В.Ф.КУРОПАТЕНКО

О ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭНТРОПИИ В РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Рассмотрим уравнения газовой динамики в адиабатическом приближении, т.е. при отсутствии вязкости, тепловых потоков и источников энергии.

$$\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial U}{\partial m}=0, \tag{I}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial m}=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial (PU)}{\partial m}=0. \tag{3}$$

Умножим (I) на P, сложим с (3) и из полученного уравнения вычтем (2), умноженное на U. В результате получим уравнение

$$\frac{\partial E}{\partial t}+P\frac{\partial V}{\partial t}=0, \tag{4}$$

которое часто называют уравнением энергии в недивергентной форме, забывая, что оно является следствием всех трех законов сохранения. Система (I)-(4) замыкается уравнениями

$$dx=Vdm+Udt, \qquad \varepsilon=E+0.5U^2 \tag{5}$$

и уравнением состояния

$$P=P(V,E),$$

где U - скорость, V - удельный объем, P - давление, E - удельная внутренняя энергия, ε - удельная полная энергия, t - время, x - пространственная и m -массовая координаты.

Для численного решения задач газовой динамики уравнения (I)-(4) аппроксимируются разностными уравнениями. Ниже мы будем рассматривать разностные уравнения в дифференциальной форме, которая получается следующим образом. Пусть исходное уравнение $\frac{df}{dx} + \varphi(x) = 0$ аппроксимировано разностным уравнением

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \varphi(x) = 0. \qquad (6)$$

Разложим $f(x+h)$ в ряд Тэйлора в точке x и запишем разностное уравнение в виде

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \varphi(x) = \frac{df}{dx} + \varphi(x) + \omega = 0,$$

где

$$\omega = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} h^2 + O(h^3).$$

Поскольку левая часть этого уравнения тождественно равна правой, то вместо (6) можно рассматривать дифференциальное уравнение

$$\frac{df}{dx} + \varphi(x) + \omega = 0,$$

которое и является дифференциальной формой разностного уравнения (6). Величина ω с обратным знаком есть погрешность аппроксимации исходного уравнения разностным. Вопросы исследования дифференциальных форм разностных уравнений газовой динамики подробно рассмотрены в [I]. Разностные уравнения, аппроксимирующие (I)-(4) будем исследовать в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial m} = \omega_1, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial m} = \omega_2, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial (PU)}{\partial m} = \omega_3, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P\frac{\partial V}{\partial t} = \omega_4. \qquad (10)$$

Уравнения (7)-(9) имеют дивергентную форму и разностные схемы, в которых используются эти уравнения, называются консервативными. Уравнение (I0) имеет недивергентную форму и разностные схемы, использующие (7),(8) и (I0), называются неконсервативными. Разностные схемы, в которых уравнение энергии путем тождественных алгебраических преобразований с помощью (7) и (8) преобразуется из формы (9) в форму (I0) и обратно, будем, следуя [2], называть полностью консервативными.

Необходимое и достаточное условие полной консервативности имеет вид

$$\omega_3 - \omega_4 - U\omega_2 + P\omega_1 = 0. \qquad \text{(II)}$$

Это условие получается, если из (9) вычесть (I0), из полученного уравнения вычесть (8), умноженное на U и сложить с (7), умноженным на P.

В большинстве работ по разностным методам газовой динамики свойства разностных схем исследуются в рамках трех законов сохранения (массы, количества движения, энергии) и оставляется без внимания четвертый закон - закон сохранения энтропии.

Уравнения (I)-(4) не содержат в явном виде энтропии S и температуры T, которые так же, как и P, могут быть выражены через V и E. Рассмотрим скорость изменения S вдоль линии тока

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V \frac{\partial E}{\partial t}. \qquad \text{(I2)}$$

Воспользуемся известными из термодинамики связями между частными производными

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V = 0, \quad \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V - 1 = 0$$

и определением P и T

$$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S, \quad T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V$$

и запишем (I2) в виде

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} + P\frac{\partial V}{\partial t}. \qquad \text{(I3)}$$

Из (4) и (I3) следует закон сохранения энтропии вдоль линий тока

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0. \qquad \text{(I4)}$$

Уравнение (I4) для энтропии принципиально отличается от (I)-(3), так как в нем отсутствуют производные по m. Более того, оно элементарно интегрируется вдоль линии тока. Поэтому в разностных схемах, не содержащих разностного уравнения сохранения энтропии

$$S_i^{n+1} - S_i^n = 0, \tag{I5}$$

это уравнение может использоваться в качестве эффективного средства локального контроля точности вычисления термодинамических величин.

