

Т.Н.АЛЕКСЕЕВА, В.Ф.КУРОПАТЕНКО
АДАПТИВНЫЙ БЕЗУСЛОВНО УСТОЙЧИВЫЙ РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД
РАСЧЕТА МЕЛКИХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ
ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОТОКА

Математическое моделирование динамических нагрузок в конструкциях, содержащих разномасштабные элементы, приводит к необходимости численного решения задачи о распространении и взаимодействии сильных и слабых разрывов друг с другом и с контактными разрывами. Типичной является ситуация, когда ударная волна проходит через неоднородность в виде тонкого плоского слоя вещества, отличающегося по свойствам от окружающих его веществ.

Движение вещества и изменение его термодинамических характеристик описывается системой дифференциальных уравнений - законов сохранения массы, количества движения и энергии

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(E + \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial m} (p u) = 0, \quad (3)$$

где v - удельный объем, u - массовая скорость, p - давление, E - удельная внутренняя энергия, t - время, m - массовая

лагранжева координата. Разностные схемы, применяемые для численного интегрирования системы уравнений (1)–(3), делятся на явные и неявные, условно и безусловно устойчивые. Как правило, явные разностные схемы условно устойчивы, большинство же неявных – безусловно устойчивы. Отдельные разностные схемы, а также семейства явных и неявных разностных схем рассмотрены в [1] – [4]. Условие устойчивости формулируется в виде ограничений на шаг τ по времени.

Во всех без исключения разностных схемах имеется еще одно ограничение на шаг τ – условие точности интегрирования. Обозначим через τ_y шаг по времени, максимально допустимый условием устойчивости и через τ_T – условием точности. В тех случаях, когда $\tau_T < \tau_y$, безусловно устойчивые разностные схемы не имеют преимуществ перед условно устойчивыми. Однако при решении большого класса задач с разномасштабными элементами применение условно устойчивых схем оказывается неэкономичным. Так, например, для расчета пятикратного прохождения волны по системе размером 100 см потребуется сделать на ЭВМ примерно 10^9 операций. Если же система усложняется путем включения в нее прослойки толщиной 0.1 см, то время счета на ЭВМ возрастет в 25–30 раз. Для решения таких задач часто применяются безусловно устойчивые неявные разностные схемы. Однако и их применение оказывается не всегда целесообразным, так как в неявных схемах проводятся итерации во всех точках сетки, что приводит к росту затрат времени ЭВМ. Эти затраты особенно возрастают при использовании сложных уравнений состояния.

В [4] предложена явная разностная схема, в которой ограничение на соотношение шагов сетки τ и h заменяется условием для определения в момент t^N основания характеристического треугольника, по которому проводится суммирование значений давления и массовой скорости для определения вспомогательных значений этих величин. Область применимости разностной схемы из [4] ограничена только гладкими течениями без ударных волн.

Рассмотрим гибридную разностную схему, в которой для расчета ударных волн используется метод из [1], а адиабатические гидродинамические течения рассчитываются с помощью явной безусловно устойчивой разностной схемы, идейно близкой к разностной схеме из [4].

Аппроксимируем, аналогично [1], уравнения (1), (2) разностными уравнениями

$$\frac{v_{i+0.5}^{n+1} - v_{i+0.5}^n}{\tau} - \frac{u_{i+1}^* - u_i^*}{h} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{\rho_{i+0.5}^* - \rho_{i-0.5}^*}{h} = 0. \quad (5)$$

Для разделения решений на адиабатические и решения с диссипацией энергии используем производную $\frac{\partial u}{\partial x}$. Будем считать, что решение является адиабатическим (R - волна), если

$\frac{\partial u}{\partial x} \geq 0$, и диссипативным (S волна), если $\frac{\partial u}{\partial x} < 0$.

В случае S - волны вспомогательные значения ρ^* и u^* определим следующим образом

$$u_i^* = u_i^{n+1}, \quad \rho_{i+0.5}^* = \bar{\rho}_{i+0.5}^n. \quad (6)$$

Вспомогательное же значение $\bar{\rho}_{i+0.5}^n$ найдем так. Предположим, что в сеточном интервале $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ распространяется ударная волна, на фронте которой справедливы уравнения

$$(v_+ - v_-)W + (u_+ - u_-) = 0, \quad (7)$$

$$(u_+ - u_-)W - (\rho_+ - \rho_-) = 0, \quad (8)$$

$$E_+ - E_- + 0.5(\rho_+ + \rho_-)(v_+ - v_-) = 0, \quad (9)$$

где величины с индексом "-" характеризуют состояние перед фронтом разрыва, а с индексом "+" - за фронтом. Будем считать,

