

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИНВАРИАНТНОСТИ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ ГАЗОВЗВЕСИ

Н.Л. Клиначева

Южно-Уральский государственный (национальный исследовательский) университет,
г. Челябинск

klinachevsv@is74.ru

Аннотация. Рассмотрены модели газозвеси, широко используемые при решении задач распространения ударных волн в гетерогенных средах. Исследовалась инвариантность этих моделей к преобразованиям Галилея. В результате численного моделирования получены результаты, показывающие, что не все модели газозвеси являются инвариантными к преобразованиям Галилея.

Перспективное использование взрывных процессов в ряде отраслей современной техники тесно связано с решением вопросов обеспечения мер безопасности, защиты инженерных сооружений и технологического оборудования от действия ударных волн (УВ). В связи с этим важное прикладное значение представляет изучение проблемы локализации механических эффектов взрыва и ослабления УВ с помощью математического моделирования данных физических процессов. Поэтому с особой остротой встает проблема как разработки математических моделей многокомпонентных гетерогенных сред [1], основанных на гипотезе взаимопроникающих взаимодействующих континуумов [2], так и анализа уже существующих математических моделей [3, 4].

Развитие современной вычислительной техники позволило значительно усложнить математические модели физических процессов, используемых в науке и технике. В связи с этим повысился статус математического моделирования как источника получения информации о процессах.

Для верификации расчетов, с одной стороны, используют известные экспериментальные данные, а с другой стороны, при анализе проведенных измерений используют математические модели. Очень важно, чтобы условия проведения расчетов и экспериментов совпадали, а математическая модель была инвариантна относительно преобразования Галилея.

В работах [3, 4] проведен анализ математической модели «замороженной» газозвеси [5], которая активно используется при анализе затухания ударных волн в гетерогенных средах. Оказалось, что неинвариантность относительно преобразования Галилея уравнений из [5] приводит к появлению дополнительного источника энергии, связанного с движением системы координат. Этот источник энергии не имеет физической природы и приводит к нарушению второго закона термодинамики.

В работе [6] была предложена модифицированная модель «замороженной» газозвеси:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} &= -F, \\ \rho \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P u}{\partial x} &= -Q - F u,\end{aligned}$$

где ρ – плотность, u – скорость, e и E – удельная внутренняя и удельная полная энергия, F – сила компонентного взаимодействия, Q – интенсивность теплообмена. Система дополняется выражением для полной энергии

$$E = e + \frac{1}{2} u^2$$

и уравнением состояния

$$P = (\gamma - 1) \rho e.$$

Выражения для интенсивности «внешнего» силового и теплового взаимодействия газа с решеткой задаются с учетом стесненности узлов [8] следующим образом:

$$\begin{aligned}F &= 0,75 C_d \alpha \rho |u| u d^{-1}, & C_d &= C_d^0(\text{Re}) \Psi(M) \varphi(\alpha), \\ C_d^0 &= 24/\text{Re} + 4/\sqrt{\text{Re}} + 0,4, & \varphi(\alpha) &= (1 - \alpha)^{-n}, n = 1, \\ \Psi(M) &= [1 + \exp(-0,427/M^{4,63})], & M &= \frac{u}{c}, \\ c &= \sqrt{\gamma p / \rho}, & \text{Re} &= \frac{\rho |u| d}{\mu}, & Q &= 6 \alpha \lambda N u \left(\frac{e}{c_v} - \frac{e_g}{c_{vg}} \right) d^{-2}, \\ N u &= 2 \exp(-M) + 0,459 \text{Re}^{0,55} \text{Pr}^{0,33}, & \text{Pr} &= \frac{c_p \mu}{\lambda}.\end{aligned}$$

Здесь C_d – коэффициент аэродинамического сопротивления сферы, записанный с учетом сжимаемости пото-

ка (функция $\Psi(M)$) и стесненности частиц (функция $\varphi(\alpha)$); C_d^0 – коэффициент аэродинамического сопротивления частицы в несжимаемом безграничном потоке газа; M , Re , Nu , Pr – числа Маха, Рейнольдса, Нуссельта и Прандтля; γ , λ , μ , c – показатель адиабаты, теплопроводность, вязкость и местная скорость звука газа; c_p , c_v – удельные теплоемкость газа при постоянном давлении и при постоянном объеме; d – диаметр частиц.

