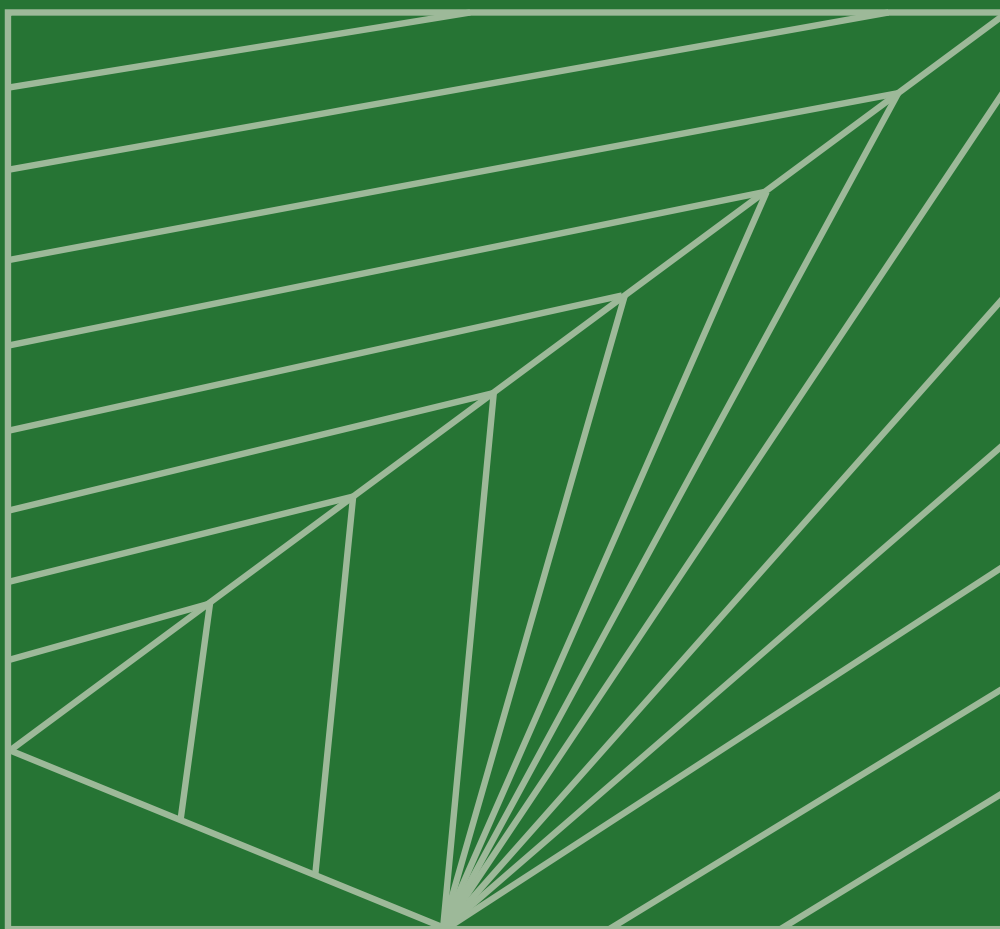


В.Ф. Куропатенко, Е.С. Шестаковская

ОСНОВЫ

ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ



Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра «Вычислительная механика»

532.5
К935

В.Ф. Куропатенко, Е.С. Шестаковская

ОСНОВЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Монография

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2017

УДК 532.511+519.63:532.511
К935

*Одобрено
Советом Института естественных
и точных наук*

*Рецензенты:
д.ф.-м.н., профессор В.А. Симоненко
д.ф.-м.н., профессор А.В. Федоров*

Куропатенко, В.Ф.

К935 Основы численных методов механики сплошной среды: монография / В.Ф. Куропатенко, Е.С. Шестаковская. – Челябинск, Издательский центр ЮУрГУ, 2017. – 254 с.

Излагаются способы построения разностных уравнений механики сплошной среды. Анализируются свойства разностных уравнений и методы исследований аппроксимации, устойчивости, монотонности, дистракции. Рассматриваются методы расчёта ударных волн и волн разрежения. Указывается способ построения для каждого разностного метода уравнения производства энтропии. Книга ориентирована на широкий круг специалистов, занимающихся созданием и применением математических моделей механики сплошной среды, а также может быть полезна студентам старших курсов и аспирантам.

УДК 532.511+519.63:532.511

ISBN 978-5-696-04870-3

© Куропатенко В.Ф., Шестаковская Е.С., 2017
© Издательский центр ЮУрГУ, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Введение	9

Глава 1. Основные уравнения механики сплошных сред

§ 1. Сплошная среда	14
§ 2. Движения сплошной среды	16
§ 3. Инварианты тензора	18
§ 4. Главные оси тензора	20
§ 5. Тензоры скоростей деформаций и скоростей поворотов	21
§ 6. Шаровой тензор и девиатор скоростей деформаций	23
§ 7. Главные оси девиатора скоростей деформаций	25
§ 8. Напряжения	26
§ 9. Девиатор скоростей напряжений	29
§ 10. Основные уравнения неидеальности	30
§ 11. Закон сохранения массы	31
§ 12. Закон сохранения количества движения	32
§ 13. Закон сохранения энергии	34
§ 14. Следствия законов сохранения	36
§ 15. Законы сохранения для движений с одномерной симметрией	38
§ 16. Законы сохранения на сильных разрывах	39
§ 17. Условия на слабых и контактных разрывах	43
§ 18. Термодинамические величины и термодинамические уравнения ...	46
§ 19. Термодинамическое равновесие и устойчивость	50
§ 20. Теплоёмкость	51
§ 21. Уравнения состояния	53
§ 22. Уравнения состояния газа	55
§ 23. Уравнения состояния конденсированного вещества	58
§ 24. Упругость и пластичность	60
§ 25. Постановка задач механики сплошной среды	63

Глава 2. Общие вопросы построения математической модели

§ 1. Функции и аргументы, таблицы и сетки	66
§ 2. Теорема о среднем значении	69
§ 3. Способ получения разностных уравнений	71
§ 4. Аппроксимация	72
§ 5. Постановка разностных краевых задач	76
§ 6. Несколько разностных схем для уравнения переноса	77
§ 7. Погрешности	81
§ 8. Устойчивость решения разностного уравнения	83
§ 9. Неявное разностное уравнение переноса	85

§ 10. Неявное разностное уравнение переноса. Прогонка	87
§ 11. Метод типа предиктор-корректор для уравнения переноса	88
§ 12. Уравнение теплопроводности	89
§ 13. Явное разностное уравнение теплопроводности	90
§ 14. Неявная разностная схема для уравнения теплопроводности	92
§ 15. Неявная разностная схема. Метод прогонки	93
§ 16. Нелинейное уравнение теплопроводности	94

Глава 3. Разностные законы сохранения

§ 1. Разностные схемы в дифференциальном представлении	97
§ 2. Критерий диссипативности	101
§ 3. Дивергентность	103
§ 4. Классы решений	106
§ 5. Вспомогательные величины для непрерывных решений	107
§ 6. Метод исследования дистракции разрывов	107
§ 7. Метод исследования немонотонности	110

Глава 4. Методы расчёта ударных волн

§ 1. Механизмы диссипации энергии	112
§ 2. Метод Неймана-Рихтмайера	113
§ 3. Метод Лакса	121
§ 4. Метод Годунова	127
§ 5. Метод Куропатенко. Идея метода	130
§ 6. Метод Куропатенко. Недивергентная разностная схема	136
§ 7. Метод Куропатенко. Дивергентная разностная схема	143
§ 8. Сравнительные характеристики методов расчёта ударных волн ...	146

Глава 5. Некоторые реализации методов расчёта ударных волн

§ 1. Разностная схема Лакса-Вендрофа	148
§ 2. Разностная схема «предиктор-корректор»	149
§ 3. Разностная схема Мак-Кормака	150
§ 4. TVD-разностные схемы и принудительная монотонизация осциллирующих решений	151
§ 5. Разностные схемы в Эйлеровых координатах	156

Глава 6. Метод характеристик

§ 1. История метода характеристик	166
§ 2. Метод характеристик. Основные уравнения	166
§ 3. Расчёт величин в точке пересечения характеристик	171
§ 4. Расчёт сильного разрыва	174
§ 5. Расчёт контактного разрыва	178
§ 6. Метод характеристик с фиксированными шагами по времени	181

Глава 7. Эталонные задачи

§ 1. Выбор эталонных задач	184
§ 2. Стационарная ударная волна.....	186
§ 3. Волна разрежения.....	194
§ 4. Разрушение мгновенно прогретой пластины	207
§ 5. Движение сферической оболочки из идеальной сжимаемой жидкости	213
§ 6. Задача о точечном взрыве.....	222
§ 7. Ударная волна в газовом шаре	232
Библиографический список.....	244

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математическое моделирование является самостоятельным направлением в науке, играющим важную роль в ускорении темпов научно-технического прогресса. Широкое распространение вычислительной техники создало необходимые условия для применения математического моделирования практически во всех областях человеческой деятельности. Все области успешного применения математического моделирования трудно перечислить. Уровень развития математического моделирования позволяет прогнозировать результаты сложных явлений, изучение которых другими способами сильно затруднено или просто невозможно.

Большие возможности математического моделирования были продемонстрированы при решении таких крупных научно-технических проблем, как овладение ядерной энергией и освоение космического пространства. Собственно говоря, решение этих проблем без ЭВМ потребовало бы несоизмеримо больших материальных затрат и увеличило бы сроки проводимых работ. Первые электронные вычислительные машины были применены при разработке ядерного оружия в США и СССР. В этом сыграла большую роль специфика проблемы – невозможность проведения натуральных экспериментов в лабораторных условиях и невозможность физического моделирования в полном объеме. Создание и применение ЭВМ положило начало новой технологии исследований, в которой математическое моделирование играет важнейшую роль.

Несмотря на то, что за 50 лет математическое моделирование, как наука, сильно продвинулось вперед, уровень его применения для решения прикладных задач в разных областях науки и техники заметно различается. И дело здесь не в ЭВМ. Компьютеры нынче стали легкодоступными. Раньше их применение сдерживалось малым быстродействием и объемом памяти. Так, первая советская ЭВМ «Стрела» имела в 1955 г. Быстродействие 2000 операций в секунду. В 2010 году ЭВМ достигли быстродействия $\sim 10^{18}$ операций в секунду. Точность вычислений на таких компьютерах заметно выше, чем точность исходных моделей. Несоответствие математической модели возможностям современных ЭВМ встречается довольно часто и особенно там, где для создания новых образцов техники применяются так называемые инженерные модели, весьма приближенно описывающие свойства рассчитываемых объектов.

Понимание необходимости объединения механики сплошной среды (МСС) и численных методов в одну науку сформировалось в конце 60^х годов прошлого века. В литературе появился термин «вычислительная гидродинамика» [1]. В [2] методы исследования системы квазилинейных уравнений уже объединены с газовой динамикой. Идея подготовки

специалистов, одинаково хорошо владеющих численными методами и механикой сплошных сред, была реализована в Челябинском государственном университете, где начиная с 1992 года для физиков и математиков читается годовой курс лекций, состоящий из двух частей – механики сплошных сред и численных методов в механике сплошных сред. По своему содержанию этот курс лекций и практических занятий полностью соответствует понятию вычислительной гидродинамики. В первой части курса [3] излагаются законы сохранения в виде нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных для непрерывных характеристик сплошной среды и в виде нелинейных алгебраических уравнений на сильных разрывах (ударные и детонационные волны, контактные разрывы). Даются сведения из термодинамики. Большое внимание уделяется уравнениям состояния газов, жидкостей и твёрдых тел, излагаются элементы теории подобия и некоторые аналитические решения, как эталонные решения для контроля точности разностных уравнений.

Данная монография основана на второй части курса лекций и посвящена обсуждению разностных схем, применяемых для расчётов. На характер изложения и выбор конкретных разностных схем повлияла практическая деятельность одного из авторов, в течение многих лет не только создававшего методы математического моделирования, но и применявшего их для определения оптимальных характеристик машин, приборов, сооружений или сложных физических процессов. Физические характеристики среды (давление, температура, плотность и другие) в этих процессах менялись в столь широком диапазоне, что вещества претерпевали полиморфные фазовые переходы, плавление и испарение, переходя из состояния первоначально твёрдого тела в состояние сильно ионизированной плазмы. Поэтому при рассмотрении разностных схем на первый план выступают скорее физические, а не математические интересы авторов. Область этих интересов можно назвать механикой взрыва.

При изложении методов вычислительной механики сплошных сред возникает искушение начать, как это делается во многих монографиях по численным методам [4–13], с рассмотрения теории линейных операторов в банаховом пространстве [14, 15]. Однако, опыт показывает, что для априорного исследования аппроксимации, устойчивости и других свойств нелинейных разностных схем МСС можно ограничиться применением простейших методов – разложений в ряды Тейлора и предложенным фон Нейманом анализом Фурье. В любом случае полученные в априорных исследованиях критерии устойчивости и точности должны уточняться путём методических расчётов задач, имеющих точные решения. Главным аргументом в защиту такой позиции является хорошее совпадение результатов математического моделирования в механике сплошных сред с натурными экспериментами.

Изложенный выше подход к созданию средств математического моделирования в механике сплошной среды определил круг вопросов, рассмотренных в данной монографии. Чтобы облегчить понимание идей, лежащих в основе тех или иных разностных уравнений, мы ограничились рассмотрением течений с одной пространственной переменной, поскольку такое рассмотрение является этапом на пути создания математических моделей с двумя и тремя пространственными переменными. По этой же причине мы ограничимся рассмотрением моделей идеальной сплошной среды (с нулевым девиатором напряжений, без теплопроводности и без химических реакций).

В первой главе излагаются основные уравнения МСС. Во второй главе рассматриваются общие вопросы построения разностных схем. В качестве примеров рассматриваются разностные уравнения переноса и теплопроводности, которые следуют из законов сохранения после существенных упрощений. В третьей главе излагаются разностные законы сохранения, вводится критерий диссипативности, и рассматриваются методы исследования дистракции разрывов и немонотонности. В главах 4 и 5 рассматриваются методы расчёта ударных волн. В основе каждого метода лежит оригинальный механизм диссипации энергии. Обсуждаются устойчивость, аппроксимация и дистракция четырёх разностных схем, предложенных авторами этих методов. Шестая глава посвящена изложению метода характеристик. В седьмой главе содержатся аналитические решения, которые рекомендуются в качестве эталонных задач для проверки различных свойств численных методов. В ряде задач критерием точности является сохранение энтропии вдоль траекторий частиц. В задаче о фокусировке оболочки начальные и граничные условия и энерговыделение подобраны так, чтобы плотность вещества оставалась постоянной вплоть до момента фокусировки. Это тоже является критерием точности численного решения.

Мы выражаем благодарность сотрудникам математического отделения Российского Федерального ядерного центра – Всероссийского научно-исследовательского института технической физики имени академика Е.И. Забабахина И.А. Доровских, Ю.В. Кайгородцевой, Э.С. Куропатенко, И.Р. Макеевой, С.Н. Романовской и В.А. Рысейвой за обсуждения и помощь в подготовке рукописи этой книги. Мы благодарим заведующего кафедрой вычислительной механики сплошных сред Южно-Уральского государственного университета профессора Ю.М. Ковалева за многократные плодотворные обсуждения проблем и усилия, ускорившие публикацию монографии.

В.Ф. Куропатенко
Е.С. Шестаковская

ВВЕДЕНИЕ

Понятие сплошной среды, заполняющей непрерывным образом любой рассматриваемый объём, является фундаментальным в механике сплошных сред (МСС). Каждая макровеличина – характеристика сплошной среды – является непрерывной функцией времени t и пространственных координат x, y, z . Для непрерывных функций указанных аргументов можно ввести понятия производных и записать законы сохранения в виде дифференциальных уравнений, содержащих частные производные. Так получаются уравнения механики сплошной среды: законы сохранения массы, количества движения и энергии. Это сложные и, как правило, нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными. Они содержат функции, выражающие различные свойства вещества – сплошной среды, и дополняются уравнениями, которые определяют эти свойства. Связи между термодинамическими характеристиками определяются уравнениями состояния. Связи между напряжениями и деформациями выражаются так называемыми определяющими уравнениями. В области обратимых деформаций напряжения называются упругими, в области необратимых – пластическими. Учёт вязких свойств в любом агрегатном состоянии всегда приводит к диссипации энергии. Законы сохранения могут содержать функции, описывающие теплопроводность, напряженность электрического или магнитного полей. В разных условиях физические свойства веществ проявляются по-разному, одни сильнее, другие слабее. Это порождает многообразие математических моделей механики сплошных сред. Модель является ключевым понятием МСС. Разные авторы называют совокупность дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений механики сплошной среды то физической моделью, то математической моделью [16]. В данной монографии будем следовать изложенной в [3] системе понятий, применяемых при математическом моделировании процессов в сплошных средах. В соответствии с [3] совокупность законов сохранения (в дифференциальной, интегро-дифференциальной или алгебраической форме на поверхности сильного разрыва) вместе с уравнениями, определяющими физические свойства сплошной среды (уравнения состояния, упругость, пластичность, вязкость, теплопроводность, магнитные и электрические свойства, взаимодействия с различными излучениями и др.) будем называть моделью МСС. Система уравнений модели МСС должна быть замкнутой, то есть все уравнения должны быть независимыми, и их число должно быть равно числу искомых функций.

Основы создания моделей МСС заложили Рене Декарт (1596–1650 гг.) и Исаак Ньютон (1643–1727 гг.). Однако по-настоящему модели МСС начали развиваться после работ М.В. Ломоносова, Л. Эйлера, Ю. Майера,

Д. Джоуля, Г. Гельмгольца, А. Навье и Д. Стокса, которые в период с 1750 по 1850 гг., сформулировали и записали в виде дифференциальных уравнений законы сохранения массы, количества движения и энергии для идеальной сжимаемой и вязкой несжимаемой сплошных сред. В течение почти двух столетий решения системы законов сохранения пытались искать аналитическими методами. Для этого приходилось сильно упрощать свойства среды и заменять сложные воздействия более простыми. Пока не было вычислительных машин, степень упрощения моделей механики сплошной среды определялась возможностями существующего математического аппарата. Необходимость упрощений сдерживала использование моделей МСС в науке и технике. Простые модели, которые «хорошо решались», не отвечали запросам практики, а сложные, которые удовлетворили бы инженеров и конструкторов, требовали огромного объёма вычислений.

Положение изменилось после появления электронных вычислительных машин (ЭВМ), которые выполняют некоторый набор операций с числами. Поскольку язык дифференциальных уравнений электронной вычислительной машине недоступен, то нахождение решения с помощью ЭВМ означает его нахождение в виде чисел. Если аналитическое решение системы уравнений модели МСС справедливо в каждой точке некоторой области изменения аргументов, то с помощью ЭВМ это можно сделать лишь в некоторых точках указанной области. Их число конечно. Совокупность таких точек и соединяющих их линий называется сеткой, сами точки – узлами сетки, а расстояние между соседними точками – шагом сетки. Функции, определяемые в узлах сетки, являются табличными (сеточными).

ЭВМ «требует» замены дифференциальных уравнений модели МСС алгебраическими уравнениями. Алгебраические уравнения, связывающие значения сеточных функций, называются разностными уравнениями. Замена дифференциальных уравнений разностными, называется аппроксимацией. Совокупность разностных законов сохранения и уравнений, определяющих свойства вещества, называется математической моделью. Нахождение решения уравнений математической модели путём расчётов на ЭВМ называется математическим моделированием.

Из сказанного выше следует, что при создании математической модели совершается переход от сплошной среды к дискретной, от непрерывных функций к сеточным функциям. Эта дискретизация не имеет никакого отношения к переходу от дискретной среды микроуровня к сплошной среде макроуровня. При переходе от дифференциальных уравнений модели МСС к разностным уравнениям возникает новый в большой степени «субъективный» элемент – шаги сетки по времени и пространственным переменным. Аппроксимация дифференциальных уравнений разностными порождает погрешность аппроксимации, зависящую от

шагов сетки. Свойства погрешностей аппроксимации определяют различия между решением системы дифференциальных уравнений и решением системы разностных уравнений. При уменьшении шагов сетки разность между этими решениями должна уменьшаться. Это свойство разностных уравнений называется сходимостью.

Монографии по численным методам чаще всего содержат изложение теории линейных операторов в банаховом пространстве. Затем эта теория применяется для доказательства теорем, определяющих условия сходимости и устойчивости. При этом уравнения в операторной форме отличаются от записанных на сеточном шаблоне разностных уравнений. С точки зрения прикладных математиков – проблемных специалистов – уже простые методы исследования свойств разностных схем дают информацию для принятия решения о применении данной математической модели. В механике сплошных сред свойства математической модели из-за нелинейностей, определяемых реальными уравнениями состояния, наличием ударных волн, пластичностью, и другими свойствами вещества, могут заметно отличаться от предсказаний линейной теории.

При переходе к нелинейным уравнениям линейная теория теряет свою строгость. Как только нелинейность уравнений начинает существенно сказываться, например, в случае образования ударных волн, кончается область безоговорочной применимости методов, отточенных на линейных уравнениях. В случае разрывных решений нелинейных уравнений строгая теория сходимости отсутствует. Важность теоремы сходимости [17–19] сильно преувеличивается, поскольку она все-таки доказана для линейных, а не для нелинейных уравнений, а реальные расчёты проводятся при конечных Δx и Δt , а не при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$. Очень ярко взгляды на относительность «строгих» критериев устойчивости и сходимости изложены в [1]. Специалист по вычислительной механике сплошной среды согласится с тем, что главным критерием оценки свойств математической модели является реальная, а не теоретическая сходимость приближённого решения системы разностных уравнений к точному решению системы дифференциальных уравнений. Однако, оценки аппроксимации, устойчивости и сходимости, полученные с помощью методов исследования линейных уравнений, не теряют своей важности, поскольку уравнения с постоянными коэффициентами являются моделями для уравнений нелинейных.

Несмотря на большое количество доказанных теорем и сильно продвинутые методы исследования систем линейных уравнений, теория априорного исследования свойств математических моделей механики сплошной среды далека от своего завершения. Требуют дальнейшего обоснования различные критерии устойчивости математической модели и их связь с устойчивостью нестационарных течений сплошной среды. Строгие критерии устойчивости в практических расчётах, как правило, не

применяются. Для этой цели вполне достаточен предложенный фон Нейманом простой и надежный анализ Фурье, изложенный, например, в [1]. С помощью этого критерия в каждой точке сетки, исходя из ограничений устойчивости, выбирается максимально допустимый шаг Δt по времени, а затем из всех этих шагов выбирается наименьшее значение, общее для всех точек сетки.

Второй проблемой, требующей повышенного внимания, является расчёт ударных волн – сильных разрывов всех характеристик среды. На поверхности сильного разрыва законы сохранения принимают вид нелинейных алгебраических уравнений, связывающих скачки величин по обе стороны разрыва. На сильном разрыве энтропия, как и остальные функции, терпит скачок. В этом заключается принципиальное различие между ударными волнами и волнами с непрерывным изменением величин. Для расчётов течений с ударными волнами широко применяются однородные методы, в которых сильный разрыв заменяется слоем конечной ширины, сравнимой с размером сеточной ячейки. Такая способность разностной схемы получила название дистракции [20]. Поскольку состояние за разрывом и перед разрывом связаны ударной адиабатой, то в области дистракции сильного разрыва должен действовать механизм, обеспечивающий возрастание энтропии. Физическая вязкость и теплопроводность в уравнениях МСС не могут обеспечить величину дистракции, сравнимую с несколькими ячейками разностной сетки. Казалось бы, предложение фон Неймана и Рихтмайера использовать для этой цели математическую «вязкость» [21] проблему решает. Метод Неймана-Рихтмайера широко применяется для моделирования ударных волн. Псевдовязкость разными авторами берётся в различных формах – линейной, квадратичной, линейно-квадратичной [21–24]. Однако, этот метод при изменении формы математической псевдовязкости не гарантирует сходимости к точному решению. Так, в [25] построен пример, когда разностные схемы с разными «вязкостями» сходятся к разным предельным решениям [26]. В [27] приведён пример расчёта сферической сходящейся оболочки, в котором показано, что диссипация энергии, определяемая псевдовязкостью, в несколько раз превосходит диссипацию энергии, определяемую пластичностью.

Совершенно очевидно, что степень доверия к результатам математического моделирования зависит от того, насколько хорошо обоснована адекватность математической модели и верификация разностной схемы. При этом молчаливо предполагается, что программы для ЭВМ не содержат «программистских» ошибок. Прежде чем использовать разностную схему на практике, необходимо исследовать её свойства, к которым относятся аппроксимация, устойчивость, монотонность, дистракция разрывов, интегральная и локальная консервативность, наконец, экономичность. Вторым этапом верификации математической модели является проверка

отличия численного решения от точного решения тестовых задач. В механике сплошных сред такими задачами являются распространение стационарных ударных волн, волн разрежения в покоящемся веществе, взаимодействие ударной волны с контактной границей, автомодельные решения.

Для оценки погрешности математического моделирования модель МСС является столь же важной, а часто и более важной, чем математическая модель. Главным критерием точности математического моделирования является описание физического эксперимента. Для этого одинаково важны и точность модели МСС и точность математической модели.

Разработка математических моделей и комплексов программ для ЭВМ в некоторых случаях эквивалентна созданию экспериментальных установок. В настоящее время вычислительный эксперимент успешно заменяет многие дорогостоящие натурные эксперименты. Следует заметить, что физический эксперимент сам нуждается в математической обработке результатов. При этом речь идет не о первичной, например, статистической обработке результатов измерений, а об определении значений величин, не измеряемых непосредственно в эксперименте, таких как температура, плотность, энергия и др. Во многих современных физических экспериментах сплошная среда подвергается сверхсильным воздействиям, при которых прямое измерение физических характеристик затруднено или вообще невозможно. Информация из таких экспериментов восстанавливается по косвенным данным с помощью математического моделирования.

В данной монографии излагаются относительно простые идеи и приёмы, которые уже сформировались и прошли практическую проверку. Их совокупность составляет азбуку численных методов механики взрыва.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Грант № 17-01-00873.

Глава 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

§ 1. Сплошная среда

Любое тело – жидкость, газ, твердое тело, плазма, состоит из микро-частиц (молекулы, атомы, электроны, ионы и т. д.), каждая из которых имеет свою массу, скорость и внутреннюю энергию. Атомно-молекулярные модели не могут использоваться для моделирования поведения веществ в технологических процессах, поведения конструкций или машин, имеющих промышленные размеры примерно 10 см или больше. В этом случае количество микро-частиц в рассматриваемом объекте столь велико, что современные электронные вычислительные машины (ЭВМ), работающие со скоростью 10^{17} операций в секунду за обозримое время не могут рассчитать характеристики такого тела или процесса. Этим объясняется широкое применение моделей механики сплошной среды (МСС), основанных на понятии сплошной среды и принципе инвариантности к преобразованию Галилея. Модели МСС состоят из трех фрагментов:

- Законы сохранения массы, импульса и энергии сплошной среды в виде дифференциальных уравнений в частных производных.

- Уравнения состояния (УРС), связывающие термодинамические характеристики вещества: давление P , плотность ρ , удельную внутреннюю энергию E , температуру T , энтропию S , энтальпию H , свободную энергию F и т. д.

- Определяющие уравнения, описывающие вязкость, упругость, пластичность, теплопроводность, взаимодействие вещества с различными излучениями и т. д.

До середины XX столетия развитие МСС шло по пути построения аналитических решений, которые, как правило, удавалось построить для упрощенных постановок задач и упрощенных свойств веществ. Ценность аналитических решений несомненна [1]. Однако в начале XXI века их роль стала изменяться. Поскольку к 2010 г. резко возросло быстродействие ЭВМ, то аналитические решения из основного средства решения технических проблем превратились в основное средство контроля точности методов математического моделирования, которые стали играть определяющую роль при разработке новых конструкций летательных аппаратов и кораблей, новых технологий и технологических процессов, изделий атомного машиностроения и т. д.

Исторически так сложилось, что одновременно существовало два подхода к описанию поведения вещества. В первом подходе вещество рассматривалось как сплошная среда. Это макроуровень. Во втором

подходе вещество рассматривалось как дискретная среда микрочастиц. Это микроуровень. Между этими уровнями могут существовать промежуточные уровни рассмотрения вещества – мезоуровни (модели мезомеханики [2–4], молекулярной динамики [5, 6], методы частиц [7–10] и т. д.).

Рассмотрим дискретную среду микрочастиц. Пусть в некоторый произвольный момент времени t в некотором произвольном конечном объеме $\Delta\theta$ находится n микрочастиц. Каждая частица имеет номер ν , массу m_ν , скорость \bar{U}_ν и удельную внутреннюю энергию E_ν . Масса ΔM , количество движения $\Delta\bar{K}$ и энергия ΔQ всех частиц в объеме $\Delta\theta$ определяются суммированием

$$\Delta M = \sum_{\nu=1}^n m_\nu, \quad \Delta\bar{K} = \sum_{\nu=1}^n m_\nu \bar{U}_\nu, \quad \Delta Q = \sum_{\nu=1}^n m_\nu (E_\nu + 0,5\bar{U}_\nu^2). \quad (1.1)$$

Назовём вещество в объёме $\Delta\theta$ макрочастицей. Средние плотность, скорость и удельная энергия вещества макрочастицы определяются уравнениями

$$\rho_c = \frac{\Delta M}{\Delta\theta}, \quad \bar{U}_c = \frac{\Delta\bar{K}}{\Delta M}, \quad \varepsilon_c = \frac{\Delta Q}{\Delta M}. \quad (1.2)$$

Скорость \bar{U}_c является поступательной скоростью макрочастицы $\Delta\theta$. Удельная энергия макрочастицы состоит из удельной внутренней энергии E_c и удельной кинетической энергии $0,5\bar{U}_c^2$. Из (1.1) и (1.2) следует

$$\bar{U}_c = \sum_{\nu=1}^n \eta_\nu \bar{U}_\nu, \quad (1.3)$$

$$E_c + 0,5\bar{U}_c^2 = \sum_{\nu=1}^n \eta_\nu (E_\nu + 0,5\bar{U}_\nu^2). \quad (1.4)$$

Отношение $\eta_\nu = \frac{m_\nu}{\Delta M}$ называется массовой концентрацией ν -й микрочастицы. Используя уравнение (1.3), а также условие, которому удовлетворяют массовые концентрации η_ν

$$\sum_{\nu=1}^n \eta_\nu = 1,$$

запишем (1.4) в виде

$$E_c = \sum_{\nu=1}^n \eta_\nu (E_\nu + 0,5(\bar{U}_\nu - \bar{U}_c)^2). \quad (1.5)$$

Из (1.5) следует, что при переходе от микроуровня к макроуровню удельная внутренняя энергия возрастает. Объясняется это достаточно просто. На микроуровне скорости ν -х частиц \bar{U}_ν в объеме $\Delta\theta$ раз-

личаются по величине и направлению, а на макроуровне все части массы ΔM двигаются с одной и той же скоростью \bar{U}_c . Кинетическая энергия каждой микрочастицы необратимо перешла в часть внутренней энергии макрочастицы. Этот переход сопровождается ростом энтропии. Именно поэтому

$$E_c > \sum_{v=1}^n \eta_v E_v.$$

Подчеркнём, что переход от модели микроуровня к модели макроуровня вызван необходимостью решения технических проблем с помощью моделей, которые по силам современным ЭВМ. Каждый такой переход происходит в фиксированный момент времени и означает попытку создания такой модели, которая по-возможности сохранила бы свойства вещества на микроуровне и в то же время позволила проводить расчёты макропроцессов на ЭВМ.

Формулы (1.2) определяют постоянные по объёму $\Delta\theta$ значения ρ_c , \bar{U}_c и ε_c . В основе модели сплошной среды лежит

Постулат № 1. Существуют пределы при $\Delta\theta \rightarrow 0$, $\Delta M \rightarrow 0$

$$\rho = \left(\frac{\partial M}{\partial \theta} \right)_t = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta \theta}, \quad \bar{U} = \left(\frac{\partial \bar{K}}{\partial M} \right)_t = \lim_{\Delta M \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{K}}{\Delta M}, \quad \varepsilon = \left(\frac{\partial Q}{\partial M} \right)_t = \lim_{\Delta M \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta M}.$$

Поскольку момент времени t и объём $\Delta\theta$ для перехода от микроуровня к макроуровню были выбраны произвольно, то законы сохранения массы, импульса и энергии при таком переходе справедливы в любой момент времени в любой точке пространства, а сами функции ρ , \bar{U} , ε непрерывны в четырёхмерном пространстве x, y, z, t . Различные приёмы, применяемые при переходе от дискретного к континуальному описанию вещества и получаемые модели изложены в обзоре [11].

§ 2. Движения сплошной среды

Согласно второму закону Ньютона любая не равная нулю сила, действующая в сплошной среде, вызывает ускорение в точке её приложения. Сплошная среда состоит из континуума точек. Траектория любой произвольно выбранной точки с координатами x_0, y_0, z_0 в момент t_0 при $t > t_0$ определяется системой уравнений

$$x = x(t, x_0, y_0, z_0), \quad y = y(t, x_0, y_0, z_0), \quad z = z(t, x_0, y_0, z_0). \quad (1.6)$$

При $t > t_0$ координаты x, y, z характеризуют изменённое положение выбранной точки и называются эйлеровыми координатами. Координаты

x_0, y_0, z_0 , определяющие положение избранной точки в момент t_0 и не изменяющиеся при движении этой точки, называются лагранжевыми координатами. Запишем систему уравнений (1.6) в дифференциалах

$$\begin{aligned} dx &= \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0} dt + \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right)_{t_0 y_0 z_0} dx_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial y_0} \right)_{t_0 x_0 z_0} dy_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial z_0} \right)_{t_0 x_0 y_0} dz_0, \\ dy &= \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0} dt + \left(\frac{\partial y}{\partial x_0} \right)_{t_0 y_0 z_0} dx_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial y_0} \right)_{t_0 x_0 z_0} dy_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial z_0} \right)_{t_0 x_0 y_0} dz_0, \\ dz &= \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0} dt + \left(\frac{\partial z}{\partial x_0} \right)_{t_0 y_0 z_0} dx_0 + \left(\frac{\partial z}{\partial y_0} \right)_{t_0 x_0 z_0} dy_0 + \left(\frac{\partial z}{\partial z_0} \right)_{t_0 x_0 y_0} dz_0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Система этих уравнений содержит 12 производных. Три производных при dt определяют компоненты вектора скорости $U_x = \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0}$,

$U_y = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0}$, $U_z = \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0}$. Следует помнить, что в (1.7) производные

x, y, z по t берутся при постоянных значениях x_0, y_0, z_0 . Компоненты скорости U_x, U_y, U_z зависят от t, x, y, z

$$U_x = U_x(t, x, y, z), \quad U_y = U_y(t, x, y, z), \quad U_z = U_z(t, x, y, z).$$

Запишем эту систему в дифференциалах

$$\begin{aligned} dU_x &= \left(\frac{\partial U_x}{\partial t} \right)_{xyz} dt + \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \right)_{tyz} dx + \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} \right)_{txz} dy + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} \right)_{txy} dz, \\ dU_y &= \left(\frac{\partial U_y}{\partial t} \right)_{xyz} dt + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} \right)_{tyz} dx + \left(\frac{\partial U_y}{\partial y} \right)_{txz} dy + \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} \right)_{txy} dz, \\ dU_z &= \left(\frac{\partial U_z}{\partial t} \right)_{xyz} dt + \left(\frac{\partial U_z}{\partial x} \right)_{tyz} dx + \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} \right)_{txz} dy + \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right)_{txy} dz. \end{aligned}$$

Производные при dx, dy, dz образуют тензор скоростей смещений

$$\dot{T} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial U_x}{\partial x} & \frac{\partial U_x}{\partial y} & \frac{\partial U_x}{\partial z} \\ \frac{\partial U_y}{\partial x} & \frac{\partial U_y}{\partial y} & \frac{\partial U_y}{\partial z} \\ \frac{\partial U_z}{\partial x} & \frac{\partial U_z}{\partial y} & \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{array} \right\|. \quad (1.8)$$

Тензор \dot{T} определяет состояние среды в точке t , x , y , z и не более. Ни о каких конечных изменениях объёма или формы речи не идёт.