что $\rho_- = \bar{\rho}_{i+0.5}^n$, $\rho_+ = \bar{\rho}_{i+0.5}^n$, $E_- = E_{i+0.5}^n$, а $\Delta u = u_+ - u_- = u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}$. Поскольку $\bar{\rho}_{i+0.5}^n$, $\bar{\rho}_{i+0.5}^n$, $E_{i+0.5}^n$, u_{i+1}^n , u_i^n известны, то уравнения (7)-(9) вместе с уравнением состояния

$$\rho = \rho(\rho, E) \quad (10)$$

образуют систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными ρ_+, ρ_+, E_+, W . Решив эту систему, найдем ρ_+ и положим

$$\bar{\rho}_{i+0.5}^{R+1} = \rho_+. \quad (II)$$

Для сложных уравнений состояния система (7)-(10) решается численно. Для уравнения состояния идеального газа получается явная зависимость $\bar{\rho}^{R+1}$ от Δu

$$\bar{\rho}_{i+0.5}^{R+1} = \rho_{i+0.5}^R + \frac{\gamma+1}{4} \rho_{i+0.5}^R \Delta u^2 + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4} \rho_{i+0.5}^R \Delta u^2\right)^2 + \gamma \rho_{i+0.5}^R \rho_{i+0.5}^R \Delta u^2}. \quad (I2)$$

Внутренняя энергия $E_{i+0.5}^{R+1}$ определяется из разностного уравнения энергии

$$E_{i+0.5}^{R+1} = E_{i+0.5}^R - 0.5(\bar{\rho}_{i+0.5}^{R+1} + \bar{\rho}_{i+0.5}^R)(v_{i+0.5}^{R+1} - v_{i+0.5}^R). \quad (I3)$$

Как следует из [I], рассмотренная разностная схема для S волны устойчива в акустическом приближении при условии

$$\frac{\tau a}{h} < 1. \quad (I4)$$

В случае R - волны вспомогательные значения ρ^* и u^* будем вычислять по формулам

$$\rho_{i+0.5}^* = 0.5(\beta_0 \rho_{i+0.5}^R + \sum_{\nu=-\kappa_1}^{\kappa_2} \beta_\nu \rho_{i+0.5+\nu}^R), \quad (I5)$$

$$u_{i+0.5}^* = 0.5(\beta_0 u_{i+0.5}^{R+1} + \sum_{\nu=-\kappa_1}^{\kappa_2} \beta_\nu u_{i+0.5+\nu}^{R+1}), \quad (I6)$$

где

$$\beta_\nu = \frac{h_{i+0.5+\nu}}{\tau a_{i+0.5+\nu}}, \quad a^2 = -\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S. \quad \text{Число слагаемых}$$

в суммах (I5), (I6) находится из условий

$$\sum_{\nu=0}^{K_1-1} \beta_{-\nu} < 1 \leq \sum_{\nu=0}^{K_1} \beta_{-\nu}, \quad \sum_{\nu=0}^{K_2-1} \beta_{\nu} < 1 \leq \sum_{\nu=0}^{K_2} \beta_{\nu}, \quad (17)$$

после чего весовые функции β_{ν} с индексами K_1 и K_2 подправляются для выполнения строгого равенства в правых частях соотношений (17).

При решении задачи о распространении ударной волны по однородному веществу шаг по времени τ будет выбираться в сеточных интервалах с δ - волной по условию

$$\frac{\tau a}{h} = 1. \quad (18)$$

При этом во всех интервалах с δ - волной окажется

$$\beta_{\nu} = \frac{h}{\tau a} \geq 1. \quad (19)$$

Но в этом случае из (15)-(17) следует, что

$$\rho_{i+0.5}^* = \rho_{i+0.5}^n, \quad u_i^* = u_i^{n+1}. \quad (20)$$

Разностная схема с такими вспомогательными значениями ρ^* и u^* исследована в [1].