Поставленная задача решалась численно методом крупных частиц [6] по алгоритму [7]. Расчеты выполнялись для системы воздух–железо. Координаты границ выбирались, как и в [5] $x_0=0$, $x_1=0,45$ м, $x_2=1,95$ м. В результате численного исследования было получено, что модифицированная математическая модель «замороженной» газозвеси действительно описывает изэнтропическое течение газовой фазы за ударной волной в отличие от модели «замороженной» газозвеси работы [5].

Рассмотрим теперь модель газозвеси, представленную в работе [8], без учета массового взаимодействия фаз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n v_2}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1^2}{\partial x} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} &= -f, & \frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2^2}{\partial x} + \frac{3}{2} \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} &= f, \\ \frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2 v_2}{\partial x} &= q \\ \frac{\partial (\rho_1 E_1 + \rho_2 E_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\rho_1 v_1 E_1 + \rho_2 v_2 E_2 + (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) p] &= 0. \end{aligned}$$

Здесь индексы 1, 2 относятся соответственно к газу и частицам ρ_i , v_i , T_i , e_i , E_i – парциальная плотность, скорость, температура, внутренняя и полная энергия i -ой фазы; p – давление, n – число частиц в единице объема смеси.

При аналитическом исследовании этой системы на инвариантность к преобразованиям Галилея было получено, что в уравнении энергии появляется дополнительное слагаемое. Численное решение этой системы сравнивалось с решением системы из [5], которая инвариантна к преобразованиям Галилея.

Расчеты проводились для различных значений объемной доли и диаметра частиц. В результате было получено, что с уменьшением диаметра частиц при фиксированной объемной доле проявление неинвариантности системы из [8] увеличивается. Таким образом, границы применимости этой модели зависят от определяющего параметра – диаметра частиц.

Соавторы работы – Куропатенко В.Ф., д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник РФЯЦ – ВНИИТФ им. Е.И. Забабахина, и Якимова М.Н., младший научный сотрудник РФЯЦ – ВНИИТФ им. Е.И. Забабахина.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00072.

Литература

1. Куропатенко В.Ф. // Инженерно-физический журнал. 2011. Т. 84 (1). С. 74-92.
2. Рахматулин Х.А. // ПММ. 1956. Т. 20 (27). С. 184-195.
3. Ковалев Ю.М. // Вестник ЮУрГУ. Сер. Математика. Механика. Физика. 2012. Вып. 6 (11). С. 4-7.
4. Ковалев Ю.М. // Вестник ЮУрГУ. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2012. № 27. С. 69-73.
5. Кругликов Б.С., Кутушев А.Г. // ФГВ. 1988. № 1. С. 115-117.
6. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982.
7. Ивандаев А.И., Кутушев А.Г. // Численные методы в механике сплошных сред. 1983. Т. 14 (6). С. 47 -60.
8. Вайнштейн П.Б., Нигматулин Р.И. и др. // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1981. № 1. С. 22-27.

О ФОКУСИРОВКЕ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ГАЗЕ

Е.С. Шестаковская

*Южно-Уральский государственный (национальный исследовательский) университет,
г. Челябинск*

leshest@list.ru

Аннотация. Граница сферической ёмкости с холодным идеальным газом в начальный момент времени начинает двигаться с отрицательной конечной скоростью. В результате распада произвольного разрыва в газ станет распространяться ударная волна. Заданная траектория ударной волны определяет структуру течения газа между её фронтом и границей. В рассмотренной постановке существенную роль играет граница газа, которая не рассматривалась в ранее известных решениях задачи о схождении ударной волны к центру симметрии и её отражении от центра.