§ 3. Инварианты тензора

В механике сплошных сред свойства вещества, характеристики его состояния и движения среды описываются тензорами. Прежде, чем приступить к изучению моделей сплошной среды, рассмотрим некоторые свойства тензоров.

Пусть в пространстве x , y , z задан вектор

$$\bar{F} = F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k}. \quad (1.9)$$

Квадрат модуля вектора \bar{F} имеет вид

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2. \quad (1.10)$$

Рассмотрим проходящую через начало вектора \bar{F} произвольно ориентированную площадку с нормалью

$$\bar{n} = n_x \bar{i} + n_y \bar{j} + n_z \bar{k}, \quad (1.11)$$

где направляющие косинусы n_x , n_y , n_z удовлетворяют уравнению

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \quad (1.12)$$

Если направление нормали \bar{n} совпадает с направлением вектора \bar{F} , модуль которого определяется из (1.10), то

$$F\bar{n} = \bar{F}. \quad (1.13)$$

Из (1.9), (1.11) и (1.13) следует

$$Fn_x \bar{i} + Fn_y \bar{j} + Fn_z \bar{k} = F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k}. \quad (1.14)$$

Умножая поочерёдно (1.14) на единичные вектора \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} , получим выражения для направляющих косинусов вектора \bar{F} (1.9)

$$n_x = \frac{F_x}{F}, \quad n_y = \frac{F_y}{F}, \quad n_z = \frac{F_z}{F}. \quad (1.15)$$

Рассмотрим далее тензор

$$T = \begin{vmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{vmatrix}. \quad (1.16)$$

Из 9 компонентов тензора T составим три вектора

$$\bar{T}_x = T_{xx} \bar{i} + T_{xy} \bar{j} + T_{xz} \bar{k},$$

$$\bar{T}_y = T_{yx} \bar{i} + T_{yy} \bar{j} + T_{yz} \bar{k},$$

$$\bar{\mathbf{T}}_z = T_{zx} \bar{\mathbf{i}} + T_{zy} \bar{\mathbf{j}} + T_{zz} \bar{\mathbf{k}}.$$

Проекции каждого из этих векторов на нормаль $\bar{\mathbf{n}}$ пока произвольно ориентированной площадки, имеют вид

$$T_{xn} = T_{xx} n_x + T_{xy} n_y + T_{xz} n_z, \quad (1.17)$$

$$T_{yn} = T_{yx} n_x + T_{yy} n_y + T_{yz} n_z, \quad (1.18)$$

$$T_{zn} = T_{zx} n_x + T_{zy} n_y + T_{zz} n_z. \quad (1.19)$$

Образуем из проекций T_{xn} , T_{yn} , T_{zn} ещё один вектор

$$\bar{\mathbf{T}} = T_{xn} \bar{\mathbf{i}} + T_{yn} \bar{\mathbf{j}} + T_{zn} \bar{\mathbf{k}}. \quad (1.20)$$

Будем менять ориентацию площадки. При этом будут изменяться и значения n_x , n_y , n_z в (1.17)–(1.19). Среди возможных ориентаций выберем такую, при которой направление нормали $\bar{\mathbf{n}}$ совпадает с направлением вектора $\bar{\mathbf{T}}$ (1.20). Прделав такие же преобразования, как в случае вектора $\bar{\mathbf{F}}$ (1.9), получим по аналогии с (1.15) три соотношения

$$T_{xn} = T_n n_x, \quad T_{yn} = T_n n_y, \quad T_{zn} = T_n n_z. \quad (1.21)$$

Из (1.17)–(1.21) следует система уравнений

$$(T_{xx} - T_n) n_x + T_{xy} n_y + T_{xz} n_z = 0, \quad (1.22)$$

$$T_{yx} n_x + (T_{yy} - T_n) n_y + T_{yz} n_z = 0, \quad (1.23)$$

$$T_{zx} n_x + T_{zy} n_y + (T_{zz} - T_n) n_z = 0, \quad (1.24)$$

которая содержит неизвестные значения n_x , n_y , n_z и величину T_n . Остальные величины, входящие в уравнения (1.22)–(1.24), являются известными компонентами тензора \mathbf{T} . Будем считать T_n параметром. Поскольку справедливо условие (1.12), то система (1.22)–(1.24) не имеет тривиального решения. Необходимым условием существования нетривиального решения системы (1.22)–(1.24) является равенство нулю определителя из коэффициентов этой системы

$$D = T_n^3 - T_n^2 I_1 + T_n I_2 - I_3 = 0, \quad (1.25)$$

где

$$I_1 = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}, \quad (1.26)$$

$$I_2 = T_{xx} T_{yy} + T_{yy} T_{zz} + T_{zz} T_{xx} - T_{xy} T_{yx} - T_{yz} T_{zy} - T_{zx} T_{xz}, \quad (1.27)$$

$$I_3 = T_{xx} T_{yy} T_{zz} + T_{xy} T_{yz} T_{zx} + T_{yx} T_{zy} T_{xy} - T_{xx} T_{yz} T_{zy} - T_{yy} T_{xz} T_{zx} - T_{zz} T_{xy} T_{yx}. \quad (1.28)$$

Корни уравнения (1.25), которые дальше будем обозначать T_1 , T_2 , T_3 , называются главными значениями тензора \mathbf{T} (1.16). Величины I_1 , I_2 , I_3 не зависят от n_x , n_y , n_z , т. е. не зависят от направления, и поэтому они называются инвариантами тензора \mathbf{T} . Поскольку величины T_{xx} , T_{yy} , T_{zz} ,

$T_{xy}, T_{yz}, T_{zx}, T_{yx}, T_{zy}, T_{xz}$, входящие в выражения инвариантов (1.26)–(1.28), известны, то найти T_1, T_2, T_3 из уравнения (1.25) является делом техники. Поэтому далее будем считать, что T_1, T_2, T_3 найдены. Запишем (1.25) в виде

$$(T_n - T_1)(T_n - T_2)(T_n - T_3) = 0.$$

Если это уравнение записать в форме (1.25), то инварианты выражаются через главные значения тензора T_1, T_2, T_3

$$\begin{aligned} I_1 &= T_1 + T_2 + T_3, \\ I_2 &= T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1, \\ I_3 &= T_1 T_2 T_3. \end{aligned}$$

§ 4. Главные оси тензора

Для нахождения направляющих косинусов главных осей тензора T вернёмся к системе уравнений (1.22)–(1.24). После того как найдены главные значения T_1, T_2, T_3 , подставим каждое из них попеременно в (1.22)–(1.24) и получим три системы уравнений для n_x, n_y, n_z трёх главных направлений (трёх осей, $i=1, 2, 3$) тензора T

$$(T_{xx} - T_i)n_{xi} + T_{xy}n_{yi} + T_{xz}n_{zi} = 0, \quad (1.29)$$

$$T_{yx}n_{xi} + (T_{yy} - T_i)n_{yi} + T_{yz}n_{zi} = 0, \quad (1.30)$$

$$T_{zx}n_{xi} + T_{zy}n_{yi} + (T_{zz} - T_i)n_{zi} = 0. \quad (1.31)$$

Определим направляющие косинусы первого главного направления ($i=1$). Из уравнений (1.30) и (1.31) исключим n_{z1} . Для этого умножим (1.30) на $T_{zz} - T_1$, (1.31) на T_{yz} и вычтем друг из друга. В результате получим зависимость n_{y1} от n_{x1}

$$n_{y1} = n_{x1} A_1, \quad (1.32)$$

где

$$A_1 = \frac{T_{xz} T_{yz} - (T_{zz} - T_1) T_{yx}}{(T_{yy} - T_1)(T_{zz} - T_1) - T_{yz} T_{zy}}. \quad (1.33)$$

Затем из тех же уравнений (1.30) и (1.31) исключим n_{y1} . В результате получим

$$n_{z1} = n_{x1} B_1, \quad (1.34)$$

где

$$B_1 = \frac{T_{xy} T_{yz} - (T_{yy} - T_1) T_{xz}}{(T_{yy} - T_1)(T_{zz} - T_1) - T_{yz} T_{zy}}. \quad (1.35)$$

Подставив n_{y1} (1.32) и n_{z1} (1.34) в (1.12), получим выражение n_{x1} через известные величины

$$n_{x1} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_1^2 + B_1^2}}. \quad (1.36)$$

После определения n_{x1} значения n_{y1} , n_{z1} находятся из (1.32) и (1.34). В выражения A_1 и B_1 входит значение T_1 , которое найдено после решения уравнения (1.25).

Совершенно аналогично преобразуя уравнения (1.29) и (1.31), получим выражение n_{x2} , n_{y2} , n_{z2}

$$n_{x2} = n_{y2} A_2, \quad n_{y2} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_2^2 + B_2^2}}, \quad n_{z2} = n_{y2} B_2, \quad (1.37)$$

где

$$A_2 = \frac{T_{xz} T_{yz} - (T_{zz} - T_2) T_{xy}}{(T_{xx} - T_2)(T_{zz} - T_2) - T_{xz} T_{zx}}, \quad B_2 = \frac{T_{xy} T_{xz} - (T_{xx} - T_2) T_{yz}}{(T_{xx} - T_2)(T_{zz} - T_2) - T_{xz} T_{zx}}. \quad (1.38)$$

Наконец, повторим аналогичные преобразования уравнений (1.29) и (1.30). В результате получим

$$n_{x3} = n_{z3} A_3, \quad n_{y3} = n_{z3} B_3, \quad n_{z3} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_3^2 + B_3^2}}, \quad (1.39)$$

где

$$A_3 = \frac{T_{xy} T_{yz} - (T_{yy} - T_3) T_{xz}}{(T_{yy} - T_3)(T_{xx} - T_3) - T_{yx} T_{xy}}, \quad B_3 = \frac{T_{xz} T_{yx} - (T_{xx} - T_3) T_{yz}}{(T_{yy} - T_3)(T_{xx} - T_3) - T_{yx} T_{xy}}. \quad (1.40)$$

§ 5. Тензоры скоростей деформаций и скоростей поворотов

Разложим фундаментальный тензор скоростей смещений \dot{T} (1.8) на тензор скоростей деформаций \dot{T}_ε и тензор скоростей поворотов \dot{T}_ω

$$\dot{T} = \dot{T}_\varepsilon + \dot{T}_\omega. \quad (1.41)$$

Введём обозначения компонентов тензоров \dot{T}_ε и \dot{T}_ω

$$\dot{\mathbf{T}}_{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{yx} & \dot{\varepsilon}_{yy} & \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} & \dot{\gamma}_{zy} & \dot{\varepsilon}_{zz} \end{vmatrix}, \quad \dot{\mathbf{T}}_{\omega} = \begin{vmatrix} 0 & \dot{\omega}_{xy} & \dot{\omega}_{xz} \\ \dot{\omega}_{yx} & 0 & \dot{\omega}_{yz} \\ \dot{\omega}_{zx} & \dot{\omega}_{zy} & 0 \end{vmatrix}. \quad (1.42)$$

Точка над величиной означает дифференцирование по t при постоянных x_0, y_0, z_0 . Из (1.8), (1.41), (1.42) следует, что компоненты тензоров $\dot{\mathbf{T}}, \dot{\mathbf{T}}_{\varepsilon}, \dot{\mathbf{T}}_{\omega}$ связаны уравнениями

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} = \dot{\varepsilon}_{xx}, \quad \frac{\partial U_y}{\partial y} = \dot{\varepsilon}_{yy}, \quad \frac{\partial U_z}{\partial z} = \dot{\varepsilon}_{zz}, \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial y} = \dot{\gamma}_{xy} + \dot{\omega}_{xy}, \quad \frac{\partial U_x}{\partial z} = \dot{\gamma}_{xz} + \dot{\omega}_{xz}, \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial U_y}{\partial x} = \dot{\gamma}_{yx} + \dot{\omega}_{yx}, \quad \frac{\partial U_y}{\partial z} = \dot{\gamma}_{yz} + \dot{\omega}_{yz}, \quad (1.45)$$

$$\frac{\partial U_z}{\partial x} = \dot{\gamma}_{zx} + \dot{\omega}_{zx}, \quad \frac{\partial U_z}{\partial y} = \dot{\gamma}_{zy} + \dot{\omega}_{zy}. \quad (1.46)$$

Рассмотрим вначале тензор скоростей поворотов $\dot{\mathbf{T}}_{\omega}$. Пусть при вращении тела его объём и форма не изменяются. Тогда компоненты тензора скоростей деформаций равны нулю

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \dot{\varepsilon}_{yy} = \dot{\varepsilon}_{zz} = 0, \quad \dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{yx} = \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zx} = \dot{\gamma}_{zy} = 0,$$

а компоненты тензора скоростей поворотов согласно (1.44) – (1.46) имеют вид

$$\dot{\omega}_{xy} = \frac{\partial U_x}{\partial y}, \quad \dot{\omega}_{xz} = \frac{\partial U_x}{\partial z}, \quad \dot{\omega}_{yx} = \frac{\partial U_y}{\partial x}, \quad \dot{\omega}_{yz} = \frac{\partial U_y}{\partial z}, \quad \dot{\omega}_{zx} = \frac{\partial U_z}{\partial x}, \quad \dot{\omega}_{zy} = \frac{\partial U_z}{\partial y}. \quad (1.47)$$

Рассмотрим в качестве примера поворот вокруг оси Oz .

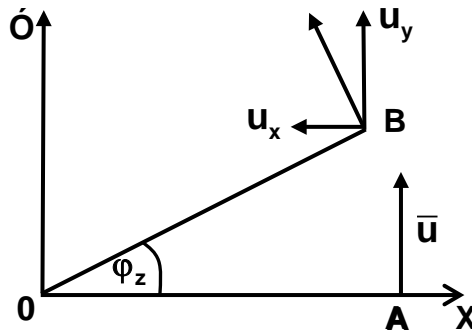


Рис. 1.1 Поворот отрезка OA на угол φ .

При повороте абсолютно жёсткого тела на угол φ_z вокруг оси Oz точка A , находящаяся на расстоянии R от оси вращения, переместится в точку B (рис. 1.1). При этом компоненты скорости \bar{U} и координаты точки изменятся на величины

$$\begin{aligned}\Delta U_x &= -U \sin \varphi_z, & \Delta U_y &= U (\cos \varphi_z - 1), \\ \Delta x &= R (\cos \varphi_z - 1), & \Delta y &= R \sin \varphi_z.\end{aligned}$$

Исключив в этих выражениях $\sin \varphi_z$ и $\cos \varphi_z - 1$ и перейдя к пределу при $\varphi \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, получим

$$-\frac{\partial U_x}{\partial y} = \frac{U}{R}, \quad \frac{\partial U_y}{\partial x} = \frac{U}{R}.$$

Сложим эти выражения и разделим на два

$$\frac{U}{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right). \quad (1.48)$$

Из (1.47), (1.48) и из теории круговых движений ($U = R\dot{\varphi}$) следует

$$\dot{\varphi}_z = \dot{\omega}_{yx} = -\dot{\omega}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right). \quad (1.49)$$

Аналогично получаются

$$\dot{\varphi}_y = \dot{\omega}_{xz} = -\dot{\omega}_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right), \quad \dot{\varphi}_x = \dot{\omega}_{yz} = -\dot{\omega}_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial y} \right). \quad (1.50)$$

Если поворотов нет, то все $\omega_{ij} = 0$ и из (1.49) и (1.50) следуют условия отсутствия поворотов

$$\frac{\partial U_x}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U_y}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial y} = 0. \quad (1.51)$$

При их выполнении течение называют потенциальным (ламинарным). Если же хоть одно из условий (1.51) нарушено, течение является вихревым. Большинство двумерных и трёхмерных движений сплошных сред являются вихревыми независимо от агрегатного состояния вещества.

§ 6. Шаровой тензор и девиатор скоростей деформаций

Изменение объёма тела при сохранении его формы называется **дилатацией**. Изменение формы тела при сохранении его объёма называется **дисторсией**. Скорость дилатации определяется диагональными членами $\dot{\epsilon}_{xx}$, $\dot{\epsilon}_{yy}$, $\dot{\epsilon}_{zz}$ тензора \dot{T}_ϵ , скорость дисторсии зависит от остальных

членов тензора \dot{T}_ε , скорость вращения определяется компонентами тензора \dot{T}_ω . Разделим тензор \dot{T}_ε на шаровой тензор $\dot{T}_{\varepsilon 0}$ и девиатор \dot{D}_ε

$$\dot{T}_\varepsilon = \dot{T}_{\varepsilon 0} + \dot{D}_\varepsilon,$$

где

$$\dot{T}_{\varepsilon 0} = \begin{vmatrix} \dot{\varepsilon}_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\varepsilon}_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varepsilon}_{cp} \end{vmatrix}, \quad \dot{D}_\varepsilon = \begin{vmatrix} \dot{e}_{xx} & \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{yx} & \dot{e}_{yy} & \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} & \dot{\gamma}_{zy} & \dot{e}_{zz} \end{vmatrix}, \quad (1.52)$$

$$\dot{e}_{xx} = \dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon}_{cp}, \quad \dot{e}_{yy} = \dot{\varepsilon}_{yy} - \dot{\varepsilon}_{cp}, \quad \dot{e}_{zz} = \dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{\varepsilon}_{cp}, \quad (1.53)$$

$$\dot{\varepsilon}_{cp} = \frac{1}{3}(\dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy} + \dot{\varepsilon}_{zz}). \quad (1.54)$$

Скорость дилатации $\dot{\varepsilon}_{cp}$ выразим через скорость изменения удельного объёма \dot{V} . Для этого рассмотрим элементарный прямоугольный параллелепипед со сторонами dx , dy , dz , в котором находится масса вещества dm . Удельный объём определяется выражением

$$V = \frac{dx dy dz}{dm}. \quad (1.55)$$

В [12] показано, что при отсутствии сдвигов и поворотов

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right)_{t y_0 z_0} dx_0, \quad dy = \left(\frac{\partial y}{\partial y_0} \right)_{t x_0 z_0} dy_0, \quad dz = \left(\frac{\partial z}{\partial z_0} \right)_{t x_0 y_0} dz_0.$$

Подставив эти dx , dy , dz в (1.55), получим

$$V = \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right)_{t y_0 z_0} \left(\frac{\partial y}{\partial y_0} \right)_{t x_0 z_0} \left(\frac{\partial z}{\partial z_0} \right)_{t x_0 y_0} \frac{\partial x_0 \partial y_0 \partial z_0}{dm}.$$

Продифференцировав V по t и приняв во внимание, что

$$\frac{\partial U_x}{\partial x_0} = \frac{\partial U_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial U_y}{\partial y_0} = \frac{\partial U_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial U_z}{\partial z_0} = \frac{\partial U_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z_0},$$

получим выражение для \dot{V}

$$\dot{V} = \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \frac{dx dy dz}{dm}. \quad (1.56)$$

Подставив в (1.56) выражения (1.43), (1.54) и (1.55), получим зависимость $\dot{\varepsilon}_{cp}$ от \dot{V} и V

$$\dot{\mathbf{e}}_{\text{cp}} = \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V}. \quad (1.57)$$

Из (1.43), (1.53), (1.54) и (1.57) следуют выражения для диагональных членов девиатора скоростей деформаций $\dot{\mathbf{D}}_{\varepsilon}$

$$\dot{e}_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V}, \quad \dot{e}_{yy} = \frac{\partial U_y}{\partial y} - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V}, \quad \dot{e}_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z} - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V}. \quad (1.58)$$

Просуммировав выражения (1.58) получим в силу (1.54), (1.56) и (1.57) условие, которому должны удовлетворять \dot{e}_{xx} , \dot{e}_{yy} , \dot{e}_{zz}

$$\dot{e}_{xx} + \dot{e}_{yy} + \dot{e}_{zz} = 0.$$

Выражения для недиагональных членов девиатора скоростей деформаций получаются после подстановки $\dot{\omega}_{ij}$ из (1.49), (1.50) в уравнения, связывающие $\dot{\gamma}_{ij}$ и $\dot{\omega}_{ij}$ (1.44)–(1.46) ($i = x, y, z, j = x, y, z, i \neq j$).

$$\dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right), \quad (1.59)$$

$$\dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right), \quad (1.60)$$

$$\dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right). \quad (1.61)$$

Шесть компонентов девиатора скоростей деформаций $\dot{\gamma}_{yx}$, $\dot{\gamma}_{zx}$, $\dot{\gamma}_{zy}$, $\dot{\gamma}_{xy}$, $\dot{\gamma}_{xz}$, $\dot{\gamma}_{yz}$ определяют скорость **дисторсии**, то есть скорость изменения формы тела.

§ 7. Главные оси девиатора скоростей деформаций

Выражения для косинусов трёх главных осей тензора \mathbf{T} (1.32)–(1.40) являются общими. Чтобы получить выражения для главных осей девиатора скоростей деформации $\dot{\mathbf{D}}_{\varepsilon}$, нужно заменить члены T_{ij} тензора \mathbf{T} членами \dot{e}_{ii} и $\dot{\gamma}_{ij}$ (1.53). В результате выражения косинусов первой главной оси тензора $\dot{\mathbf{D}}_{\varepsilon}$ с учётом того, что этот тензор симметричный, имеют вид

$$n_{x1} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_{1e}^2 + B_{1e}^2}}, \quad n_{y1} = n_{x1} A_{1e}, \quad n_{z1} = n_{x1} B_{1e},$$

где

$$A_{1e} = \frac{\dot{\gamma}_{xz}\dot{\gamma}_{yz} - (\dot{e}_{zz} - \dot{e}_1)\dot{\gamma}_{yx}}{(\dot{e}_{yy} - \dot{e}_1)(\dot{e}_{zz} - \dot{e}_1) - \dot{\gamma}_{yz}^2}, \quad B_{1e} = \frac{\dot{\gamma}_{xy}\dot{\gamma}_{yz} - (\dot{e}_{yy} - \dot{e}_1)\dot{\gamma}_{xz}}{(\dot{e}_{yy} - \dot{e}_1)(\dot{e}_{zz} - \dot{e}_1) - \dot{\gamma}_{yz}^2}. \quad (1.62)$$

Косинусы второй главной оси тензора \dot{D}_e имеют вид

$$n_{x2} = n_{y2}A_{2e}, \quad n_{y2} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_{2e}^2 + B_{2e}^2}}, \quad n_{z2} = n_{y2}B_{2e},$$

где

$$A_{2e} = \frac{\dot{\gamma}_{xz}\dot{\gamma}_{yz} - (\dot{e}_{zz} - \dot{e}_2)\dot{\gamma}_{xy}}{(\dot{e}_{xx} - \dot{e}_2)(\dot{e}_{zz} - \dot{e}_2) - \dot{\gamma}_{xz}^2}, \quad B_{2e} = \frac{\dot{\gamma}_{xy}\dot{\gamma}_{xz} - (\dot{e}_{xx} - \dot{e}_2)\dot{\gamma}_{yz}}{(\dot{e}_{xx} - \dot{e}_2)(\dot{e}_{zz} - \dot{e}_2) - \dot{\gamma}_{xz}^2}. \quad (1.63)$$

Наконец, косинусы третьей главной оси тензора \dot{D}_e имеют вид

$$n_{x3} = n_{z3}A_{3e}, \quad n_{y3} = n_{z3}B_{3e}, \quad n_{z3} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_{3e}^2 + B_{3e}^2}},$$

где

$$A_{3e} = \frac{\dot{\gamma}_{xy}\dot{\gamma}_{yz} - (\dot{e}_{yy} - \dot{e}_3)\dot{\gamma}_{xz}}{(\dot{e}_{yy} - \dot{e}_3)(\dot{e}_{xx} - \dot{e}_3) - \dot{\gamma}_{xy}^2}, \quad B_{3e} = \frac{\dot{\gamma}_{xz}\dot{\gamma}_{yx} - (\dot{e}_{xx} - \dot{e}_3)\dot{\gamma}_{yz}}{(\dot{e}_{yy} - \dot{e}_3)(\dot{e}_{xx} - \dot{e}_3) - \dot{\gamma}_{xy}^2}. \quad (1.64)$$

§ 8. Напряжения

Объектом механики сплошных сред являются процессы, протекающие в газах, жидкостях, твёрдых телах и плазме. Различные типы сплошных сред характеризуются различными силами взаимодействия между соседними частицами вещества. Эти силы действуют на некоторых площадках. Сила, действующая на единичную площадку, называется **напряжением**. Напряжение является характеристикой состояния вещества.

Пусть некоторая сила \bar{F} приложена в точке x_0, y_0, z_0, t_0 . Спроектируем эту силу на три площадки Π_x, Π_y, Π_z , ортогональные соответственно осям Ox, Oy, Oz . Составляющие силы \bar{F} будем обозначать двумя буквами. Первая буква будет означать, что сила проектируется на площадку ортогональную направлению, указанному буквой, а вторая буква, у составляющих силы – координатную ось, вдоль которой направлена эта составляющая. Т. о. получается три представления силы \bar{F}

$$\bar{F}_x = \sigma_{xx}\bar{i} + \tau_{xy}\bar{j} + \tau_{xz}\bar{k}, \quad \bar{F}_y = \tau_{yx}\bar{i} + \sigma_{yy}\bar{j} + \tau_{yz}\bar{k}, \quad \bar{F}_z = \tau_{zx}\bar{i} + \tau_{zy}\bar{j} + \sigma_{zz}\bar{k}.$$

Эти выражения содержат три нормальных $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ и шесть касательных $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ к площадкам Π_x, Π_y, Π_z составляющих силы \bar{F} , приложенной к точке x_0, y_0, z_0 . Они образуют тензор напряжений

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}.$$

В механике давление P определяется выражением

$$P = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}). \quad (1.65)$$

Разделим тензор \mathbf{T}_σ на шаровой тензор $\mathbf{T}_{\sigma 0}$ и девиатор \mathbf{D}_σ

$$\mathbf{T}_{\sigma 0} = \begin{vmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{vmatrix}, \quad \mathbf{D}_\sigma = \begin{vmatrix} S_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & S_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & S_{zz} \end{vmatrix},$$

где

$$S_{xx} = \sigma_{xx} + P, \quad S_{yy} = \sigma_{yy} + P, \quad S_{zz} = \sigma_{zz} + P. \quad (1.66)$$

Если девиатор напряжений $\mathbf{D}_\sigma = \mathbf{0}$, то среда называется идеальной, если $\mathbf{D}_\sigma \neq \mathbf{0}$, то неидеальной.

Т. о. в идеальной среде все компоненты тензора \mathbf{D}_σ равны нулю. Из условия

$$S_{xx} = 0, \quad S_{yy} = 0, \quad S_{zz} = 0$$

и из (1.65) и (1.66) следует $P = -\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = -\sigma_{zz}$. Иными словами, давление инвариантно относительно ориентации площадки, на которую оно действует.

Из (1.65) и (1.66) следует также условие, которому удовлетворяют диагональные элементы девиатора напряжений

$$S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} = 0. \quad (1.67)$$

По аналогии с тензором \mathbf{T} (1.16) из уравнения

$$S_v^3 - S_v^2 J_1(\mathbf{D}_\sigma) + S_v J_2(\mathbf{D}_\sigma) - J_3(\mathbf{D}_\sigma) = 0$$

находятся главные значения девиатора напряжений \mathbf{D}_σ , S_1 , S_2 , S_3 . Инварианты $J_1(\mathbf{D}_\sigma)$, $J_2(\mathbf{D}_\sigma)$, $J_3(\mathbf{D}_\sigma)$ следующим образом выражаются через компоненты девиатора напряжений

$$\begin{aligned} J_1(\mathbf{D}_\sigma) &= S_{xx} + S_{yy} + S_{zz}, \\ J_2(\mathbf{D}_\sigma) &= S_{xx} S_{yy} + S_{yy} S_{zz} + S_{zz} S_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ J_3(\mathbf{D}_\sigma) &= S_{xx} S_{yy} S_{zz} + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - S_{xx} \tau_{yz}^2 - S_{yy} \tau_{zx}^2 - S_{zz} \tau_{xy}^2. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Если перейти к главным напряжениям, то инварианты девиатора напряжений \mathbf{D}_σ запишутся в виде

$$J_1(D_\sigma) = S_1 + S_2 + S_3, \quad (1.69)$$

$$J_2(D_\sigma) = S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1, \quad (1.70)$$

$$J_3(D_\sigma) = S_1 S_2 S_3.$$

Из (1.67), (1.68) и (1.69) следует

$$J_1(D_\sigma) = 0. \quad (1.71)$$

С помощью (1.71) преобразуем (1.70). Для этого разделим правую часть выражения $J_2(D_\sigma)$ в (1.70) на 2 и в одну из половинок подставим поочередно

$$S_1 = -S_2 - S_3, \quad S_2 = -S_1 - S_3, \quad S_3 = -S_1 - S_2.$$

После сокращения членов с противоположными знаками выражение $J_2(D_\sigma)$ принимает вид

$$J_2(D_\sigma) = -\frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2).$$

Отношение модуля $|J_2(D_\sigma)|$ к квадрату давления P^2 называют неидеальностью среды.

Выделение давления позволяет строить уравнение состояния вещества, независимо от девиатора D_σ [12].

Главные оси девиатора напряжений получаются из выражений (1.32)–(1.40) после замены T_{ij} компонентами девиатора напряжений. Косинусы первой главной оси имеют вид

$$n_{x1} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_{1\sigma}^2 + B_{1\sigma}^2}}, \quad n_{y1} = n_{x1} A_{1\sigma}, \quad n_{z1} = n_{x1} B_{1\sigma},$$

где

$$A_{1\sigma} = \frac{\tau_{xz} \tau_{yz} - (S_{zz} - S_1) \tau_{xy}}{(S_{yy} - S_1)(S_{zz} - S_1) - \tau_{yz}^2}, \quad B_{1\sigma} = \frac{\tau_{xy} \tau_{yz} - (S_{yy} - S_1) \tau_{xz}}{(S_{yy} - S_1)(S_{zz} - S_1) - \tau_{yz}^2}. \quad (1.72)$$

Косинусы второй главной оси девиатора напряжений имеют вид

$$n_{x2} = n_{y2} A_{2\sigma}, \quad n_{y2} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_{2\sigma}^2 + B_{2\sigma}^2}}, \quad n_{z2} = n_{y2} B_{2\sigma},$$

где

$$A_{2\sigma} = \frac{\tau_{xz} \tau_{yz} - (S_{zz} - S_2) \tau_{xy}}{(S_{xx} - S_2)(S_{zz} - S_2) - \tau_{xz}^2}, \quad B_{2\sigma} = \frac{\tau_{xy} \tau_{xz} - (S_{xx} - S_2) \tau_{yz}}{(S_{xx} - S_2)(S_{zz} - S_2) - \tau_{xz}^2}. \quad (1.73)$$

Наконец, косинусы третьей главной оси девиатора напряжений D_σ имеют вид

$$n_{x3} = n_{z3} A_{3\sigma}, \quad n_{y3} = n_{z3} B_{3\sigma}, \quad n_{z3} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_{3\sigma}^2 + B_{3\sigma}^2}},$$

где

$$A_{3\sigma} = \frac{\tau_{xy} \tau_{yz} - (S_{yy} - S_3) \tau_{xz}}{(S_{yy} - S_3)(S_{xx} - S_3) - \tau_{xy}^2}, \quad B_{3\sigma} = \frac{\tau_{xz} \tau_{yx} - (S_{xx} - S_3) \tau_{yz}}{(S_{yy} - S_3)(S_{xx} - S_3) - \tau_{xy}^2}. \quad (1.74)$$

§ 9. Девиатор скоростей напряжений

Поле напряжений в окрестности точки x, y, z , определяется не только тензором напряжений T_σ , но также и тензором скоростей напряжений \dot{T}_σ

$$\dot{T}_\sigma = \begin{vmatrix} \dot{\sigma}_{xx} & \dot{\tau}_{xy} & \dot{\tau}_{xz} \\ \dot{\tau}_{yx} & \dot{\sigma}_{yy} & \dot{\tau}_{yz} \\ \dot{\tau}_{zx} & \dot{\tau}_{zy} & \dot{\sigma}_{zz} \end{vmatrix}.$$

Тензор \dot{T}_σ симметричен, т. е. $\dot{\tau}_{xy} = \dot{\tau}_{yx}$, $\dot{\tau}_{xz} = \dot{\tau}_{zx}$, $\dot{\tau}_{yz} = \dot{\tau}_{zy}$. Разделим тензор \dot{T}_σ на шаровой тензор $\dot{T}_{\sigma 0}$ и девиатор \dot{D}_σ

$$\dot{T}_{\sigma 0} = \begin{vmatrix} -\dot{P} & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{P} & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{P} \end{vmatrix}, \quad \dot{D}_\sigma = \begin{vmatrix} \dot{S}_{xx} & \dot{\tau}_{xy} & \dot{\tau}_{xz} \\ \dot{\tau}_{yx} & \dot{S}_{yy} & \dot{\tau}_{yz} \\ \dot{\tau}_{zx} & \dot{\tau}_{zy} & \dot{S}_{zz} \end{vmatrix}, \quad (1.75)$$

где

$$\dot{S}_{xx} = \dot{\sigma}_{xx} + \dot{P}, \quad \dot{S}_{yy} = \dot{\sigma}_{yy} + \dot{P}, \quad \dot{S}_{zz} = \dot{\sigma}_{zz} + \dot{P}.$$

Главные оси тензора \dot{D}_σ определяются косинусами

$$n_{x1} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_{1S}^2 + B_{1S}^2}}, \quad n_{y1} = n_{x1} A_{1S}, \quad n_{z1} = n_{x1} B_{1S},$$

$$n_{x2} = n_{y2} A_{2S}, \quad n_{y2} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_{2S}^2 + B_{2S}^2}}, \quad n_{z2} = n_{y2} B_{2S},$$

$$n_{x3} = n_{z3} A_{3S}, \quad n_{y3} = n_{z3} B_{3S}, \quad n_{z3} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_{3S}^2 + B_{3S}^2}}.$$

Вдоль первого главного направления:

$$A_{1S} = \frac{\dot{\tau}_{xz} \dot{\tau}_{yz} - (\dot{S}_{zz} - \dot{S}_1) \dot{\tau}_{xy}}{(\dot{S}_{yy} - \dot{S}_1)(\dot{S}_{zz} - \dot{S}_1) - \dot{\tau}_{yz}^2}, \quad B_{1S} = \frac{\dot{\tau}_{xy} \dot{\tau}_{yz} - (\dot{S}_{yy} - \dot{S}_1) \dot{\tau}_{xz}}{(\dot{S}_{yy} - \dot{S}_1)(\dot{S}_{zz} - \dot{S}_1) - \dot{\tau}_{yz}^2}.$$

Аналогичные выражения получаются для второй и третьей главных осей.

