УДК 532 + 517 + 518

ЯВНЫЙ БЕЗУСЛОВНО УСТОЙЧИВЫЙ РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ

В.Ф.Куропатенко

Рассматривается гибридный разностный метод, в котором для расчета течений жидкости и в области сжатия применяется явный разностный метод с условием устойчивости Куранта, а для расчета характеристик в области разрежения применяется явный безусловно устойчивый разностный метод, построенный на переменном шаблоне, зависящем от шага по времени. Дается новое определение явных и неявных разностных схем для системы законов сохранения. Обсуждаются два примера эффективности предложенной разностной схемы.

Математическое моделирование распространения волн сжатия или разрежения в нестационарном потоке жидкости с включениями тонких пленок из более тяжелой или более легкой жидкости требует преодоления трудностей, возникающих из-за разномасштабности процессов. Есть разные пути решения этой проблемы. Рассмотрим один из них.

Пусть движение жидкости описывается системой законов сохранения в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(E+\frac{1}{2}u^2\right)+\frac{\partial}{\partial m}(pu)=0, \tag{3}$$

где V - удельный объем, u - массовая скорость, p - давление, E - удельная внутренняя энергия, t - время, m - массовая лагранжева координата.

Дифференциальные уравнения (I)-(3) аппроксимируем разностными уравнениями. Вообще говоря, в литературе известно много разностных схем, применяемых для численного интегрирования системы (I)-(3) и обладающих различными достоинствами и недостатками. Ограничимся обсуждением только двуслойных разностных схем, связывающих решение в точках сетки для двух соседних моментов времени t^n и $t^{n+1}=t^n+\tau$. Все такие разностные схемы делятся на явные и неявные. Разностную схему

$$u^{n+1}=C_{n+1}u^n,$$

где оператор шага $C_{n+1}(\tau, h, T)=B_{\beta_1}T_1^{\beta_1}$, B_{β_1} - матрица в 4^х-мерном пространстве компонент вектор-функции

$$u(m,t)=\{V(m,t),\ u(m,t),\ p(m,t),\ E(m,t)\},$$

$$\beta_1=-q_1, -q_1+1, \ldots, q_2-1, q_2,$$

будем называть я в н о й, если для любого вперед заданного Q найдется такое τ, что $q(\tau)=q_1+q_2<Q$. В противном случае разностную схему будем называть н е я в н о й.

Как правило, явные разностные схемы условно устойчивы /I-3/. Условие устойчивости формулируется в виде ограничений на соотношение шагов сетки по времени и по лагранжевой координате. В случае, когда различные фрагменты рассчитываемой системы имеют разные размеры, шаг по времени выбирается по малому элементу системы и оказывается неоправданно малым для больших элементов той же системы. Таким образом, применение явных разностных схем для расчета течений с разномасштабными элементами оказывается экономически невыгодным. Так, например, для расчета пятикратного прохождения ударной волны по системе размером 100 см потребуется проделать на ЭВМ примерно 10^9 операций. Если же система усложняется путем включения в нее прослойки толщиной 0.I см, то время счета на ЭВМ возрастает в 25-30 раз. Для решения таких задач часто применяются безусловно устойчивые разностные схемы, как правило, неявные. Применение неявных разностных схем требует на каждом шаге по t решения системы сеточных уравнений, число которых равно числу точек сетки по m. В случае нелинейных уравнений возникает необходимость проведения итераций, что приводит к росту затрат времени ЭВМ. Эти затраты особенно возрастают при использовании сложных уравнений состояния.

Кроме условия устойчивости, ограничивающего шаги по t и m, во всех разностных схемах, явных и неявных, условно и безусловно устойчивых, существует условие точности. Это условие формулируется также в виде ограничения на соотношение шагов сетки по времени и по лагранжевой координате и зависит от решения.

В данной работе построена такая явная разностная схема для системы законов сохранения (I)-(3), в которой условие устойчивости трансформируется в условие для выбора числа точек в момент t^n, по которым находится решение в заданной точке в момент t^{n+1}. Иными словами, сеточный шаблон, на котором определяются разностные уравнения, зависит от шага τ. В целом разностная схема с переменным шаблоном оказывается безусловно устойчивой. Идея построения такой разностной схемы впервые изложена в /4/, где построена явная разностная схема, в которой ограничение на соотношение шагов τ и h заменяется условием для определения в момент t^n основания характеристического треугольника, по которому проводится суммирование значений давлений и скоростей для определения вспомогательных значений этих величин. Область применимости разностной схемы из /4/ ограничена только гладкими течениями без ударных волн.