В отличие от решений задачи о сходящейся ударной волне [1–5], в которых отсутствует граница газовой сферы, рассмотрим схождение ударной волны в газовом шаре конечного размера. В момент t_0 в сферической области радиуса r_0 находится холодный идеальный газ с параметрами $\rho_0 = \text{const}$, $P_0 = 0$, $u_0 = 0$ (ρ – плотность, P – давление, u – скорость). В точке $t = t_0$, $r = r_0$ задана скорость границы $u_{10} < 0$. При $t > t_0$ из этой точки в газ со скоростью $D_1 < 0$ станет распространяться ударная волна (УВ), на фронте которой

$$\rho_1 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_0, \quad u_1 = \frac{2}{\gamma+1}D_1, \quad P_1 = \frac{2}{\gamma+1}\rho_0 D_1^2. \quad (1)$$

Течение газа между УВ и границей шара (ГШ) определяется уравнениями

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\rho u}{r} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial r} = 0. \quad (2)$$

Уравнение состояния идеального газа возьмём в виде

$$P = f(s)\rho^\gamma. \quad (3)$$

Уравнения (2), (3) описывают одномерные адиабатические течения идеального газа со сферической симметрией. Из них следует уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial r} + \gamma P \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} \right) = 0. \quad (4)$$

Перейдём к новым переменным t и $\xi(r, t)$ и согласно [6] будем искать решение системы уравнений (2), (4) в виде

$$P = \alpha_P(t)\Pi(\xi), \quad \rho = \alpha_\rho(t)\delta(\xi), \quad u = \alpha_u(t)M(\xi). \quad (5)$$

Производные по t обозначим точкой сверху величины, производные по ξ – штрихом. После перехода к новым переменным уравнения (2), (4) принимают вид

$$\varphi_1 \delta + \omega \xi \delta' + M \delta' + \delta M' + \frac{2M\delta}{\xi} = 0, \quad \varphi_2 \delta M + \omega \delta \xi M' + \delta M M' + \Pi' = 0, \quad (6)$$

$$\varphi_3 \Pi + \omega \xi \Pi' + M \Pi' + \gamma \Pi M' + \frac{2\gamma M \Pi}{\xi} = 0, \quad (7)$$

где

$$\varphi_1 = \frac{\dot{\alpha}_\rho}{\alpha_\rho \beta}, \quad \varphi_2 = \frac{\dot{\alpha}_u}{\alpha_u \beta}, \quad \varphi_3 = \frac{\dot{\alpha}_P}{\alpha_P \beta}, \quad \omega = \frac{\partial \xi}{\partial t} / \xi \beta, \quad \beta = \alpha_u \frac{\partial \xi}{\partial r}. \quad (8)$$

Разделим уравнения (6), (7) на две системы уравнений, одна из которых содержит величины, зависящие от t , а вторая – от ξ . Для этого нужно, чтобы было

$$\phi_1(t) = \text{const}, \quad \phi_2(t) = \text{const}, \quad \phi_3(t) = \text{const}, \quad \omega(t) = \text{const}. \quad (9)$$

Условия (9) выполняются, если функция $\xi(t, r)$ линейно зависит от r

$$\xi = rf(t). \quad (10)$$

Если задать траекторию УВ $r_1 = r_0 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^n$, где t_f – момент фокусировки УВ, и положить на УВ $\xi_1 = 1$, то

из (10) получим выражения для $f(t)$ и $\xi(r, t)$:

$$f(t) = \frac{1}{r_0} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n, \quad \xi = \frac{r}{r_0} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n. \quad (11)$$

Продифференцировав $r_1(t)$ по t , получим скорость УВ

$$D_1 = -\frac{r_0 n}{t_f - t_0} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1}. \quad (12)$$

Из (1), (5) и (12) следуют два уравнения на фронте УВ

$$u_1 = -\frac{2}{\gamma + 1} \frac{r_0 n}{t_f - t_0} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1}, \quad \alpha_u(t) M_1 = -\frac{2}{\gamma + 1} \frac{r_0 n}{t_f - t_0} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1}. \quad (13)$$

Потребовав, чтобы $M_1 = \text{const}$ не зависело от r_0, t_0, t_f и n , получим

$$M_1 = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad \alpha_u(t) = -\frac{r_0 n}{t_f - t_0} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1}. \quad (14)$$

При $t = t_0$ из (13) определяется зависимость t_f от n $t_f = t_0 - \frac{2r_0 n}{(\gamma + 1)t_{10}}$. Значения δ_1, Π_1 и зависимости

$\alpha_\rho(t), \alpha_p(t)$ получаются по аналогии с M_1 и $\alpha_u(t)$

$$\delta_1 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad \alpha_\rho = \rho_0, \quad \Pi_1 = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad \alpha_p = \rho_0 D_{10}^2 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{2(n-1)}. \quad (15)$$

Из (8), (14) и (15) определяются $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{n-1}{n}, \varphi_3 = \frac{2(n-1)}{n}, \omega = -1$.