Из теории ударных волн известно [3], что на слабых ударных волнах приращение энтропии ΔS пропорционально кубу приращения удельного объема

$$\Delta S \sim \Delta V^3. \tag{I6}$$

По нашему мнению, для расчета адиабатических течений могут применяться лишь такие разностные схемы, в которых изменение энтропии из-за погрешностей аппроксимации уравнений при малых ΔV хотя бы не превосходит физического изменения энтропии на слабых ударных волнах.

Изменение энтропии вдоль линии тока в неконсервативных разностных схемах определяется разностным уравнением, следующим из (I0) и (I3)

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\omega_4}{T}. \tag{I7}$$

Чтобы получить аналогичное уравнение для консервативных разностных схем, запишем следствие из (7), (8) и (9) в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P\frac{\partial V}{\partial t} = \omega_3 - U\omega_2 + P\omega_1. \tag{I8}$$

Из (I3) и (I8) следует разностное уравнение, определяющее изменение энтропии вдоль линии тока в консервативных схемах

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{T}\left(\omega_3 - U\omega_2 + P\omega_1\right). \tag{I9}$$

Используя уравнения (I7) и (I9), рассмотрим, с какой точностью выполняется закон сохранения энтропии в неконсервативных, консервативных и полностью консервативных разностных схемах. Подробный анализ характера изменения энтропии в некоторых разностных схемах дан в [4]. Здесь мы частично повторим этот анализ в иной форме и для более широкого класса уравнений.

Рассмотрим вначале неконсервативные разностные схемы. Следуя [4], запишем разностное уравнение энергии в общем виде

$$\frac{E^{n+1}-E^n}{\tau}+\left((1-\beta)P^{n+1}+\beta P^n\right)\frac{V^{n+1}-V^n}{\tau}=0. \tag{20}$$

Дифференциальная форма этого уравнения имеет вид (I0), где

$$\omega_4=\tau\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\left(\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S(\beta-0.5)+0.5\tau\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S\frac{\partial V}{\partial t}\left(2\beta^2-2\beta+\frac{1}{3}\right)\right)+O(\tau^3). \tag{21}$$

При β = I из (I7), (20), (2I) следует

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{\tau}{2T}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2+O(\tau^2), \tag{22}$$

$$\frac{E^{n+1}-E^n}{\tau}+P^n\frac{V^{n+1}-V^n}{\tau}=0. \tag{23}$$

Будем считать, что наши рассуждения верны лишь для уравнений состояния, удовлетворяющих условиям выпуклости

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S<0,\quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S>0. \tag{24}$$

Таким образом, главный член в (22) оказывается отрицательным. Это значит, что применение (23) для определения E^{n+1} приводит к ничем не компенсированному убыванию энтропии. Заменив (22) разностной формой, получим, что приращение энтропии на одном шаге по времени пропорционально квадрату приращения удельного объема

$$\Delta S=\frac{1}{2T}\Delta V^2\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S+O(\tau^3). \tag{25}$$

Следовательно, уменьшение энтропии из-за погрешностей на порядок превосходит возможное изменение энтропии на слабых ударных волнах. При β = 0 (20) и (I7) принимают вид

$$\frac{E^{n+1}-E^n}{\tau}+P^{n+1}\frac{V^{n+1}-V^n}{\tau}=0, \tag{26}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{\tau}{2T}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S+O(\tau^2). \tag{27}$$

Из (24) и (27) следует, что применение (26) для определения E^{n+1} приводит к такому увеличению энтропии $\left(\frac{\partial S}{\partial t}>0\right)$, что $\Delta S\sim\Delta V^2$.

