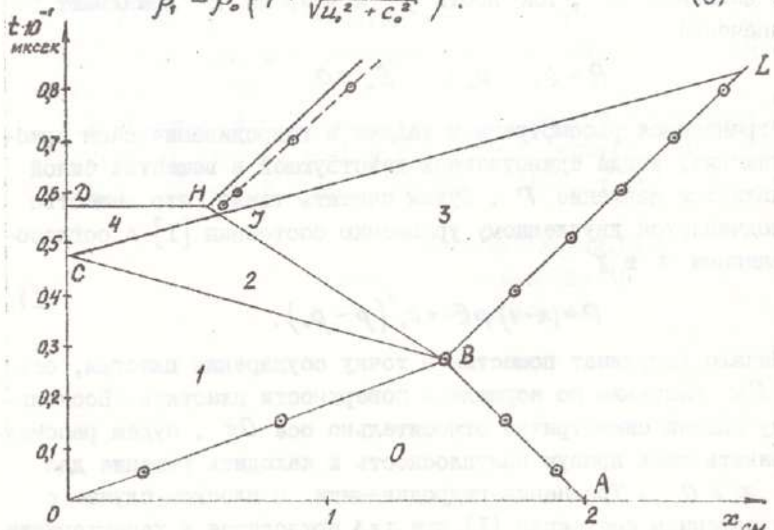

Рис.I.

——— точное решение

--о-- численный расчет

$$C_1^2 = C_o^2 \left[1 + 3\left(\frac{u_o}{C_o}\right)^2 + \frac{2u_o}{u_o + \sqrt{u_o^2 + C_o^2}}\right], \tag{7}$$

$$W_{OB} = \rho_o \left(u_o + \sqrt{u_o^2 + C_o^2}\right). \tag{8}$$

Момент времени t_B выхода ударной волны на свободную границу пластины равен

$$t_B = \frac{\rho_o \ell}{W_{OB}} \tag{9}$$

Вторая координата точки B определяется из уравнения движения свободной поверхности AB

$$x_B = \ell - u_o t_B. \tag{IC}$$

После выхода ударной волны на свободную границу пластины из точки B влево будет распространяться центрированная волна разрежения, ограниченная двумя слабыми разрывами BC и BH. Необходимо отметить, что в дальнейшем решение будет строиться до тех пор, пока движение вещества остается изэнтропичным. Это позволяет выразить некоторые комбинации термодинамических величин через ρ_1 и C_1

$$c\rho^{-1} = C_1 \rho_1^{-1}, \tag{II}$$

$$(3P + \rho_o C_o^2)\rho^{-3} = (3P_1 + \rho_o C_o^2)\rho_1^{-3}, \tag{I2}$$

$$c = C_1 \left(1 + \frac{3P}{\rho_o C_o^2}\right)^{1/3} \cdot \left(\frac{\rho_o C_o^2}{\rho_1 C_1^2}\right)^{1/3}. \tag{I3}$$

На свободной границе BL давление равно нулю. Из (I3) сразу же следует, что скорость звука на этой границе также постоянна и равна

$$C_{30} = C_1 \left(\frac{\rho_o C_o^2}{\rho_1 C_1^2}\right)^{1/3}. \tag{I4}$$

Вдоль характеристик I семейства (2), приходящих на свободную границу из области I, сохраняется постоянным α инвариант

$$\alpha = C_1\,, \tag{I5}$$

поскольку $u_1 = 0$. Подставляя (I4) и (I5) в (2), определим u_{30}.

$$u_{30} = C_1 \left[1 - \left(\frac{\rho_o C_o^2}{\rho_1 C_1^2}\right)^{1/3}\right]. \tag{I6}$$

Таким образом, характеристики второго семейства, выходящие из точек свободной границы BL, имеют все один и тот же инвариант β

$$\beta = u_{30} - c_{30}. \tag{17}$$

Решая совместно (2) и (3), получим

$$u_3 = u_{30}, \quad c_3 = c_{30}. \tag{18}$$

Уравнения свободной границы BL и слабого разрыва BH имеют вид

$$x = x_B + u_3 (t - t_B), \tag{19}$$

$$\frac{x - x_B}{t - t_B} = c_1 \left[1 - 2 \left(\frac{\rho_0 c_0^2}{\rho_1 c_1^2} \right)^{1/3} \right]. \tag{20}$$