Подставим $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \omega$ в уравнения (6), (7) и преобразуем их к виду

$$M' = (R_1 - 2\gamma M \Pi) / R_2, \quad \delta' = \delta (2M \delta n (M - \xi)^2 - R_1) / R_2 (M - \xi), \quad (16)$$

$$\Pi' = \delta \Pi (2(n\gamma M + \xi(n-1))(M - \xi) - (n-1)\gamma \xi M) / R_2, \quad (17)$$

где $R_1 = (n-1)\xi((M - \xi)\delta M - 2\Pi)$, $R_2 = n\xi(\gamma\Pi - (M - \xi)^2 \delta)$.

Функции $\delta(\xi), \Pi(\xi), M(\xi)$ находятся путём интегрирования уравнений (16), (17) в области $1 \leq \xi < \infty$. Величина n находится методом проб в процессе интегрирования уравнений (16), (17) из условия, что в момент фокусировки сжатие газа и работа, совершенная над газом на его границе, являются конечными. Полученные таким методом значения $n(\gamma)$ и плотности в момент фокусировки приведены в таблице 1.

Таблица 1. Значения n и плотности для различных показателей адиабаты γ

γ	1.1	1.2	4/3	1.4	5/3
n	0.795973	0.757142	0.727686	0.717175	0.688377
δ_{∞}	184.465	59.5525	26.5447	20.0714	9.549680

Соавторы работы: Куропатенко В.Ф., д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник РФЯЦ – ВНИИТФ им. Е.И. Забабахина, и Якимова М.Н., младший научный сотрудник РФЯЦ – ВНИИТФ им. Е.И. Забабахина.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 13-01-00072.

Литература

1. Крайко А.Н. // Доклад на VII Забабахинских научных чтениях, Снежинск, 2003. www.vniitf.ru/rig/konfex/7zst/reports/6-1.pdf. 13 p.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. М.: Изд-во Наука, 1986. 736 с.
3. Станюкович К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 854 с.
4. Брушлинский К.В., Каждан Я.М. // Успехи математических наук. 1963. Т. 18 (2). С. 3-23.
5. Guderley G. // Luftfahrtforschung. 1942. Bd. 19 (9). S. 302-312.
6. Куропатенко В.Ф. Модели механики сплошных сред. Челябинск, ЧелГУ, 2007. 302 с.

МЕТОД РАСЧЕТА УДАРНЫХ ВОЛН

М.Н. Якимова

Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский НИИ технической физики
им. Е.И. Забабахина, г. Снежинск

yakimovamn@yandex.ru

Аннотация. При использовании однородных разностных методов для решения задач газовой динамики поверхность сильного разрыва заменяется слоем конечной ширины. В этом слое величины непрерывным образом меняются от состояния перед фронтом до состояния за фронтом. Так как на ударной волне энтропия терпит разрыв, то встает вопрос о способе диссипации энергии в ударном слое. Одним из таких способов является метод Куропатенко, который основан на использовании в разностной схеме уравнений, справедливых на сильных разрывах. Метод реализован в различных разностных схемах. В работе приведена одна из разностных схем и указаны ее основные свойства. Работа выполнена под руководством В.Ф. Куропатенко.