Рассмотрим гибридную разностную схему, в которой для расчета ударных волн используется метод из /3/, а адиабатические гидродинамические течения рассчитываются с помощью явной безусловно устойчивой разностной схемы, идейно близкой к разностной схеме из /4/.

Аппроксимируем уравнения (I), (2) разностными уравнениями

$$\frac{V_{i+0.5}^{n+1}-V_{i+0.5}^{n}}{\tau}-\frac{u_{i+1}^{*}-u_{i}^{*}}{h}=0, \tag{4}$$

$$\frac{u_{i}^{n+1}-u_{i}^{n}}{\tau}+\frac{P_{i+0.5}^{*}-P_{i-0.5}^{*}}{h}=0. \tag{5}$$

Рассмотрим оба типа решений - адиабатические волны разрежения (R- волна) и неадиабатические волны сжатия (S - волна).

В случае S - волны ($\partial u/\partial x<0$) вспомогательные значения ρ и u определим так:

$$u_i^* = u_i^{n+1}; \quad \rho_{i+0.5}^* = \bar{\rho}_{i+0.5}^n . \tag{6}$$

Вспомогательное значение $\bar{\rho}_{i+0.5}^n$ найдем так. Предположим, что в сеточном интервале $x_i \le x \le x_{i+1}$ распространяется ударная волна, на фронте которой справедливы уравнения

$$(V_+ - V_-) W + (u_+ - u_-) = 0, \tag{7}$$

$$(u_+ - u_-) W - (P_+ - P_-) = 0, \tag{8}$$

$$E_+ - E_- + 0.5(P_+ + P_-)(V_+ - V_-) = 0, \tag{9}$$

где величины с индексом "-" характеризуют состояние перед фронтом разрыва, а с индексом "+" - за фронтом. Будем считать, что

$$P_- = P_{i+0.5}^n; \quad \rho_- = \rho_{i+0.5}^n; \quad E_- = E_{i+0.5}^n, \quad а$$

$$\Delta u = u_+ - u_- = u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}.$$

Поскольку $P_{i+0.5}^n$, $\rho_{i+0.5}^n$, $E_{i+0.5}^n$, u_{i+1}^{n+1} , u_i^{n+1} известны, то уравнения (7)-(9) вместе с уравнением состояния

$$P = P(\rho, E) \tag{10}$$

образуют систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными P_+, ρ_+, E_+ , W . Решив эту систему, найдем P_+ и положим

$$\bar{\rho}_{i+0.5}^{n+1} = P_+ . \tag{11}$$

Внутренняя энергия $E_{i+0.5}^{n+1}$ определяется из разностного уравнения

$$E_{i+0.5}^{n+1} = E_{i+0.5}^n - 0.5\left(\bar{P}_{i+0.5}^{n+1} + \bar{P}_{i+0.5}^n\right)\left(V_{i+0.5}^{n+1} - V_{i+0.5}^n\right), \tag{12}$$

в точности совпадающего с ударной адиабатой. В /2/ показано, что рассмотренная разностная схема для S- волны условно устойчива и шаги τ и h должны удовлетворять условию

$$\frac{\tau a}{h} \le 1, \tag{13}$$

где a - массовая скорость звука, определяемая уравнением

$$a^2 = -\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S . \quad (14)$$

В случае R-волны вспомогательные значения P^*, u^* будем вычислять по формулам

$$P^*_{i+0.5} = 0.5\left(\beta_0 P^n_{i+0.5} + \sum_{\upsilon=-K_1}^{K_2} \beta_0 P^n_{i+0.5+\upsilon}\right), \quad (15)$$

$$u^*_i = 0.5\left(\beta_0 u^{n+1}_i + \sum_{\upsilon=-K_1}^{K_2} \beta_\upsilon u^{n+1}_{i+\upsilon}\right), \quad (16)$$

где

$$\beta_\upsilon = \frac{h_{i+0.5+\upsilon}}{\tau a_{i+0.5+\upsilon}}$$

Число слагаемых в суммах (15), (16) находится из условий

$$\sum_{\upsilon=0}^{K_1-1} \beta_{-\upsilon} < 1 \le \sum_{\upsilon=0}^{K_1} \beta_{-\upsilon}; \quad \sum_{\upsilon=0}^{K_2-1} \beta_\upsilon < 1 \le \sum_{\upsilon=0}^{K_2} \beta_\upsilon , \quad (17)$$

после чего весовые функции β_υ с индексами K_1 и K_2 подправляются для выполнения строго равенства в правых частях соотношений (17).