Уравнение слабого разрыва BC

$$\frac{x - x_B}{t - t_B} = -c_1 \tag{21}$$

позволяет определить момент t_c прихода этого разрыва в точку $C(x_c = 0)$.

$$t_c = t_B + \frac{x_B}{c_1}. \tag{22}$$

В области 2 решение определяется взаимодействием характеристик I семейства

$$u + c = c_1.$$

с характеристиками центрированной волны разрежения CBJ

$$\frac{x - x_B}{t - t_B} = u - c.$$

Таким образом, решение в области 2 имеет вид

$$u_2 = 0{,}5 \left(\frac{x - x_B}{t - t_B} + c_1 \right), \tag{23}$$

$$c_2 = 0{,}5 \left(c_1 - \frac{x - x_B}{t - t_B} \right). \tag{24}$$

В области 4 взаимодействуют две центрированных волны разрежения, так что решение определяется характеристиками первого и второго семейства

$$\frac{x + x_B}{t - t_B} = u + c, \quad \frac{x - x_B}{t - t_B} = u - c, \tag{25}$$

$$u = \frac{x}{t - t_B}, \quad c = \frac{x_B}{t - t_B}. \tag{25}$$

Из (25) следует, что линии уровня c в области 4 – горизонтали. Определим момент t_0, когда P станет в этой области равным нулю. Для этого подставим (14) в (25)

$$t_0 = t_B + \frac{x_B}{c_3}. \tag{26}$$

Легко проверить, что именно в этот момент пересекаются характеристики CL и BH (точка J). Поскольку в этот момент давление $P_3 = 0$, то оказывается, что при $t = t_0$ давление равно нулю во всей системе. При $t > t_0$ давление в области 4 становится отрицательным, то есть материал подвергается растягивающим условиям.

В настоящее время существуют различные модели разрушения вещества, однако, ни одна из них не может претендовать на удовлетворительное описание всех эффектов, возникающих при разрушении. Ниже будет использована одна из элементарных теорий разрушения в соответствии с которой вещество считается разрушенным, если давление в некоторой частице достигло значения динамической прочности $-\sigma$. Разрушение проявляется в том, что давление от $p = -\sigma$ скачком возрастает до $P = 0$ при постоянных остальных гидродинамических величинах. В процессе дальнейшей разгрузки давление остается в этой частице равным нулю, что приводит к отсутствию взаимодействия соседних частиц, поскольку давление является в гидродинамике единственной силой. В процессе нагрузки вещество собирается при $P = 0$ до тех пор, пока P, вычисленное из уравнения состояния, остается отрицательным. В противном случае $P > 0$. Эта модель разрушения при $\sigma = 0$ совпадает с моделью, используемой в [2].

Из (I.3) следует, что линии уровня c являются одновременно и линиями уровня P. Определим наименьшее давление, которое может быть достигнуто в области 4. Из (25) следует, что наименьшим будет давление P_M в точке M пересечения характеристики BH с осью $x = 0$, поскольку в этой точке достигается наибольшее в области 4 время.

$$C_M = C_3 - u_3\,, \tag{27}$$

$$t_M = t_B + \frac{x_B}{C_3 - u_3}\,. \tag{28}$$

В то же время динамической прочности $P = -\sigma$ соответствует скорость звука C_σ

$$C_\sigma = C_1\left(1 - \frac{3\sigma}{\rho_0 C_0^2}\right)^{1/3}\left(\frac{\rho_0 C_0^2}{\rho_1 C_1^2}\right)^{1/3} \tag{29}$$

Таким образом, при $C_M > C_\sigma$ разрушения вещества заведемо не происходит. При $C_M < C_\sigma$ возможно разрушение материала пластин.

Остановимся вначале на более простом случае, когда при соударении пластины свариваются, так что прочность на контактной поверхности равна прочности вещества. Условие разрушения в этом случае связывает безразмерную динамическую прочность $z = \sigma/\rho_0 C_0^2$ с безразмерной начальной скоростью пластины $M_0 = u_0/C_0$.

$$z_* = \frac{1}{3}\left[1 - \left(2 - \varphi^{1/3}\right)^3\right] \tag{30}$$

$$\varphi = \left(1 + \frac{M_0}{\sqrt{1+M_0^2}}\right)\left[1 + 3M_0^2 + \frac{2M_0}{M_0 + \sqrt{1+M_0^2}}\right]. \tag{31}$$