ВВЕДЕНИЕ

Законы сохранения массы, импульса и энергии в силу нелинейности допускают возможность ударных волн и волн разрежения при решении задач механики сплошной среды. На ударных волнах состояние вещества перед фронтом связано с состоянием за фронтом законами сохранения в виде системы нелинейных алгебраических уравнений, которая замыкается уравнением состояния рассматриваемого вещества:

$$P_1 - P_0 - W(U_1 - U_0) = 0, \quad (1)$$

$$U_1 - U_0 + W(V_1 - V_0) = 0, \quad (2)$$

$$\left(E_1 + \frac{1}{2}U_1^2 - E_0 - \frac{1}{2}U_0^2 \right) W - (P_1U_1 - P_0U_0) = 0, \quad (3)$$

$$P_1 = P(V_1, E_1), \quad (4)$$

где U – скорость, P – давление, V – удельный объем, E – удельная внутренняя энергия, W – скорость сильного разрыва. Индекс «0» соответствует состоянию перед фронтом, индекс «1» – состоянию за фронтом ударной волны. На поверхности сильного разрыва энтропия терпит скачок. В этом заключается принципиальное отличие между ударными волнами и волнами с непрерывным изменением величин.

В однородных разностных методах поверхность сильного разрыва заменяется ударным слоем конечной ширины [1, 2]. Происходит дистракция сильного разрыва [3]. Уравнения (1)–(3) связывают состояния вещества на границах этого слоя. Внутри же слоя действуют различные механизмы диссипации энергии [4–7]. Эти механизмы принципиально отличаются друг от друга.

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Рассмотрим разностную схему, реализующую метод Куропатенко. Разностные уравнения записываются на разнесенном сеточном шаблоне (рис. 1). Скорости и координаты отнесены к границам интервалов, термодинамические величины определены в серединах интервалов.

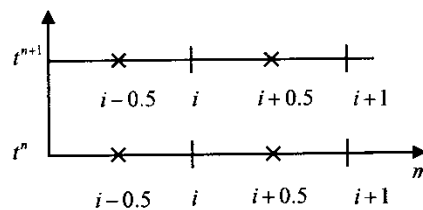


Рис. 1. Сеточный шаблон

Все интервалы разделяются на два типа: к первому типу относятся интервалы, в которых происходит разрежение вещества ($U_i^n - U_{i-1}^n \geq 0$), ко второму типу – интервалы, где происходит сжатие ($U_i^n - U_{i-1}^n < 0$). Для интервалов первого типа разностные уравнения записываются в виде

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \tau U_i^n; V_{i-0.5}^{n+1} = \frac{x_i^{n+1} - x_{i-1}^{n+1}}{\Delta m_{i-0.5}^n}, \quad (5)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{2\tau}{\Delta m_{i+0.5}^n + \Delta m_{i-0.5}^n} (\bar{P}_{i+0.5}^n - \bar{P}_{i-0.5}^n), \quad (6)$$

$$E_{i-0.5}^{n+1} = E_{i-0.5}^n - \int_{V^n}^{V^{n+1}} P_{i-0.5}(V_{i-0.5}, E_{i-0.5}) dV, \quad (7)$$

$$P_{i-0.5}^{n+1} = P(V_{i-0.5}^{n+1}, E_{i-0.5}^{n+1}), \quad (8)$$

где $\bar{P}_{i-0.5}^n = P_{i-0.5}^n - a_{i-0.5}^n \kappa (U_i^n - U_{i-1}^n)$, $a_{i-0.5}^n = \rho_{i-0.5}^n \cdot c_{i-0.5}^n$, c – адиабатическая скорость звука, $\kappa = \frac{\alpha_{i-0.5}^n}{\Delta m_{i-0.5}^n}$.

Значение внутренней энергии на $n+1$ -шаге вычисляется интегрированием вдоль изэнтропы, что обеспечивает любую наперед заданную точность определения энтропии.

Для второго типа интервалов разностные уравнения имеют вид

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \tau U_i^n; V_{i-0.5}^{n+1} = \frac{x_i^{n+1} - x_{i-1}^{n+1}}{\Delta m_{i-0.5}^n}, \quad (9)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{2\tau}{\Delta m_{i+0.5}^n + \Delta m_{i-0.5}^n} (\bar{P}_{i+0.5}^n - \bar{P}_{i-0.5}^n), \quad (10)$$

$$E_{i-0.5}^{n+1} = E_{i-0.5}^n + \frac{1}{2} (U_*^n)^2 - \frac{\tau}{\Delta m_{i-0.5}^n} (P_i^* U_i^n - P_{i-1}^* U_{i-1}^n), \quad (11)$$

$$P_{i-0.5}^{n+1} = P(V_{i-0.5}^{n+1}, E_{i-0.5}^{n+1}), \quad (12)$$

где вспомогательная величина \bar{P}^n определяется из условий Гюгонио (1)–(3) по известной величине $\Delta U^n = U_i^n - U_{i-1}^n$. Вспомогательные величины P^* и U_* определены на следующем шаблоне (рис. 2):