И в первой, и во второй разностной схеме погрешность аппроксимации ω_4, и, следовательно, скорость изменения энтропии вдоль линии тока есть величины первого порядка относительно τ. К этому же классу схем относятся все неконсервативные схемы из [4] с уравнением (20) при $\beta\neq 0.5$, а также схема из [5], схемы II и III из [2].

При β =0.5 (20) и (I7) принимают вид

$$\frac{E^{n+1}-E^n}{\tau}+\frac{P^{n+1}+P^n}{2}\cdot\frac{V^{n+1}-V^n}{\tau}=0, \tag{28}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\tau^2}{12T}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^3\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S + O(\tau^3), \qquad (29)$$

что эквивалентно разностной форме

$$\Delta S = -\frac{1}{12T}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S \Delta V^3 + O(\tau^4).$$

Иными словами, в этой схеме скорость изменения энтропии из-за погрешности аппроксимации есть величина второго порядка малости относительно шага τ , а приращение энтропии на шаге пропорционально кубу приращения удельного объема и по порядку является такой же величиной, что и приращение энтропии на слабых ударных волнах. Погрешности аппроксимации ω_1 и ω_2 могут быть величинами первого порядка малости относительно τ , так как в рассматриваемой схеме ω_1 , ω_2 и ω_4 независимы.

Разностное уравнение энергии (28) впервые использовалось Нейманом и Рихтмайером в [6]. К этому классу относятся разностные схемы из [7], [8].

Рассмотрим теперь консервативные разностные схемы. Пусть все основные величины P , V , E , U , ε , S , T определены в точках с полуцелыми индексами. Запишем, следуя [4], разностные уравнения в общем виде

$$\frac{V^{n+1}_{i+0.5} - V^{n}_{i+0.5}}{\tau} - \frac{U^*_{i+1} - U^*_i}{h} = 0,$$

$$\frac{U^{n+1}_{i+0.5} - U^{n}_{i+0.5}}{\tau} + \frac{P^*_{i+1} - P^*_i}{h} = 0, \qquad (30)$$

$$\frac{E^{n+1}_{i+0.5} - E^{n}_{i+0.5}}{\tau} + \frac{(U^{n+1}_{i+0.5})^2 - (U^{n}_{i+0.5})^2}{2\tau} + \frac{P^*_{i+1}U^*_{i+1} - P^*_i U^*_i}{h} = 0$$

Величины со звездочкой являются вспомогательными величинами.

Исследуем характер изменения энтропии на шаге в одной из явных схем типа Ш А из [4], в которой вспомогательные величины определяются по формулам

$$U^*_i = 0.5\left(U^n_{i+0.5} + U^n_{i-0.5}\right), \quad P^*_i = 0.5\left(P^{n+1}_{i+0.5} + P^{n+1}_{i-0.5}\right). \qquad (31)$$

Подставим (31) в (30) и запишем полученные уравнения в дифференциальной форме (7)-(9) с погрешностями аппроксимации в виде

$$\omega_1 = -0.5\tau \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + O(\tau^2, h^2),$$

$$\omega_2 = 0.5\tau \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + O(\tau^2, h^2), \qquad (32)$$

$$\omega_3 = -0.5\tau\left(\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) - P\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - U\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) + O(\tau^2, h^2).$$

Все три погрешности аппроксимации есть величины первого порядка малости относительно шага по времени τ. К консервативным разностным схемам, в которых $\omega = O(\tau)$, относятся схемы типа Ш А из [4] с $l_1 \neq 0.5$, $l_2 \neq 0.5$ и типа Ш Б с $l_3 \neq 0.5$ и $l_4 \neq 0.5$ в том числе схемы из [9] и [10]. Подставив (31) в (19), получим

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\tau}{2T}\left(\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right) + O(\tau^2, h^2). \qquad (33)$$

Правая часть в (33) зависит не только от изменений удельного объема, но и от изменения скорости со временем. На решениях, удовлетворяющих условию $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, главные члены в (33) и (27) совпадают. Однако, при равномерно ускоренном движении вещества без деформаций, когда $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, из (33) следует

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\tau}{2T}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + O(\tau^2, h^2).$$

Иными словами, механические ускорения вещества без деформаций являются источниками производства энтропии, что противоречит физическому смыслу. Таким образом, хотя рассматриваемая схема и является консервативной, тем не менее по критерию сохранения энтропии она уступает любой из неконсервативных схем, в которых энтропия остается постоянной при отсутствии деформаций независимо от величины $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)$.