§ 10. Основные уравнения неидеальности

Среда называется неидеальной, если девиатор напряжений отличен от нуля. Девиаторы скоростей деформаций \dot{D}_ε , напряжений D_σ и скоростей напряжений \dot{D}_σ определяют реальные свойства вещества (сплошной среды): вязкость, упругость и пластичность. В основе моделей вязкости и упругости лежат два постулата

Постулат № 2. Главные оси девиаторов напряжений D_σ и скоростей деформаций \dot{D}_ε совпадают.

Условия совпадения главных осей девиаторов D_σ и \dot{D}_ε имеют вид

$$A_{1\sigma} = A_{1\varepsilon}, \quad B_{1\sigma} = B_{1\varepsilon}, \quad A_{2\sigma} = A_{2\varepsilon}, \quad B_{2\sigma} = B_{2\varepsilon}, \quad A_{3\sigma} = A_{3\varepsilon}, \quad B_{3\sigma} = B_{3\varepsilon}. \quad (1.76)$$

Подставив (1.72)–(1.74) и (1.62)–(1.64) в (1.76), получим уравнения вязких напряжений

$$D_\sigma = 2\mu\dot{D}_\varepsilon,$$

где μ – коэффициент вязкости. Компоненты девиаторов \dot{D}_ε и D_σ связаны уравнениями

$$S_{ii} = 2\mu\dot{\varepsilon}_{ii}, \quad \tau_{ij} = 2\mu\dot{\gamma}_{ij}. \quad (1.77)$$

где $\dot{\varepsilon}_{ii}$ определяются уравнениями (1.58), $\dot{\gamma}_{ij}$ – уравнениями (1.59)–(1.61), $i = x, y, z$, $j = x, y, z$. Коэффициент вязкости является сугубо индивидуальной характеристикой конкретного вещества (сплошной среды).

Постулат № 3. Главные оси девиаторов скоростей напряжений \dot{D}_σ и скоростей деформаций \dot{D}_ε совпадают.

Условия совпадения главных осей девиаторов \dot{D}_σ (1.75) и \dot{D}_ε (1.53) имеют вид

$$A_{1s} = A_{1\varepsilon}, \quad B_{1s} = B_{1\varepsilon}, \quad A_{2s} = A_{2\varepsilon}, \quad B_{2s} = B_{2\varepsilon}, \quad A_{3s} = A_{3\varepsilon}, \quad B_{3s} = B_{3\varepsilon}.$$

Из этих условий следует основное уравнение теории упругости – зависимость девиатора скоростей напряжений от девиатора скоростей деформаций (закон Гука)

$$\dot{D}_\sigma = 2GD_\varepsilon,$$

где G – модуль сдвига. Компоненты девиаторов \dot{D}_ε и \dot{D}_σ связаны уравнениями

$$\dot{S}_{ii} = 2G\dot{\varepsilon}_{ii}, \quad \dot{\tau}_{ij} = 2G\dot{\gamma}_{ij}.$$

§ 11. Закон сохранения массы

В пространстве x, y, z рассмотрим произвольно взятый объем Ω , в котором отсутствуют разрывы. В некоторый момент времени t_0 масса вещества, находящегося в этом объеме, равна

$$M = \int_{\Omega} \rho d\Omega,$$

где плотность ρ есть функция аргументов x, y, z, t . Скорость изменения плотности в каждой точке объема Ω есть $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{xyz}$ и, следовательно, изменение массы вещества за время Δt в объеме Ω равно

$$\Delta M = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt d\Omega. \quad (1.78)$$

Будем считать, что источников массы нет, и единственной причиной изменения массы в объеме Ω является поток вещества через поверхность F , ограничивающую объем Ω . Поток вещества за время Δt через всю поверхность равен

$$\Delta M = - \int_F \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \rho \bar{U} \cdot d\bar{F} dt.$$

Заменив в этом выражении с помощью теоремы Остроградского-Гаусса поверхностный интеграл объемным интегралом, получим

$$\Delta M = - \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \nabla \rho \bar{U} d\Omega dt. \quad (1.79)$$

Из равенства ΔM в (1.78) и (1.79) следует

$$\int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \bar{U} \right) d\Omega dt = 0.$$

Поскольку объем Ω и промежуток времени Δt являются произвольными, то подынтегральная функция равна нулю

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \bar{U} = 0. \quad (1.80)$$

Закон сохранения массы в форме (1.80) называется уравнением неразрывности.

Закон сохранения массы (1.80) может быть записан в лагранжевых координатах. Необходимым условием такой записи является введение лагранжевых координат. Однако на практике переход к лагранжевым координатам осуществляется лишь частично. При этом используется только свойство лагранжевой координаты сохраняться вдоль траектории материальной частицы. Поэтому в уравнении (1.80) члены группируются с целью образования субстанциональных производных. В оставшихся членах сохраняются производные по пространственным эйлеровым переменным. Такой прием не требует конкретного определения лагранжевых переменных.

Преобразуем уравнение (1.80) к виду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + U_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + U_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \nabla \bar{U} = 0.$$

Первые четыре члена в этом уравнении есть субстанциональная производная плотности. Используя обозначение субстанциональной производной, запишем закон сохранения в лагранжевых переменных

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \bar{U} = 0. \quad (1.81)$$

Поскольку вдоль траектории каждой частицы сохраняются её лагранжевы координаты, то полная производная ρ в уравнении (1.81) является частной производной ρ в лагранжевых координатах

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{abc}.$$

Если от ρ перейти к удельному объёму $V = \frac{1}{\rho}$, то уравнение (1.81) примет вид

$$\frac{dV}{dt} - V \nabla \bar{U} = 0.$$

§ 12. Закон сохранения количества движения

Вещество, находящееся в объеме Ω в момент t_0 , имеет количество движения $\bar{K} = \int_{\Omega} \rho \bar{U} d\Omega$. Величина $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{U})$ есть скорость изменения вектора

$\rho\bar{U}$ в каждой точке объема Ω . Если эта величина отлична от нуля, то за время Δt количество движения в рассматриваемом объеме изменится на величину

$$\Delta\bar{K} = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\bar{U}) d\Omega dt.$$

Поскольку в объеме Ω нет источников, то указанное изменение количества движения произошло по следующим причинам:

а). Из-за потока количества движения через поверхность F

$$\bar{J}_1 = - \int_F \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \rho\bar{U} (\bar{U} \cdot d\bar{F}) dt.$$

в). В случае неидеальной среды напряжения на поверхности F определяются тензором напряжений T_{σ} , вследствие чего импульс поверхностных сил, действующих на поверхности F , имеет вид

$$\bar{J}_2 = \int_F \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (\bar{\sigma}_x dF_x + \bar{\sigma}_y dF_y + \bar{\sigma}_z dF_z) dt,$$

где $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z$ – три силы, действующие на площадках dF_x, dF_y, dF_z .

Сложив \bar{J}_1 и \bar{J}_2 , приравняв эту сумму значению $\Delta\bar{K}$ и применив теорему Остроградского-Гаусса получим, вследствие произвольности Ω и Δt , как и выше, закон сохранения количества движения в виде

$$\frac{\partial \rho\bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \rho\bar{U}U_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho\bar{U}U_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho\bar{U}U_z}{\partial z} - \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (1.82)$$

С помощью уравнения субстанциональной производной преобразуем это уравнение к виду, соответствующему закону сохранения количества движения в лагранжевых переменных

$$\frac{d\rho\bar{U}}{dt} + \rho\bar{U}(\nabla\bar{U}) - \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (1.83)$$

Далее примем во внимание, что тензор напряжений T_{σ} представляется в виде суммы шарового тензора напряжений $T_{1\sigma}$ и девиатора тензора напряжений D_{σ} . Заменив в (1.83) σ на $S - P$, получим закон сохранения количества движения в виде

$$\frac{d\rho\bar{U}}{dt} + \rho\bar{U}(\nabla\bar{U}) + \bar{\nabla}P - \left(\frac{\partial \bar{S}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{S}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{S}_z}{\partial z} \right) = 0, \quad (1.84)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{S}_x &= S_{xx} \bar{i} + \tau_{xy} \bar{j} + \tau_{xz} \bar{k}, \\ \bar{S}_y &= \tau_{yx} \bar{i} + S_{yy} \bar{j} + \tau_{yz} \bar{k}, \\ \bar{S}_z &= \tau_{zx} \bar{i} + \tau_{zy} \bar{j} + S_{zz} \bar{k}.\end{aligned}$$

Закон сохранения количества движения в векторном виде (1.84) расщепляется на три скалярных уравнения

$$\begin{aligned}\frac{d\rho U_x}{dt} + \rho U_x \nabla \bar{U} + \frac{\partial P}{\partial x} - \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{d\rho U_y}{dt} + \rho U_y \nabla \bar{U} + \frac{\partial P}{\partial y} - \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{d\rho U_z}{dt} + \rho U_z \nabla \bar{U} + \frac{\partial P}{\partial z} - \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} \right) &= 0.\end{aligned}$$

Уравнение (1.84) содержит в качестве составной части закон сохранения количества движения идеальной среды и переходит в него непрерывно при $\bar{S}_x \rightarrow 0$, $\bar{S}_y \rightarrow 0$, $\bar{S}_z \rightarrow 0$. В эйлеровых координатах закон сохранения количества движения идеальной среды имеет вид

$$\frac{\partial \rho \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{U} U_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{U} U_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{U} U_z}{\partial z} + \bar{\nabla} P = 0.$$

В лагранжевых координатах это уравнение записывается так

$$\frac{d\rho \bar{U}}{dt} + \rho \bar{U} (\nabla \bar{U}) + \bar{\nabla} P = 0.$$

§ 13. Закон сохранения энергии

Рассмотрим теперь закон сохранения энергии. Пусть \mathcal{E} – энергия единицы массы вещества. Тогда $\rho \mathcal{E}$ – энергия вещества, находящегося в единичном объеме. За время Δt энергия в объеме Ω изменится на величину

$$\Delta Q = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathcal{E}) d\Omega dt.$$

Если в объеме Ω отсутствуют источники энергии, то это изменение энергии определяется:

1. Энергией, которую приносит втекающая в объем Ω за время Δt среда.
2. Работой поверхностных сил за время Δt на поверхности F , ограничивающей объем Ω .

3. Энергией, которая передается веществу, находящемуся в объеме Ω , окружающими частицами вещества вследствие теплопередачи.

Математически эти причины изменения энергии в объеме Ω записываются следующим образом

$$\Delta Q = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left(\int_F (\bar{\sigma}_x \bar{U} dF_x + \bar{\sigma}_y \bar{U} dF_y + \bar{\sigma}_z \bar{U} dF_z) - \int_F (\rho \mathcal{E} \bar{U} + \bar{q}) d\bar{F} \right) dt.$$

Здесь \bar{q} - поток тепловой энергии. Применив теорему Остроградского-Гаусса, приравняв оба значения ΔQ и приравняв нулю подинтегральную функцию, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathcal{E}) + \nabla(\rho \mathcal{E} \bar{U} + \bar{q}) - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\sigma}_x \bar{U}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\sigma}_y \bar{U}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\sigma}_z \bar{U}) \right) = 0.$$

Это уравнение выражает закон сохранения энергии неидеальной среды в дифференциальной форме в эйлеровых координатах. Воспользуемся представлением тензора напряжений в виде шарового тензора и девиатора и запишем его в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathcal{E}) + \nabla((\rho \mathcal{E} + P)\bar{U} + \bar{q}) - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\bar{S}_x \bar{U}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{S}_y \bar{U}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{S}_z \bar{U}) \right) = 0. \quad (1.85)$$

В лагранжевых переменных уравнение (1.85) запишется так

$$\frac{d}{dt}(\rho \mathcal{E}) + \rho \mathcal{E} \nabla \bar{U} + \nabla(P\bar{U} + \bar{q}) - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\bar{S}_x \bar{U}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{S}_y \bar{U}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{S}_z \bar{U}) \right) = 0. \quad (1.86)$$

В случае, когда компоненты девиатора напряжений равны нулю, уравнения (1.85) и (1.86) принимают вид **закона сохранения энергии идеальной среды** в эйлеровых и лагранжевых переменных

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathcal{E}) + \nabla((\rho \mathcal{E} + P)\bar{U} + \bar{q}) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(\rho \mathcal{E}) + \rho \mathcal{E} \nabla \bar{U} + \nabla(P\bar{U} + \bar{q}) = 0.$$

Уравнение энергии идеальной сплошной среды с помощью уравнения (1.81) преобразуется к виду

$$\rho \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \nabla P \bar{U} + \nabla \bar{q} = 0.$$

§ 14. Следствия законов сохранения

Преобразуем законы сохранения массы (1.80) и количества движения (1.82) в **уравнение движения**. Для этого продифференцируем почленно первые четыре члена в уравнении (1.82)

$$\bar{U} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \bar{U} \right) + \rho \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \rho (\bar{U} \bar{\nabla}) \bar{U} - \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (1.87)$$

Из уравнений (1.80) и (1.87) следует уравнение движения неидеальной среды в эйлеровых координатах

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + (\bar{U} \bar{\nabla}) \bar{U} \right) + \bar{\nabla} P - \left(\frac{\partial \bar{S}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{S}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{S}_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (1.88)$$

Первые два члена являются субстанциональной производной скорости \bar{U} . Следовательно, в лагранжевых координатах уравнение движения неидеальной среды (1.88) принимает вид

$$\rho \frac{d\bar{U}}{dt} + \bar{\nabla} P - \frac{\partial \bar{S}_x}{\partial x} - \frac{\partial \bar{S}_y}{\partial y} - \frac{\partial \bar{S}_z}{\partial z} = 0. \quad (1.89)$$

В случае идеальной среды $\bar{S}_x = 0$, $\bar{S}_y = 0$, $\bar{S}_z = 0$ и т. о. уравнение движения идеальной среды в эйлеровых и лагранжевых координатах имеет вид

$$\rho \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \rho (\bar{U} \bar{\nabla}) \bar{U} + \nabla P = 0, \quad (1.90)$$

$$\rho \frac{d\bar{U}}{dt} + \bar{\nabla} P = 0. \quad (1.91)$$

Уравнения (1.88)–(1.91) являются следствием двух законов сохранения, закона сохранения массы (1.80), (1.81) и закона сохранения количества движения (1.82), (1.83).

Рассмотрим теперь все три закона сохранения. Почленно продифференцировав первый и второй члены в уравнении (1.85) и отняв уравнение (1.80) умноженное на \mathcal{E} , получим уравнение энергии неидеальной среды

$$\rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \rho \bar{U} \nabla \mathcal{E} + \nabla P \bar{U} + \nabla \bar{q} - \left(\frac{\partial}{\partial x} (\bar{S}_x \bar{U}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{S}_y \bar{U}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{S}_z \bar{U}) \right) = 0. \quad (1.92)$$

В случае нулевого дивергента тензора напряжений и отсутствия теплопроводности из уравнения (1.92) получается уравнение энергии идеальной среды

$$\rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \rho \bar{U} \nabla \mathcal{E} + \nabla P \bar{U} = 0. \quad (1.93)$$

Подставим в уравнение (1.92) выражение для удельной полной энергии

$$\mathcal{E} = E + 0,5 \bar{U}^2.$$

Затем почленно продифференцируем все слагаемые и вычтем уравнение (1.89) предварительно умножив его на \bar{U} . В результате получим уравнение для удельной внутренней энергии неидеальной среды в эйлеровых координатах

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho \bar{U} \nabla E + P \nabla \bar{U} + \nabla \bar{q} - \left(\bar{S}_x \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{S}_y \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \bar{S}_z \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) = 0. \quad (1.94)$$

В лагранжевых переменных уравнение (1.94) имеет вид

$$\rho \frac{dE}{dt} + \rho \nabla \bar{U} + \nabla \bar{q} - \left(\bar{S}_x \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{S}_y \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \bar{S}_z \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) = 0. \quad (1.95)$$

В уравнении (1.95) заменим $\nabla \bar{U}$ с помощью уравнения (1.82) и перейдём от переменной ρ к переменной V

$$\frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} = V \left(\bar{S}_x \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{S}_y \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \bar{S}_z \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) - V \nabla \bar{q}. \quad (1.96)$$

Уравнения (1.94)–(1.96) являются следствием трёх законов сохранения неидеальной среды, и каждое из них называется уравнением внутренней энергии.

В случае равенства нулю дивергенции тензора напряжений уравнения (1.94)–(1.96) становятся уравнениями энергии идеальной среды. Сравним уравнение

$$\frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} = -V \nabla \bar{q}$$

со следствием второго закона термодинамики

$$\frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} = T \frac{dS}{dt}.$$

Из этих уравнений следует

$$T \frac{dS}{dt} = -V \nabla \bar{q},$$

где $\bar{q} = -K \bar{\nabla} T$ – тепловой поток, S – энтропия. Поскольку $\nabla \bar{q}$ может принимать и положительные, и отрицательные значения, то знак $\frac{dS}{dt}$ может быть любым.

В адиабатических процессах теплопроводность отсутствует, т. е.

$$\nabla \bar{q} = 0.$$

В этом случае вдоль траектории каждой частицы энтропия остаётся постоянной

$$\frac{dS}{dt} = 0. \quad (1.97)$$

Течения, удовлетворяющие уравнению (1.97), называются **адиабатическими**.

Уравнение (1.97) в силу определения субстанциональной производной может быть записано в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + U_x \frac{\partial S}{\partial x} + U_y \frac{\partial S}{\partial y} + U_z \frac{\partial S}{\partial z} = 0.$$

Течения, в которых выполняется не только (1.97), но также и

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial z} = 0,$$

называются изэнтропическими.

§ 15. Законы сохранения для движений с одномерной симметрией

Многие движения сплошной среды могут с большой точностью рассматриваться как одномерные, т. е. такие, когда все искомые функции зависят только от одной пространственной координаты или двумерные, когда все функции зависят от двух пространственных переменных.

Рассмотрим вначале законы сохранения для случая одной пространственной координаты. Пусть такой координатой будет x . Тогда $\frac{\partial}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, $U_y = U_z = 0$ и в случае идеальной среды без теплопроводности уравнения (1.81), (1.90) и (1.93) упрощаются

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \rho \frac{dU}{dt} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \rho \frac{dE}{dt} + \frac{\partial(PU)}{\partial x} = 0. \quad (1.98)$$

Соответственно, упрощается и субстанциональная производная

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}.$$

Три уравнения (1.98) связывают 4 неизвестных функции P , ρ , E , U . Четвертым уравнением этой системы является уравнение состояния, например,

$$P = f(\rho, E),$$

где f - некоторая функция. Таким образом, уравнения (1.98) вместе с уравнением состояния образуют систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными.

Движение среды, описываемое уравнениями (1.98), называется **плоским**. Кроме плоских течений встречаются также одномерные движения со сферической симметрией (когда все искомые величины зависят только от расстояния до центра симметрии) и с цилиндрической симметрией (когда все искомые величины зависят только от расстояния до оси симметрии, а скорость ортогональна цилиндрической поверхности). Если ввести коэффициент α , то уравнения (1.98), описывающие одномерные движения идеальной среды при отсутствии теплопроводности, можно записать в общем виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\alpha \rho U_r}{r} = 0, \quad \rho \frac{dU_r}{dt} + \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \quad \rho \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho U_r) + \frac{\alpha \rho U_r}{r} = 0.$$

Эти уравнения при $\alpha = 0$ описывают движения с плоской симметрией ($r = x$), при $\alpha = 1$ – с цилиндрической симметрией, при $\alpha = 2$ – со сферической симметрией. Объединим вторые и третьи члены в уравнениях неразрывности и энергии и запишем их в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial r^\alpha U_r}{r^\alpha \partial r} = 0, \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{\partial r^\alpha \rho U_r}{\rho r^\alpha \partial r} = 0.$$

Цилиндрически симметричные движения являются одномерными лишь в случае, когда характеризующие течение величины зависят только от r и не зависят от φ и z . Если же все величины зависят от r и z и не зависят от φ , то течение является двумерным цилиндрически симметричным. Законы сохранения в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + U_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + U_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial U_r}{\partial r} + \rho \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\partial U_r}{r} &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + u_r \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) + \frac{\partial P}{\partial r} &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial U_z}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial P}{\partial z} &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + U_r \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r} + U_z \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \right) + \frac{\partial (\rho U_r)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho U_z)}{\partial z} + \frac{\rho U_r}{r} &= 0. \end{aligned}$$

§ 16. Законы сохранения на сильных разрывах

В модели сплошной среды сильный разрыв – это поверхность, с обеих сторон которой характеристики сплошной среды различны. Напишем

уравнения, которые связывают величины по обе стороны от поверхности сильного разрыва. Будем считать, что поверхность разрыва в пространстве x, y, z ориентирована произвольно и возьмем на ней элемент поверхности

$$d\bar{S} = \bar{n}dS.$$

Скорость движения вещества относительно разрыва, движущегося со скоростью \bar{N} , обозначим через $\bar{\theta}$, где

$$\bar{\theta} = \bar{U} - \bar{N}. \quad (1.99)$$

Обозначим величины, втекающие в поверхность разрыва, индексом «-» (перед разрывом), а вытекающие из него индексом «+» (за разрывом).

За время dt через площадку $d\bar{S}$ на поверхности разрыва втекает масса

$$dM_- = \rho_- \bar{\theta}_- d\bar{S} dt.$$

Соответственно, масса, вытекающая из поверхности разрыва, имеет вид

$$dM_+ = \rho_+ \bar{\theta}_+ d\bar{S} dt.$$

Поскольку $\bar{\theta} = \theta_n \bar{n} + \theta_\tau \bar{\tau}$, $d\bar{S} = \bar{n}dS$, где θ_n, θ_τ нормальная и касательная к площадке $d\bar{S}$ компоненты вектора $\bar{\theta}$, а dM_+ и dM_- содержат скалярные произведения этих векторов, то они могут быть записаны в виде

$$dM_- = \rho_- \theta_{n-} dS dt, \quad dM_+ = \rho_+ \theta_{n+} dS dt. \quad (1.100)$$

Приравняв эти массы и сократив на $dS dt$, получим закон сохранения массы на поверхности сильного разрыва

$$\rho_- \theta_{n-} = \rho_+ \theta_{n+}. \quad (1.101)$$

Аналогичные рассуждения приводят к следующей форме законов сохранения количества движения и энергии на поверхности сильного разрыва в идеальной среде

$$\rho_- \theta_{n-} (\theta_{n+} - \theta_{n-}) = P_- - P_+, \quad (1.102)$$

$$\rho_- \theta_{n-} (\theta_{\tau+} - \theta_{\tau-}) = 0, \quad (1.103)$$

$$\rho_- \theta_{n-} (\varepsilon_+ - \varepsilon_-) = P_- \theta_{n-} - P_+ \theta_{n+}. \quad (1.104)$$

Из (1.103) следует, что касательная к поверхности сильного разрыва компонента вектора скорости непрерывна, а изменения всех остальных векторных величин происходит по нормали поверхности $d\bar{S}$. Для простоты будем считать, что ось O_x совпадает с нормалью, и индекс n опустим.

В уравнениях (1.101)–(1.104) перейдем с помощью (1.99) от относительной скорости $\bar{\theta}$ к скорости \bar{U} . Тогда законы сохранения, в одномерном случае примут вид

$$\rho_+ (N - U_+) = \rho_- (N - U_-), \quad (1.105)$$

$$\rho_+(N - U_+)U_+ - P_+ = \rho_-(N - U_-)U_- - P_-, \quad (1.106)$$

$$\rho_+(N - U_+)\mathcal{E}_+ - P_+U_+ = \rho_-(N - U_-)\mathcal{E}_- - P_-U_-. \quad (1.107)$$

В уравнении (1.107) удельная полная энергия равна

$$\mathcal{E} = E + \frac{1}{2}U^2. \quad (1.108)$$

Уравнения (1.105)–(1.108) содержат 11 величин. Естественно, что одно из состояний должно быть известно, как правило, это состояние перед поверхностью сильного разрыва $(P_-, \rho_-, E_-, \bar{U}_-)$. Если одна из величин за ударной волной известна, то из (1.105)–(1.108) и из уравнения состояния находятся все остальные величины со значком «+».

Уравнения (1.105)–(1.107) содержат $N = \frac{dx}{dt}$, которая называется **скоростью перемещения сильного разрыва**. Это скорость, с которой поверхность разрыва перемещается из одной точки пространства в другую. Вещество, по которому распространяется ударная волна, может двигаться в пространстве. Величина, характеризующая, как быстро ударная волна переходит от одной частички вещества к другой, называется **скоростью распространения**. Если за лагранжеву координату принять массу, протекающую за время dt через единичную площадку, то в соответствии с (1.100), (1.101) и определением W

$$W = \frac{dm}{dt}$$

получим связь между W и N

$$W = \rho_-(N - U_-) = \rho_+(N - U_+). \quad (1.109)$$

После замены N на W уравнения (1.105)–(1.107) принимают вид

$$WV_+ + U_+ = WV_- + U_-, \quad (1.110)$$

$$WU_+ - P_+ = WU_- - P_-, \quad (1.111)$$

$$W\mathcal{E}_+ - P_+U_+ = W\mathcal{E}_- - P_-U_-, \quad (1.112)$$

где $V=1/\rho$. Законы сохранения (1.110)–(1.112) допускают ряд следствий. Если (1.110) умножить на W и вычесть из (1.111), то получится первое следствие

$$W^2V_+ + P_+ = W^2V_- + P_-.$$

Запишем это уравнение в виде

$$W^2 = -\frac{P_+ - P_-}{V_+ - V_-}. \quad (1.113)$$

Из (1.113) следует, что W^2 есть наклон луча, проведённого из точки P_-, V_- перед разрывом в точку ударной адиабаты P_+, V_+ , определяющую состояние за разрывом.

Умножим теперь уравнение (1.111) на $\frac{1}{2}(U_+ + U_-)$, вычтем из (1.112), заменим с помощью (1.108) удельную полную энергию \mathcal{E} на удельную внутреннюю энергию E и запишем полученное уравнение в виде

$$W(E_+ - E_-) = \frac{1}{2}(P_+ + P_-)(U_+ - U_-). \quad (1.114)$$

Это второе следствие законов сохранения.

Выразив из (1.109) разность $U_+ - U_-$ и подставив её в (1.114), получим уравнение для удельной внутренней энергии

$$E_+ - E_- + \frac{1}{2}(P_+ + P_-)(V_+ - V_-) = 0. \quad (1.115)$$

Уравнения, связывающие величины с разных сторон поверхности сильного разрыва, часто называют **условиями динамической совместности**.

Уравнение (1.115) вместе с уравнением состояния определяют в плоскости P, V кривую возможных состояний за фронтом ударной волны, которая называется **ударной адиабатой** или адиабатой Гюгонио. Адиабатой эта кривая называется потому, что процесс изменения величин на фронте ударной волны происходит без притока тепла. Свойства ударной адиабаты отличаются от свойств изэнтропы, т. к. вдоль нее изменяется энтропия.

Скорость распространения разрыва $W = \frac{dm}{dt}$ такова, что ударная волна перегоняет слабые возмущения, возникающие перед разрывом и распространяющиеся со скоростью a_- , но слабые возмущения за разрывом, распространяющиеся со скоростью a_+ догоняют его. Т. о. W удовлетворяет неравенствам

$$(\rho C)_+^2 \geq W^2 \geq (\rho C)_-^2. \quad (1.116)$$

С помощью соотношения (1.103) неравенства (1.116) записываются в виде

$$U_+ + C_+ > N > U_- + C_- \text{ для } W > 0,$$

$$U_+ - C_+ < N < U_- - C_- \text{ для } W < 0.$$

§ 17. Условия на слабых и контактных разрывах

Слабыми называются [12] разрывы, на поверхности которых терпят разрыв производные, в то время как сами величины остаются непрерывными. Рассмотрим в плоскости m, t некоторую кривую с уравнением $\frac{dm}{dt} = W$, на которой терпят разрыв производные $\frac{\partial U}{\partial t}$ и $\frac{\partial U}{\partial m}$.

Запишем полные производные функции U вдоль этой кривой

$$\frac{dU_+}{dt} = \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_+ + \left(\frac{\partial U}{\partial m} \right)_+ \frac{dm}{dt}, \quad \frac{dU_-}{dt} = \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_- + \left(\frac{\partial U}{\partial m} \right)_- \frac{dm}{dt}.$$

Вычитая второе уравнение из первого, и принимая во внимание, что $U_+ = U_-$, получим

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_+ - \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_- + W \left[\left(\frac{\partial U}{\partial m} \right)_+ - \left(\frac{\partial U}{\partial m} \right)_- \right] = 0. \quad (1.117)$$

Будем обозначать разность производных с обеих сторон разрыва следующим образом

$$\left[\frac{\partial U}{\partial t} \right] = \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_+ - \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_-.$$

После введения скачка производной уравнение (1.117) примет вид

$$\left[\frac{\partial U}{\partial t} \right]_m + W \left[\frac{\partial U}{\partial m} \right]_t = 0.$$

Аналогично могут быть записаны уравнения и для остальных газодинамических величин. Исключив из них W , получим систему уравнений

$$\frac{\left[\frac{\partial V}{\partial t} \right]_m}{\left[\frac{\partial V}{\partial m} \right]_t} = \frac{\left[\frac{\partial P}{\partial t} \right]_m}{\left[\frac{\partial P}{\partial m} \right]_t} = \frac{\left[\frac{\partial E}{\partial t} \right]_m}{\left[\frac{\partial E}{\partial m} \right]_t} = \frac{\left[\frac{\partial U}{\partial t} \right]_m}{\left[\frac{\partial U}{\partial m} \right]_t} = -W. \quad (1.118)$$

Уравнения (1.118), связывающие производные по обе стороны поверхности слабого разрыва, называются условиями кинематической совместности.

Поскольку слабый разрыв может рассматриваться как сильный разрыв нулевой амплитуды, то в соответствии с уравнением (1.113) при $V_+ \rightarrow V_-$ и

определением $a^2 = - \left(\frac{dP}{dV} \right)_s$ можно написать

$$W = \pm a.$$

Таким образом, слабые разрывы распространяются вдоль линий

$$\frac{dm}{dt} = \pm a,$$

вдоль которых распространяются слабые возмущения.

Выше были рассмотрены устойчивые сильные и слабые разрывы. Величины по обе стороны устойчивых разрывов удовлетворяют условиям (1.107)–(1.110), либо условиям (1.118). Скорость распространения разрыва W , как видно из этих условий, может принимать различные значения. Рассмотрим случай, когда скорость распространения W равна нулю. Скорость перемещения таких разрывов определяется из выражения, связывающего W и N

$$W = \rho_- (N_- - U_-).$$

Отсюда следует, что при $W = 0$ скорость перемещения равна скорости среды. Такие разрывы называются контактными разрывами или контактными границами.

Из условий (1.107)–(1.110) при $W = 0$ следуют условия на контактном разрыве

$$[U] = 0, \quad [P] = 0. \quad (1.119)$$

Иными словами, скорость и давление на контактном разрыве непрерывны, все же остальные величины могут быть разрывны. При выводе условий (1.118) на слабом разрыве предполагалась непрерывность всех величин. Поскольку на контактном разрыве непрерывны только скорость и давление, то из (1.118) следует при $W = 0$

$$\left[\frac{\partial P}{\partial t} \right]_m = 0, \quad \left[\frac{\partial U}{\partial t} \right]_m = 0. \quad (1.120)$$

Из второго условия (1.120) и уравнения движения в виде

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_m = - \left(\frac{\partial P}{\partial m} \right)_t$$

следует, что на контактном разрыве непрерывна производная $\frac{\partial P}{\partial m}$

$$\left[\frac{\partial P}{\partial m} \right] = 0. \quad (1.121)$$

Продифференцируем $P(V, S)$ по t при постоянном S и производную $\left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)_m$ заменим производной $\frac{\partial U}{\partial m}$ с помощью уравнения неразрывности

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)_m = \left(\frac{\partial U}{\partial m} \right)_t.$$

В результате получим уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial U}{\partial m},$$

которое после подстановки в первое условие (1.120) даёт ещё одно условие на контактном разрыве

$$\left[a^2 \frac{\partial U}{\partial m} \right] = 0. \quad (1.122)$$

Условия (1.119)–(1.122) позволяют утверждать, что в лагранжевых координатах на контактной границе давление P непрерывно вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial t}$ и $\frac{\partial P}{\partial m}$, а скорость U непрерывна только вместе с производной $\frac{\partial U}{\partial t}$. Производная же $\frac{\partial U}{\partial m}$ терпит разрыв на контактной границе.

Условия на сильных, слабых и контактных разрывах являются следствиями законов сохранения в интегральной форме в случае разрывов характеристик сплошной среды или же следствием непрерывности последних. Возникнув в среде, эти разрывы перемещаются, подчиняясь вполне определенным законам, причём сами по себе, без каких-либо посторонних причин, они не приводят к образованию новых разрывов, т. е. являются устойчивыми разрывами*. В противоположность им, все разрывы, не удовлетворяющие полученным выше условиям на сильном, слабом и контактном разрыве, являются неустойчивыми. Возникнув в среде в какой-то момент времени, они мгновенно распадаются на устойчивые разрывы. Произвольные разрывы возникают в среде, например, при выходе ударной волны на контактную границу, при взаимодействии двух ударных волн, при столкновении пластин и в ряде других случаев. Для определения характера устойчивых разрывов, возникающих при распаде произвольного разрыва, необходимо решать задачу о распаде произвольного разрыва.

Решение этой задачи заключается в отыскании такой совокупности разрывов, чтобы с помощью условий на них связать значения исходных величин справа и слева от поверхности произвольного разрыва. В системе устойчивых разрывов, образованных после распада произвольного разрыва, обязательно присутствует контактная граница, разделяющая вещества, находящиеся первоначально по разные стороны произвольного разрыва. Давление и скорость на контактной границе принимают определенные значения P_k, U_k . Чтобы обеспечить непрерывность P и U на

* В случае уравнений состояния с аномалиями возможно расщепление как сильных, так и слабых разрывов без взаимодействия их с другими разрывами.