Рассмотрим погрешность аппроксимации уравнений (1), (2) разностными уравнениями (4), (5) со вспомогательными величинами (20). Условия точности получим, ограничив главные члены этих выражений.

$$\left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tau - \frac{1}{24} \frac{\partial^3 u}{\partial m^3} h^2 \right| \leq \varepsilon_1, \quad (21)$$

$$\left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tau + \frac{1}{24} \frac{\partial^3 p}{\partial m^3} h^2 \right| \leq \varepsilon_2.$$

С помощью (1), (2) преобразуем (21) к виду

$$\frac{\partial}{\partial m} \left| \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \tau - \frac{1}{24} \frac{\partial^2 u}{\partial m^2} h^2 \right| \leq \varepsilon_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial m} \left| -\frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \tau + \frac{1}{24} \frac{\partial^2 \rho}{\partial m^2} h^2 \right| \leq \varepsilon_2.$$

Умножим каждое из этих неравенств на dm , проинтегрируем по m от 0 до h и запишем полученный результат в виде

$$\left| \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \tau \right| - \left| \frac{1}{24} \frac{\partial^2 u}{\partial m^2} h^2 \right| \leq \varepsilon_1 h, \quad (22)$$

$$\left| \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \tau \right| - \left| \frac{1}{24} \frac{\partial^2 \rho}{\partial m^2} h^2 \right| \leq \varepsilon_2 h.$$

Заменим $\frac{\partial u}{\partial t}$ на $-\frac{\partial \rho}{\partial m}$ и $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ на $-a^2 \frac{\partial u}{\partial m}$. После этой замены и несложных преобразований условия точности примут вид

$$\tau_1 \leq \frac{2\varepsilon_1 h + \frac{1}{12} h^2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial m^2} \right|}{\left| \frac{\partial \rho}{\partial m} \right|}, \quad \tau_2 \leq \frac{2\varepsilon_2 h + \frac{1}{12} h^2 \left| \frac{\partial^2 \rho}{\partial m^2} \right|}{a^2 \left| \frac{\partial u}{\partial m} \right|}. \quad (23)$$

Заменив производные в (23) разностями, получим условия точности в виде

$$\tau_1 \leq h \frac{2\varepsilon_1 h + \frac{1}{12} |u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}|}{|\rho_{i+0.5} - \rho_{i-0.5}|}, \quad (24)$$

$$\tau_2 \leq h \frac{2e_2 h + \frac{1}{12} |\rho_{i+1.5} - 2\rho_{i+0.5} + \rho_{i-0.5}|}{a_{i+0.5}^2 |\mathcal{U}_{i+1} - \mathcal{U}_i|}. \quad (25)$$

В случае движений без ускорения и деформации $\rho_{i+0.5} = \rho_{i-0.5}$, $\mathcal{U}_{i+1} = \mathcal{U}_i$ и из (24), (25) следует, что $\tau_1 \leq \infty$.

$\tau_2 \leq \infty$, т.е. условия точности не дают ограничений на τ .

В адиабатическом течении внутренняя энергия и давление вдоль траектории частицы зависят только от ρ . Изменения E и ρ при изменении ρ определяются системой уравнений

$$\frac{dE}{dt} + \rho \frac{dv}{dt} = 0, \quad (26)$$

$$\rho = \rho(v, E),$$

где $v = \frac{1}{\rho}$. Первое уравнение (26), являющееся следствием трех законов сохранения (1)-(3), запишем в виде

$$E = E - \int_{v^R}^{v^{R+1}} \rho(v, E) dv \quad (27)$$

и интеграл заменим интегральной суммой

$$E = E - \sum_{K=0}^{R+1} \rho_K(v_K, E_K)(v_{K+1} - v_K), \quad (28)$$

где Z - число слагаемых, которое выбирается так, чтобы обеспечить нужную точность интегрирования вдоль изэнтропы. Значения v_{K+1} и E_{K+1} определяются из уравнений

$$v_{K+1} = v + \frac{v}{z+1} (v^{z+1} - v^z), \quad (29)$$

$$E_{K+1} = E_K - \frac{1}{z+1} \rho_K (v_K, E_K) (v^{z+1} - v^z), \quad (30)$$

а давление ρ_{K+1} - из уравнения состояния

$$\rho_{K+1} = \rho(v_{K+1}, E_{K+1}).$$

Рассмотрим теперь различные этапы распространения ударной волны по веществу A , содержащему тонкий слой другого вещества B .

1 этап. Ударная волна распространяется по веществу A и не дошла до прослойки B . В этом случае шаг по времени выбирается из условий (14), (24), (25) по сеточным интервалам, где решение является S -волной.

$$\tau \leq \frac{h_A}{a_A}. \quad (31)$$

В остальных сеточных интервалах, где решение является R -волной, ограничение на τ из-за условия устойчивости снимается применением изложенной выше схемы.