Рассмотрим теперь консервативные схемы, в которых погрешности аппроксимации в (7)-(9) есть величины второго порядка относительно τ. Примером такой схемы является схема типа Ш А из [4] с $l_1 = l_2 = 0.5$, в которой вспомогательные величины определяются по формулам

$$U_i^* = 0.25\left(U_{i+0.5}^n + U_{i-0.5}^n + U_{i+0.5}^{n+1} + U_{i-0.5}^{n+1}\right),$$
$$P_i^* = 0.25\left(P_{i+0.5}^n + P_{i-0.5}^n + P_{i+0.5}^{n+1} + P_{i-0.5}^{n+1}\right). \qquad (34)$$

Подставим (34) в (30) и с помощью разложения функций в ряды Тэйлора представим полученные уравнения в виде (7)-(9) с погрешностями аппроксимации

$$\omega_1=\frac{\tau^2}{12}\frac{\partial^3 V}{\partial t^3}+O(\tau^3,h^2),$$

$$\omega_2=\frac{\tau^2}{12}\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}+O(\tau^3,h^2), \qquad (35)$$

$$\omega_3=-\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+P\frac{\partial^3 V}{\partial t^3}-U\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}\right)+O(\tau^3,h^2).$$

Подставив ω_1, ω_2, ω_3 в (I9), получим уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{\tau^2}{12T}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right)+O(\tau^3,h^2). \qquad (36)$$

Воспользовавшись соотношениями

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S\frac{\partial V}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

запишем (36) в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{\tau^2}{12T}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^3+O(\tau^3,h^2). \qquad (37)$$

Таким образом, главный член в (37), определяющий скорость изменения энтропии вдоль линии тока, полностью совпадает с главным членом в уравнении (29), полученном для неконсервативного уравнения энергии (28). Это дает основание назвать рассматриваемую разностную схему полностью консервативной в смысле первого дифференциального приближения. В обеих разностных схемах изменение энтропии не зависит от изменений скорости.

К этому же классу схем относятся схемы из [II], [I2] (стр.426) схема Ш Б из [4] с $l_3=l_4=0.5$ и схема из [I3].

Рассмотрим теперь полностью консервативные схемы. Остановимся вначале на схеме из [2] с $\sigma_1=1$, $\sigma_2=0$, $\sigma_4=0.5$, в которой разностные уравнения имеют вид

$$\frac{V_{i+0.5}^{n+1}-V_{i+0.5}^{n}}{\tau}-\frac{U_{i+1}^{n}-U_i^{n}}{h}=0,$$

$$\frac{U_i^{n+1}-U_i^{n}}{\tau}+\frac{P_{i+0.5}^{n+1}-P_{i-0.5}^{n+1}}{h}=0, \qquad (38)$$

$$\frac{E_{i+0.5}^{n+1}-E_{i+0.5}^{n}}{\tau}+P_{i+0.5}^{n+1}\frac{U_{i+1}^{n}+U_{i+1}^{n+1}-U_i^{n}-U_i^{n+1}}{h}=0.$$

Запишем первых два уравнения в дифференциальной форме (7), (8) с погрешностями аппроксимации

$$\omega_1 = \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + O(\tau^2, h^2),$$
$$\omega_2 = \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + O(\tau^2, h^2). \qquad (39)$$

Третье уравнение (38) запишем в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P\frac{\partial U}{\partial m} = \omega_5, \qquad (40)$$

где

$$\omega_5 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial t} + O(\tau^2, h^2). \qquad (41)$$

Умножив (7) на P, сложив с (40) и подставив в (13), получим

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\tau}{2T}\left(P\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right) + O(\tau^2, h^2). \qquad (42)$$

Это уравнение означает, что погрешности аппроксимации в рассмотренной полностью консервативной схеме являются источниками производства энтропии более мощными, чем физические источники (слабые ударные волны). Полная консервативность не устраняет этих источников.