контактной границе нужно, чтобы правое вещество претерпело изменение от $P_{\text{п}}, U_{\text{п}}$ до $P_{\text{к}}, U_{\text{к}}$ и, соответственно, левое вещество – от $P_{\text{л}}, U_{\text{л}}$ до $P_{\text{к}}, U_{\text{к}}$.

Скорость распространения возмущений, идущих от контактной границы в правое вещество, положительна, если ось направлена вправо. В этом случае скорость распространения возмущений, идущих от контактной границы в левое вещество – отрицательна. Эти рассуждения о знаке скорости распространения возмущений позволяют однозначно провести кривую возможных состояний правого и левого вещества после распада разрыва.

Вещество может быть приведено в состояние, характеризуемое величинами $P_{\text{к}}, U_{\text{к}}$, либо скачком (сильный разрыв), либо непрерывно (система слабых разрывов). В случае сильного разрыва всегда можно найти аналитически или численно зависимость P_{+} от U_{+} . Когда вещество непрерывно переводится из одного состояния в другое, связь между P и U в конечном состоянии вещества получается после интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения вдоль характеристики

$$dU \pm \frac{1}{a} dP = 0.$$

Давление и скорость на контактном разрыве $P_{\text{к}}$ и $U_{\text{к}}$ определяются как координаты точки пересечения двух кривых в плоскости P, U , проходящих через точки, характеризующие начальное правое и начальное левое состояния вещества до распада разрыва.

§ 18. Термодинамические величины и термодинамические уравнения

Уравнения состояния вещества являются частью уравнений, описывающих индивидуальные свойства веществ и замыкающих систему законов сохранения. Уравнения состояния связывают друг с другом различные термодинамические величины и т.о. являются термодинамическими уравнениями. Из множества термодинамических величин две являются независимыми. Их называют аргументами.

В классической термодинамике отсутствует понятие времени и скорости изменения величин со временем. В отличие от термодинамики в механике сплошной среды используются уравнения, содержащие не только термодинамические величины, но также и скорости их изменения со временем.

Важнейшую роль в термодинамике играет понятие термодинамического равновесия системы. Изолированная термодинамическая система независимо от своего начального состояния, в конце концов, приходит в состояние, которое с течением времени не меняется. Это состояние называется **состоянием термодинамического равновесия**.

В отличие от термодинамики в механике сплошной среды термодинамические величины характеризуют состояние не системы, а состояние вещества в точке. Просто, если аргументы не изменяются со временем, то и все термодинамические величины остаются постоянными. Понятие термодинамического равновесия в механике сплошной среды трансформируется в понятие термодинамической устойчивости. В области неустойчивости, определяемой системой неравенств, малые возмущения возрастают.

Для описания свойств вещества в термодинамике наиболее часто используются следующие термодинамические потенциалы:

1. Удельная внутренняя энергия $E(V, S)$ – функция удельного объёма V и удельной энтропии S .

2. Энтропия $S = S(V, E)$ – функция V и E .

3. Энтальпия $H = H(P, S) = E + PV$ – функция S и давления P .

4. Свободная энергия Гельмгольца или просто свободная энергия

$$F = F(V, T) = E - TS.$$

– функция V и температуры T .

5. Свободная энергия Гиббса или просто термодинамический потенциал

$$G = G(P, T) = F + PV = H - TS.$$

Полный дифференциал удельной внутренней энергии E имеет вид

$$dE = -PdV + TdS.$$

Давление P и температура T определяются уравнениями

$$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S, \quad T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V. \quad (1.123)$$

Поскольку из пяти термодинамических функций P, V, E, T, S любые две могут быть выбраны в качестве независимых, то ни одной из частных производных этих функций нельзя отдать предпочтения перед другими, и для выяснения свойств системы необходимо, вообще говоря, рассматривать все несколько десятков частных производных. Для упрощения этого рассмотрения изложим несколько общих правил.

Пусть между величинами x, y, z имеется некоторая зависимость. Предположим, что y и z независимы, тогда

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz. \quad (1.124)$$

Если же предположить, что независимыми являются x и z , то

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z dx + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x dz.$$

Выразим из этого соотношения dx

$$dx = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z} dy - \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z} dz. \quad (1.125)$$

Приравняв частные производные при dy и dz в (1.124) и (1.125), получим

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1, \quad (1.126)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + 1 = 0. \quad (1.127)$$

Подставив в (1.126) и (1.127) вместо x, y, z поочередно все термодинамические функции, получим систему дифференциальных уравнений в частных производных, являющуюся частью системы дифференциальных уравнений термодинамики.

Рассмотрим теперь сложную зависимость между четырьмя величинами x, y, z, η , где η и z являются независимыми

$$x = x(y(z, \eta), z).$$

Частные производные этой функции имеют вид

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_\eta = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_\eta, \quad (1.128)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)_z. \quad (1.129)$$

Наконец, еще одна группа уравнений получается из условия независимости второй производной термодинамического потенциала от порядка дифференцирования

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial y}. \quad (1.130)$$

Подставляя в (1.130) вместо x поочередно все термодинамические потенциалы, а вместо y, z их естественные независимые переменные, и используя уравнение (1.128), (1.129), получают

– для $H(P, S)$ – уравнение

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_P; \quad (1.131)$$

– для свободной энергии Гельмгольца $F(T, V)$ – уравнение

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T; \quad (1.132)$$

– для свободной энергии Гиббса $G(P, T)$ – уравнение

$$\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_T = -\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P; \quad (1.133)$$

– для внутренней энергии $E(V, S)$ – уравнение

$$\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V = -\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S; \quad (1.134)$$

– для энтропии $S(V, E)$ – уравнение

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_E = P \left(\frac{\partial T}{\partial E}\right)_V - T \left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_V; \quad (1.135)$$

– для функции Мазье $\psi(V, \frac{1}{T})$ – уравнение

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P; \quad (1.136)$$

– для функции Планка $\Phi(P, \frac{1}{T})$ – уравнение

$$-T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_T + P \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T. \quad (1.137)$$

Уравнения (1.131)–(1.137) называются уравнениями термодинамической совместности. Эти уравнения называют также [13] уравнениями Максвелла.

Наиболее важные и часто встречающиеся на практике свойства вещества выражаются в виде соответствующих термодинамических коэффициентов.

1. Изобарическим температурным коэффициентом объёмного расширения α называется относительное изменение объема тела при изменении его температуры на один градус при постоянном давлении

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P.$$

Практически для всех известных веществ коэффициент объёмного расширения положителен. Иными словами,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P > 0.$$

2. Адиабатическим коэффициентом сжимаемости или просто адиабатической сжимаемостью называется относительное изменение удельного объёма при изменении давления на единицу при постоянной энтропии

$$\beta_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_s.$$

Величина, обратная β_s , называется модулем упругости или модулем всестороннего сжатия

$$K = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_s. \quad (1.138)$$

3. Адиабатической скоростью распространения звука в неподвижной системе координат называется величина

$$C = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s}.$$

Она указывает, с какой скоростью распространяются малые возмущения в покоящейся среде.

4. Жесткостью вещества называется величина

$$a = \sqrt{-\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_s},$$

характеризующая наклон изэнтроп в плоскости P, V . Она указывает, с какой скоростью перемещаются малые возмущения по веществу в Лагранжевой системе координат $dm = \rho dx$. Жесткость a легко выражается через скорость распространения звука C .

Часть термодинамических величин, например P, T, α, β_s, C могут быть измерены экспериментально в некоторых областях их изменения. Для определения значений термодинамических величин, которые не поддаются прямому экспериментальному измерению, могут быть использованы соответствующие дифференциальные уравнения термодинамики. Для их применения необходимо знать уравнение состояния вещества.

§ 19. Термодинамическое равновесие и устойчивость

Говорят, что система находится в термодинамическом равновесии, если её состояние не меняется с течением времени. Различают два типа равновесия: механическое, когда во всей системе давление постоянно

$$P(x, y, z) = \text{const},$$

и тепловое, когда во всей системе температура постоянна

$$T(x, y, z) = \text{const.}$$

Будем считать, что $T \geq 0$. В таком случае из (1.136) следует, что при $T > 0$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V > 0.$$

Из выражения свободной энергии Гиббса (термодинамического потенциала)

$$dG = VdP - SdT$$

следует, что в состоянии равновесия (теплового и механического) при $dP = 0$, $dT = 0$ термодинамический потенциал $G(P, T)$ постоянен

$$G = \text{const.}$$

Равновесное состояние может быть устойчивым или неустойчивым. В термодинамике доказывается, что в состоянии устойчивого равновесия энергия Гиббса минимальна, а термодинамические функции удовлетворяют ряду неравенств

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P > 0, & \quad \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P > 0, & \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S > 0, & \quad \left(\frac{\partial T}{\partial E}\right)_V > 0, \\ \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S < 0, & \quad \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T < 0, & \quad \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_T < 0, & \quad \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V < 0, \\ \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V > 0, & \quad \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S > 0, & \quad \left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_V > 0, & \quad P\left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_S > 0, \\ \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V > 0, & \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T > 0, & \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_P > 0, & \quad \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V > 0. \end{aligned} \tag{1.139}$$

При выполнении неравенств (1.139) состояние вещества устойчиво, при нарушении хотя бы одного из неравенств (1.139) вещество попадает в область неустойчивости и амплитуды малых возмущений растут со временем. Подробное обоснование неравенств (1.139) приведено в [12].

§ 20. Теплоёмкость

Теплоёмкость является важнейшей характеристикой свойств вещества. По ней известна богатая экспериментальная информация. Кроме того созданы теоретические модели теплоёмкости Дебая, Эйнштейна и других. Удельной теплоёмкостью тела называется отношение количества теплоты поглощённой телом единичной массы в некоторое термодинамическом процессе, к повышению температуры

$$C = \frac{dQ}{dT}.$$

Поскольку $dQ = TdS$, то рассмотрим случай, когда S зависит от T и V

$$dQ = TdS = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_T dV.$$

Отсюда следует, что при постоянном V

$$C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V. \quad (1.140)$$

Аналогично, рассматривая зависимость $S(P, T)$, получим

$$C_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P. \quad (1.141)$$

Из условий устойчивого равновесия (1.139) $\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V > 0$, $\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P > 0$ следует, что при $T > 0$

$$C_V > 0, \quad C_P > 0.$$

Чтобы связать C_P и C_V , воспользуемся одним из термодинамических уравнений

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P. \quad (1.142)$$

Умножив это уравнение на T , используя определения C_V (1.140) и C_P (1.141) и одно из термодинамических уравнений (1.127) в виде

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = - \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V / \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T,$$

преобразуем (1.142) к виду

$$C_P = C_V - T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V^2 / \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T. \quad (1.143)$$

Поскольку в состоянии устойчивого равновесия в соответствии с (1.139) $\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T < 0$, то из (1.143) следует, что $C_P > C_V$ при $T > 0$ и $C_P = C_V$ при $T = 0$. Воспользуемся далее уравнениями (1.140) и (1.141) и получим отношение C_P к C_V

$$\frac{C_P}{C_V} = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_V.$$

Заменив производные в правой части другими производными с помощью термодинамических уравнений (1.127) и (1.129), получим

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \frac{C_P}{C_V} \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T. \quad (1.144)$$

Поскольку при $T > 0$ $\frac{C_P}{C_V} > 1$, то из (1.144) с учётом (1.139) следует

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S < \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T < 0. \quad (1.145)$$

Из (1.143) и (1.144) следует ещё одно уравнение, связывающее наклоны изотерм и изэнтроп

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T - \frac{T}{C_V} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2. \quad (1.146)$$

Неравенство (1.145) и уравнение (1.146) означают, что при $T > 0$ наклон изэнтроп к оси O_V является более крутым, чем наклон изотерм. Однако, при $T \rightarrow 0$ наклоны адиабаты и изэнтропы сближаются. Из (1.143) и (1.146) следует, что $C_P = C_V$ при $T = 0$ и, значит, $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$. Это,

собственно, и есть теорема Нэрнста (1960 г.). Планк расширил теорему Нэрнста, предположив, что нулевая изотерма совпадает с нулевой изэнтропой (третье начало термодинамики).

Из теоремы Нэрнста следует, что вдоль нулевой изотермы будет

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = 0, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = 0. \quad (1.147)$$

Подставляя (1.147) в уравнения Максвелла (1.131) и (1.133), получим вдоль нулевой изотермы

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = 0.$$

Иными словами, коэффициент теплового объёма расширения равен нулю при $T = 0$.

§ 21. Уравнения состояния

Теплоёмкость является важнейшей характеристикой свойств вещества. По ней известна богатая экспериментальная информация. Кроме того созданы теоретические модели теплоёмкости Дебая, Эйнштейна и другие. В классической механике сплошных сред предполагается, что шаровые тензоры скоростей напряжений $\dot{T}_{\sigma 0}$ (1.75) и скоростей деформаций $\dot{T}_{\varepsilon 0}$

(1.52) пропорциональны и коэффициент пропорциональности является модулем всестороннего сжатия (модулем упругости) K (1.138)

$$\dot{T}_{\sigma 0} = 3K\dot{T}_{\varepsilon 0}. \quad (1.148)$$

Связи между компонентами этих тензоров после подстановки в (1.148) выражений $\dot{\varepsilon}_{cp}$ (1.57) и K (1.138) принимают вид

$$\dot{P} = -\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S \dot{V}. \quad (1.149)$$

Зависимость $P(V, S)$ называется уравнением состояния. Уравнение (1.149) связывает скорости изменения P и V вдоль изэнтропы. В общем случае, когда изменяется ещё и энтропия, уравнение (1.149) принимает вид

$$\dot{P} = -\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S \dot{V} + \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V \dot{S}.$$

Давление P может зависеть не только от V и S , но и от других аргументов.

При построении уравнений состояния в современной механике сплошных сред чаще всего используются полуэмпирические модели, в которых общий вид функциональных зависимостей потенциала от независимых термодинамических переменных устанавливается с привлечением теоретических представлений, а данные экспериментальных измерений используются для определения численных значений коэффициентов в этих зависимостях. Такой подход позволяет максимально использовать имеющуюся экспериментальную и расчётную информацию и даёт возможность построить уравнение состояния в компактной форме, удобной для проведения численных расчётов.

Набор свойств, которые необходимо использовать для математического моделирования поведения вещества в широком диапазоне изменения его характеристик, очень большой. При расчёте динамики среды учитываются адиабатическая сжимаемость, теплопроводность, фазовые переходы (плавление, испарение, полиморфизм), детонация ВВ, упругость, пластичность, хрупкость, разрушение, электропроводимость, магнитные и электрические свойства.

Как показывает практика расчётов на ЭВМ поведения сжимаемых сред под действием динамических нагрузок, уравнения состояния должны удовлетворять ряду требований.

Уравнения состояния должно точно аппроксимировать экспериментальные и теоретические данные о термодинамических свойствах веществ. Под точным описанием экспериментальных и теоретических данных понимается такое описание, когда отклонение УРС от исходных данных не превышает погрешности получения этих данных.

В пределах существования каждой фазы, поверхность УРС должна быть непрерывной и гладкой и удовлетворять условиям устойчивого

термодинамического равновесия (1.139). Уравнение состояния должно отражать тот факт, что вещество невозможно бесконечно сжимать, прилагая конечное давление. Это требование имеет вид

$$P \rightarrow +\infty \text{ при } V \rightarrow 0.$$

Оно выполняется, если изэнтропы и изотермы являются выпуклыми

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_S > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_T > 0.$$

Уравнение состояния должно быть широкодиапазонным, поскольку переход в процессе расчета динамики с одного уравнения состояния на другое может привести к появлению нефизичных возмущений и к изменению структуры решения задачи. Дело в том, что такие процессы, как плавление, испарение, диссоциация, ионизация делают термодинамическую поверхность сложной по структуре и для её точного описания простых форм уже недостаточно. Математическая форма УРС становится сложной. Поскольку перечисленные требования противоречивы, то при построении УРС стараются обеспечить разумное сочетание высокой точности, экономичности и широкого диапазона применимости.

В адиабатических процессах законы сохранения массы, количества движения и энергии содержат три термодинамические величины P , V , E . Внутренняя энергия E зависит от V и S , а давление также является функцией от V и S . Если в этих уравнениях исключить S , то получается уравнение состояния, которое чаще всего используется в виде

$$P = P(V, E).$$

Этого уравнения оказывается достаточно для замыкания системы законов сохранения в адиабатическом случае. Если же возникает необходимость определить ещё и температуру, то с помощью уравнений термодинамики нужно построить дополнительно зависимость $T = T(V, E)$.

§ 22. Уравнение состояния газа

Газ – это совокупность хаотически движущихся микрочастиц. Модель газа, в которой частицы не имеют объёма и не взаимодействуют друг с другом, называется идеальным газом.

В § 1 показано, что при переходе от частиц к сплошной среде удельная внутренняя энергия одного моля возрастает на величину

$$\Delta E = \sum_{v=1}^N 0,5 \eta_v (\bar{U}_v - \bar{U})^2. \quad (1.150)$$

Из (1.150) видно, что энергия ΔE определяется только поступательным движением частиц. Каждая частица независимо от её внутренней струк-

туры имеет три степени свободы поступательного движения. Согласно теореме Больцмана на одну степень свободы поступательного движения приходится энергия $0,5 kT$ (k – постоянная Больцмана). Т. о. N частиц (N – число Авогадро) имеют энергию

$$\Delta E = \frac{3}{2} NkT. \quad (1.151)$$

Из (1.150) и (1.151) следует выражение температуры через скорость частиц

$$T = \frac{1}{3A} \sum_{v=1}^N \eta_v (\bar{U}_v - \bar{U})^2, \quad (1.152)$$

где $A=Nk/\mu$, μ – молярная масса. Из предположения, что частицы упруго отражаются от стенок объёма, в котором они находятся, следует выражение для давления

$$P = \frac{1}{3} \rho \sum_{v=1}^N \eta_v (\bar{U}_v - \bar{U})^2. \quad (1.153)$$

Т. о. давление газа определяется исключительно поступательным движением частиц. После исключения сумм в (1.152) и (1.153) приходим к термическому уравнению состояния идеального газа

$$P = A\rho T. \quad (1.154)$$

Молекулы газа могут быть одноатомными, либо многоатомными. Многоатомная молекула имеет кроме трёх степеней свободы поступательного движения ещё и r степеней свободы вращательного движения и s степеней свободы колебательного движения. Согласно теореме Больцмана на одну степень свободы вращательного движения приходится энергия $0,5 kT$, на одну степень свободы колебательного движения – энергия kT . Т. о. внутренняя энергия N молекул идеального газа такова

$$E = 0,5(3 + r + 2s) AT. \quad (1.155)$$

Если r и s не зависят от T , то

$$C_v = \frac{1}{2} A(3 + r + 2s),$$

и, следовательно,

$$E = C_v T. \quad (1.156)$$

Исключив T из (1.156) и (1.154), получим калорическое уравнение состояния идеального газа

$$P = \frac{A}{C_v} \rho E. \quad (1.157)$$

Преобразуем отношение A/C_V . Для этого воспользуемся уравнением, связывающим C_p и C_V [12]

$$C_p = C_V + \frac{T}{\rho^2} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho^2 / \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T. \quad (1.158)$$

Производные, входящие в (1.158), найдём, дифференцируя (1.154)

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho = A\rho, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T = AT.$$

Подставив эти производные в (1.158), получим

$$C_p = C_V + A. \quad (1.159)$$

Обозначая отношение $\frac{C_p}{C_V}$ через γ , запишем (1.159) в виде

$$\frac{A}{C_V} = \gamma - 1. \quad (1.160)$$

Заменив $\frac{A}{C_V}$ с помощью (1.160) на $\gamma - 1$ и подставив в (1.157), получим иной вид калорического уравнения состояния идеального газа

$$P = (\gamma - 1)\rho E. \quad (1.161)$$

Подставив (1.154) и (1.161) в уравнение

$$dE + PdV - TdS = 0$$

и проинтегрировав, получим адиабатическое уравнение состояния идеального газа

$$P = e^{\frac{\gamma-1}{A} S} \rho^\gamma. \quad (1.162)$$

Среди моделей реальных газов наиболее ярким является УРС Ван-дер-Ваальса, в котором предельное адиабатическое сжатие не равно нулю и частицы взаимодействуют друг с другом. УРС Ван-дер-Ваальса имеет вид

$$P = \frac{AT}{V - b} - \frac{a}{V^2},$$

где a , b и A постоянные величины, $V = \frac{1}{\rho}$. УРС Ван-дер-Ваальса описывает качественно поведение газа, жидкости и фазовый переход из жидкости в пар и обратно.

§ 23. Уравнения состояния конденсированного вещества

Основной чертой, отличающей твердые и жидкие тела от газов, является сильное взаимодействие между молекулами (атомами). Твёрдое тело или жидкость являются неидеальной средой. Свойства неидеальной среды моделируются как шаровыми тензорами напряжений и деформаций, так и девиаторами. Сплошная среда, в которой девиатор тензора напряжений отсутствует, называется идеальной. Название «конденсированная среда» позволяет отличать идеальную жидкость и идеальное твёрдое тело от идеального газа. Свойства конденсированных сред сильно отличаются от свойств газов. Микрочастицы (атомы, молекулы, ионы) в твёрдом теле располагаются в узлах кристаллической решётки и колеблются около положения равновесия. Расстояние между микрочастицами таково, что силы притяжения и отталкивания уравновешивают друг друга. На макроуровне внутренняя энергия, соответствующая энергии взаимодействия микрочастиц, называется потенциальной. Она достигает минимального значения, когда все микрочастицы покоятся в узлах кристаллической решетки, где силы взаимодействия равны нулю.

Силы, удерживающие структурные элементы кристалла рядом друг с другом, являются, в основном, силами электростатического характера. При взаимодействии одинаково заряженных структурных элементов между ними возникает сила отталкивания, а при взаимодействии противоположно заряженных элементов – сила притяжения. И те, и другие силы зависят от расстояния между центрами микрочастиц. Главное различие между ними заключается в направлении действия этих сил. Силы отталкивания положительны, так как направлены в сторону увеличения расстояния между микрочастицами. Силы притяжения отрицательны, так как они направлены в сторону уменьшения расстояния между микрочастицами. Силы взаимодействия микрочастиц зависят только от среднего расстояния между их центрами, которое пропорционально удельному объёму V в степени $1/3$. Энергия взаимодействия микрочастиц не зависит от температуры и называется потенциальной или холодной.

При увеличении температуры T вещество приобретает дополнительную энергию, которая увеличивается с ростом температуры и называется **тепловой** энергией. Если температура не слишком высока, микрочастицы совершают малые колебания около положения равновесия. При увеличении температуры растёт амплитуда колебаний и тепловая энергия, а вместе с ними и количество микрочастиц, перемещающихся по телу. Когда энергия колебаний становится больше величины потенциального барьера, микрочастицы начинают свободно перемещаться по телу. Тепловое движение при этом теряет колебательный характер и становится похожим на хаотическое движение микрочастиц в газах.

В простейших моделях конденсированного вещества удельная внутренняя энергия состоит из холодной и тепловой энергии

$$E = E_x(V) + E_T(V, T). \quad (1.163)$$

Согласно определению давления (1.124) каждому виду внутренней энергии соответствует своё давление. После дифференцирования (1.163) получаются соотношения для P , P_x и P_T

$$P = P_x(V) + P_T(V, T), \quad (1.164)$$

где

$$P_x = -\frac{dE_x}{dV}, \quad P_\delta = -\left(\frac{\partial E_\delta}{\partial V}\right)_S. \quad (1.165)$$

Анализ работ, посвященных обоснованию аналитической формы зависимостей $E_x(V)$, $P_x(V)$ и определению численных значений параметров, показывает, что все многообразие уравнений сводится для сил притяжения к степенной зависимости от плотности и либо к степенной, либо к экспоненциальной зависимости для сил отталкивания. В [12] рассмотрены наиболее часто встречающиеся зависимости E_x, P_x от безразмерной плотности $\delta = \rho / \rho_{0k}$.

В первой половине 20-го века широкое распространение получило уравнение Леннарда-Джонса [12]

$$P_x = \frac{1}{3}\rho_{0k}\delta \left(Am\delta^{\frac{m}{3}} - Bn\delta^{\frac{n}{3}} \right), \quad E_x = A \left(\delta^{\frac{m}{3}} - 1 \right) - B \left(\delta^{\frac{n}{3}} - 1 \right).$$

Целый ряд работ (Борн, Слейтер, Леннард-Джонс, Грюнайзен, Паулинг, Бардин, Ми и др.) был направлен на уточнение A, B, n и m .

Для определения функций $P_T(V, T)$, $E_T(V, T)$ воспользуемся уравнением термодинамической совместимости (1.136) в виде

$$\left(\frac{\partial E_\delta}{\partial V}\right)_\delta = T \left(\frac{\partial P_\delta}{\partial T}\right)_V - P_\delta.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$P_T = \psi_a(V)T + T \int \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial E_T}{\partial V}\right)_T dT. \quad (1.166)$$

Функция $\psi(V)$ обязана своим происхождением правилам интегрирования. Зависимость $E_T(V, T)$ возьмём в виде

$$E_T(V, T) = \frac{AT^n}{(\theta(V) + T)^{n-1}}. \quad (1.167)$$

Подставив E_T в (1.166), продифференцировав по V и проинтегрировав по T , получим уравнение для теплового давления

$$P_T(V, T) = \psi(V)T - \frac{A}{\theta(V)} \frac{d\theta(V)}{dV} \frac{T^n}{(\theta(V) + T)^{n-1}}. \quad (1.168)$$

В [13] с помощью анализа зависимости $S(V, T)$ показано, что $\psi(V)=0$. Теплоёмкость $C_V(V, T)$ получается дифференцированием $E_T(V, T)$

$$C_V = AT^{n-1} \frac{n\theta(V) + T}{(\theta(V) + T)^n}.$$

Функция $\theta(V)$ по смыслу близка к характеристической температуре Дебая, а зависимость C_V от T/θ мало отличается от зависимости $C_V(T/\theta)$, полученной Дебаем. После подстановки E_T из (1.167) в (1.168) зависимость P_T от V и E_T принимает вид

$$P_T = \frac{1}{V} \Gamma(V) E_T, \quad (1.169)$$

где

$$\Gamma = - \frac{d \ln \theta}{d \ln V}.$$

Зависимость $\theta(V)$ или зависимость $\Gamma(V)$ подбираются так, чтобы наилучшим образом аппроксимировать экспериментальные данные по ударному сжатию, тепловому объёмному расширению при $P=\text{const}$ и теплоёмкости $C_p(V, T)$.

§ 24 Упругость и пластичность

Область упругих деформаций у каждого вещества ограничена. Упругие деформации являются обратимыми. Это значит, что при деформировании энтропия остаётся постоянной, а после снятия нагрузки вещество возвращается в исходное состояние. При превышении предела упругости часть деформации становится необратимой, т. е. пластической. Разделим компоненты девиатора скоростей деформаций на упругие (с индексом e) и пластические (с индексом p)

$$\dot{\epsilon}_{ii} = \dot{\epsilon}_{ii}^e + \dot{\epsilon}_{ii}^p, \quad \dot{\gamma}_{ij} = \dot{\gamma}_{ij}^e + \dot{\gamma}_{ij}^p.$$

Введём меру пластичности φ . Значение $\varphi = 0$ соответствует идеальной упругости, значение $\varphi = 1$ – идеальной пластичности. При $0 < \varphi < 1$ свойства упругости и пластичности проявляются одновременно, т. е. компоненты девиатора скоростей деформаций расщепляются

$$\dot{\epsilon}_{ii}^e = (1 - \varphi) \dot{\epsilon}_{ii}, \quad \dot{\gamma}_{ij}^e = (1 - \varphi) \dot{\gamma}_{ij}, \quad \dot{\epsilon}_{ii}^p = \varphi \dot{\epsilon}_{ii}, \quad \dot{\gamma}_{ij}^p = \varphi \dot{\gamma}_{ij}.$$

Постулат № 4. Компоненты девиатора скоростей напряжений зависят только от компонентов девиатора скоростей упругих деформаций.

Вследствие постулата № 4 зависимости компонентов девиатора скоростей напряжений \dot{S}_{ii} и $\dot{\tau}_{ij}$ от компонентов девиатора скоростей деформаций \dot{e}_{ii} и $\dot{\gamma}_{ij}$ принимают вид

$$\dot{S}_{ii} = (1 - \varphi)2G\dot{e}_{ii}, \quad \dot{\tau}_{ij} = (1 - \varphi)2G\dot{\gamma}_{ij}, \quad (1.170)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{e}_{xx} &= \frac{2}{3} \frac{\partial U_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial U_y}{\partial y} - \frac{1}{3} \frac{\partial U_z}{\partial z}, & \dot{\gamma}_{xy} &= \dot{\gamma}_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right), \\ \dot{e}_{yy} &= -\frac{1}{3} \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial U_y}{\partial y} - \frac{1}{3} \frac{\partial U_z}{\partial z}, & \dot{\gamma}_{xz} &= \dot{\gamma}_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right), \\ \dot{e}_{zz} &= -\frac{1}{3} \frac{\partial U_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{2}{3} \frac{\partial U_z}{\partial z}, & \dot{\gamma}_{yz} &= \dot{\gamma}_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Следствиями законов сохранения массы (1.81), импульса (1.84) и энергии (1.86) неидеальной среды являются уравнение движения

$$\rho \frac{d\bar{U}}{dt} + \bar{\nabla} P - \frac{\partial \bar{S}_x}{\partial x} - \frac{\partial \bar{S}_y}{\partial y} - \frac{\partial \bar{S}_z}{\partial z} - \bar{\Phi} = 0$$

и уравнение для внутренней энергии E

$$\rho \frac{dE}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - \bar{S}_x \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} - \bar{S}_y \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - \bar{S}_z \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = 0. \quad (1.171)$$

В уравнение (1.171) подставим вектора

$$\begin{aligned} \bar{S}_x &= S_{xx} \bar{i} + \tau_{xy} \bar{j} + \tau_{xz} \bar{k}, & \bar{S}_y &= \tau_{yx} \bar{i} + S_{yy} \bar{j} + \tau_{yz} \bar{k}, & \bar{S}_z &= \tau_{zx} \bar{i} + \tau_{zy} \bar{j} + S_{zz} \bar{k}, \\ \bar{U} &= U_x \bar{i} + U_y \bar{j} + U_z \bar{k} \end{aligned}$$

и запишем полученное уравнение в виде

$$\dot{E} + P\dot{V} = V\dot{A}, \quad (1.172)$$

где

$$\dot{A} = S_{xx} \dot{e}_{xx} + S_{yy} \dot{e}_{yy} + S_{zz} \dot{e}_{zz} + 2(\tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy} + \tau_{xz} \dot{\gamma}_{xz} + \tau_{yz} \dot{\gamma}_{yz}). \quad (1.173)$$

Поскольку

$$\dot{e}_{ii} = (1 - \varphi) \dot{e}_{ii} + \varphi \dot{e}_{ii}, \quad \dot{\gamma}_{ij} = (1 - \varphi) \dot{\gamma}_{ij} + \varphi \dot{\gamma}_{ij},$$

то уравнение (1.172) запишем в виде

$$\dot{E} + P\dot{V} = (1 - \varphi)V\dot{A} + \varphi V\dot{A}. \quad (1.174)$$

В идеальной среде $E = E_x + E_T(V, T)$. Разделим холодную энергию на холодную энергию дилатации $E_x(V)$ и холодную энергию дисторсии $E_e(e_{ii}, \gamma_{ij})$. Поскольку упругие деформации обратимы, а пластические не обратимы, то холодной может быть только энергии упругой дисторсии. Т. о. уравнение (1.174) расщепляется на два

$$\dot{E} + P\dot{V} = \varphi V\dot{A}, \quad (1.175)$$

$$\dot{E}_e = (1 - \varphi)V\dot{A}. \quad (1.176)$$

Из сравнения уравнения (1.175) с основным термодинамическим уравнением

$$\dot{E} + P\dot{V} = T\dot{S}.$$

следует, что

$$T\dot{S} = \varphi\dot{A}.$$

Величина \dot{A} может быть и положительной, и отрицательной, величина же \dot{S} в упругих (обратимых) деформациях равна нулю, а в пластических (необратимых) деформациях положительна. Коэффициент пластичности φ изменяется в промежутке $0 \leq \varphi \leq 1$. Т. о. чтобы не допустить уменьшения энтропии при $\dot{A} < 0$, должно быть $\varphi = 0$. При этом из (1.176) видно, что при $\dot{A} < 0$ и $\varphi = 0$ идёт процесс чисто упругой разгрузки, при котором E_e убывает, процесс же пластической разгрузки невозможен.

Деформирование, при котором $\dot{A} > 0$, может быть упругим, упругопластическим и чисто пластическим. Для количественного разделения этих процессов выразим \dot{e}_{ii} и $\dot{\gamma}_{ij}$ из (1.170) и подставим в выражение \dot{A} (1.173). С помощью полученного уравнения запишем уравнение для упругой внутренней энергии (1.176) в виде

$$\dot{E}_e = \frac{V}{4G}\dot{B},$$

где

$$B = S_{xx}^2 + S_{yy}^2 + S_{zz}^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2).$$

Для ограничения упругого деформирования воспользуемся критерием Мизеса (1913 г.)

$$B < \frac{2}{3}Y, \quad (1.177)$$

где Y называют пределом упругости. Введём безразмерную величину

$$\psi = \frac{3B}{2Y}. \quad (1.178)$$

Упругие деформации возможны при $\psi < 1$. Введём ещё одну безразмерную величину

$$R = \begin{cases} \psi, & \text{если } \psi \leq 1, \\ 1, & \text{если } \psi > 1. \end{cases} \quad (1.179)$$

Меру пластичности φ определим так

$$\varphi = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - R^m} & \text{при } \dot{A} \geq 0, \\ 0 & \text{при } \dot{A} < 0. \end{cases} \quad (1.180)$$

В изложенной модели упруго-пластического деформирования R и φ изменяются в пределах $0 \leq R \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 1$. При $\varphi=1$ получается чисто пластическое течение. В нём

$$S_{ii} = \text{const}, \quad \tau_{ij} = \text{const}, \quad E_e = \text{const}.$$

Удельная внутренняя энергия в пластическом течении растёт в соответствии с уравнением

$$\dot{E} + P\dot{V} = V\varphi \left[S_{xx}\dot{e}_{xx} + S_{yy}\dot{e}_{yy} + S_{zz}\dot{e}_{zz} + 2(\tau_{xy}\dot{\gamma}_{xy} + \tau_{xz}\dot{\gamma}_{xz} + \tau_{yz}\dot{\gamma}_{yz}) \right].$$

Правая часть этого уравнения определяет диссипацию энергии, которая является следствием необратимости пластических деформаций.