В адиабатическом течении внутренняя энергия и давление вдоль траектории частицы зависят только от V. Изменения P и E при изменении V определяется системой уравнений

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial \upsilon}{\partial t} = 0 , \quad (18)$$

$$P = P(V, E).$$

Первое из этих уравнений является следствием системы (1)-(3). Запишем его в виде

$$E^{n+1} = E^n - \int_{V^n}^{V_{n+1}} P(V,E)\, d\upsilon . \quad (19)$$

Заменим интеграл интегральной суммой

$$E^{n+1} = E^n - \sum_{K=0}^{z} P_K(V_K, E_K)(V_{K+1} - V_K), \quad (20)$$

где число слагаемых z выбирается так, чтобы обеспечить нужную точность интегрирования вдоль изэнтропы. Значения V_{k+1}, E_{k+1} определяются из уравнений

$$V_{k+1}=V^n+\frac{k+1}{z+1}\left(V^{n+1}-V^n\right), \tag{21}$$

$$E_{k+1}=E_k-\frac{1}{z+1}\,P_k(V_k,E_k)\left(V^{n+1}-V^n\right), \tag{22}$$

а давление P_{k+1} – из уравнения состояния

$$P_{k+1}=P(V_{k+1},E_{k+1}).$$

При использовании изложенной гибридной разностной схемы для расчета характеристик движения жидкости с ударными волнами шаг по времени τ выбирается лишь в интервалах сетки, где решение является S-волной

$$\tau=\min\left\{\tau_i(S)\right\}, \tag{23}$$

где $\tau_{i(S)}=\dfrac{h_i}{a_i}$. При этом в некоторых интервалах сетки с R-волной может оказаться, что $\dfrac{\tau a_i}{h_i}>1$. В этих интервалах вспомогательные значения u_i^* и $P^*_{i+0.5}$ выбираются с помощью уравнений (I5)-(I7).

Достоинства изложенной гибридной разностной схемы особенно проявляется при расчете распространения ударной волны по веществу A, содержащему тонкий слой другого вещества $Б$.

В явлении удается выделить три этапа.

I этап. Ударная волна распространяется по веществу A и не дошла до прослойки $Б$. В этом случае шаг по времени выбирается из условий (23), в тех интервалах сетки, где течение есть S-волна. В остальных интервалах сетки, где решение является R-волной, ограничение на шаг τ снимается применением изложенной выше схемы.

2 этап. Ударная волна проходит через вещество $Б$. Пусть для определенности шаг $h_Б$ пространственной сетки в этом тонком слое в K раз меньше h_A. Поскольку в интервалах сетки в веществе $Б$ решение есть S-волна, то шаг по времени будет выбираться из условия

$$\tau \leq \frac{h_Б}{a_Б} = \frac{h_a}{K a_Б};$$

Если $a_Б \approx a_A$, то при прохождении ударной волной тонкой прослойки $Б$ общий шаг по времени уменьшится в K раз.

3 этап. Ударная волна ушла от прослойки $Б$. В этом случае шаг по времени выбирается, как на этапе I, то есть снова возрастает в K раз

Применение описанной выше гибридной разностной схемы позволяет заметно сократить затраты времени ЭВМ на расчет численных значений всех величин в системах с тонкими прослойками.

Рассмотрим две задачи.

Задача I. Жесткость вещества $Б$ (прослойка) выше, чем жесткость вещества A. В момент прихода падающей волны на прослойку образуются отраженная и прошедшая ударные волны. После выхода ударной волны на вторую границу прослойки происходит распад разрыва с образованием прямой ударной волны и отраженной волны разрежения. Амплитуда этой ударной волны меньше, чем амплитуда пришедшей ударной волны. Далее начинается взаимодействие волны разрежения с контактной границей и образование новых волн сжатия и разрежения. Вслед за прошедшей волной прослойка излучает волны сжатия и ударные волны, в противоположном направлении – волны разрежения. Вследствие этого амплитуда прошедшей ударной волны возрастает, а отраженной – уменьшается. Через некоторое время амплитуда прошедшей ударной волны становится равной амплитуде падающей волны: ударная волна "забывает" прослойку.