В классе полностью консервативных схем есть разностные схемы, в которых вычислительные источники производства энтропии по порядку величины не превосходят физических. Примером является рассмотренная выше схема из [4] с уравнениями (34), (35),(37), схема из [2] с $\sigma_1 = 0.5$, $\sigma_2 = 0.5$, $\sigma_4 = 0.5$, совпадающая со схемой из [14]. Во всех этих схемах погрешности аппроксимации есть величины порядка τ^2.

Проведенное рассмотрение разностных схем позволяет утверждать, что среди неконсервативных, консервативных и полностью консервативных схем только разностные схемы, в которых уравнение производства энтропии имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} = O(\tau^2, h^2),$$

обеспечивает выполнение закона сохранения энтропии с погрешностью, не превосходящей по порядку величины изменения энтропии, определяемое действием физических диссипативных процессов.

Разностные схемы, в которых уравнение производства энтропии имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} = O(\tau, h^2)$$

создают вычислительный"шум", из-за которого становится неразличим целый класс физических диссипативных процессов (например, слабые ударные волны). Такие схемы есть среди неконсервативных, консервативных и полностью консервативных разностных схем.

Возникает вопрос, в чем же тогда состоят преимущества полностью консервативных схем перед консервативными. Ответ на этот вопрос следует из сравнения (33) и (42). В полностью консервативных схемах отсутствуют источники производства энтропии, связанные с перемещением вещества без его деформации (члены, содержащие $\frac{\partial U}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ и так далее). Других преимуществ полностью консервативные схемы по сравнению с консервативными, повидимому, не имеют.

Литература

1. Н.Н.Яненко, Ю.И.Шокин. О первом дифференциальном приближении разностных схем для гиперболических систем уравнений.- Сиб.матем.журнал, 1969, 10, 5, 1173.
2. Ю.П.Попов, А.А.Самарский. Полностью консервативные разностные схемы Ж.вычисл.матем. и матем.физ.,1969, т.9, 4, 953.
3. Я.Б.Зельдович, Ю.П.Райзер. Физика ударных волн. М., Физматгиз, 1963.
4. В.Ф.Куропатенко. О разностных методах для уравнений гидродинамики. Труды математич.ин-та им.В.А.Стеклова, 1966, т.74, 107.
5. В.Е.Неуважаев, Н.Н.Яненко. Один метод расчета газодинамических движений с нелинейной теплопроводностью. Труды математич.ин-та им.В.А.Стеклова, 1966, т.74, 138.
6. J. Neumann, R. Richtmyer. A method for the numerical calculation of hydrodynamical shoos. J. Appl.Phys., 1950, 21, 3, 232.
7. А.А.Самарский, В.Я.Арсенин. О численном решении уравнений газодинамики с различными типами вязкости. -Ж.Вычисл.матем. и матем.физ., 1961, т.1, 2, 357.
8. В.Ф.Куропатенко. Метод расчета ударных волн. Докл. АН СССР, 1960, 133, 4, 771.

9. P.Lax. Weak solution of nonlinear hyperbolic eguations and numerical computations. Comm. Pure and Appl. Math., 1954, 159.
10. С.К. Годунов. Разностный метод счета разрывных решений уравнений газодинамики. - Математич.сб., 1959, 47(89), вып.3, 271.
11. Г.Б. Алалыкин, С.К. Годунов, И.Л. Киреева, Л.А. Плинер. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. М., "Наука", 1970.
12. Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. Системы квазилинейных уравнений. М., "Наука", 1968.
13. P.Lax., B.Wendroff. Systems of conservation laws. Comm. Pure and Appl. Math., 1960, 13, 217.
14. В.Я. Гольдин, Н.И. Ионкин, Н.Н. Калиткин. Об энтропийной схеме расчета газодинамики. Ж.вычисл.матем. и матем.физ., 1969, т.9, 6,(41).

Поступила в редакцию 13.XI.1978.