§ 25. Постановка задач механики сплошной среды

Общую задачу механики сплошной среды можно сформулировать так: определить движение каждой частицы, её деформацию и внутренние силы (гидродинамическое давление в случае идеальной жидкости), возникающие в каждой точке жидкости в каждый момент движения под воздействием внешних причин.

При решении конкретных задач механики сплошной среды необходимо знать область интегрирования уравнений, в которой должно быть найдено решение, начальное состояние среды (начальные данные) и внешние причины движения среды (граничные условия). Этого, однако, часто оказывается недостаточно, чтобы найти решение. Причиной трудностей является нелинейность уравнений, выражающих законы сохранения. Именно нелинейность уравнений приводит к образованию в сплошной среде поверхностей разрыва. Разрывы, возникающие даже при сколь угодно гладких начальных данных и граничных условиях, требуют привлечения дополнительных уравнений, связывающих величины в гладких областях по обе стороны разрыва. Образующиеся в среде разрывы

могут отличаться друг от друга по своим свойствам. Ниже мы будем рассматривать:

- а) сильные разрывы (разрывы всех величин), которые часто называют фронтом ударной волны;
- б) слабые разрывы (разрывы первых производных);
- в) контактные разрывы (разрывы не всех, а только части искомым величин).

Законы сохранения или их следствия – это система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Для идеальной среды она имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{V} \bar{U} = 0, \quad \rho \frac{d\bar{U}}{dt} + \operatorname{grad} P = 0, \quad \frac{dE}{dt} - \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Пять уравнений содержат шесть искомым функций: $U_x, U_y, U_z, P, \rho, E$. Для замыкания системы нужно добавить ещё одно уравнение. Таким уравнением является уравнение состояния вещества

$$P = P(\rho, E).$$

Для неидеальной среды система законов сохранения и их следствий имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \bar{U} &= 0, \\ \rho \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{\nabla} P + \frac{\partial \bar{S}_k}{\partial x_k} &= 0, \\ \rho \frac{dE}{dt} - \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt} &= - \left(\bar{S}_x \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{S}_y \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \bar{S}_z \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) - \nabla \bar{q}, \end{aligned}$$

где $\bar{S}_x = S_{xx} \bar{i} + \tau_{xy} \bar{j} + \tau_{xz} \bar{k}$, $\bar{S}_y = \tau_{yx} \bar{i} + S_{yy} \bar{j} + \tau_{yz} \bar{k}$, $\bar{S}_z = \tau_{zx} \bar{i} + \tau_{zy} \bar{j} + S_{zz} \bar{k}$. Для замыкания системы законов сохранения нужно добавить уравнение состояния вещества

$$P = P(V, E), \quad T = T(V, E)$$

и «определяющие уравнения» – зависимости между \dot{S}_{ii} , $\dot{\tau}_{ij}$ и соответствующими компонентами тензора скоростей деформаций.

В случае вязкой жидкости \dot{S}_{ii} и $\dot{\tau}_{ij}$ определяются уравнениями

$$\begin{aligned} S_{xx} &= 2\mu \left(\frac{2}{3} \frac{\partial U_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial U_y}{\partial y} - \frac{1}{3} \frac{\partial U_z}{\partial z} \right), & S_{yy} &= 2\mu \left(-\frac{1}{3} \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial U_y}{\partial y} - \frac{1}{3} \frac{\partial U_z}{\partial z} \right), \\ S_{zz} &= 2\mu \left(-\frac{1}{3} \frac{\partial U_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{1}{3} \frac{\partial U_z}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right),$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right),$$

где μ – коэффициент вязкости.

Компоненты девиатора тензора напряжений в случае упругих деформаций определяется из уравнений

$$\frac{dS_{xx}}{dt} - 2G \left(\frac{2}{3} \frac{\partial U_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial U_y}{\partial y} - \frac{1}{3} \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = 0,$$

$$\frac{dS_{yy}}{dt} - 2G \left(-\frac{1}{3} \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial U_y}{\partial y} - \frac{1}{3} \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = 0,$$

$$\frac{dS_{zz}}{dt} - 2G \left(-\frac{1}{3} \frac{\partial U_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{2}{3} \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = 0,$$

$$\frac{d\tau_{xy}}{dt} = \frac{d\tau_{yx}}{dt} = G \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right), \quad \frac{d\tau_{xz}}{dt} = \frac{d\tau_{zx}}{dt} = G \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right),$$

$$\frac{d\tau_{yz}}{dt} = \frac{d\tau_{zy}}{dt} = G \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right),$$

где G – модуль сдвига. Область упругих деформаций ограничивается условием (1.177), коэффициент неидеальности φ определяется условиями (1.178), (179) и уравнением (1.180). Удельная внутренняя энергия упругих деформаций изменяется в соответствии с уравнением (1.176), диссипация энергии на пластических деформациях определяется уравнением (1.175).

Глава 2. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

§ 1. Функции и аргументы, таблицы и сетки

Понятие переменной величины было сформулировано Р. Декартом (1596–1650 гг.) Переменная величина x считается заданной, если указана область её изменения $\{x\}$ (область изменения называют ещё областью определения). Если рассматриваются переменные x и y с областями изменения $\{x\}$ и $\{y\}$, то переменная y называется функцией от переменной x в области $\{x\}$, если по некоторому правилу каждому значению x из $\{x\}$ ставится в соответствие одно значение y из $\{y\}$ [1]. Переменная величина x в этом случае называется аргументом функции $y(x)$ [2]. В механике сплошной среды давление P , плотность ρ , удельная внутренняя энергия E , температура T , энтропия S и другие термодинамические величины, а также скорость \bar{U} и компоненты девиатора тензора напряжений S_{ij} являются функциями от пространственных переменных x, y, z и времени t .

Функции P, ρ, E, \bar{U}, T и др. могут быть непрерывными или разрывными. Их поведение определяется законами сохранения массы, количества движения и энергии. В случае если указанные функции непрерывны, законы сохранения записываются в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных. Для идеальной сплошной среды с нулевым девиатором тензора напряжений и без теплопроводности закон сохранения массы и следствия законов сохранения: уравнение движения и уравнение для внутренней энергии имеют вид (1.113). Если же среда неидеальная и тепловые потоки отличны от нуля, то те же самые уравнения принимают вид (1.114)–(1.116). На сильных разрывах законы сохранения принимают форму нелинейных алгебраических уравнений. На слабых и контактных разрывах характеристики сплошной среды также удовлетворяют определенным соотношениям (1.107)–(1.111).

При переходе от физической модели к математической модели непрерывные функции заменяются табличными функциями, определенными на множестве точек $x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}, t^n$, где $i = 0, 1, 2 \dots N_x$, $j = 0, 1, 2 \dots N_y$, $k = 0, 1, 2 \dots N_z$, $n = 0, 1, 2 \dots N_t$. Через эти точки проходят координатные линии, которые образуют сетку. Каждые два семейства координатных линий лежат на некоторых гиперплоскостях в пространстве x, y, z . Точки, в которых пересекаются координатные линии, называются узлами сетки. Совокупность узлов сетки, лежащих на плоскости $t = t^n = \text{const}$, называют временным слоем. Простейший пример сетки приведен на рис. 2.1.

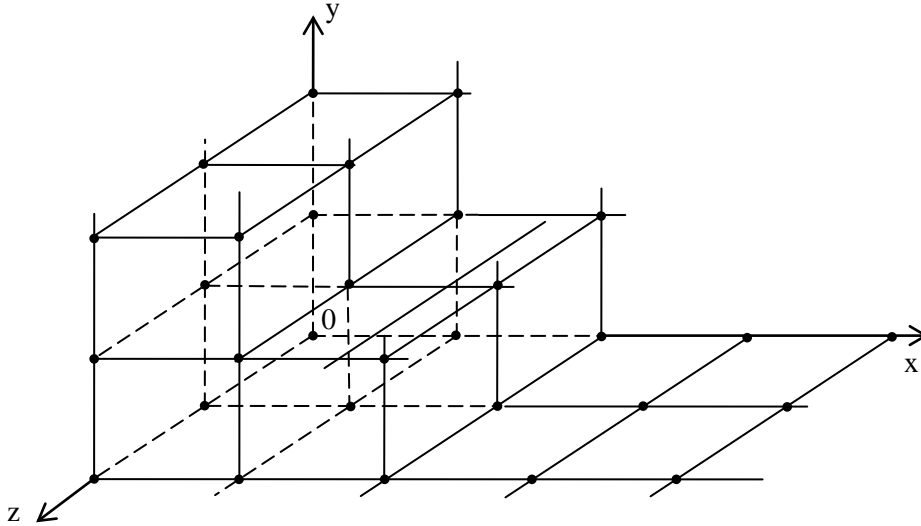


Рис. 2.1. Фрагмент прямоугольной сетки в пространстве x, y, z .
Точки – узлы с координатами x_i, y_j, z_k ($i = 0, 1, 2, 3, 4, j = 0, 1, 2, k = 0, 1, 2$)

Расстояние между соседними узлами сетки называется **шагом сетки**, а промежутки между узлами – **сеточными интервалами**. Если шаги сетки постоянны, то сетка называется **равномерной**, в противном случае – **неравномерной**. Середины расстояний между точками сетки называют **полуцелыми точками** и обозначают дробными индексами, например

$$x_{i+0,5} = 0,5(x_i + x_{i+1}), \quad y_{j+0,5} = 0,5(x_j + x_{j+1}), \quad z_{k+0,5} = 0,5(x_j + x_{j+1}).$$

Вообще говоря, координаты $x_{i+0,5}, y_{j+0,5}, z_{k+0,5}$ – это координаты середин сеточных интервалов. При переходе к математической модели дифференциальные уравнения заменяются алгебраическими уравнениями, связывающими друг с другом значения табличных функций. Эти уравнения всегда содержат разности табличных значений искомых функций, и поэтому называются **разностными уравнениями**.

Как правило, задачи механики сплошной среды формулируются для ограниченных областей, на пространственно – временных границах которых задаются граничные условия. При переходе к математической модели граничные условия так же, как и основные функции, задаются на сетке. Вообще говоря, каждая из характеристик сплошной среды может определяться на «своей» сетке. Фрагмент сетки с указанием, в какой точке определяется каждая из характеристик сплошной среды, называется **сеточным шаблоном**. При описании шаблона используется правило, в соответствии с которым индексы у величины соответствуют значениям аргументов. Например, в случае одной пространственной переменной x

$$f_i^n = f(x_i, t^n), \quad f_{i+0,5}^{n+1} = f(x_{i+0,5}, t^{n+1}), \quad f_i^{n+0,5} = f(x_i, t^{n+0,5}),$$

где $x_{i+0,5} = x_i + 0,5h$, $t^{n+0,5} = t^n + 0,5\tau$, $h = x_{i+1} - x_i$ – шаг сетки по переменной x , $\tau = t^{n+1} - t^n$ – шаг сетки по переменной t . Пример простейшего сеточного шаблона приведен на рис. 2.2. Нижний индекс у величины соответствует пространственной координате, верхний индекс – временной координате ($U_{i+0,5}^n = U(x_{i+0,5}, t^n)$, $P_{i+0,5}^n = P(x_{i+0,5}, t^n)$, $V_{i+0,5}^n = U(x_{i+0,5}, t^n)$, $E_{i+0,5}^{n+1} = U(x_{i+0,5}, t^{n+1})$, $P_i^* = P(x_i, t^*)$, $U_i^* = U(x_i, t^*)$).

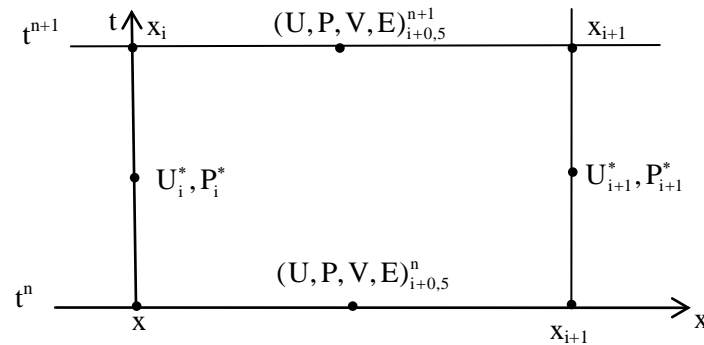


Рис. 2.2. Простейший сеточный шаблон для одной пространственной переменной

Совокупность сетки, сеточного шаблона, разностных уравнений, разностных начальных данных и граничных условий называют [3] **разностной схемой**.

Переход к табличному представлению функции неизбежно порождает вопрос о её доопределении в промежутках между узлами и о точности восстановления значения функции в любой точке, не совпадающей с узлами. Поясним это на примере функции $f_i(x_i)$.

Рассмотрим непрерывную функцию $f(x)$ и соответствующую ей таблицу $f_i(x_i)$. Все значения f_i строго совпадают со значениями f при $x = x_i$

$$f_i = f(x_i).$$

Точность восстановления функции $f(x)$ в промежутке $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ между узлами с номерами i и $i + 1$ зависит от применяемого для этого способа. Самым простым и грубым считается способ, когда функция кусочно-постоянна и $f(x) = f_i$ при $x_i \leq x \leq x_{i+1}$. В этом случае при увеличении x от x_i к x_{i+1} погрешность восстановленной функции возрастает и если функция $f(x)$ монотонна, то при $x = x_{i+1}$ достигает наибольшей величины. В точках x_i, x_{i+1} при таком способе доопределения возникают разрывы, амплитуды которых равны $\Delta f_{i+1} = f_{i+1} - f_i$, $\Delta f_i = f_i - f_{i-1}$. Если же функция кусочно-постоянна и $f(x) = f_{i+1}$ при $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, то амплитуды разрывов равны $\Delta f_{i+1} = f_{i+2} - f_{i+1}$, $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$. Если же функция кусочно-постоянна и равна $f(x) = 0,5(f_i + f_{i+1})$ при $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, то амплитуды разрывов в узлах таблицы изменяются $\Delta f_{i+1} = 0,25(f_{i+2} - f_i)$, $\Delta f_i = 0,25(f_{i+1} - f_{i-1})$. Несколько более

точным является способ, когда $f(x)$ в промежутках $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ находятся с помощью линейной интерполяции

$$f(x) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i).$$

Теория восстановления $f(x)$ между узлами таблицы хорошо проработана. В [4–6] подробно рассмотрены методы интерполяции с помощью интерполяционных полиномов Лагранжа, Чебышева, Лежандра и Эрмита и излагаются приемы оценки погрешностей. Монографию [7] без преувеличения можно назвать энциклопедией численных методов в период до появления ЭВМ. В [5–8] основное внимание уделялось численному интегрированию и дифференцированию табличных функций. В [9, 10] акцентируется внимание на едином методе нахождения интерполяционных формул и определении остаточных членов. Рассматриваются также трудности, возникающие при приближении функции $u(x)$ многочленом.

После появления ЭВМ проблемы, возникающие при применении численных методов, стали изменяться. В более поздних монографиях [11, 12] им уже уделяется заметное внимание. В [12] рассмотрены вопросы построения сеток, методы построения разностных уравнений и условия минимизации различий между приближенным и точным решениями. Без обсуждения этих вопросов невозможно изложение теории разностных методов.

Теория разностных методов глубоко проработана, однако до завершения еще далеко. Об этом говорит и разное содержание применяемых понятий (метод, методика, схема и т. д.), и появление монографий, в которых одни и те же методы и приемы излагаются по-разному и на разном уровне строгости из-за разных предпочтений и опыта авторов.

§ 2. Теорема о среднем значении

Эта теорема играет фундаментальное значение в разностных методах и имеет две формулировки [2].

А. Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$, то имеет место уравнение

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_*)(b - a), \quad (2.1)$$

где точка x_* удовлетворяет условиям $a \leq x_* \leq b$. Значение x_* единственно, если $f(x)$ монотонна. Пример монотонной функции приведен на рис. 2.3. Если $f(x)$ немонотонна, то x_* может иметь несколько значений.

Б. Если функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[a, b]$ и ограничена в этом промежутке $m \leq f(x) \leq M$, то имеет место уравнение

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a), \text{ где } m \leq \mu \leq M. \quad (2.2)$$

Пример интегрируемой функции $f(x)$ изображен на рис. 2.4.

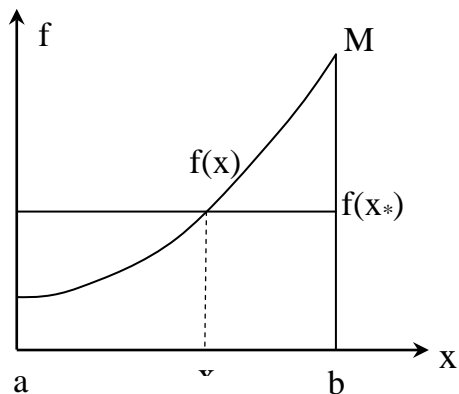


Рис. 2.3. Определение значения $f(x_*)$ в случае непрерывной монотонной функции $f(x)$

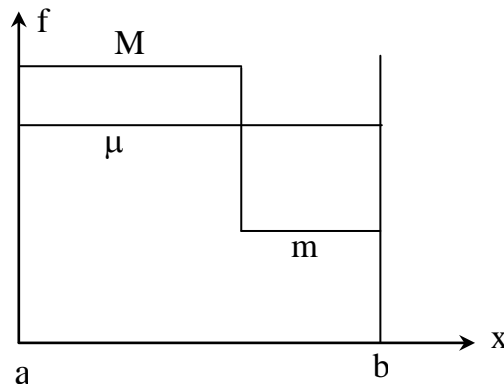


Рис. 2.4. Определение среднего в промежутке $[a, b]$ значения функции $f(x)$ в случае разрывной интегрируемой функции $f(x)$

Уравнения (2.1) и (2.2) являются точными в промежутке $[a, b]$, поскольку $f(x_*)$ и μ – это точные средние значения функции $f(x)$ в этом промежутке. Теорема о среднем значении не дает возможности определить значение x_* или значения \bar{x} , при котором $f(\bar{x}) = \mu$.

Обобщенная теорема о среднем значении [2] также имеет две формулировки.

А. Если $f(x)$ непрерывна в $[a, b]$, произведение $f(x)g(x)$ интегрируемо в $[a, b]$ и $g(x)$ в $[a, b]$ не меняет знака, то

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x_*) \int_a^b g(x)dx,$$

где $a \leq x_* \leq b$.

Б. Если $f(x)$ и произведение $g(x)f(x)$ интегрируемы в $[a, b]$, $g(x)$ в $[a, b]$ не меняет знака и $f(x)$ ограничена $m \leq f(x) \leq M$, то

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx,$$

где $m \leq \mu \leq M$.

§ 3. Способ получения разностных уравнений

Способ получения разностных уравнений продемонстрируем на примере простейшего уравнения. Это уравнение переноса. Полная производная функции $f(x, t)$ по t имеет вид

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt}. \quad (2.3)$$

Вообще говоря, $\frac{dx}{dt}$ может быть произвольной. Выберем такую линию, вдоль которой f постоянно и, следовательно,

$$\frac{df}{dt} = 0.$$

Обозначим касательную в каждой точке этой линии через $a(x, t)$

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t).$$

Тогда выражение полной производной (2.3) принимает вид уравнения переноса постоянного значения f

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (2.4)$$

Заменим (аппроксимируем) дифференциальное уравнение переноса (2.4) разностным уравнением. Для этого умножим дифференциальное уравнение (2.4) на $dt dx$ и проинтегрируем по прямоугольнику $[x_1, x_2], [t_1, t_2]$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} \right) dt dx = 0.$$

Запишем это уравнение в виде

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial t} dt \right) dx + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} a(t, x) \frac{\partial f}{\partial x} dx \right) dt = 0. \quad (2.5)$$

С помощью обобщенной теоремы о среднем значении преобразуем интеграл по x во втором слагаемом уравнения (2.5) к виду

$$\int_{x_1}^{x_2} a(t, x) \frac{\partial f}{\partial x} dx = a(t, x_*) \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial x} dx, \quad (2.6)$$

где $x_1 \leq x_* \leq x_2$. После интегрирования по t в первом слагаемом уравнения (2.5) и по x в правой части (2.6) уравнение (2.5) примет вид

$$\int_{x_1}^{x_2} (f(t_2, x) - f(t_1, x)) dx + \int_{t_1}^{t_2} a(t, x_*) (f(t, x_2) - f(t, x_1)) dt = 0.$$

Снова используем теорему о среднем значении и вместо этого уравнения после деления на τ и h получим точное разностное уравнение

$$\frac{f(t_2, x_0) - f(t_1, x_0)}{\tau} + a(t^*, x_*) \frac{f(t^*, x_2) - f(t^*, x_1)}{h} = 0, \quad (2.7)$$

где $x_1 \leq x_0 \leq x_2$, $x_1 \leq x_* \leq x_2$, $t_1 \leq t^* \leq t_2$, $\tau = t_2 - t_1$, $h = x_2 - x_1$. Хотя это уравнение является точным относительно значений функции f , однако в силу теоремы о среднем значении координаты x_0 , t^* , x_* неизвестны. Известно только, что они лежат в промежутках $[x_1, x_2]$ и $[t_1, t_2]$.

Устраним произвол в t^* , x_0 , x_* и зафиксируем значения t^* , x_0 , x_* с помощью соотношений

$$x_0 = x_* = x_1 + \alpha(x_2 - x_1), \quad t^* = t_1 + \beta(t_2 - t_1).$$

Величины α и β в соответствии с теоремой о среднем значении должны удовлетворять условиям $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$. После выбора значений α и β вместо точного уравнения (2.7) получим приближенное уравнение

$$\frac{\bar{f}(t_2, x_0) - \bar{f}(t_1, x_0)}{\tau} + \bar{a}(t_0, x_0) \frac{\bar{f}(t_0, x_2) - \bar{f}(t_0, x_1)}{h} = 0. \quad (2.8)$$

Функция \bar{f} является табличной функцией, заданной в точках x_i , t^n , где x_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) – узлы таблицы по переменной x , t^n ($n = 0, 1, 2, \dots$) – узлы таблицы по переменной t . В общем случае, $f(x_i, t^n) \neq \bar{f}(x_i, t^n)$ поскольку $f(x, t)$ является решением уравнения (2.4), а $\bar{f}(x, t)$ – решением уравнения (2.8).

§ 4. Аппроксимация

Рассмотрим замену производной $\frac{df}{dx}$ разностным отношением $\frac{\Delta f}{h}$, где $\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$, $h = x_2 - x_1$. Производная непрерывной функции $f(x)$ определяется как предел отношения приращения функции Δf к приращению аргумента h при стремлении последнего к нулю. Процесс перехода к пределу прервем и при конечном h рассмотрим зависимость величины

$$\omega = \frac{\Delta f}{h} - \frac{df}{dx}$$

от приращения шага сетки h . Внутри промежутка $[x_2, x_1]$ возьмем точку x_0 так, что

$$x_2 = x_0 + (1 - \alpha)h, \quad x_1 = x_0 - \alpha h,$$

где $0 < \alpha < 1$. Значения табличной функции $f(x_2)$ и $f(x_1)$ представим в виде рядов Тейлора в точке x_0 ,

$$f(x_2) = f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_0 (1-\alpha)h + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 (1-\alpha)^2 h^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)_0 (1-\alpha)^3 h^3 + \dots,$$

$$f(x_1) = f(x_0) - \left(\frac{df}{dx}\right)_0 \alpha h + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 \alpha^2 h^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)_0 \alpha^3 h^3 + \dots$$

Вычтем второе выражение из первого, разделим на h и перенесем производную $\left(\frac{df}{dx}\right)_0$ в левую часть полученного уравнения. Результатом этих преобразований является выражение для функции $\omega(x)$

$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{(k+1)!} \varphi_k(\alpha) \left(\frac{d^{k+1}f}{dx^{k+1}}\right)_0,$$

где $\varphi_k = (1-\alpha)^{k+1} - (-\alpha)^{k+1}$. При $0 < \alpha < 1$ φ_k ограничено так, что $|\varphi_k| < 1$.

Величина ω называется погрешностью аппроксимации производной $\frac{df}{dx}$ разностным отношением $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Главный член погрешности аппроксимации ω получается при $k = 1$ в виде

$$\omega_1 = 0,5h((1-\alpha)^2 - \alpha^2) \frac{d^2f}{dx^2}.$$

Если $\alpha \neq 0,5$, то $\omega_1 \neq 0$ и, следовательно, погрешность аппроксимации является величиной первого порядка малости, поскольку малость ω определяется малостью приращения аргумента h . При $\alpha = 0,5$ ω_1 обращается в ноль и главным членом ω становится слагаемое с $k = 2$

$$\omega_2 = \frac{1}{24} h^2 \left(\frac{d^3f}{dx^3}\right).$$

В этом случае ω_2 является величиной второго порядка малости. Отброшенные члены погрешности аппроксимации при $k = 1$ и $\alpha \neq 0,5$ являются малой величиной второго порядка малости относительно малой величины h , а при $\alpha = 0,5$ – третьего порядка малости. Обычно [12–16] малые величины n -го порядка малости обозначают $O(h^k)$. Для упрощения записей будем обозначать малые величины O^k вместо $O(h^k)$.

Рассмотрим теперь аппроксимацию дифференциального уравнения разностным уравнением на примере простейшего уравнения переноса (2.4). Проведем через точку x_0, t_0 (рис. 2.5) две прямых линии, параллельных осям координат. На этих линиях отложим два отрезка

$h = x_C - x_A$, $\tau = t_B - t_D$ так, что точка x_0, t_0 лежит внутри этих отрезков (рис. 2.5). Координаты точек O, A, B, C, D связаны уравнениями

$$x_C = x_0 + (1-\alpha)h, \quad x_A = x_0 - \alpha h, \quad t_B = t_0 + (1-\beta)\tau, \quad t_D = t_0 - \beta\tau,$$

где $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$.

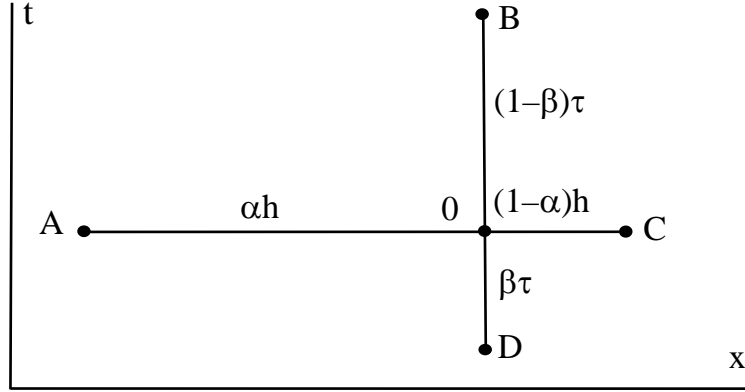


Рис. 2.5. Взаимное расположение точек O, A, B, C, D

Разностное уравнение, связывающее значения функции f в точках A, B, C, D , запишем в виде

$$\frac{f_B - f_D}{\tau} + a \frac{f_C - f_A}{h} = 0. \quad (2.9)$$

Функцию $a(x, t)$ для простоты будем считать постоянной. Для определения погрешности аппроксимации разностного уравнения переноса (2.9) дифференциальным уравнением (2.4) представим значения функции $f(t, x)$ в точках A, B, C, D в виде рядов Тейлора в точке t_0, x_0 .

$$f_C = f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (1-\alpha)h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 (1-\alpha)^2 h^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 (1-\alpha)^3 h^3 + \dots,$$

$$f_A = f_0 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \alpha h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \alpha^2 h^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 \alpha^3 h^3 + \dots,$$

$$f_B = f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 (1-\beta)\tau + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_0 (1-\beta)^2 \tau^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}\right)_0 (1-\beta)^3 \tau^3 + \dots,$$

$$f_D = f_0 - \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 \beta\tau + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_0 \beta^2 \tau^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}\right)_0 \beta^3 \tau^3 + \dots$$

Вычтем друг из друга значения функций, лежащие на противоположных концах промежутков и разделим полученные разности на τ и h

$$\frac{f_C - f_A}{h} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 ((1-\alpha)^2 - \alpha^2)h + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 ((1-\alpha)^3 + \alpha^3)h^2 + \dots, \quad (2.10)$$

$$\frac{f_B - f_D}{\tau} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right)_0 ((1-\beta)^2 - \beta^2) \tau + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \right)_0 ((1-\beta)^3 + \beta^3) \tau^2 + \dots \quad (2.11)$$

Умножим (2.10) на a и сложим с (2.11). В результате получим

$$\frac{f(t_B, x_0) - f(t_D, x_0)}{\tau} + a \frac{f(t_0, x_C) - f(t_0, x_A)}{h} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_0 + a \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 + \omega,$$

где

$$\begin{aligned} \omega = & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right)_0 (1-2\beta) \tau + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \right)_0 ((1-\beta)^3 + \beta^3) \tau^2 + \\ & + \frac{a}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_0 (1-2\alpha) h + \frac{a}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \right)_0 ((1-\alpha)^3 + \alpha^3) h^2 + \dots \end{aligned}$$

Величина $\omega(x, t)$ является погрешностью аппроксимации разностного оператора

$$\Delta f = \frac{\Delta f}{\tau} + a \frac{\Delta f}{h}$$

дифференциальным оператором

$$L f = \frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Если рассматривать аппроксимацию уравнения переноса

$$\frac{df}{dt} + \bar{a} \nabla f = 0$$

разностным уравнением, то в общем виде погрешность аппроксимации содержит члены, пропорциональные шагу по времени τ в некоторой степени и шагам h_x, h_y, h_z в некоторых степенях. Аналогичную структуру имеют и погрешности аппроксимации законов сохранения (2.1)–(2.3) разностными законами сохранения. Если аргументов несколько и погрешность аппроксимации зависит от h_x, h_y, h_z и τ , то структуру погрешности аппроксимации будем рассматривать только тогда, когда это необходимо. В остальных случаях погрешность аппроксимации будем обозначать O^k , где k является наименьшим значением из степеней h_x, h_y, h_z и τ .

Если погрешность аппроксимации удовлетворяет условию

$$\lim_{\tau \rightarrow 0, h_i \rightarrow 0} \omega = 0 \quad (2.12)$$

при независимом стремлении к нулю шагов сетки, то **аппроксимация называется сходящейся** [13], [17–19]. Везде в дальнейшем будут рассматриваться только такие разностные схемы, которые удовлетворяют

условию (2.12). Будем считать, что для математического моделирования применение разностных схем, не удовлетворяющих условию (2.12) запрещено.

Все приведенные выше рассуждения справедливы, если функция $f(x, t)$ существует в некоторой области изменения x, t и точки A, B, C, D не выходят за пределы этой области. Следует подчеркнуть, что функция $f(x, t)$ является решением дифференциального уравнения (2.4). Иными словами, сначала нужно решить уравнение (2.4) и т. о. найти функцию $f(x, t)$, затем задать точки A, B, C, D, O и получить погрешность аппроксимации в виде бесконечного ряда с производными функции $f(x, t)$ в точке O . В случае практических вычислений решается иная задача: в указанных точках A, B, C, D найти точное решение $\bar{f}(x, t)$ разностного уравнения (2.8) и исследовать различия между $\bar{f}(x, t)$ и $f(x, t)$. Если

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} (\bar{f}(t, x) - f(t, x)) = 0,$$

то решение $\bar{f}(x, t)$ разностного уравнения сходится к решению $f(x, t)$ дифференциального уравнения.

§ 5. Постановка разностных краевых задач

Аналитическое решение дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений находится в заранее указанной области интегрирования, на границах которой – на поверхностях в пространстве t, x_k ($k = 1, 2, 3$) – задаются граничные условия. В начальный момент времени $t = t_0$ значения искомых функций являются начальными данными. Все функции существуют в каждой точке этой области и, если решение найдено, их значения могут быть вычислены в любой заданной точке.

В отличие от аналитических методов разностные (численные методы) оперируют с табличными функциями, значения которых определяются на разностной сетке. Таким образом, разностная краевая задача формулируется так. В любой наперед заданный момент времени найти решение разностной системы уравнений, удовлетворяющее разностным граничным и начальным условиям.

Любое математическое моделирование предполагает применение разностной схемы для получения такого разностного решения, которое мало отличается от решения дифференциальной краевой задачи. Стремление погрешности аппроксимации к нулю при стремлении к нулю шагов разностной сетки является одним из необходимых условий сходимости разностного решения к точному решению задачи.

§ 6. Несколько разностных схем для уравнения переноса

Рассмотрим уравнение переноса (2.4) при $a = \text{const} > 0$. Сеточные функции определим на сеточной ячейке, изображенной на рис. 2.6.

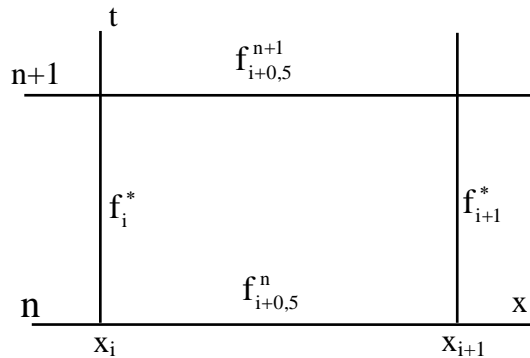


Рис. 2.6. Фрагмент сетки – сеточная ячейка

Разностные уравнения будем строить изложенным выше методом. Основные значения функции f определим в серединах сеточных интервалов по x , т. е. в уравнении (2.8) $x_0 = 0,5(x_i + x_{i+1})$. Это относится к величинам f в момент t^n , и в момент t^{n+1} . Значения f на вертикальных гранях ячейки назовем вспомогательными, обозначим их через f^* и определим в момент t^* , удовлетворяющий неравенствам $t^n \leq t^* \leq t^{n+1}$. После сделанных предположений разностное уравнение переноса (2.7) примет вид

$$\frac{f_{i+0,5}^{n+1} - f_{i+0,5}^n}{\tau} + a \frac{f_{i+1}^* - f_i^*}{h} = 0. \quad (2.13)$$

До тех пор, пока не зафиксировано значение t^* и не выбраны формулы для определения значений f_i^* , f_{i+1}^* , уравнение (2.13) определяет множество разностных схем. Рассмотрим несколько разностных схем из этого множества.

Разностная схема № 1. Зафиксируем момент времени $t^* = t^n$ и определим вспомогательные значения f^* в точках (t^n, x_i) и (t^n, x_{i+1}) . Для этого будем считать, что функция $f(t^n, x)$ в промежутках $[x_{i-0,5}^n, x_{i+0,5}^n]$ такова, что

$$f_i^* = 0,5(f_{i+0,5}^n + f_{i-0,5}^n). \quad (2.14)$$

После подстановки f_i^* и f_{i+1}^* в (2.13) разностное уравнение принимает вид

$$\frac{f_{i+0,5}^{n+1} - f_{i+0,5}^n}{\tau} + a \frac{f_{i+1,5}^n - f_{i-0,5}^n}{2h} = 0. \quad (2.15)$$

В момент t^n все величины известны, при $t > t^n$ все величины неизвестны, а $f_{i+0,5}^{n+1}$ является искомым решением.