Расчеты проводились для следующей системы. В области $0 \leq x \leq 50$; $50{,}1 \leq x \leq 100$ находится вещество A с параметрами $P_0 = 0$, $\rho_0 = 1$, $E_0 = 0$, $U_0 = 0$. В области $50 \leq x \leq 50.1$ находится вещество $Б$ с начальными параметрами $P_0 = 0$; $\rho_0 = 10$, $E_0 = 0$, $U_0 = 0$. Уравнения состояния были взяты в виде

$$A: \quad P = (\gamma - 1)\rho E, \quad \gamma = 5/3;$$

$$Б: \quad P = (\gamma - 1)\rho E + C_{0K}^2(\rho - \rho_{0K}), \; \rho_{0K} = 10, \; C_{0K} = 5, \; \gamma = 3.$$

В качестве краевого условия при $x = 0$ бралось v = 0.5. Расчеты показывают, что на расстоянии $\approx$ 15 толщин прослойки давление на прошедшей волне меньше, чем на падающей. Затем давление становится больше. Область избыточного давления составляет примерно 100 толщин прослойки. Затем амплитуда прошедшей ударной волны становится равна амплитуде падающей. Максимальное превышение давления на фронте прошедшей волны давлением на фронте падающей волны для данной пары веществ составило 1 %.

Задача решалась по разностной схеме I из /2/ и по изложенной выше гибридной разностной схеме до выхода прошедшей ударной волны на правую границу системы с координатой $x = 100$. В гибридной схеме затраты времени ЭВМ для решения задачи оказались в 17 раз меньше.

Задача 2. Жесткость вещества $Б$ (прослойки) меньше, чем жесткость вещества A

$$\rho_Б C_Б < \rho_A C_A .$$

В момент прихода падающей ударной волны на прослойку образуется отраженная волна разрежения и прошедшая ударная волна. После ее выхода на вторую границу прослойки происходит распад разрыва с образованием отраженной и прошедшей ударных волн. Отраженная волна порождает в прослойке сложную волновую картину. В обе стороны от прослойки распространяются ударные волны. Часть этих волн дополняют прошедшую ударную волну, вследствие чего ее амплитуда возрастает.

Расчеты проводились для следующей системы. В области $0 \le x \le 50$, $50.1 \le x \le 100$; находится вещество A с начальными параметрами $P_0 = 0$, $\rho_0 = 10$, $E_0 = 0$, $U_0 = 0$. В области $50 \le x \le 50.1$ находится вещество $Б$ с начальными параметрами $P_0 = 0$, $\rho_0 = 1$, $E_0 = 0$, $U_0 = 0$. Уравнения состояния были взяты в виде в е щ е с т в о A: $P = (\gamma - 1)\rho E + C_{0K}^2 (\rho - \rho_{0K})$, где $C_{0K} = 5$; $\rho_{0K} = 10$, $\gamma = 3$;
в е щ е с т в о $Б$: $P = (\gamma - 1)\rho E$, где $\gamma = 5/3$.
В качестве краевого условия при $x = 0$ было взято значение $U = 5$.

Задача решалась по разностной схеме I из /2/ и по изложенной выше схеме до выхода ударной волны на правую границу системы с координатой $x = 100$. В гибридной схеме затраты времени ЭВМ для решения задачи оказались в 50 раз меньше.

Расчеты показывают, что в веществе A за прослойкой есть область, где давление на фронте прошедшей ударной волны ниже, чем на фронте падающей ($\approx$ 7 толщин прослойки), затем следует область ($\approx$ 20 толщин прослойки), где давление на фронте ударной волны выше, чем на фронте падающей. Это превышение достигает $\approx$ 18 %.

1. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач.- М.: Мир, 1972.
2. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений.- М.: Наука, 1978.
3. Куропатенко В.Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики.- Труды МИ АН СССР им. В.А.Стеклова. Ч.I, т.74, 1966.
4. Гаджиева В.В., Куропатенко В.Ф. О некоторых явных разностных схемах для уравнений гидродинамики.- Журн. вычисл.матем. и матем. физ., 1971, т.11, № 6, с.1603.

Поступила в редакцию
14 февраля 1984 г.