При $z < z_*$ происходит разрушение вещества в области 4. Момент разрушения определяется из (25)

$$t_\sigma = t_B + \frac{x_B}{C_\sigma}\,. \tag{32}$$

От точки H вправо пойдет слабая ударная волна, состояние за фронтом которой в первый момент определяется давлением $P = 0$. Координата x_H определяется из (32) и (20)

$$x_H = x_B\left\{1 + \frac{C_1}{C_\sigma}\left[1 - 2\left(\frac{\rho_0 C_0^2}{\rho_1 C_1^2}\right)^{1/3}\right]\right\}. \tag{33}$$

Плотность вещества на участке DH постоянна и равна

$$\rho_\sigma = \rho_1\,\frac{C_\sigma}{C_1}\,. \tag{34}$$

Таким образом, легко определить массу и количество движения разрушенного вещества

$$\Delta m = \rho_\sigma x_H\,, \tag{35}$$

$$\Delta K = \int_0^{x_H} \rho_\sigma u\, dx\,. \tag{36}$$

Подставляя сюда u из (25) и t_σ из (32), получим

$$\Delta K = 0{,}5\,\rho_\sigma C_\sigma\,\frac{x_H^2}{x_B}\,. \tag{37}$$

Средняя скорость "отскочившей" пластины (сплошное вещество правее точки H) определяется как количество движения

$$K = \rho_0 \ell u_0 - \Delta K\,, \tag{38}$$

деленное на ее массу

$$m = \rho_0 \ell - \Delta m\,. \tag{39}$$

При этом в "отскочившей" пластине будут бегать слабые волны нагрузки и разгрузки, под действием которых свободные поверхности этой пластины будут совершать сложное движение.

Рассмотрим далее случай, когда отсутствует сварка вдоль контактной поверхности. Очевидно здесь в момент t_0 (26) пластины начнут отходить друг от друга. Поскольку в области 4 давление продолжает падать , а на свободной поверхности $P = 0$, то в правую пластину слева начнет распространяться волна сжатия, повышающая давление от P_4 до нуля. Вдоль крайней правой характеристики этой волны сжатия

$$u + c = C_3\,, \tag{40}$$

а ее уравнение имеет вид

$$x = C_3\,(t - t_0). \tag{41}$$

В момент t_σ , когда давление в области 4 равно $-\sigma$, характеристика (41) будет находиться в точке

$$x_{**} = C_3\,(t_\sigma - t_0). \tag{42}$$

Разрушение не произойдет, если $x_{**} > x_H$, поскольку за характеристикой (41) следует волна сжатия, повышающая давление от $-\sigma$ до нуля. Если же

$$x_{**} \leq x_{Hn}\,, \tag{43}$$

то на участке $x_{s1} \le x \le x_H$ происходит разрушение вещества. Масса, количество движения и средняя скорость "отскочившей" пластины определяются так же просто , как и в случае со сваркой.

Приведенное выше решение задачи о симметричном соударении двух пластин с 1963 г. использовалось в качестве эталонного решения для проверки точности разностных методик. На рис.I приводится сравнение точного решения с расчетом, проведенным по програме РАНД (расчет адиабатических нестационарных движений). В программе используется неоднородный разностный метод счета с выделением наиболее важных особенностей в решении. Непрерывные решения рассчитывались по формулам схемы I из [3] .

Величины, входящие в решение, принимали значения

$$\ell = 2 \text{ см} \qquad u_0 = 2 \text{ км/сек}$$
$$\rho_0 = 7{,}8 \text{ г/см}^3 \qquad n = 3$$
$$c_0 = 5 \text{ км/сек} \qquad \sigma = 100 \text{ кбар} .$$

Число точек сетки в расчете было равно N=25. Результаты сравнения численного решения с точным приведены на рис.I и в таблице I.

ТАБЛИЦА I.

Величина	Точное решение	Расчет
x_s	I,45837	I,45837
t_s	0,2708I	0,2708I
ρ_1	II5,208	II5,208
u_3	2,04862	2,0478
x_H	0,54I	0,620
t_r	0,575	0,585
m	II,70	II,2[illegible]
Δm	3,90	4,30
ΔK	3,45	3,84

Литература

I. Зельдович Я.Б.,Райзер Ю.П. "Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений". Физматгиз М. 1963.

2. Жуков А.И. "Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики", Труды МИАН СССР, т.58, 1960 г.

3. Куропатенко В.Ф. "О разностных методах для уравнений гидродинамики". Труды МИАН СССР, том.74, ч.I, 107, 1966г.