Разностная схема № 2. Построим разностную схему для уравнения переноса (2.4), отличающуюся от разностной схемы № 1 иным выбором вспомогательных значений f_i^* , f_{i+1}^* . В этой разностной схеме выберем их следующим образом

$$f_i^* = f_{i-0,5}^n, \quad f_{i+1}^* = f_{i+0,5}^n.$$

Подставив эти значения в (2.13), получим

$$\frac{f_{i+0,5}^{n+1} - f_{i+0,5}^n}{\tau} + a \frac{f_{i+0,5}^n - f_{i-0,5}^n}{h} = 0. \quad (2.16)$$

Разностная схема № 3. Если же взять вспомогательные значения f_{i+1}^* , f_i^* в виде

$$f_i^* = f_{i+0,5}^n, \quad f_{i+1}^* = f_{i+1,5}^n,$$

то получим разностное уравнение переноса

$$\frac{f_{i+0,5}^{n+1} - f_{i+0,5}^n}{\tau} + a \frac{f_{i+1,5}^n - f_{i+0,5}^n}{h} = 0. \quad (2.17)$$

Разностная схема № 4. Наконец, рассмотрим еще один способ определения вспомогательных значений f_i^* . Для этого построим вспомогательную сеточную ячейку с основанием $x_{i+0,5}^n$, $x_{i-0,5}^n$ и высотой $0,5\tau$. В этой ячейке запишем вспомогательное разностное уравнение

$$\frac{f_i^* - f_i^n}{0,5\tau} + a \frac{f_{i+0,5}^n - f_{i-0,5}^n}{h} = 0. \quad (2.18)$$

Выразив из (2.18) f_i^* и f_{i+1}^* из аналогичного уравнения и подставив их в (2.13), получим

$$\frac{f_{i+0,5}^{n+1} - f_{i+0,5}^n}{\tau} + a \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{h} - \frac{\tau a^2}{2h^2} (f_{i+1,5}^n - 2f_{i+0,5}^n + f_{i-0,5}^n) = 0. \quad (2.19)$$

В этом уравнении необходимо указать способ определения величин с целыми индексами f_i^n и f_{i+1}^n . Если они находятся интерполяцией $f_i^n = 0,5(f_{i-0,5}^n + f_{i+0,5}^n)$, то уравнение (2.19) принимает вид

$$\frac{f_{i+0,5}^{n+1} - f_{i+0,5}^n}{\tau} + a \frac{f_{i+1,5}^n - f_{i-0,5}^n}{2h} - \frac{\tau a^2}{2h^2} (f_{i+1,5}^n - 2f_{i+0,5}^n + f_{i-0,5}^n) = 0. \quad (2.20)$$

Исследуем погрешности аппроксимации уравнения переноса (2.4) разностными уравнениями (2.15)–(2.17), (2.20). Начнем с уравнения (2.15). Разложим входящие в него функции в ряды Тейлора в точке $(t^n, x_{i+0,5})$

$$\frac{f_{i+0,5}^{n+1} - f_{i+0,5}^n}{\tau} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tau + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \tau^2 + \dots,$$

$$\frac{f_{i+1,5}^n - f_{i-0,5}^n}{2h} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} h^2 + \dots$$

Умножив второе выражение на a и сложив с первым, получим разностное уравнение в виде

$$\frac{f_{i+0,5}^{n+1} - f_{i+0,5}^n}{\tau} + a \frac{f_{i+1,5}^n - f_{i-0,5}^n}{2h} = \frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} + \omega_1 = 0,$$

где

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tau + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \tau^2 + a \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} h^2 + O^3. \quad (2.21)$$

При $\tau \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$, $\omega_1 \rightarrow 0$ и т. о. аппроксимация является сходящейся. Погрешность аппроксимации – малая величина порядка $O(\tau, h^2)$. Аналогично разлагая сеточные функции в ряды Тейлора и, подставляя их в (2.16), (2.17) и (2.20) получим погрешности аппроксимации в разностных схемах № 2, № 3 и № 4

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tau - \frac{a}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \tau^2 + \frac{a}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} h^2 + O^3, \quad (2.22)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tau + \frac{a}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \tau^2 + \frac{a}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} h^2 + O^3, \quad (2.23)$$

$$\omega_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \tau + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \tau^2 + \frac{a}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} h^2 + O^3. \quad (2.24)$$

Для каждой из четырех разностных схем разностное уравнение переноса в дифференциальной форме имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} + \omega_k = 0, \quad (2.25)$$

где $k = 1, 2, 3, 4$. Погрешности аппроксимации содержат шаги сетки по времени τ и по пространству h и производные функции $f(x, t)$ по t и по x . Для облегчения сравнения различных ω_k их преобразуют в Π форму [20–22], содержащую только производные функции f по x . Для перевода ω_k в Π форму заменим в (2.21)–(2.24) производные по t производными по x . Прделаем это подробно для ω_1 . Из уравнений (2.21) и (2.25) выразим первую производную $\frac{\partial f}{\partial t}$ через остальные производные

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -a \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} - \frac{ah^2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + O^3. \quad (2.26)$$

Чтобы выразить производные $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}$ через производные f по x , продифференцируем (2.26) по t

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) + O^2. \quad (2.27)$$

Преобразуем (2.27), подставив в него $\frac{\partial f}{\partial t}$ из (2.26)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \tau a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) + O^2. \quad (2.28)$$

Подставим производную $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ из левой части (2.28) в правую часть этого же уравнения. В результате вторая производная принимает вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \tau a^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + O^2. \quad (2.29)$$

Поскольку в (2.26) перед третьей производной f по t стоит τ^2 , то ее достаточно определять с точностью до величин первого порядка малости. Продифференцируем (2.29) по t

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t^3} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) + O.$$

Подставив сюда $\frac{\partial f}{\partial t}$ из (2.26), получим

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t^3} = -a^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + O. \quad (2.30)$$

Наконец, подставив (2.29) и (2.30) в (2.21), получим П форму погрешности аппроксимации ω_1

$$\omega_1 = \frac{a^2 \tau}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{ah^2}{6} \left(1 + 2 \frac{\tau^2 a^2}{h^2} \right) \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + O^3. \quad (2.31)$$

Введем безразмерное число Куранта $K = \frac{\tau a}{h}$ и запишем погрешность аппроксимации в ω_1 (2.31) в виде

$$\omega_1 = \frac{ahK}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{ah^2}{6} (1 + 2K^2) \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + O^3. \quad (2.32)$$

При фиксированном решении $f(t, x)$ уравнения (2.25) и фиксированном соотношении шагов K погрешность аппроксимации зависит только от h и t . о. появляется возможность сравнивать поведение различных разностных схем. Прделав аналогичные преобразования для $\omega_2, \omega_3, \omega_4$ запишем погрешности аппроксимации в разностных схемах № 2, № 3 и № 4

$$\omega_2 = -\frac{ah}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (1-K) + \frac{ah^2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} (1-K)(1-2K) + O^3, \quad (2.33)$$

$$\omega_3 = \frac{ah}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (1+K) - \frac{ah^2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} (1+K)(2+K) + O^3, \quad (2.34)$$

$$\omega_4 = -\frac{ah^2}{6} (1+2K^2) \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + O^3. \quad (2.35)$$

Из (2.32)–(2.35) следует, что при $0 < K < 1$ $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и ω_4 не меняют порядка малости при изменении K , величина ω_2 при $K = 1$ становится равной нулю. Иными словами, решение разностного уравнения (2.33) при $K = 1$ совпадает с решением дифференциального уравнения.

§ 7. Погрешности

Математическое моделирование поведения сплошной среды в результате внешних воздействий, как правило, преследует конкретные цели. Чаще всего основной целью является прогнозирование отклика вещества (прибора, устройства и т. д.) на воздействие. При этом на первое место по важности выходит точность полученных результатов, которая качественно обратно пропорциональна их погрешности. Погрешность результатов имеет вид суммы

$$\Delta = \Delta_{\text{ММ}} + \Delta_{\text{РС}} + \Delta_{\text{КР}},$$

где $\Delta_{\text{ММ}}$ – погрешность математической модели, $\Delta_{\text{РС}}$ – погрешность разностной схемы, $\Delta_{\text{КР}}$ – погрешность конкретного расчёта.

Погрешность математической модели зависит от того, насколько она адекватна моделируемым физическим явлениям. Например, если уравнения несжимаемой жидкости применить для описания поведения сплошной среды в области, где существенна сжимаемость вещества

$-\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S$, то $\Delta_{\text{ММ}}$ будет большой. Точно также погрешность $\Delta_{\text{ММ}}$ будет

большой, если для описания фазовых переходов применить уравнение состояния вещества, которое их не описывает. $\Delta_{\text{ММ}}$ будет большой, если поведение конденсированной среды описывать уравнением состояния идеального газа. Для уменьшения $\Delta_{\text{ММ}}$ специалисту вычислителю нужно быть специалистом в области гидродинамики, термодинамики, теории

упругости и пластичности, физики плазмы, физики фазовых переходов и т. д. Других способов уменьшить Δ_{MM} по-видимому, нет.

Погрешность Δ_{PC} зависит от выбранной для математического моделирования разностной схемы (разностная сетка, сеточный шаблон, разностные уравнения). Разностные схемы различаются величиной погрешности аппроксимации, условиями устойчивости, дистракцией, условиями монотонности, скоростью сходимости приближенного решения к точному, наличием необратимых счётных феноменов в решении. Погрешность Δ_{PC} можно разделить на погрешность собственно метода и погрешность округлений. В ЭВМ операции производятся с числами, имеющими конечное число значащих цифр, а ошибка округлений составляет половину последнего разряда мантииссы. Чаще всего ЭВМ оперируют с 32 или 64 разрядными числами. В этих ЭВМ относительные ошибки округления приближенно равны 10^{-8} или 10^{-16} . Если такое число участвует в N последовательных умножениях или делениях, то относительная ошибка возрастает в $\sim\sqrt{N}$ раз. Если же вычитаются друг из друга числа, в которых совпадают K первых значащих цифр, то относительная ошибка сразу возрастает в 10^K раз. На 16 разрядном компьютере относительная погрешность каждого числа $\sim 10^{-8}$ и при вычитании близких чисел относительная погрешность разности получается равной 10^{K-8} . Эти простые рассуждения показывают, что есть предел бесконечному увеличению числа точек сетки в области интегрирования, после достижения которого погрешность начинает возрастать при дальнейшем измельчении сетки.

Специалисты, применяющие разностные методы для решения конкретных задач, как правило, об этом забывают. Это могут не знать разработчики физических моделей или экспериментаторы. Принимая к сведению богатые возможности современных ЭВМ, они склонны фетишизировать результаты математического моделирования.

Погрешности метода, как правило, проверяются при численном решении задач, имеющих аналитическое решение.

Погрешности конкретного расчёта Δ_{KR} возникают чаще всего из-за схематизации изучаемого или моделируемого объекта и приближенного знания начального состояния вещества и граничных условий. Никакое искусство вычислителя величину Δ_{KR} уменьшить не может. Поэтому её называют [16] неустранимой погрешностью.

Таким образом, возможности вычислителя сводятся к выбору разностного метода, обеспечивающего максимальную скорость сходимости приближенного решения к точному и отличающегося от других методов максимальным количеством достоинств.

Теоретически скорость сходимости приближенного решения к точному следует из теоремы [13], [17–19]. Сходимость погрешности аппроксимации

дифференциального уравнения разностным и устойчивость разностного уравнения являются необходимыми условиями сходимости приближенного решения к точному при стремлении шагов сетки к нулю. Следует, однако, помнить, что это утверждение справедливо лишь для линейных уравнений. В случае же нелинейных уравнений приближённое решение сходится к предельному решению, которое может отличаться от точного решения. Величину этого отличия можно определить только с помощью эталонных аналитических решений.

Мы будем называть разностное уравнение устойчивым или систему разностных законов сохранения устойчивой, если при переходе с одного временного слоя ($t = t^n$) на следующий с шагом Δt погрешности округления величин, полученные на момент t^n не возрастают.

§ 8. Устойчивость решения разностного уравнения

Точное решение f_T разностного уравнения

$$\Delta f = 0 \quad (2.36)$$

получается теоретически. Практически в процессе вычислений находится приближенное решение разностного уравнения с некоторым числом значащих цифр

$$f_{\text{пр}} = f_T + \delta, \quad (2.37)$$

где δ – погрешность округления. Из (2.36) и (2.37) следует, что погрешности также удовлетворяют уравнению

$$\Delta \delta = 0. \quad (2.38)$$

Рассмотрим спектральный метод исследования устойчивости решения уравнения (2.38) по входным данным. Будем искать решения этого уравнения в виде гармоник

$$\delta(t, x) = \delta_0 e^{\alpha t + i\beta x},$$

где α и β вещественны, $i = \sqrt{-1}$, δ_0 определяет амплитуду погрешности в начальный момент времени $t=0$. Ранее индексом i обозначалась точка пространственной сетки. Поскольку при исследовании устойчивости i это мнимая единица, то точки пространственной сетки будем нумеровать индексом j . В точке x_j в момент времени t^n погрешность определяется уравнением

$$\delta_j^n = \delta_0 e^{\alpha t^n + i\beta x_j}. \quad (2.39)$$

Из (2.39) следует, что отношение погрешностей в точке x_j на двух соседних шагах по времени t имеет вид

$$\frac{\delta_j^{n+1}}{\delta_j^n} = e^{\alpha\tau}. \quad (2.40)$$

Это отношение называется **спектральным радиусом** оператора (2.38) и обозначается λ . Из (2.40) видно, что погрешности вычислений не возрастают при переходе от шага t^n к шагу t^{n+1} , если выполнено условие $|\lambda| \leq 1$. Исследование устойчивости сводится к вычислению спектрального радиуса λ разностного уравнения путем подстановки в него сеточных функций (2.39).

Схема № 1. Рассмотрим устойчивость разностного уравнения (2.15). Согласно сказанному выше запишем его в виде

$$\delta_{j+0,5}^{n+1} = \delta_{j+0,5}^n - 0,5K(\delta_{j+1,5}^n - \delta_{j-0,5}^n), \quad (2.41)$$

где $K = \tau a/h$. Подставив (2.39) в (2.41), получим

$$\delta_0 e^{\alpha t^{n+1}} e^{i\beta x_{j+0,5}} = \delta_0 e^{\alpha t^n} e^{i\beta x_{j+0,5}} (1 - 0,5K(e^{i\beta h} - e^{-i\beta h})).$$

Сократив общие множители $\delta_0 \neq 0$, $e^{\alpha t^{n+1}} e^{i\beta x_{j+0,5}} \neq 0$, получим $\lambda = 1 - iK \sin \beta h$. Квадрат модуля комплексного числа λ имеет вид

$$|\lambda|^2 = 1 + K^2 \sin^2 \beta h.$$

При $K > 0$, $\sin^2 \beta h > 0$ значение $|\lambda|^2$ больше единицы. Таким образом, разностное уравнение переноса № 1 неустойчиво.

Схема № 2. Проведя аналогичное исследование для разностного уравнения (2.18), получим

$$\lambda = (1 - K + K \cos \beta h) - iK \sin \beta h.$$

Перейдем в выражении λ к половинному углу $0,5\beta h$ и запишем квадрат модуля полученного комплексного числа

$$|\lambda|^2 = 1 - 4K(1 - K)\sin^2 0,5\beta h. \quad (2.42)$$

Из (2.42) видно, что условие устойчивости $|\lambda|^2 < 1$ выполнено, если K ограничено $0 \leq K \leq 1$.

Таким образом, разностное уравнение № 2 с односторонней разностью условно устойчиво. Соотношение шагов ограничено условием устойчивости

$$K = \frac{\tau a}{h} \leq 1. \quad (2.43)$$

Схема № 3. Для разностного уравнения № 3 (2.14) уравнение для спектрального радиуса имеет вид

$$\lambda = 1 + K - K(\cos \beta h + i \sin \beta h).$$

В выражении для спектрального радиуса λ перейдем к углу $0,5\beta h$ и запишем выражение для $|\lambda|^2$

$$|\lambda|^2 = 1 + 4K(1+K) \text{Sin}^2 0,5\beta h.$$

Таким образом, $|\lambda| > 1$ при $K > 0$ и $\text{Sin}^2 0,5\beta h > 0$, т. е. разностное уравнение № 3 неустойчиво.

Схема № 4. Наконец исследуем устойчивость разностного уравнения № 4 (2.23). Подставив возмущения (2.39) в (2.18) и сократив на общие множители отличные от нуля, получим

$$\lambda = 1 - 0,5K(e^{i\beta h} - e^{-i\beta h}) + 0,5K^2(e^{i\beta h} - 2 + e^{-i\beta h}).$$

Преобразуем это выражение к виду

$$\lambda = 1 - iK\text{Sin}\beta h + K^2(\text{Cos}\beta h - 1).$$

После перехода к половинному углу $0,5\beta h$ получим выражение для квадрата спектрального радиуса

$$|\lambda|^2 = 1 - 4K^2(1 - K^2)\text{Sin}^4 0,5\beta h. \quad (2.44)$$

Из (2.44) следует, что $\lambda^2 \leq 1$ при выполнении условия (2.43). Т. о. разностная схема № 4 условно устойчива.

§ 9. Неявное разностное уравнение переноса

Рассмотрим разностное уравнение переноса, содержащее неизвестные значения функции f на момент t^{n+1} в нескольких точках сетки. Будем считать, что в момент $t^* = t^{n+1}$ $f(x)$ линейна в промежутке $x_{i-0,5} \leq x \leq x_{i+0,5}$. Тогда

$$f_i^* = 0,5(f_{i+0,5}^{n+1} + f_{i-0,5}^{n+1}).$$

Подставим f_i^* в разностное уравнение (2.18). В результате получим

$$\frac{f_{i+0,5}^{n+1} - f_{i+0,5}^n}{\tau} + a \frac{f_{i+1,5}^{n+1} - f_{i-0,5}^{n+1}}{2h} = 0. \quad (2.45)$$

Исследуем погрешность аппроксимации дифференциального уравнения (2.4) разностным уравнением (2.45). Разлагая функции $f_{i+0,5}^n$, $f_{i+0,5}^{n+1}$, $f_{i-0,5}^{n+1}$ в ряды Тейлора в точке t^{n+1} , $x_{i+0,5}$ и подставляя их в (2.45), получим

$$\omega f = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{ah^2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} (1 - K^2) + O(\tau^2, h^3).$$

Погрешность аппроксимации $\omega \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$ и т. о. аппроксимация является согласованной.

Рассмотрим устойчивость разностного уравнения (2.45). Подставляя малые возмущения (2.39) в уравнение (2.45), получим для спектрального радиуса выражение

$$\lambda = \frac{1}{1 + iK \sin \beta h}.$$

Умножим и разделим это выражение на сопряжение число $1 - iK \sin \beta h$ и запишем выражение для $|\lambda|^2$

$$|\lambda|^2 = \frac{1}{1 + K^2 \sin^2 \beta h}.$$

Эта величина при $K > 0$ и любых β не превосходит 1, и т. о. разностное уравнение (2.45) безусловно устойчиво.

Запишем разностное уравнение (2.45) в виде

$$-0,5Kf_{i-0,5}^{n+1} + f_{i+0,5}^{n+1} + 0,5Kf_{i+1,5}^{n+1} = f_{i+0,5}^n. \quad (2.46)$$

Это уравнение неявное, т. к. оно содержит 3 неизвестных значения f^{n+1} . Будем считать, что $f_{i-0,5}^{n+1}$ при $i = 0$ равно $f_{\text{ЛГ}}^{n+1}$, а $f_{i+0,5}^{n+1}$ при $i = N$ равно $f_{\text{ПГ}}^{n+1}$. Запишем уравнения во всех точках $i = 0, 1, 2, \dots, N$. В результате получим систему $N+1$ уравнений, матрица коэффициентов которой является трёхдиагональной и имеет вид

$$\|M\| = \begin{pmatrix} 1 & 0,5K & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -0,5K & 1 & 0,5K & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5K & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0,5K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -0,5K & 1 & 0,5K \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -0,5K & 1 \end{pmatrix}.$$

Правые части уравнений для $i = 1, 2, \dots, N-2$ равны $f_{i+0,5}^n$, а для $i = 0$ $f_{0,5}^n + 0,5K f_{\text{ЛГ}}^{n+1}$, для $i = N-1$ $f_{N-0,5}^n - 0,5K f_{\text{ПГ}}^{n+1}$. Поскольку правые части уравнений не равны нулю, система является линейной неоднородной системой уравнений. Есть несколько методов её решения. Рассмотрим два из них.

Метод Крамера. Если определитель системы $D \neq 0$, то система неоднородных уравнений имеет единственное решение [23]. Корни выражаются формулами Крамера

$$f_{0,5}^{n+1} = \frac{D_{0,5}}{D}, \quad f_{1,5}^{n+1} = \frac{D_{1,5}}{D},$$

где $D_{0,5}$ определитель, получаемый из D заменой столбца коэффициентов с номером 0,5 на столбец правых частей системы, определитель $D_{1,5}$ – заменой столбца с номером 1,5 и так далее.

§ 10. Неявное разностное уравнение переноса. Прогонка

Рассмотрим второй метод решения системы линейных уравнений с трёхдиагональной матрицей, который называется **прогонка**.

Предположим, что значения f в соседних точках связаны линейным уравнением, которое называется прогоночным

$$f_{i+0,5}^{n+1} + a_{i+0,5} f_{i+1,5}^{n+1} = b_{i+0,5}. \quad (2.47)$$

В точке $i = 0$ прогоночное уравнение принимает вид

$$f_{0,5}^{n+1} + a_{0,5} f_{1,5}^{n+1} = b_{0,5}. \quad (2.48)$$

В этой же точке разностное уравнение имеет вид

$$f_{0,5}^{n+1} + 0,5Kf_{1,5}^{n+1} = f_{0,5}^n + 0,5Kf_{1,5}^{n+1}.$$

Потребовав, чтобы это уравнение совпадало с (2.48), получим выражения для прогоночных коэффициентов в первом сеточном интервале при $i = 0$

$$a_{0,5} = 0,5K, \quad b_{0,5} = f_{0,5}^n + 0,5Kf_{1,5}^{n+1}.$$

Перейдём далее к определению прогоночных коэффициентов во втором сеточном интервале при $i = 1$. Линейное прогоночное уравнение (2.47) при $i = 1$ имеет вид

$$f_{1,5}^{n+1} + a_{1,5} f_{2,5}^{n+1} = b_{1,5}. \quad (2.49)$$

Сравним его с разностным уравнением, записанным для второго сеточного интервала

$$-0,5Kf_{0,5}^{n+1} + f_{1,5}^{n+1} + 0,5Kf_{2,5}^{n+1} = f_{1,5}^n. \quad (2.50)$$

Выразим $f_{0,5}^{n+1}$ из (2.48) через $f_{1,5}^{n+1}$ и уже известные прогоночные коэффициенты $a_{0,5}$ и $b_{0,5}$ и подставим в (2.50). Тогда это уравнение принимает вид

$$f_{1,5}^{n+1} + 0,5Kf_{2,5}^{n+1} = f_{1,5}^n + 0,5K(b_{0,5} - a_{0,5} f_{1,5}^{n+1}).$$

Преобразуем это уравнение так, чтобы оно по форме совпадало бы с прогоночным уравнением (2.49)

$$f_{1,5}^{n+1} + \frac{0,5K}{1 + 0,5a_{0,5}K} f_{2,5}^{n+1} = \frac{f_{1,5}^n + 0,5b_{0,5}}{1 + 0,5a_{0,5}K}. \quad (2.51)$$

Сравнив уравнения (2.51) и (2.49), получим выражения для прогоночных коэффициентов во втором сеточном интервале при $i = 1$

$$a_{1,5} = \frac{0,5K}{1 + 0,5Ka_{0,5}}, \quad b_{1,5} = \frac{f_{1,5}^n + 0,5Kb_{0,5}}{1 + 0,5Ka_{0,5}}.$$

Таким образом, получается рекуррентное уравнение для прогоночных коэффициентов. Значения $a_{i+0,5}$, $b_{i+0,5}$ выражаются через $a_{i-0,5}$, $b_{i-0,5}$

$$a_{i+0,5} = \frac{0,5K}{1 + 0,5Ka_{i-0,5}}, \quad b_{i+0,5} = \frac{f_{i+0,5}^n + 0,5Kb_{i-0,5}}{1 + 0,5Ka_{i-0,5}}. \quad (2.52)$$

Исходные прогоночные коэффициенты $a_{0,5}$, $b_{0,5}$ – уже найдены. Затем с помощью уравнений (2.52) находятся прогоночные коэффициенты для $i = 1, 2, 3, 4, \dots, N - 2$. В точке $i = N - 1$ находятся прогоночные коэффициенты для последнего сеточного интервала $i + 0,5 = N - 0,5$

$$a_{N-0,5} = \frac{0,5K}{1 + 0,5Ka_{N-1,5}}, \quad b_{N-0,5} = \frac{f_{N-1,5}^n + 0,5Kb_{1,5}}{1 + 0,5Ka_{N-1,5}}.$$

Запишем прогоночное уравнение (2.47) для $i = N - 1$

$$f_{N-0,5}^{n+1} + a_{N-0,5} f_{N+0,5}^{n+1} = b_{N-0,5}.$$

В этом уравнении $f_{N+0,5}^{n+1} = f_{\Pi\Gamma}^{n+1}$ и т. о. неизвестна одна величина $f_{N-0,5}^{n+1}$. Выразим её через известное граничное значение $f_{\Pi\Gamma}^{n+1}$ и уже найденные значения прогоночных коэффициентов $a_{N-0,5}$, $b_{N-0,5}$

$$f_{N-0,5}^{n+1} = b_{N-0,5} - a_{N-0,5} f_{\Pi\Gamma}^{n+1}.$$

Затем последовательно уменьшаем i : $i = N - 2, N - 3, \dots, N - (N)$ и рассчитываем значения искомой функции

$$f_{i+0,5}^{n+1} = b_{i+0,5} - a_{i+0,5} f_{i+1,5}^{n+1}.$$

Это обратная прогонка для уравнения переноса, в результате которой для всех $i = 0, 1, 2, \dots, N$ получаются значения $f_{i+0,5}^{n+1}$.

§ 11. Метод типа предиктор – корректор для уравнения переноса

Для определения вспомогательных величин f_i^* , входящих в разностное уравнение переноса (2.13) построим дополнительное разностное уравнение во вспомогательной ячейке высотой $l\tau$

$$f_i^* = 0,5(f_{i+0,5}^n + f_{i-0,5}^n) - l \frac{\tau a}{h} (f_{i+0,5}^* - f_{i-0,5}^*).$$

Основные промежуточные величины $f_{i+0,5}^*$ неизвестны. Для них строим ещё одно разностное уравнение

$$f_{i+0,5}^* = f_{i+0,5}^n - l \frac{\tau a}{h} (f_{i+1}^* - f_i^*).$$

Подставив второе уравнение в первое, получим

$$\frac{f_i^* - 0,5(f_{i+0,5}^n + f_{i-0,5}^n)}{l\tau} + a \frac{1}{h} \left[f_{i+0,5}^n - f_{i-0,5}^n - l \frac{\tau a}{h} (f_{i+1}^* - 2f_i^* + f_{i-1}^*) \right] = 0.$$

Это неявное уравнение для определения вспомогательных величин f_{i-1}^* , f_i^* , f_{i+1}^*

$$f_i^* = \frac{1}{2} (f_{i+0,5}^n + f_{i-0,5}^n) - lK (f_{i+0,5}^n - f_{i-0,5}^n) + l^2 K^2 (f_{i+1}^* - 2f_i^* + f_{i-1}^*).$$

В каждой точке i разностное уравнение содержит три неизвестных f_{i-1}^* , f_i^* , f_{i+1}^* и имеет вид

$$l^2 K^2 f_{i-1}^* - (1 + 2l^2 K^2) f_i^* + l^2 K^2 f_{i+1}^* = -\frac{1}{2} (f_{i+0,5}^n + f_{i-0,5}^n) + lK (f_{i+0,5}^n - f_{i-0,5}^n).$$

Решается одним из ранее рассмотренных методов.

§ 12. Уравнение теплопроводности

Рассмотрим следствие из трёх законов сохранения – уравнение для внутренней энергии, содержащее отличные от нуля тепловые потоки q

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t} = -V \frac{\partial q}{\partial x}. \quad (2.53)$$

Будем считать независимыми термодинамическими переменными V и T .

Тогда, воспользовавшись выражением для теплоёмкости $C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V$ и условием термодинамической совместимости (1.136), преобразуем уравнение (2.53) к виду

$$C_V \frac{\partial T}{\partial t} + T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \frac{\partial V}{\partial t} = -V \frac{\partial q}{\partial x}. \quad (2.54)$$

Будем считать, что удельный объём постоянен и $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$. Это фунда-

ментальное упрощающее предположение резко ограничивает область применимости получаемого уравнения, которое далее будет называться уравнением теплопроводности. Известно, что каждое вещество характеризуется коэффициентом теплового линейного (или теплового

объёмного) расширения. Иными словами, при изменении температуры удельный объём должен измениться. Предположение о постоянстве удельного объёма означает, что температура может изменяться в узком промежутке, т. е. область применимости получаемого из (2.54) классического уравнения теплопроводности

$$C_V \frac{\partial T}{\partial t} + V \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (2.55)$$

весьма мала. Математическая физика ограничивается простейшим случаем, когда тепловой поток определяется выражением

$$q = -b \frac{\partial T}{\partial x},$$

где b называется коэффициентом теплопроводности. Чтобы уравнение (2.55) было линейным, в математической физике предполагается, что $C_V = \text{const}$ и $b = \text{const}$.

§ 13. Явное разностное уравнение теплопроводности

Значение табличной функции $T(x)$ будем определять в серединах сеточных интервалов в моменты t^n и t^{n+1} . Умножим (2.55) на $dt dx$ и проинтегрируем по ячейке $[x_{i+1}, x_i]$, $[t^{n+1}, t^n]$. Применив теорему о среднем, получим разностное уравнение теплопроводности

$$\frac{T_{i+0,5}^{n+1} - T_{i+0,5}^n}{\tau} - \frac{V}{C_V} \frac{q_{i+1}^* - q_i^*}{h} = 0. \quad (2.56)$$

Будем считать, что $t^* = t^n$ и аппроксимируем тепловой поток уравнением

$$q_i^* = -b \frac{T_{i+0,5}^n - T_{i-0,5}^n}{h}.$$

Аналогичное выражение записывается и для точки x_{i+1} , t^n . Подставив q_i^* и q_{i+1}^* в (2.56), получим явное разностное уравнение теплопроводности

$$\frac{T_{i+0,5}^{n+1} - T_{i+0,5}^n}{\tau} - a \left(\frac{T_{i+1,5}^n - T_{i+0,5}^n}{h} - \frac{T_{i+0,5}^n - T_{i-0,5}^n}{h} \right) \frac{1}{h} = 0, \quad (2.57)$$

где $a = bV / C_V$. Рассмотрим погрешность аппроксимации дифференциального уравнения (2.55) разностным уравнением (2.57). Представим все величины, входящие в (2.57), в виде рядов Тейлора в точке $x_{i+0,5}$, t^n . В результате получим

$$\Delta T = LT + \omega,$$

где

$$\omega = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} - \frac{ah^2}{12} \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \frac{ah^4}{360} \frac{\partial^6 T}{\partial x^6} + \dots$$

Из этого выражения погрешности аппроксимации видно, что $\omega \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$. Обращаем внимание, что этот результат справедлив лишь в случае равномерной сетки, когда все значения h одинаковы. В случае неравномерной сетки

$$h_{i+1,5} = x_{i+2} - x_{i+1} \neq h_{i+0,5}, \quad h_{i-0,5} = x_i - x_{i-1} \neq h_{i+0,5}$$

выражения для тепловых потоков принимают вид

$$q_i^* = -2b \frac{(T_{i+0,5}^n - T_{i-0,5}^n)}{h_{i+0,5} + h_{i-0,5}}, \quad q_{i+1}^* = -2b \frac{(T_{i+1,5}^n - T_{i+0,5}^n)}{h_{i+0,5} + h_{i+1,5}}.$$

Подставив q_i^* и q_{i+1}^* в (2.56), получим иное, чем (2.57), разностное уравнение теплопроводности

$$\frac{T_{i+0,5}^{n+1} - T_{i+0,5}^n}{\tau} - a \left(\frac{T_{i+1,5}^n - T_{i+0,5}^n}{0,5(h_{i+1,5} + h_{i+0,5})} - \frac{T_{i+0,5}^n - T_{i-0,5}^n}{0,5(h_{i+0,5} + h_{i-0,5})} \right) \frac{1}{h_{i+0,5}} = 0.$$

Представим все, входящие в это уравнение величины, в виде рядов Тейлора в точке $x_{i+0,5}$, t^n . После подстановки этих разложений в разностное уравнение получим выражение для погрешности аппроксимации

$$\omega = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} + \dots - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \left(\frac{h_{i+1,5} + h_{i-0,5} - 2h_{i+0,5}}{4h_{i+0,5}} \right) - a \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \left(\frac{(h_{i+1,5} - h_{i-0,5})(h_{i+1,5} + h_{i-0,5} + 2h_{i+0,5})}{24h_{i+0,5}} \right) + \dots$$

Из этого выражения следует, что погрешность аппроксимации является сходящейся, если пространственная сетка равномерная, т. е.

$h_{i+1,5} = h_{i+0,5} = h_{i-0,5}$. В этом случае множители при производных $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$

обращаются в ноль. В реальных задачах равномерные сетки встречаются очень редко. На неравномерных же сетках аппроксимация будет сходящейся, если соседние интервалы отличаются мало. Например, если

$h_{i+1,5} = h_{i+0,5} + ah_{i+0,5}^{i+K}$, $h_{i-0,5} = h_{i+0,5} - bh_{i+0,5}^{i+K}$, где $a = \text{const}$, $b = \text{const}$, $K > 0$, то

множитель при $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ принимает вид $(a - b)h_{i+0,5}^K$, а множитель при $\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$ -

вид $\frac{1}{24}(a + b)h_{i+0,5}^K(4 + (a - b)h_{i+0,5}^K)$. При $K > 0$ оба они стремятся к нулю при $h \rightarrow 0$.