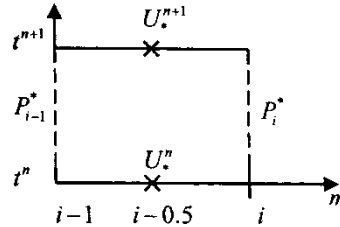


Рис. 2. Шаблон для вспомогательных величин

Величина P^* определяется по таблице 1.

Таблица 1.

№	Интервал $i-0.5$ $\omega_{\mathcal{L}} = W_{i-0.5}^n (U_i^n - U_{i-1}^n)$	Интервал $i+0.5$ $\omega_{\mathcal{H}} = W_{i+0.5}^n (U_{i+1}^n - U_i^n)$	P_i^*
1	$\omega_{\mathcal{L}} = 0$	$\omega_{\mathcal{H}} = 0$	$P_i^* = 0.5(\bar{P}_{i-0.5}^n + \bar{P}_{i+0.5}^n)$
2	$\omega_{\mathcal{L}} = 0$	$\omega_{\mathcal{H}} < 0$	$P_i^* = 0.5(\bar{P}_{i-0.5}^n + P_{i+0.5}^n)$
3	$\omega_{\mathcal{L}} = 0$	$\omega_{\mathcal{H}} > 0$	$P_i^* = \bar{P}_{i+0.5}^n$
4	$\omega_{\mathcal{L}} > 0$	$\omega_{\mathcal{H}} = 0$	$P_i^* = 0.5(P_{i-0.5}^n + \bar{P}_{i+0.5}^n)$
5	$\omega_{\mathcal{L}} > 0$	$\omega_{\mathcal{H}} < 0$	$P_i^* = 0.5(P_{i-0.5}^n + P_{i+0.5}^n)$
6	$\omega_{\mathcal{L}} > 0$	$\omega_{\mathcal{H}} > 0$	$P_i^* = \bar{P}_{i+0.5}^n$
7	$\omega_{\mathcal{L}} < 0$	$\omega_{\mathcal{H}} = 0$	$P_i^* = \bar{P}_{i-0.5}^n$
8	$\omega_{\mathcal{L}} < 0$	$\omega_{\mathcal{H}} < 0$	$P_i^* = \bar{P}_{i-0.5}^n$
9	$\omega_{\mathcal{L}} < 0$	$\omega_{\mathcal{H}} > 0$	$P_i^* = 0.5(\bar{P}_{i-0.5}^n + \bar{P}_{i+0.5}^n)$

Для вычисления U_* необходимо определить, в какую сторону по веществу движется ударная волна:

- если $P_{i+0.5}^n < P_{i-1.5}^n$, то волна движется вправо: $W_{i-0.5}^n > 0$ и $U_*^n = U_i^n$;
- если $P_{i+0.5}^n > P_{i-1.5}^n$, то волна движется влево: $W_{i-0.5}^n < 0$ и $U_*^n = U_{i-1}^n$.

После этого величина U_*^{n+1} вычисляется из уравнения: $U_*^{n+1} = U_*^n - \frac{\tau}{\Delta m_{i-0.5}^n} (P_i^* - P_{i-1}^*)$.

Для исследования диссипации энергии в соответствии с [8] разностные законы сохранения записываются в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial x}{\partial t} - U = \omega_4, \quad \frac{\partial x}{\partial m} - V = \omega_5, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial m} = \omega_2, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial (PU)}{\partial m} = \omega_3.$$