2 этап. Ударная волна проходит через вещество B . Пусть для определенности шаг h_B пространственной сетки в этом тонком слое в K раз меньше h_A . Поскольку в интервалах сетки в веществе B решение есть S -волна, то шаг по времени будет выбран из условия

$$\tau \leq \frac{h_B}{a_B} = \frac{h_A}{K a_B}. \quad (32)$$

Если $a_A \approx a_B$, то при прохождении ударной волной тонкой прослойки B общий шаг по времени уменьшается в K раз.

3 этап. Ударная волна ушла от прослойки B . В этом слу-

чае шаг по времени выбирается, как на этапе 1, т.е. снова возрастает.

Применение описанной выше гибридной разностной схемы позволяет заметно сократить затраты времени ЭВМ на расчет численных значений всех величин в системах с тонкими прослойками.

Рассмотрим две задачи.

ЗАДАЧА I. Жесткость вещества B (прослойки) выше, чем жесткость вещества A .

$$\rho_B c_B > \rho_A c_A,$$

где c – скорость звука. В момент прихода падающей волны на прослойку образуются отраженная и прошедшая в прослойку ударные волны. После выхода ударной волны на вторую границу прослойки происходит распад разрыва с образованием прямой ударной волны и отраженной волны разрежения. Амплитуда этой ударной волны меньше, чем амплитуда прошедшей волны. Волновая картина, порождаемая взаимодействием этих волн с границами прослойки, сложная. Вслед за прошедшей волной прослойка излучает волны сжатия и ударные волны, в противоположном направлении – волны разрежения. Вследствие этого амплитуда прошедшей ударной волны возрастает, а амплитуда отраженной – уменьшается. Через некоторое время амплитуда прошедшей ударной волны становится равной амплитуде падающей волны.

На рис. I схематически изображена получаемая волновая картина в переменных m, t , а на рис. 2 – состояния в прослойке и на прошедшей и отраженной волнах в переменных ρ, u . Пунктиром обозначены траектории волн разрежения.

Расчеты проводились для следующей системы. В области $0 \leq x < 50, 50.1 < x \leq 100$ находится вещество A с параметрами $\rho_0 = 0, \rho_0' = 1, E_0 = 0, u_0 = 0$. В области $50 \leq x \leq 50.1$ находится вещество B с начальными параметрами $\rho_0 = 0, \rho_0' = 10, E_0 = 0, u_0 = 0$.

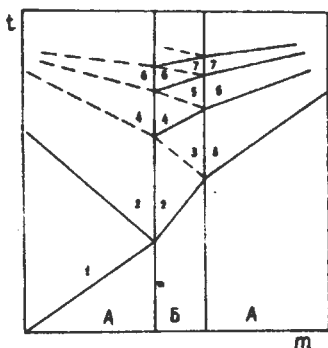


Рис. I

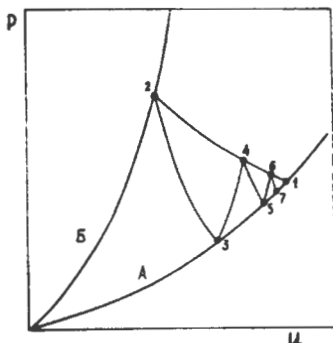


Рис.2

Уравнения состояния были
взяты в виде

$$A: p = (\gamma - 1)\rho E, \quad \gamma = 5/3,$$

$$B: p = (\gamma - 1)\rho E + C_{OK}^2(\rho - \rho_{OK}),$$

$$\rho_{OK} = 10, \quad C_{OK} = 5, \quad \gamma = 3.$$

В качестве краевого усло-
вия при $x = 0$ было задано $u = 0.5$.

Таблица

№ п/п	Задача 1			Задача 2		
	x	ρ	u	x	ρ	u
I	50.00	0.333	0.500	50.00	603.5	5.000
2	50.10	1.807	0.036	50.10	104.6	8.860
3	50.41	0.249	0.433	50.18	339.9	3.525
4	50.88	0.316	0.487	50.21	554.1	4.754
5	51.40	0.332	0.500	50.41	576.1	4.865
6	51.93	0.336	0.502	50.71	713.1	5.508
7	52.46	0.336	0.502	51.00	669.9	5.313
8	52.98	0.335	0.501	51.33	637.3	5.161
9	55.09	0.335	0.501	51.91	605.1	5.007
10	57.20	0.335	0.501	52.22	600.4	4.984
11	59.31	0.334	0.501	56.99	597.8	4.972
12	67.24	0.333	0.500	58.83	607.8	5.020
13	75.15	0.333	0.500	60.36	605.7	5.010
14	85.71	0.333	0.500	69.51	604.4	5.004
15	96.17	0.333	0.500	75.02	604.4	5.004

В таблице приведены зависимости давления и массовой скорости на фронте прошедшей ударной волны в зависимости от координаты фронта волны. Из таблицы видно, что на расстоянии,

равном ≈ 15 толщин прослойки, давление на прошедшей волне меньше, чем на падающей. Затем давление становится больше. Область избыточного давления составляет примерно 100 толщин прослойки. Затем амплитуда прошедшей ударной волны становится равна амплитуде падающей.