Исследуем устойчивость разностного уравнения (2.57), которое запишем в виде

$$T_{0,5}^{n+1} - KT_{1,5}^n - (1 - 2K)T_{0,5}^n - KT_{-0,5}^n = 0,$$

где $K = \frac{\tau a}{h^2}$. В силу линейности погрешностей разделим это уравнение на уравнение для точного решения и уравнение для погрешностей $\delta T = \delta T_0 e^{\alpha t + i\beta x}$

$$\delta T_{0,5}^{n+1} = K\delta T_{1,5}^n + (1 - 2K)\delta T_{0,5}^n + K\delta T_{-0,5}^n.$$

Подставив δT^{n+1} , δT^n в уравнение и сократив общие множители, получим $\lambda = 1 - 4K \sin^2 0,5\beta h$, где $\lambda = \delta T^{n+1} / \delta T^n$. Запишем условие невозрастания погрешностей $|\lambda| \leq 1$ в виде неравенств $-1 \leq 1 - 4K \sin^2 \frac{\beta h}{2} \leq 1$. Правое неравенство выполняется всегда при $K > 0$. Левое неравенство даёт:

$$K \leq \frac{1}{2 \sin^2 0,5\beta h}.$$

Нижняя граница множества значений K равна 0,5. Следовательно, для любых β условие устойчивости разностного уравнения (2.57) имеет вид

$$K \leq 0,5.$$

§ 14. Неявная разностная схема для уравнения теплопроводности

Определим тепловые потоки q^* , входящие в уравнение (2.56), в момент $t^* = t^{n+1}$. В результате получим неявное разностное уравнение, содержащее три неизвестных величины $T_{i-0,5}^{n+1}$, $T_{i+0,5}^{n+1}$, $T_{i+1,5}^{n+1}$

$$\frac{T_{i+0,5}^{n+1} - T_{i+0,5}^n}{\tau} - a \frac{T_{i+1,5}^{n+1} - 2T_{i+0,5}^{n+1} + T_{i-0,5}^{n+1}}{h^2} = 0. \quad (2.58)$$

Представим все входящие в (2.58) функции в виде рядов Тейлора в точке t^{n+1} , $x_{i+0,5}$. Подставив эти разложения в (2.58), получим

$$\Delta T = LT + \omega T = 0,$$

где

$$\omega = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} - \frac{a^2 h^2}{12} \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \frac{a^2 h^4}{360} \frac{\partial^6 T}{\partial x^6} + \dots$$

Из выражения для ω следует, что $\omega \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$.

Для исследования устойчивости разностного уравнения (2.58) перейдем к уравнению для погрешностей $\delta T = \delta T_0 e^{\alpha + i\beta x}$. Подставив δT в него, получим выражение для спектрального радиуса λ

$$\lambda = \frac{1}{1 + 4K \sin^2 0,5\beta h} \leq 1, \quad (2.59)$$

где $K = \tau a / h^2$. Из выражения (2.59) следует, что $\lambda < 1$ при любом $K > 0$ и $\sin^2 0,5\beta h > 0$.

§ 15. Неявная разностная схема. Метод прогонки

Запишем разностное уравнение (2.58) в виде

$$-KT_{i-0,5}^{n+1} + (1 + 2K)T_{i+0,5}^{n+1} - KT_{i+1,5}^{n+1} = T_{i+0,5}^n. \quad (2.60)$$

При $i = 0$ значение $T_{i-0,5}^{n+1}$ выходит за левую границу области определения решения, на которой задано $T_{\text{ЛГ}}^{n+1}$. Поэтому положим $T_{i-0,5}^{n+1} = T_{\text{ЛГ}}^{n+1}$. Поскольку это значение известно, то перенесем его в правую часть. Тогда уравнение (2.60) при $i = 0$ примет вид

$$(1 + 2K)T_{0,5}^{n+1} - KT_{1,5}^{n+1} = T_{0,5}^n + KT_{\text{ЛГ}}^{n+1}. \quad (2.61)$$

Свяжем значения функций в двух соседних точках сетки линейным прогоночным уравнением

$$T_{i+0,5}^{n+1} + a_{i+0,5} T_{i+1,5}^{n+1} = b_{i+0,5}. \quad (2.62)$$

Из уравнения (2.62) при $i = 0$ и уравнения (2.61) следуют выражения для прогоночных коэффициентов $a_{0,5}$ и $b_{0,5}$

$$a_{0,5} = -\frac{K}{1 + 2K}, \quad b_{0,5} = \frac{T_{0,5}^n + KT_{\text{ЛГ}}^{n+1}}{1 + 2K}.$$

Рассмотрим теперь точку $i = 1$ и запишем уравнение (2.60) в виде

$$-KT_{0,5}^{n+1} + (1 + 2K)T_{1,5}^{n+1} - KT_{2,5}^{n+1} = T_{1,5}^n.$$

Перенесем $T_{0,5}^{n+1}$ в правую часть

$$(1 + 2K)T_{1,5}^{n+1} - KT_{2,5}^{n+1} = T_{1,5}^n + KT_{0,5}^{n+1}. \quad (2.63)$$

Но чуть раньше коэффициенты $a_{0,5}$ и $b_{0,5}$ уже были найдены. Из (2.62) при $i = 1$ выразим $T_{0,5}^{n+1}$ через $T_{1,5}^{n+1}$

$$T_{0,5}^{n+1} = b_{0,5} - a_{0,5} T_{1,5}^{n+1}$$

и подставим полученное выражение в (2.63). В результате получим

$$(1 + 2K + Ka_{0,5})T_{1,5}^{n+1} - KT_{2,5}^{n+1} = T_{1,5}^n + Kb_{0,5}. \quad (2.64)$$

Из (2.64) и прогоночного уравнения

$$T_{1,5}^{n+1} + a_{1,5} T_{2,5}^{n+1} = b_{1,5}$$

следуют выражения для прогоночных коэффициентов

$$a_{1,5} = \frac{-K}{1 + 2K + Ka_{0,5}}, \quad b_{1,5} = \frac{T_{1,5}^n + Kb_{0,5}}{1 + 2K + Ka_{0,5}}. \quad (2.65)$$

Уравнения (2.65) дают основание написать рекуррентные соотношения для прогоночных коэффициентов

$$a_{i+0,5} = \frac{-K}{1 + 2K + Ka_{i-0,5}}, \quad b_{i+0,5} = \frac{T_{i+0,5}^n + Kb_{i-0,5}}{1 + 2K + Ka_{i-0,5}}.$$

Из этих уравнений на правой границе при $i = N - 1$ найдем $a_{N-0,5}$, $b_{N-0,5}$. На этом завершается прямая прогонка. Температура $T_{i+0,5}^{n+1}$, входящая в прогоночное уравнение при $i = N$

$$T_{N-0,5}^{n+1} + a_{N-0,5} T_{N+0,5}^{n+1} = b_{N-0,5},$$

лежит за пределами области определения T , поэтому приравняем её значению температуры на правой границе $T_{N+0,5}^{n+1} = T_{\text{ПГ}}^{n+1}$. В результате получим явное уравнение для $T_{N-0,5}^{n+1}$

$$T_{N-0,5}^{n+1} = b_{N-0,5} - a_{N-0,5} T_{\text{ПГ}}^{n+1}.$$

Температура в остальных точках сетки находится из уравнения

$$T_{i-0,5}^{n+1} = b_{i-0,5} - a_{i-0,5} T_{i+0,5}^{n+1}$$

при последовательном уменьшении i от $i = N - 1$ до $i = 1$.

§ 16. Нелинейное уравнение теплопроводности

В § 13–§ 15 рассмотрены методы решения явного и неявного линейного уравнения теплопроводности. Реальные физические процессы чаще всего бывают нелинейными. Теплоёмкость C_V и коэффициент теплопроводности в общем случае зависят от удельного объёма и температуры. Ограничимся случаем, когда эти величины зависят только от температуры. Тогда уравнение (2.55) примет вид

$$\frac{C_V(T)}{V} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} b(T) \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

На равномерной сетке по x применим к этому уравнению описанный выше метод построения разностного уравнения. В результате получим

$$\frac{C_{vi+0,5}^*}{V_{i+0,5}^*} \cdot \frac{T_{i+0,5}^{n+1} - T_{i+0,5}^n}{\tau} - \frac{1}{h^2} \left(b_{i+1}^* (T_{i+1,5}^* - T_{i+0,5}^*) - b_i^* (T_{i+0,5}^* - T_{i-0,5}^*) \right) = 0. \quad (2.66)$$

Все вспомогательные величины определим в момент $t^* = t^{n+1}$, а величины на гранях ячейки проинтерполируем

$$b_i^{n+1} = 0,5(b_{i+0,5}^{n+1} + b_{i-0,5}^{n+1}), \quad b_{i+1}^{n+1} = 0,5(b_{i+0,5}^{n+1} + b_{i+1,5}^{n+1}).$$

В результате уравнение (2.66) примут вид

$$\frac{C_{vi+0,5}^*}{V_{i+0,5}^{n+1}} \cdot \frac{T_{i+0,5}^{n+1} - T_{i+0,5}^n}{\tau} - \frac{1}{2h^2} \left((b_{i+0,5}^{n+1} + b_{i+1,5}^{n+1})(T_{i+1,5}^{n+1} - T_{i+0,5}^{n+1}) - (b_{i+0,5}^{n+1} + b_{i-0,5}^{n+1})(T_{i+0,5}^{n+1} - T_{i-0,5}^{n+1}) \right) = 0. \quad (2.67)$$

Нелинейные уравнения типа (2.67), как правило, решаются итерациями. На итерациях с номерами v и $v+1$ значения T^v и T^{v+1} являются приближениями к значениям T^{n+1} . Все величины на v -й итерации предполагаются известными. Значения на $v+1$ -й итерации свяжем со значениями на v -й итерации рядами Тейлора, сохранив в разложениях только члены с первой производной

$$\begin{aligned} b_{i-0,5}^{v+1} &= b_{i-0,5}^v + \left(\frac{db}{dT} \right)_{i-0,5}^v (T_{i-0,5}^{v+1} - T_{i-0,5}^v), \\ b_{i+0,5}^{v+1} &= b_{i+0,5}^v + \left(\frac{db}{dT} \right)_{i+0,5}^v (T_{i+0,5}^{v+1} - T_{i+0,5}^v), \\ b_{i+1,5}^{v+1} &= b_{i+1,5}^v + \left(\frac{db}{dT} \right)_{i+1,5}^v (T_{i+1,5}^{v+1} - T_{i+1,5}^v). \\ C_{vi+0,5}^{v+1} &= C_{vi+0,5}^v + \left(\frac{dC_v}{dT} \right)_{i+0,5}^v (T_{i+0,5}^{v+1} - T_{i+0,5}^v). \end{aligned}$$

В уравнении (2.67) три группы членов. Рассмотрим их по отдельности. После подстановки значений C_v^{v+1} первый член запишем так

$$\frac{C_{vi+0,5}^v}{V_{i+0,5}^{n+1}} (T_{i+0,5}^{v+1} - T_{i+0,5}^n) + \frac{1}{V_{i+0,5}^{n+1}} \left(\frac{dC_v}{dT} \right)_{i+0,5}^v (T_{i+0,5}^{v+1} - T_{i+0,5}^v) \cdot (T_{i+0,5}^v - T_{i+0,5}^n).$$

Здесь значение T^{v+1} встречается только в первой степени. Второй и третий члены после подстановки значений b^{v+1} примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{2h^2} \left((b_{i+0,5}^v + b_{i+1,5}^v)(T_{i+1,5}^{v+1} - T_{i+0,5}^{v+1}) + \left(\frac{db}{dT} \right)_{i+0,5}^v (T_{i+0,5}^{v+1} - T_{i+0,5}^v)(T_{i+1,5}^v - T_{i+0,5}^v) + \right. \\ \left. + \left(\frac{db}{dT} \right)_{i+1,5}^v (T_{i+1,5}^{v+1} - T_{i+1,5}^v)(T_{i+1,5}^v - T_{i+0,5}^v) \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\tau}{2h^2} \left((b_{i+0,5}^v + b_{i-0,5}^v)(T_{i+0,5}^{v+1} - T_{i-0,5}^{v+1}) + \left(\frac{db}{dT} \right)_{i+0,5}^v (T_{i+0,5}^{v+1} - T_{i+0,5}^v)(T_{i+0,5}^v - T_{i-0,5}^v) + \right. \\ \left. + \left(\frac{db}{dT} \right)_{i-0,5}^v (T_{i-0,5}^{v+1} - T_{i-0,5}^v)(T_{i+0,5}^v - T_{i-0,5}^v) \right),$$

Сгруппировав члены при $T_{i-0,5}^{v+1}$, $T_{i+0,5}^{v+1}$ и $T_{i+1,5}^{v+1}$, запишем уравнение (2.67) в виде

$$-A_{i+0,5}^v T_{i-0,5}^{v+1} + B_{i+0,5}^v T_{i+0,5}^{v+1} - C_{i+0,5}^v T_{i+1,5}^{v+1} = D_{i+0,5}^v, \quad (2.68)$$

где

$$A_{i+0,5}^v = \frac{\tau}{2h^2} \left(b_{i+0,5}^v + b_{i-0,5}^v - \left(\frac{db}{dT} \right)_{i-0,5}^v (T_{i+0,5}^v - T_{i-0,5}^v) \right), \\ B_{i+0,5}^v = \frac{1}{V_{i+0,5}^{n+1}} \left(C_{vi+0,5}^v + \left(\frac{dC_v}{dT} \right)_{i+0,5}^v (T_{i+0,5}^v - T_{i+0,5}^n) \right) + \frac{\tau}{2h^2} (b_{i+1,5}^v + 2b_{i+0,5}^v + b_{i-0,5}^v) - \\ - \frac{\tau}{2h^2} \left(\left(\frac{db}{dT} \right)_{i+0,5}^v (T_{i+1,5}^v - 2T_{i+0,5}^v + T_{i-0,5}^v) \right), \\ C_{i+0,5}^v = \frac{\tau}{2h^2} \left(b_{i+0,5}^v + b_{i+1,5}^v + \left(\frac{db}{dT} \right)_{i+1,5}^v (T_{i+1,5}^v - T_{i+0,5}^v) \right), \\ D_{i+0,5}^v = \frac{T_{i+0,5}^v}{V_{i+0,5}^{n+1}} \left(C_{vi+0,5}^v + \left(\frac{dC_v}{dT} \right)_{i+0,5}^v (T_{i+0,5}^v - T_{i+0,5}^n) \right) + \\ + \frac{\tau}{2h^2} \left(T_{i-0,5}^v \left(\frac{db}{dT} \right)_{i-0,5}^v (T_{i+0,5}^v - T_{i-0,5}^v) - T_{i+1,5}^v \left(\frac{db}{dT} \right)_{i+1,5}^v (T_{i+1,5}^v - T_{i+0,5}^v) - \right. \\ \left. - T_{i+0,5}^v \left(\frac{db}{dT} \right)_{i+0,5}^v (T_{i+1,5}^v - 2T_{i+0,5}^v + T_{i-0,5}^v) \right).$$

Уравнение (2.68) решается одним из рассмотренных выше методов, например, прогонкой. Итерации по v прекращаются, если $\max |T_{i+0,5}^{v+1} - T_{i+0,5}^v| < \varepsilon$, где ε наперед заданное малое число.

Глава 3. РАЗНОСТНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

§ 1. Разностные схемы в дифференциальном представлении

При построении разностной схемы, аппроксимирующей некоторую дифференциальную задачу, пространство функций непрерывного аргумента заменяется пространством сеточных функций, а дифференциальные уравнения – системой алгебраических уравнений. То, что решение дифференциальной задачи и сеточное решение принадлежит разным функциональным пространствам, затрудняет исследование разностных схем. Поэтому часто рассматривают разностные операторы в том же функциональном пространстве, что и аппроксимируемые дифференциальные операторы, то есть считают, что разностные уравнения удовлетворяются функциям непрерывного аргумента в каждой точке рассматриваемой области, а не только в узлах сетки. При таких предположениях получаются дифференциальные приближения разностных схем. Для этого выполняются те же самые операции, которые совершаются при определении погрешности аппроксимации. Левая часть полученного таким образом уравнения совпадает с левой частью дифференциального уравнения, а в правой части стоит погрешность аппроксимации. Вопросы получения разностных уравнений газовой динамики в дифференциальной форме и исследование их свойств подробно изучены в [1–4].

Законы сохранения массы, количества движения и энергии для идеальной и неидеальной сред и следствия законов сохранения подробно рассмотрены в § 7–11 главы 1. Ниже будет рассмотрена система законов сохранения идеальной сплошной среды без теплопроводности в лагранжевых координатах для одномерных течений с плоской симметрией. В соответствии с [3] эти уравнения имеют вид

$$\frac{dV}{dt} - \frac{\partial U}{\partial m} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{dU}{dt} + \frac{\partial P}{\partial m} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dt}(E + 0,5U^2) + \frac{\partial}{\partial m}(PU) = 0. \quad (3.3)$$

где $\frac{d}{dt}$ – субстанциональная производная вдоль траектории частицы с массовой координатой m . Траектория частицы определяется уравнением

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_m - U = 0, \quad (3.4)$$

где $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_m = \frac{dx}{dt}$. По определению удельный объем вводится уравнением

$$\left(\frac{\partial x}{\partial m}\right)_t - V = 0. \quad (3.5)$$

Из (3.2) и (3.3) после исключения $\frac{\partial P}{\partial m}$ следует уравнение

$$\frac{dE}{dt} + P \frac{\partial U}{\partial m} = 0. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) с помощью уравнения (3.1) преобразуется к виду

$$\frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} = 0. \quad (3.7)$$

Поскольку удельная внутренняя энергия E зависит от удельного объема V и энтропии S , то из (3.7), выражения полного дифференциала dE

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S dV + \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V dS$$

и определений P и T

$$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S, \quad T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V \quad (3.8)$$

следует уравнение

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_m = 0, \quad (3.9)$$

которое означает отсутствие диссипации энергии вдоль траектории с координатой m . Еще несколько следствий дает уравнение состояния

$$P = P(V, S).$$

Из выражения субстанциональной производной функции $P(V, S)$

$$\frac{dP}{dt} = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S \frac{dV}{dt} + \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V \frac{dS}{dt}$$

и из уравнения (3.9) следует

$$\frac{dP}{dt} + a^2 \frac{dV}{dt} = 0, \quad (3.10)$$

где $a^2 = -\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\right)_S$. Заменяя в (3.10) производную $\frac{dV}{dt}$ производной

$\frac{\partial U}{\partial m}$ с помощью (3.1), получим еще одно следствие

$$\frac{dP}{dt} + a^2 \frac{\partial U}{\partial m} = 0. \quad (3.11)$$

Система законов сохранения и их следствий (3.1)–(3.7), (3.9)–(3.11), содержащая 10 уравнений и 8 искомых функций (x , U и шесть термодинамических функций P , V , E , T , S , a^2), является переопределенной. Часть из уравнений (3.1)–(3.7), (3.9)–(3.11) являются независимыми, а другая часть – зависимыми. При образовании системы независимых уравнений будем исходить из того, что три закона сохранения (3.1)–(3.3) являются независимыми. Они содержат четыре искомых функции P , V , E , U . Для замыкания системы уравнений к ним нужно добавить уравнение состояния в виде

$$P = P(V, E). \quad (3.12)$$

Уравнение траектории (3.4) также является независимым уравнением. Т.о. получается система пяти независимых уравнений, содержащая пять функций P , V , E , U , x .

Независимые уравнения можно выбрать и по-другому. Рассмотрим один из альтернативных способов такого выбора. Среди уравнений (3.1)–(3.7), (3.9)–(3.12) только два уравнения (3.4), (3.5) содержат координату x в качестве неизвестной функции. Кроме этих уравнений удельный объем V и скорость U связаны уравнением (3.1). Из этих трех уравнений два являются независимыми, а третье является следствием. В качестве независимых можно взять не (3.1) и (3.4), а (3.4) и (3.5). Тогда после дифференцирования (3.4) по m , а (3.5) по t и вычитания второго уравнения из первого получается уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial m} = \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial m} - \frac{\partial^2 x}{\partial m \partial t}.$$

Поскольку смешанная производная не зависит от порядка дифференцирования, то правая часть этого уравнения равна нулю, а левая часть совпадает с (3.1). Т.о. уравнение (3.1) является следствием уравнений (3.4) и (3.5) и не является независимым.

Аналогичные рассмотрения продельваются и в случае выбора других независимых уравнений и обоснования их независимости. При этом всегда следует помнить, что из всех термодинамических функций лишь две являются независимыми.

Конструирование разностной схемы заключается в выборе пяти независимых разностных уравнений, то есть в выборе пяти конкретных погрешностей аппроксимации. В [3] и [4] разностные уравнения, аппроксимирующие уравнения (3.1)–(3.7), (3.9)–(3.11), исследуются в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial m} = \omega_1, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial m} = \omega_2, \quad (3.13), (3.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(E + 0.5U^2) + \frac{\partial}{\partial m}(PU) = \omega_3, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} - U = \omega_4, \quad \frac{\partial x}{\partial m} - V = \omega_5, \quad (3.16), (3.17)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial U}{\partial m} = \omega_6, \quad \frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t} = \omega_7, \quad (3.18), (3.19)$$

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = \omega_8, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + a^2 \frac{\partial U}{\partial m} = \omega_9, \quad \frac{\partial P}{\partial t} + a^2 \frac{\partial V}{\partial t} = \omega_{10}. \quad (3.21), (3.22)$$

В принципе, система уравнений (3.13)–(3.22) содержит информацию о разностном решении и, используя её, можно сделать исчерпывающие выводы о достоинствах и недостатках разностной схемы. Однако, из-за неограниченности количества членов ряда в правых частях системы, такое исследование оказывается затруднительным. Наиболее часто исследуется первое дифференциальное приближение разностной схемы, когда в правой части оставлены лишь старшие члены разложения по τ и h , порядок которых совпадает с порядком аппроксимации.

В [3, 4] показано, что при построении конкретной разностной схемы, то есть при выборе определённого набора пяти независимых ω_i , с помощью соответствующего фундаментального решения можно получить все остальные ω_i .

В качестве примера рассмотрим разностную схему, в которой независимыми являются ω_4 и ω_5 . Продифференцируем по m уравнение (3.16)

$$\frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) - \frac{\partial U}{\partial m} = \frac{\partial \omega_4}{\partial m}.$$

Переставим в этом уравнении порядок дифференцирования и т.к. $\frac{\partial x}{\partial m} = V + \omega_5$ в силу (3.17), то уравнение примет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial m} = \frac{\partial \omega_5}{\partial t} + \frac{\partial \omega_4}{\partial m}. \quad (3.23)$$

Сравним уравнение (3.23) с уравнением (3.13). Приравняв правые части этих уравнений, получим связь между ω_1 , ω_4 , ω_5

$$\omega_1 = \frac{\partial \omega_4}{\partial m} - \frac{\partial \omega_5}{\partial t}.$$

Оценка изменения энтропии вдоль линии тока с течением времени является эффективным средством локального контроля точности

вычисления термодинамических величин. В [3] свойство разностной схемы сохранять энтропию вдоль линии тока названо S – консервативностью. Там же доказана теорема о том, что необходимым и достаточным условием S – консервативности является равенство нулю погрешности аппроксимации ω_8

$$\omega_8 = 0.$$

Таким образом, если в выбранной разностной схеме нет в явном виде ω_8 , то оно может быть выражено через те погрешности аппроксимации, которые есть.

Применив изложенный выше метод получения уравнений относительно неизвестных ω_i , получим для наиболее часто встречающихся разностных схем следующие уравнения, выражающие ω_8 через независимые ω_i . Эти уравнения приведены в табл. 1.

Таблица 3.1

№ п/п	Независимые ω_i	Уравнения для ω_8
1.	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$	$\omega_8 = \omega_3 + P \omega_1 - U \omega_2$
2.	$\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$	$\omega_8 = \omega_3 - U \omega_2 - P \frac{\partial \omega_5}{\partial t} + P \frac{\partial \omega_4}{\partial m}$
3.	$\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_6$	$\omega_8 = \omega_6 + P \omega_1$
4.	$\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_7$	$\omega_8 = \omega_7$
5.	$\omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6,$	$\omega_8 = \omega_6 + P \left(\frac{\partial \omega_4}{\partial m} - \frac{\partial \omega_5}{\partial t} \right)$
6.	$\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_9$	$\omega_8 = (\omega_9 + a^2 \omega_1) / \left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_v$
7.	$\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_{10}$	$\omega_8 = \omega_{10} / \left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_v$

Обратим внимание, что уравнение траектории Лагранжевой частицы (3.16), не содержащее термодинамических величин, практически всегда выбирается в качестве независимого разностного уравнения.

§ 2. Критерий диссипативности

Погрешности аппроксимации ω_i в общем случае имеют вид бесконечного ряда

$$\omega = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A_{kl} \tau^k h^l, \quad (k+l \geq 1).$$

В силу преобразуемости левых частей уравнений (3.13)–(3.22) для любой разностной схемы (определяемой пятью независимыми разностными уравнениями) можно построить уравнение производства энтропии в виде

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = \omega_8 = \sum_{\substack{k=0 \\ \ell=j}}^{\infty} A_{sk\ell} \tau^k h^\ell, \quad (k + \ell \geq 1).$$

Если $\omega_8 \neq 0$, то энтропия должна изменяться вдоль траекторий частиц. Поскольку в точном решении энтропия вдоль траектории остается постоянной, то возникает вопрос, какое изменение энтропии можно считать допустимым. В качестве критерия диссипативности разностной схемы примем изменение энтропии на слабой ударной волне, на фронте которой справедливо уравнение

$$E - E_0 = -0,5 (P + P_0) (V - V_0), \quad (3.24)$$

связывающее значения P_0, V_0, E_0 перед разрывом со значениями P, V, E за разрывом. Представим E и P в виде рядов Тейлора в точке P_0, V_0, E_0 (перед разрывом)

$$E = E_0 + \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_s \Delta V + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2} \right)_s \Delta V^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 E}{\partial V^3} \right)_s \Delta V^3 + \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_v \Delta S + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2} \right)_v \Delta S^2 + \dots,$$

$$P = P_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_s \Delta V + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_s \Delta V^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_v \Delta S + \dots,$$

где $\Delta V = V - V_0, \Delta S = S - S_0$. Подставив E и P в (3.24) и воспользовавшись соотношениями (3.8), получим

$$T_0 \Delta S = -\frac{1}{12} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_s \Delta V^3 + O(\Delta V^4, \Delta S^2). \quad (3.25)$$

Таким образом, изменение энтропии на слабой ударной волне пропорционально кубу изменения удельного объема. Это известное [5] уравнение (3.25) будем использовать в качестве критерия точности вычисления энтропии. Считая, что S и V зависят от времени t и ΔS и ΔV есть изменения S и V на промежутке τ по времени, представим их в виде рядов Тейлора. Подставив эти ряды в (3.25), получим физическое уравнение производства энтропии на слабой ударной волне

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\tau^2}{12} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_s \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^3 + \dots \quad (3.26)$$

Обозначим скорость роста энтропии, определяемую этим уравнением, через $\left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_\phi$. Разностные схемы, для которых

$$\left| \frac{\partial S}{\partial t} \right| \leq \left| \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_{\phi} \right|,$$

называются **слабо диссипативными**, а разностные схемы, удовлетворяющие условию

$$\left| \frac{\partial S}{\partial t} \right| > \left| \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_{\phi} \right|,$$

сильно диссипативными.

Физический смысл этого критерия весьма прост: разностная схема является приемлемой, если изменение энтропии из-за погрешностей аппроксимации не превосходит ее изменения в характерных физических процессах, какими являются слабые ударные волны. В сильно диссипативных разностных схемах слабые ударные волны неразличимы на фоне погрешностей. Иными словами, сильно диссипативные разностные схемы имеют низкую «разрешающую способность», и наоборот, слабо диссипативные РС – высокую.

§ 3. Дивергентность

Каждая из функций U , P , V , E , S , T , являющихся решением системы законов сохранения, может, вообще говоря, определяться на «своей» сетке. Однако чтобы избежать интерполяций при вычислении P из уравнения состояния по V и E , все термодинамические величины, как правило определяют в серединах сеточных интервалов. После этого остаются две возможности: 1) скорость задается также в серединах сеточных интервалов, и 2) скорость задается в узлах сетки.

Направление роста индекса i во всех дальнейших рассуждениях будет совпадать с положительным направлением оси Ox (в Лагранжевых координатах – оси $O\eta$).

Рассмотрим сеточный шаблон (рис. 3.1). Все искомые величины, кроме x , задаются в серединах сеточных интервалов по m . Значения x задаются в узлах сетки по m и они определяют концы сеточных интервалов h . Именно так определяются сеточные функции в методах Лакса [6] и Годунова [7].

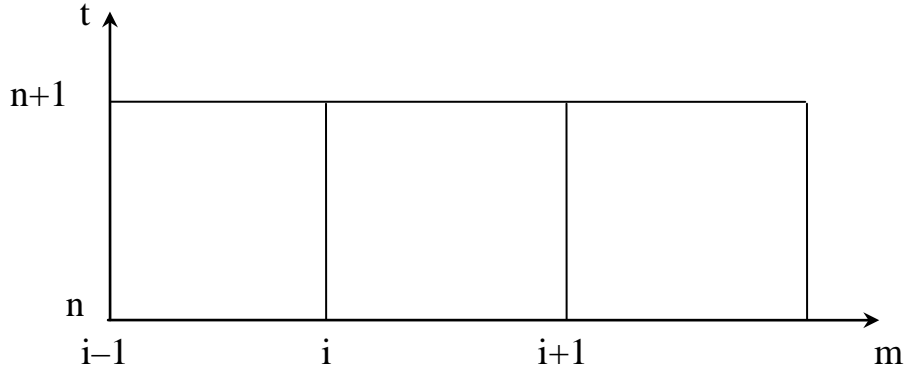


Рис.3.1. Фрагмент сетки в одномерном случае

Уравнение траектории (3.4) умножим на dt и проинтегрируем по t от t^n до $t^{n+1} = t^n + \tau$. Применяв теорему о среднем, получим

$$x_i^{n+1} = x_i^n + U_i^* \tau,$$

где U_i^* есть значение U_i в точке t^* , удовлетворяющей неравенствам $t^n \leq t^* \leq t^n + \tau$. Точнее определить значение t^* в соответствии с теоремой о среднем значении нельзя без привлечения дополнительной информации о функции $U_i(t)$.

Плотность $\rho_{i+0,5}^{n+1}$ можно определить с помощью двух уравнений. Умножим уравнение (3.1), выражающее закон сохранения массы, на dt , dm и проинтегрируем по ячейке $t^n \leq t \leq t^{n+1}$, $m_i \leq m \leq m_{i+1}$. В результате получим разностное уравнение

$$\left(V_{i+0,5}^{n+1} - V_{i+0,5}^n \right) h_{i+0,5} - \left(U_{i+1}^* - U_i^* \right) \tau = 0. \quad (3.27)$$

Значение h есть масса вещества на промежутке $x_i^n \leq x \leq x_{i+1}^n$

$$h_{i+0,5} = \frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{V_{i+0,5}^n}.$$

Поскольку $\tau U_i^* = x_i^{n+1} - x_i^n$, $\tau U_{i+1}^* = x_{i+1}^{n+1} - x_{i+1}^n$, то это уравнение принимает вид

$$V_{i+0,5}^{n+1} h_{i+0,5} = x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1}$$

или

$$\rho_{i+0,5}^{n+1} = \frac{h_{i+0,5}}{x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1}}. \quad (3.28)$$

С уравнением движения повторим изложенную выше процедуру и получим

$$\left(U_{i+0,5}^{n+1} - U_{i+0,5}^n \right) h_{i+0,5} + \tau \left(P_{i+1}^* - P_i^* \right) = 0. \quad (3.29)$$

Перейдем теперь к уравнению энергии в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{\partial \mathcal{P}U}{\partial m} = 0.$$

Применив ту же процедуру, что и для уравнений неразрывности и движения, получим разностное уравнение энергии в виде

$$\left(\mathcal{E}_{i+0,5}^{n+1} - \mathcal{E}_{i+0,5}^n\right)h_{i+0,5} + \left(P_{i+1}^* U_{i+1}^* - P_i^* U_i^*\right)\tau = 0. \quad (3.30)$$

Уравнения (3.27), (3.29) и (3.36) записаны в так называемой дивергентной форме. Ее достоинство заключается в том, что в результате суммирования по всем сеточным ячейкам получаются уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} V_{i+0,5}^{n+1} h_{i+0,5} - \sum_{i=0}^{N-1} V_{i+0,5}^n h_{i+0,5} &= U_N^* \tau - U_0^* \tau, \\ \sum_{i=0}^{N-1} U_{i+0,5}^{n+1} h_{i+0,5} - \sum_{i=0}^{N-1} U_{i+0,5}^n h_{i+0,5} &= -\left(P_N^* \tau - P_0^* \tau\right), \\ \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{E}_{i+0,5}^{n+1} h_{i+0,5} - \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{E}_{i+0,5}^n h_{i+0,5} &= -\left(P_N^* U_N^* \tau - P_0^* U_0^* \tau\right). \end{aligned}$$

Таким образом, в левых частях стоят изменения интегральных величин: объема, количества движения и энергии в области интегрирования, а в правых частях стоят разности смещений, импульсов и работ на правой и левой границах за время τ .

Выполнение законов сохранения на шаге τ для всей области интегрирования – это хорошо. Однако, для уравнения энергии этого мало. Дело в том, что удельная полная энергия \mathcal{E} равна сумме удельной внутренней и удельной кинетической энергии

$$\mathcal{E} = E + 0,5 U^2.$$

Скорость $U_{i+0,5}^{n+1}$ уже определена из уравнения (3.15), $\mathcal{E}_{i+0,5}^{n+1}$ тоже уже определена из уравнения (3.16). Остается единственный путь определения $E_{i+0,5}^{n+1}$

$$E_{i+0,5}^{n+1} = \mathcal{E}_{i+0,5}^{n+1} - 0,5 \left(U_{i+0,5}^{n+1}\right)^2. \quad (3.31)$$

Поскольку $U_{i+0,5}^{n+1}$ определена с погрешностью, то эта погрешность влияет на точность определения $E_{i+0,5}^{n+1}$, что противоречит термодинамике. В случае больших значений $\text{grad } P$ погрешность определения $U_{i+0,5}^{n+1}$ может быть настолько большой, что после определения $E_{i+0,5}^{n+1}$ из уравнения (3.17) может оказаться, вопреки физике, что

$$E_{i+0,5}^{n+1} < 0.$$

Но даже в случае $E_{i+0,5}^{n+1} > 0$ противоречие физике может проявиться в другом. Известно, что удельная внутренняя энергия состоит из холодной и тепловой частей

$$E = E_X(V) + E_T(V, T).$$

Тепловая энергия $E_T(V, T)$ вводится так, что $E_T \geq 0$. Холодная энергия зависит от удельного объема V . Значение $V_{i+0,5}^{n+1}$ уже найдено, а значит определено и $E_{X_{i+0,5}}^{n+1}$. Поэтому может оказаться, что

$$E_{T_{i+0,5}}^{n+1} = E_{i+0,5}^{n+1} - E_{X_{i+0,5}}^{n+1} < 0$$

даже в том случае, когда

$$E_{i+0,5}^{n+1} > 0.$$

Это тоже нефизично.