Погрешности аппроксимации ω_4 , ω_5 , ω_2 и ω_3 для ударной волны имеют вид:

$$\omega_4 = -\frac{\tau}{2}\dot{U} + \frac{\tau^2}{12}\ddot{U} + o(\tau^3), \quad \omega_5 = -V''\frac{h^2}{24} + o(h^3), \quad \omega_2 = -\frac{\tau}{2}\ddot{U} - \frac{\tau^2}{6}\ddot{U} + ahU'' - \frac{h^2}{24}P''' + o(\tau^3, h^3),$$

$$\omega_3 = -\frac{\tau}{2}\ddot{\varepsilon} - \frac{\tau^2}{6}\ddot{\varepsilon} - h\left(\frac{1}{2}P'U' + \frac{1}{2}P''U - a(U')^2 - aUU''\right) + o(\tau^3, h^2).$$

Здесь дифференцирование по времени обозначено точкой над величиной, дифференцирование по массе – штрихом. Для волны разрежения уравнение производства энтропии $T\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_m = 0$, погрешности аппроксимации:

$$\omega_4 = -\frac{\tau}{2}\dot{U} + \frac{\tau^2}{12}\ddot{U} + o(\tau^3), \quad \omega_5 = -V''\frac{h^2}{24} + o(h^3), \quad \omega_2 = -\tau\left(\frac{1}{2}\ddot{U} - a^2U''\right) - \frac{\tau^2}{6}\ddot{U} - \frac{h^2}{24}P''' + o(\tau^3, h^3).$$

Схема устойчива при выполнении условия $\tau a/h \leq 1$.

Ниже на рисунках представлено несколько расчетов по рассматриваемой разностной схеме в сравнении с аналитическими решениями. На рис. 3 и 4 приведены профили $P(r)$ и $U(r)$ за сферической сходящейся ударной волной из [9] на момент времени $t = 0.45$. На рис. 5 и 6 профили $P(x)$ и $U(x)$ в волне разрежения из [9] на момент времени $t = 0.4$.

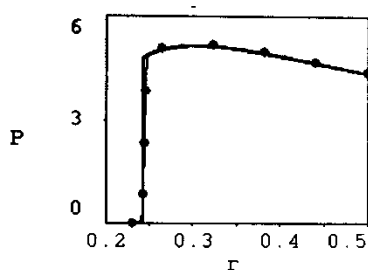


Рис. 3

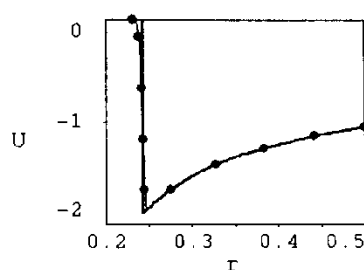


Рис. 4

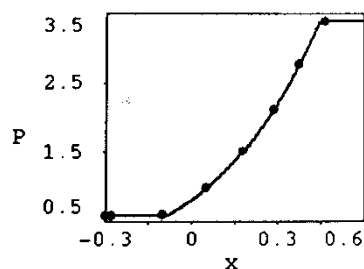


Рис. 5

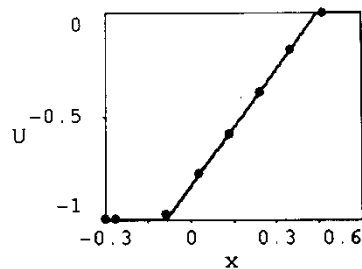


Рис. 6

Сплошными линиями представлено аналитическое решение, маркерами – численный расчет.

Работа выполнена под руководством В.Ф. Куропатенко.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 13-01-00072.

Литература

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. // М.: Наука, 1968.
2. Куропатенко В.Ф. // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 1966. Т. 74 (1). С. 107-137.
3. Куропатенко В.Ф., Макеева И.Р. // Математическое моделирование. 2006. Т. 18 (3). С. 120-128.
4. Neumann J., Richtmyer R. // J. Appl. Phys. 1950. V. 21 (3). P. 232-237.
5. Lax P. // Comm. Pure and Appl. Math. 1954. V. 7. P. 159-193.
6. Годунов С.К. // Успехи математических наук. 1957. № 12 (1). С. 176-177.
7. Куропатенко В.Ф. // ДАН СССР. 1960. Т. 3 (4). С. 771-772.
8. Куропатенко В.Ф. // Журнал выч. матем. и матем. физики. 1985. Т. 25 (8). С. 1176-1188.
9. Куропатенко В.Ф., Доровских И.А., Макеева И.Р. // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11 (2).