Задача решалась по разностной схеме I из [1] и по изложенной выше гибридной схеме до выхода прошедшей ударной волны на правую границу системы с координатой $x=100$. В гибридной схеме затраты времени ЭВМ для решения задачи оказались в 17 раз меньше, чем в схеме I из [1].

ЗАДАЧА 2. Жесткость вещества B (прослойки) меньше, чем жесткость вещества A

$$\rho_B c_B < \rho_A c_A.$$

В момент прихода падающей ударной волны на прослойку образуется отраженная волна разрежения и прошедшая ударная волна. После ее выхода на вторую границу прослойки происходит распад разрыва с образованием отраженной и прошедшей ударных волн. Отраженная волна порождает в прослойке сложную волновую картину. В обе стороны от прослойки распространяются ударные волны. Часть этих волн догоняют прошедшую ударную волну, вследствие чего ее амплитуда возрастает.

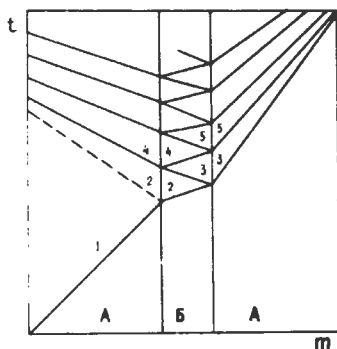


Рис. 3

На рис. 3 схематически изображена получаемая в задаче 2 волновая картина в переменных m, t , а на рис. 4 — состояния в прослойке и на прошедшей и отраженной волнах в переменных ρ, u .

Расчеты проводились для следующей системы. В области $0 \leq x < 50, 50.1 \leq x \leq 100$ находится вещество A с начальными параметрами $\rho_0 = 0, \rho_0 = 10, E_0 = 0, u_0 = 0$. В области $50 \leq x \leq 50.1$ находится вещество B с начальными параметрами $\rho_0 = 0, \rho_0 = 1, E_0 = 0, u_0 = 0$.

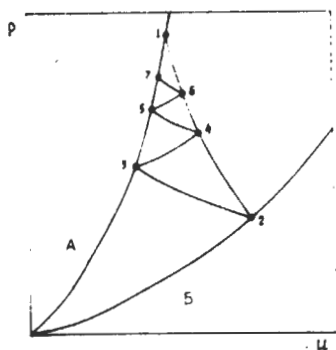


Рис. 4

Уравнения состояния были взяты в виде

$$A: \rho = (\gamma - 1) \rho E + C_{0K}^2 (\rho - \rho_{0K})$$

$$C_{0K} = 5, \rho_{0K} = 10, \gamma = 3,$$

$$B: \rho = (\gamma - 1) \rho E, \gamma = 5/3.$$

В качестве краевого условия при $x = 0$ было задано значение $u = 5$.

В таблице приведены изменения давления ρ и массовой скорости u на фронте прошедшей ударной волны в зависимости от координаты фронта.

Из таблицы видно, что имеется область, ширина которой в 12-13 раз больше ширины прослойки, в которой амплитуда прошедшей ударной волны выше, чем амплитуда падающей волны и это превышение достигает $\approx 19\%$.

Задача решалась по разностной схеме I из [I] и по изложенной выше схеме до выхода ударной волны на правую границу системы с координатами $x = 100$. В гибридной схеме затраты времени ЭВМ для решения задачи оказались в ≈ 50 раз меньше.

Л и т е р а т у р а

1. Куропатенко В.Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики. - Труды МИАН СССР им. В.А. Стеклова, часть I, 1966, т. 74.
2. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. - М.: Наука, 1968.
3. Попов Ю.П., Самарский А.А. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений газодинамики и магнитной газодинамики, М.: 1969 (Препринт/ИПМ; 16).
4. Гаджиева В.В., Куропатенко В.Ф. О некоторых явных разностных схемах для уравнений гидродинамики. - Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, т. II, № 6, с. 1603.

Поступила в редакцию
17.07.80 г.