§ 4. Классы решений

Разностные уравнения, дающие удовлетворительные результаты для гладкого решения, оказываются часто непригодными для расчета разрывных решений. Здесь требуется либо изменить уже имеющиеся разностные уравнения, либо использовать другие. В связи с этим возникает необходимость отличать ячейки сетки, содержащие сильный разрыв, от ячеек с гладким решением. Условием такого разделения ячеек будет знак разности скорости $(U(x + \Delta x) - U(x))/\Delta x$. Это условие впервые было применено в [8] и позднее успешно использовалось рядом авторов [8–14] для введения диссипативных членов в разностные уравнения.

Приближенное решение в ячейке сетки, в которой выполнено условие

$$\frac{U_{i+1} - U_i}{x_{i+1} - x_i} \geq 0, \quad (3.32)$$

назовем волной разрежения.

Приближенное решение в ячейке сетки, в которой выполнено условие

$$\frac{U_{i+1} - U_i}{x_{i+1} - x_i} < 0, \quad (3.33)$$

назовем волной сжатия.

В результате такого разделения в класс волн разрежения попадают:

а) непрерывные решения (волны разрежения);

б) разрывные решения, когда величины перед фронтом ударной волны и за фронтом меняются настолько быстро, что средняя плотность в ячейке уменьшается. Поскольку в этом случае вклад ударной волны в осредненный процесс является малым, то мы будем им пренебрегать и будем считать осредненный процесс в данной ячейке непрерывным.

К классу волн сжатия относятся:

- а) разрывные решения, когда величины перед фронтом ударной волны и за фронтом меняются слабее, чем на фронте;
- б) непрерывные решения (волны сжатия).

Все решения, относящиеся к волнам сжатия, рассчитываются как разрывные решения. При этом волны сжатия рассчитываются как ударные волны еще до момента пересечения характеристик и образования разрыва. Из сказанного выше следует, что применяемый нами критерий (3.32), (3.33) не является абсолютно строгим.

§ 5. Вспомогательные величины для непрерывных решений

Рассмотрим уравнение (3.11), являющееся следствием уравнения неразрывности (3.1) и уравнения состояния $P(\rho, S)$.

Используем уравнение (3.11) для определения P_i^* . Для этого построим вспомогательный контур высотой $l\tau$ и основанием $[m_{i-0,5}, m_{i+0,5}]$. Проинтегрировав (3.11) по построенной таким образом вспомогательной ячейке, получим

$$P_i^* = P_i^n - \frac{l\tau}{0,5(h_{i+0,5} + h_{i-0,5})} (a_i^n)^2 (U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n). \quad (3.34)$$

Аналогично используем и уравнение (3.2). После интегрирования по контуру вспомогательной ячейки получим уравнение для определения U_i^*

$$U_i^* = U_i^n - \frac{l\tau}{0,5(h_{i+0,5} + h_{i-0,5})} (P_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n). \quad (3.35)$$

Для выбора величины l необходимо сформулировать ряд ограничений. Прежде всего, разностные уравнения для определения $V_{i+0,5}^{n+1}$, $U_{i+0,5}^{n+1}$, $\varepsilon_{i+0,5}^{n+1}$ должны быть устойчивы. Во-вторых, погрешности аппроксимации основных уравнений должны стремиться к нулю при независимом стремлении к нулю шагов сетки τ и h . В-третьих, полученная разностная схема должна быть монотонной (допускается и условная монотонность).

§ 6. Метод исследования дистракции разрывов

В сплошной среде сильный разрыв – это бесконечно тонкая поверхность. При переходе к сеточным функциям сильный разрыв, если его специально не выделять, превращается в слой конечной толщины, в котором вещество переходит из состояния перед разрывом в состояние за разрывом. Происходит как бы расширение (растяжение, утолщение) поверхности сильного разрыва. Толщина такого переходного слоя

составляет, как правило, несколько сеточных интервалов. Количество таких интервалов зависит от свойств разностной схемы, от амплитуды сильного разрыва, от соотношения шагов сетки. Будем называть эту безразмерную величину, выражающую количественную оценку одного из важных свойств разностной схемы, дистракцией (от греческого слова *distraktio* – растяжение, расширение).

Впервые метод исследования дистракции разностной схемы был описан в работе Неймана и Рихтмайера [8]. Мы будем использовать его в виде, изложенном в [9].

Рассмотрим разностные законы сохранения (3.13)–(3.15). В случае стационарной ударной волны, распространяющейся с постоянной скоростью W , перейдем к новой переменной $\xi(m,t)$

$$\xi = m - Wt.$$

Тогда все величины P, V, E, U будут зависеть от $\xi(t, m)$.

В уравнениях (3.13)–(3.15) заменим производные по t и m производными по ξ

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_m = \frac{d}{d\xi} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_m, \quad \left(\frac{\partial}{\partial m}\right)_t = \frac{d}{d\xi} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial m}\right)_t.$$

После дифференцирования ξ по t и m эти выражения принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial t} = -W \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial m} = \frac{d}{d\xi}.$$

Запишем теперь уравнения (3.13)–(3.15) в виде трёх обыкновенных дифференциальных уравнений

$$W \frac{dV}{d\xi} + \frac{dU}{d\xi} + \omega_1 = 0, \quad (3.36)$$

$$W \frac{dU}{d\xi} - \frac{dP}{d\xi} + \omega_2 = 0, \quad (3.37)$$

$$W \frac{d}{d\xi} (E + 0,5U^2) - \frac{d}{d\xi} (PU) + \omega_3 = 0. \quad (3.38)$$

Поскольку уравнения (3.36)–(3.38) по существу есть комбинации рядов Тейлора, то главные члены погрешностей аппроксимации должны зависеть от вторых производных. Запишем их в виде

$$\omega_1 = A_1 \tau W^2 \frac{d^2 V}{d\xi^2} + B_1 h \frac{d^2 U}{d\xi^2} + O^2, \quad (3.39)$$

$$\omega_2 = A_2 \tau W^2 \frac{d^2 U}{d\xi^2} + B_2 h \frac{d^2 P}{d\xi^2} + O^2, \quad (3.40)$$

$$\omega_3 = A_3 \tau W^2 \frac{d^2 (E + 0.5U^2)}{d\xi^2} + B_3 h \frac{d^2 (PU)}{d\xi^2} + O^2. \quad (3.41)$$

Множители A_k , B_k , в (3.39)–(3.41) зависят от конкретной разностной схемы. Продолжим преобразования следующим образом: в уравнениях (3.36)–(3.41) с привлечением уравнения состояния исключим последовательно P , U , E и их производные. В результате этой операции получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения профиля $V(\xi)$ в ударном слое. При всех преобразованиях в получаемых уравнениях всегда будем выписывать только главные члены порядка τ или h . Дифференцирование по ξ будем обозначать штрихом.

С помощью (3.36)–(3.38) преобразуем (3.39)–(3.41) к виду, содержащему производные только V' и V''

$$\omega_1 = W(A_1 \tau W - B_1 h) V'' + O^2, \quad (3.42)$$

$$\omega_2 = -W^2 (A_2 \tau W + B_2 h) V'' + O^2, \quad (3.43)$$

$$\omega_3 = -W(A_3 \tau W + B_3 h)(PV' + WUV')' + O^2. \quad (3.44)$$

Подставим (3.43)–(3.45) в (3.37)–(3.39) и проинтегрируем по ξ

$$WV + U + W(A_1 \tau W - B_1 h) V' = C_1 + O^2, \quad (3.45)$$

$$WU - P - W^2 (A_2 \tau W + B_2 h) V' = C_2 + O^2, \quad (3.46)$$

$$WE + 0.5WU^2 - PU - W(A_3 \tau W + B_3 h)(PV' + WUV') = C_3 + O^2, \quad (3.47)$$

где C_1 , C_2 , C_3 – постоянные интегрирования. В уравнениях (3.46), (3.47) с помощью уравнения (3.45) исключим U . Затем в полученных уравнениях исключим P и E с помощью уравнения состояния $P(V, E)$. В результате этих преобразований получим уравнение

$$\frac{dV}{d\xi} = F(V). \quad (3.48)$$

Проинтегрируем его

$$\xi_1 = \xi_0 - \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{F(V)}. \quad (3.49)$$

Величина

$$D = \frac{\xi_0 - \xi_1}{h} \quad (3.50)$$

является дистракцией. Дистракция D несет двойную смысловую нагрузку. С одной стороны, это безразмерная ширина ударного слоя, заменяющего сильный разрыв, с другой стороны – это характеристика разностной схемы, поскольку функция $F(V)$ зависит от погрешностей аппроксимации

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Различные разностные схемы можно сравнивать по величине дистракции.

§ 7. Метод исследования немонотонности

Согласно теореме Годунова [7], разностная схема вида

$$f_i^{n+1} = \sum_{k=i-N}^{k=i+N} a_k f_k^n$$

переводит монотонную табличную функцию f_i^n в монотонную функцию f_i^{n+1} с тем же направлением роста тогда и только тогда, когда все коэффициенты a_k неотрицательны. Чтобы применить эту теорему к системе трех законов сохранения, рассмотрим акустический случай, когда скорость звука a^2 в лагранжевых координатах предполагается постоянной. Из уравнений возьмем разностное уравнение движения (3.14) и разностное уравнение (3.21), получаемое после дифференцирования давления. Запишем эти уравнения в виде

$$U_i^{n+1} = \sum_{k=i-N}^{i+N} (A_k U_k^n + B_k P_k^n), \quad P_i^{n+1} = \sum_{k=i-N}^{i+N} (C_k P_k^n + D_k U_k^n).$$

Затем сеточные значения P и U с помощью уравнений

$$P = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad U = \frac{\alpha - \beta}{2a}$$

заменяем на инварианты α и β . В результате после несложных преобразований получим два уравнения

$$\alpha_i^{n+1} = \sum_{k=i-N}^{k=i+N} a_k \alpha_k^n + \sum_{k=i-N}^{k=i+N} b_k \beta_k^n,$$

$$\beta_i^{n+1} = \sum_{k=i-N}^{k=i+N} c_k \alpha_k^n + \sum_{k=i-N}^{k=i+N} d_k \beta_k^n.$$

Упростим задачу и будем рассматривать бегущую волну, в которой один из инвариантов постоянен. Разностная схема будет монотонной, если среди a_k, b_k, c_k, d_k нет отрицательных коэффициентов. Если же эти коэффициенты зависят от числа Куранта, то можно, требуя, чтобы они были неотрицательны, поставить условие, при выполнении которого разностная схема будет монотонной.

При исследовании дистракции разрывов профиль стационарной «размазанной» ударной волны определяется уравнением (3.48). В соответствии с начальными данными перед ударной волной при $V = V_0$

$$\frac{dV}{d\xi} = 0.$$

С учётом этого условия находились постоянные интегрирования. Значение ξ_1 и дистракция D определялись из уравнений (3.49), (3.50). Эти уравнения применимы, однако, только в тех случаях, когда зависимость $V(\xi)$ монотонна. В разностных схемах, не сохраняющих монотонность решения, дистракция возрастает. Покажем это на примере немонотонной зависимости $V(\xi)$, изображённой на рис. 3.2. Видно, что значение V_1 достигается в точке ξ_1 , где $\frac{dV}{d\xi} \neq 0$. При дальнейшем уменьшении ξ V уменьшается и в точке $\xi = \xi_*$, где $\frac{dV}{d\xi} = 0$ (рис. 3.2), принимает значение

$V_* < V_1$. Значение V_* находится из уравнения (3.48) при $\frac{dV}{d\xi} = 0$. При $\xi < \xi_*$

V растёт с уменьшением ξ . Разность $|V_* - V_1|$ является т.о. амплитудой первого колебания.

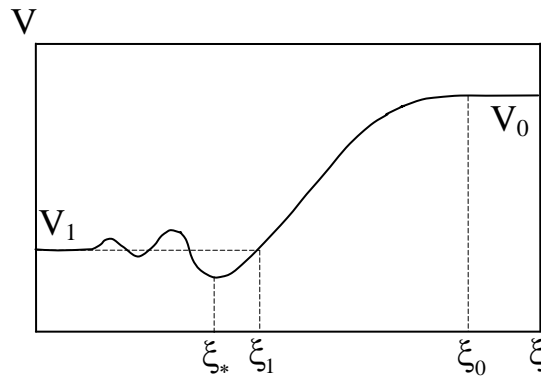


Рис. 3.2. Немонотонный профиль $V(\xi)$ за ударной волной

Мерой немонотонности разностной схемы может служить величина $\left| \frac{V_*}{V_1} - 1 \right|$. На промежутке $\xi_* \leq \xi \leq \xi_1$ продолжаются диссипативные процессы, присущие ударной волне и идущие на участке $\xi_1 < \xi < \xi_0$. С учётом первого колебания значение ξ_* и дистракция немонотонной разностной схемы определяются уравнениями

$$\xi_* = \xi_0 - \int_{V_0}^{V_*} \frac{dV}{F(V)}, \quad D = \frac{\xi_0 - \xi_*}{h}.$$

Глава 4. МЕТОДЫ РАСЧЁТА УДАРНЫХ ВОЛН

§ 1. Механизмы диссипации энергии

Нелинейность законов сохранения массы, количества движения и энергии является причиной возникновения и существования в сплошной среде сильных разрывов – ударных волн. На поверхности сильных разрывов законы сохранения принимают вид нелинейных алгебраических уравнений, связывающих скачки величин по обе стороны разрыва. На сильном разрыве энтропия терпит скачок. В этом заключается принципиальное различие между ударными волнами и волнами с непрерывным изменением величин.

К сильному разрыву с обеих сторон примыкают области, в которых, как правило, все величины непрерывны. Поэтому вместе с методами расчета сильных разрывов неизбежно приходится рассматривать и поведение разностных схем на непрерывных решениях. В этой главе рассмотрены методы расчета ударных волн, в которых сильный разрыв заменяется слоем конечной ширины, сравнимой с размером сеточной ячейки. Такое свойство разностных схем получило название **дистракции** [1]. Поскольку состояние за разрывом связано ударной адиабатой с состоянием перед разрывом, то в области дистракции сильного разрыва должен действовать механизм, обеспечивающий возрастание энтропии. В методах расчета ударных волн используются четыре принципиально отличающихся друг от друга **механизма диссипации энергии** [2–5]. В табл. 4.1 приведены данные об авторах, стране и дате первой публикации по каждому из этих методов. Основанные на них четыре метода расчета ударных волн реализованы в большом количестве разностных схем.

Таблица 4.1

Авторы и даты создания методов расчета ударных волн.

Год появления первой публикации	Авторы метода расчета ударных волн	Страна	Механизм диссипации энергии
1950 г.	Д. Нейман, Р. Рихтмайер	США	псевдовязкость
1954 г.	П. Лакс	США	аппроксимационная вязкость
1957 г.	С.К. Годунов	СССР	распад произвольного разрыва
1960 г.	В.Ф. Куропатенко	СССР	уравнения Гюгонио

Авторы методов расчета ударных волн [2–5] предложили четыре конкретных разностных схемы. Первая попытка сравнительного анализа этих методов и разностных схем была предпринята Б.Л. Рождественским и

Н.Н. Яненко в [6]. Авторы подробно рассмотрели вопросы аппроксимации и устойчивости. В данной главе эти исследования продолжены. Для каждого метода находится уравнение диссипации энергии, определяется дистракция разрывов, и исследуются условия монотонности. Метод характеристик, который отличается от разностных методов для системы законов сохранения иной формой уравнений и, как правило, выделением сильных и слабых разрывов, будет рассмотрен в главе 6.

§ 2. Метод Неймана-Рихтмайера

Главная идея метода Неймана-Рихтмайера заключается во введении в дифференциальные уравнения движения и энергии искусственной вязкости, обеспечивающей диссипацию энергии и дистракцию сильного разрыва до величины, сравнимой с шириной сеточной ячейки.

В работе Неймана-Рихтмайера [2] предложена конкретная форма псевдовязкости

$$q = - \frac{k_0^2 h^2}{V} \frac{\partial U}{\partial m} \left| \frac{\partial U}{\partial m} \right| \quad (4.1)$$

и конкретная разностная схема, несколько измененная в [7]. Идея введения псевдовязкости может быть реализована в виде различных разностных схем. Выражение для псевдовязкости также может быть разным [8–10]. Разностные схемы могут быть явными или неявными. Но если в уравнения вводится псевдовязкость, то все такие разностные схемы являются реализацией метода Неймана-Рихтмайера.

Нейман и Рихтмайер в [2] предложили конкретную разностную схему, в которой термодинамические величины определяются в серединах сеточных интервалов по m , скорости и координаты – в узлах сеточных ячеек. Разностные уравнения из [7] имеют вид:

$$h = \frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{V_{i+0,5}^n}, \quad (4.2)$$

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \frac{P_{i+0,5}^n + Q_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n - Q_{i-0,5}^n}{h} = 0, \quad (4.3)$$

$$x_i^{n+1} = x_i^n + U_i^{n+1} \tau \quad (4.4)$$

$$V_{i+0,5}^{n+1} = V_{i+0,5}^n \frac{x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1}}{x_{i+1}^n - x_i^n}, \quad (4.5)$$

$$q_{i+0,5}^{n+1} = \begin{cases} \frac{k_0^2}{V_{i+0,5}^{n+1}} (U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1})^2 & \text{при } U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1} < 0, \\ 0 & \text{при } U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1} \geq 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

$$E_{i+0,5}^{n+1} - E_{i+0,5}^n + \left(\frac{P_{i+0,5}^{n+1} + P_{i+0,5}^n}{2} + q_{i+0,5}^{n+1} \right) (V_{i+0,5}^{n+1} - V_{i+0,5}^n) = 0, \quad (4.7)$$

$$P_{i+0,5}^{n+1} = P(V_{i+0,5}^{n+1}, E_{i+0,5}^{n+1}). \quad (4.8)$$

Уравнение для удельной внутренней энергии (4.7) и уравнение состояния (УРС) (4.8) образуют систему нелинейных уравнений относительно P^{n+1} , E^{n+1} , V^{n+1} .

Согласно [2], метод условно устойчив. Соотношение шагов по времени и по пространству (число Куранта) $K = \Delta t / h$ для идеального газа должно, согласно [7], удовлетворять условию

$$K \leq \sqrt{\gamma} / 2k_0,$$

где k_0 – постоянная величина, входящая в выражение для вязкости (4.6). Поскольку k_0 по рекомендации авторов [2] должна быть равна $k_0 \approx 1,5 \div 2$, то при $\gamma \approx 1 \div \frac{5}{3}$ нижняя граница значений K , обеспечивающих устойчивость расчетов без учета особенностей уравнения состояния, должна удовлетворять приближенному условию

$$K \leq 0,25.$$

Для дальнейших исследований уравнения (4.2), (4.4) и (4.5) преобразуются. После подстановки (4.2), (4.4) в (4.5) и деления на τ следствие из этих уравнений принимает вид разностного уравнения

$$\frac{V_{i+0,5}^{n+1} - V_{i+0,5}^n}{\tau} - \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{h} = 0. \quad (4.9)$$

В [2] дистракция разрыва исследована следующим образом. Вместо разностных уравнений (4.3)–(4.9) авторы рассмотрели соответствующие дифференциальные уравнения с псевдовязкостью (4.1). В случае стационарной ударной волны после перехода к автомодельной переменной

$$\xi = m - Wt,$$

где $W = \text{const}$, эти уравнения принимают вид

$$WV' + U' = 0, \quad (4.10)$$

$$WU' - (P + q)' = 0, \quad (4.11)$$

$$E' + (P + q)V' = 0. \quad (4.12)$$

Штрих в (4.10)–(4.12) означает дифференцирование по ξ . Для идеального газа

$$PV = (\gamma - 1)E \quad (4.13)$$

и следующего из (4.1) и (4.10) выражения для q

$$q = \frac{k_0^2 h^2 W^2}{V} (V')^2 \quad (4.14)$$

система уравнений (4.10)–(4.14) сводится к одному уравнению для определения V

$$2k_0^2 h^2 \left(\frac{dV}{d\xi} \right)^2 + (\gamma + 1)(V - V_0)^2 + 2V_0(V - V_0) = 0. \quad (4.15)$$

Решение уравнения (4.15) имеет вид

$$\xi = k_0 h \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}} \arcsin \left((\gamma + 1) \frac{V}{V_0} - \gamma \right). \quad (4.16)$$

Из (4.16) следует, что перед разрывом при $V = V_0$

$$\xi_0 = \frac{k_0 h \pi}{2} \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}.$$

В случае бесконечно сильной ударной волны за разрывом $V_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V_0$. В

этом случае из (4.16) следует, что при $V = V_1$ ξ принимает значение ξ_1

$$\xi_1 = -\frac{k_0 h \pi}{2} \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}.$$

Т.о. ширина ударного слоя равна

$$\xi_0 - \xi_1 = k_0 h \pi \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}.$$

После деления $\xi_0 - \xi_1$ на h получается безразмерная величина, которая характеризует дистракцию сильной ударной волны в методе Неймана-Рихтмайера

$$D_{\text{НР}} = \frac{\Delta \xi}{h} = k_0 \pi \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}.$$

Для определения эффективной дистракции $D_{\text{НР}}^{\text{Э}}$ находятся точки пересечения прямой линии $V(\xi)$, имеющей максимальный наклон V'_M , со значениями V_0 и V_1 и определяется эффективная ширина ударного слоя

$$\Delta \xi = \frac{V_0 - V_1}{V'_M}. \quad (4.17)$$

Чтобы найти V'_M продифференцируем (4.15) и в полученном уравнении положим нулю V'' . В результате получим значение $V = V_M$, при котором $V'' = 0$, и выражение производной V' при $V = V_M$

$$V_M(\xi) = \frac{1}{2}(V_0 + V_1), \quad V'_M(\xi) = \frac{V_0 - V_1}{2k_0 h} \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}}.$$

Подставив V'_M в (4.17), получим после деления на h выражение для эффективной дистракции в методе Неймана-Рихтмайера

$$D_{\text{НР}}^{\text{э}} = 2k_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}. \quad (4.18)$$

Обратим внимание, что, по существу, рассматривалась дистракция, вызванная введением псевдовязкости в дифференциальной форме в дифференциальные законы сохранения. Авторы повторили исследования Бэккера [11], выполненные для физической вязкости. Однако, в разностных методах погрешности аппроксимации, как правило, содержат члены того же порядка малости, что и q . Т.о. в [2] не была учтена зависимость дистракции от погрешностей аппроксимации. Кроме того, величина D находилась для бесконечно сильной ударной волны в идеальном газе, при которой достигается предельное сжатие. Исследование зависимости D от силы ударной волны проведено не было.

Изложим иной подход к определению дистракции D [1], основанный на рассмотрении разностных законов сохранения в дифференциальной форме (3.13), (3.14) и (3.19). По существу этот метод является развитием метода исследования дистракции, предложенного Бэккером [11] и затем Нейманом и Рихтмайером.

Рассмотрим уточненную дистракцию разрыва в методе Неймана-Рихтмайера. Суть уточнения заключается в том, что в дифференциальные уравнения включаются все члены одного порядка малости. Для этого запишем разностные уравнения (4.3)–(4.7) в дифференциальной форме

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial m} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial t^2} + \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 V}{\partial t^3} - \frac{h^2}{24} \frac{\partial^3 U}{\partial m^3} + O^3 = 0, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(P+q)}{\partial m} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \frac{h^2}{24} \frac{\partial^3(P+q)}{\partial m^3} + O^3 = 0, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + (P+q) \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\tau^2}{24} \left(\frac{\partial^3 E}{\partial t^3} + P \frac{\partial^3 V}{\partial t^3} + 3 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) + O^3 = 0. \quad (4.21)$$

В уравнениях (4.19)–(4.21) выписаны все члены первого и второго порядков малости, поскольку $q \sim h^2$. В случае стационарной ударной волны перейдем к безразмерной переменной ξ . В этом случае уравнения (4.19)–(4.21), принимают вид

$$WV' + U' + \frac{1}{2}\tau W^2 V'' + \frac{\tau^2}{6} W^3 V''' + \frac{h^2}{24} U'''' = O^3, \quad (4.22)$$

$$WU' - (P+q)' - \frac{1}{2}\tau W^2 U'' + \frac{\tau^2 W^3}{6} U''' - \frac{h^2}{24} P'''' = O^3, \quad (4.23)$$

$$E' + (P+q)V' + \frac{\tau^2 W^2}{12} (P''V' - P'V'') = O^3. \quad (4.24)$$

Из (4.22), (4.23) исключим U' , U'' , U''' . Для этого продифференцируем (4.22) и выразим U'' , U''' через V'' , V'''

$$U'' = -WV'' - \frac{1}{2}\tau W^2 V''' + O^2, \quad U''' = -WV''' + O.$$

Подставив U'' , U''' в (4.22) и в (4.23), получим

$$WV' + U' + \frac{1}{2}\tau W^2 V'' + \frac{1}{6}\tau^2 W^3 V''' - \frac{1}{24}h^2 WV'''' = O^3, \quad (4.25)$$

$$WU' - (P+q)' + \frac{1}{2}\tau W^3 V'' + \frac{1}{12}\tau^2 W^4 V''' - \frac{1}{24}h^2 P'''' = O^3. \quad (4.26)$$

Умножим (4.25) на W и вычтем из него (4.26)

$$W^2 V' + (P+q)' + \frac{1}{12}\tau^2 W^4 V''' - \frac{1}{24}h^2 W^2 V'''' + \frac{1}{24}h^2 P'''' = O^3. \quad (4.27)$$

В уравнения (4.24) и (4.27) входят вторая и третья производные P'' и P''' . Продифференцируем (4.27) по ξ и выразим из полученных уравнений P'' и P'''

$$P'' = -W^2 V'' + O^2, \quad P''' = -W^2 V''' + O^2. \quad (4.28)$$

Подставив (4.27) и (4.28) в (4.24) и P''' из (4.28) в (4.27), получим

$$E' + (P+q)V' = O^3, \quad (4.29)$$

$$W^2 V' + (P+q)' + \frac{1}{12}\tau^2 W^4 V''' - \frac{1}{12}h^2 W^2 V'''' = O^3. \quad (4.30)$$

Проинтегрируем (4.30) и отбросим члены третьего порядка малости

$$W^2 V + P + q - \frac{1}{12}h^2 W^2 (1 - K^2) V'' = W^2 V_0 + P_0. \quad (4.31)$$

Введем обозначение

$$A = \frac{1}{12}h^2 W^2 (1 - K^2), \quad (4.32)$$

где $K = \frac{\tau W}{h}$. Выразим $(P+q)$ из (4.31), подставим в (4.29) и отбросим члены третьего порядка малости

$$E' - W^2 V V' + A V' V'' + (P_0 + W^2 V_0) V' = 0.$$

Проинтегрируем это уравнение

$$E - \frac{W^2 V^2}{2} + \frac{A (V')^2}{2} - E_0 + (P_0 + W^2 V_0)(V - V_0) + \frac{1}{2} W^2 V_0^2 = 0. \quad (4.33)$$

Подставим в (4.33) уравнение состояния идеального газа (4.13) и в полученное уравнение подставим P , выраженное из (4.31)

$$-Vq + A V V'' + \frac{\gamma-1}{2} A (V')^2 + (V - V_0) \left(\gamma P_0 - \frac{\gamma+1}{2} W^2 (V - V_0) - W^2 V_0 \right) = 0. \quad (4.34)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) второго порядка. Рассмотрим случай ударной волны произвольной интенсивности. Поскольку состояние перед разрывом P_0 , V_0 , E_0 , U_0 , a_0 и скорость разрыва W заданы, то из условий на поверхности сильного разрыва

$$P_1 - P_0 + W^2 (V_1 - V_0) = 0,$$

$$E_1 - E_0 + P_0 (V_1 - V_0) - 0,5 W^2 (V_1 - V_0)^2 = 0$$

и уравнения состояния (4.13) выразим V_1 через W , $a_0^2 = \frac{\gamma P_0}{V_0}$ и V_0

$$V_1 = V_0 \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \frac{a_0^2}{W^2} \right). \quad (4.35)$$

С помощью (4.14), (4.32) и (4.35) преобразуем (4.34) к виду

$$2V'' + \frac{n(V')^2}{V} - \frac{12(\gamma+1)(V - V_0)(V - V_1)}{h^2(1 - K^2)V} = 0, \quad (4.36)$$

где

$$n = \gamma - 1 - \frac{24k_0^2}{1 - K^2}.$$

Введем новую переменную $Y = (V')^2$ и преобразуем (4.36) к линейному ОДУ

$$\frac{dY}{dV} + \frac{n}{V} Y - \frac{12(\gamma+1)(V - V_0)(V - V_1)}{h^2(1 - K^2)V} = 0.$$

Рассмотрим решение этого уравнения

$$Y = C V^{-n} + \frac{12(\gamma+1)}{h^2(1 - K^2)} \left(\frac{V^2}{(n+2)} - \frac{V_0 + V_1}{n+1} V + \frac{1}{n} V_0 V_1 \right). \quad (4.37)$$

Постоянную интегрирования C найдем в состоянии перед разрывом, где $V = V_0$, $Y = 0$

$$C = -\frac{12(\gamma+1)V_0^n}{h^2(1-K^2)} \left(\frac{V_0^2}{n+2} - \frac{(V_0+V_1)V_0}{n+1} + \frac{V_0V_1}{n} \right).$$

После подстановки C в (4.37) решение принимает вид

$$(V')^2 = \frac{12(\gamma+1)}{h^2(1-K^2)} \left(\frac{V^2}{n+2} - \frac{(V_0+V_1)V}{n+1} + \frac{V_0V_1}{n} - \left(\frac{V_0}{V} \right)^n \left(\frac{V_0^2}{n+2} - \frac{(V_0+V_1)V_0}{n+1} + \frac{V_0V_1}{n} \right) \right). \quad (4.38)$$

Найдем уточненное выражение эффективной дистракции ударной волны. В (4.36) приравняем нулю V'' . В результате получим выражение для V'_M

$$(V'_M)^2 = \frac{12(\gamma+1)(V_M - V_0)(V_M - V_1)}{nh^2(1-K^2)}. \quad (4.39)$$

Приравняв (4.38) при $V=V_M$ и (4.39), получим уравнение для определения V_M . Рассмотрим внимательнее n . При $k_0 \approx 2$ и $0 \leq K \leq 1$ значение n лежит в промежутке $-\infty < n < -100$. Для таких значений n величина $\frac{n+2}{n+1} \approx 1$ и так

как $\frac{V_M}{V_0} < 1$, то и $\left(\frac{V_M}{V_0} \right)^{-n} \approx 0$. С учетом этих упрощений получим приближенное уравнение для определения V_M , из которого следует

$$V_M \approx \frac{V_0 + V_1}{2}. \quad (4.40)$$

Подставив теперь V_M (4.40) и n в (4.39), получим выражение для V'_M

$$V'_M = \frac{V_0 - V_1}{h} \sqrt{\frac{3(\gamma+1)}{24k_0^2 - (\gamma-1)(1-K^2)}}.$$

Подставив V'_M в (4.17) и разделив $\Delta\xi$ на h , получим уточненное значение эффективной дистракции

$$D_{\text{НР}}^{\text{э}} = 2k_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{(\gamma-1)(1-K^2)}{24k_0^2} \right)}.$$

Из сравнения $D_{\text{НР}}^{\text{э}}$ с ранее полученным значением $D_{\text{НР}}^{\text{э}}$ (4.18) видно, что учет всех членов погрешностей аппроксимации того же порядка малости, что и псевдовязкость (4.14), мало изменил выражение $D_{\text{НР}}^{\text{э}}$.

Из практики применения метода Неймана-Рихтмайера для расчетов параметров ударных волн известно, что за фронтом ударной волны численное решение осциллирует. Определим амплитуду первой осцилляции. Из (4.38) следует, что при $V = V_1$ и $\left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{-n} \approx 0$ квадрат производной V' принимает отличное от нуля значение

$$(V_1')^2 \approx \frac{12(\gamma+1)V_1(V_0 - V_1)}{h^2(1-K^2)n^2}. \quad (4.41)$$

Из (4.41) следует, что V_1' , а значит и немонотонность $V(\xi)$ при $V = V_1$ в методе Неймана-Рихтмайера возрастает при $K^2 \rightarrow 1$ и уменьшается до постоянного значения при $K^2 \rightarrow 0$.

В заключение рассмотрим диссипативные свойства [12–17] разностной схемы Неймана-Рихтмайера. Из разностного уравнения энергии (4.21) следует выражение для погрешности аппроксимации ω_7

$$\omega_7 = -q \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\tau^2}{24} \left(\frac{\partial^3 E}{\partial t^3} + P \frac{\partial^3 V}{\partial t^3} + 3 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \frac{\partial U}{\partial t} \right) + O^3. \quad (4.42)$$

Для нахождения выражения $\frac{\partial^3 E}{\partial t^3}$ продифференцируем по t уравнение (4.21)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial P}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial t} &= O^2, \\ \frac{\partial^3 E}{\partial t^3} + P \frac{\partial^3 V}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \frac{\partial V}{\partial t} + 2 \frac{\partial P}{\partial t} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= O^2. \end{aligned}$$

Выразим из второго уравнения $\frac{\partial^3 E}{\partial t^3}$ и подставим в (4.42). Поскольку $\omega_7 = \omega_8$, то в результате получается уравнение производства энтропии

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = -q \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\tau^2}{12} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial t} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) + O^3.$$

Производные давления по времени заменим их выражениями

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_s \frac{\partial V}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_s \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_s \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$

Окончательно уравнение производства энтропии в методе Неймана-Рихтмайера принимает вид

$$\tau \frac{\partial S}{\partial t} = - \left(\frac{k_0^2 h^2}{V} + \frac{\tau^2}{12} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_s \right) \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^3 + O^3. \quad (4.43)$$

Это уравнение справедливо в случае расчета ударных волн. На непрерывных решениях $k_0 = 0$ и уравнение (4.43) совпадает с уравнением (3.26). Следовательно, разностная схема Неймана-Рихтмайера на непрерывных решениях слабо диссипативна [12], [15–17].

§ 3. Метод Лакса

Идея, лежащая в основе предложенного Лаксом [3] метода расчета ударных волн, заключается в том, чтобы необходимая диссипация энергии обеспечивалась главными членами погрешностей аппроксимации. Позднее этот метод стали называть методом аппроксимационной вязкости.

Все величины определяются в серединах сеточных интервалов по m . Разностные уравнения получаются после интегрирования законов сохранения по контуру сеточной ячейки и применения теоремы о среднем в виде

$$\frac{V_{i+0,5}^{n+1} - V_{i+0,5}^n}{\tau} - \frac{U_{i+1}^* - U_i^*}{h} = 0, \quad (4.44)$$

$$\frac{U_{i+0,5}^{n+1} - U_{i+0,5}^n}{\tau} + \frac{P_{i+1}^* - P_i^*}{h} = 0, \quad (4.45)$$

$$\frac{\mathcal{E}_{i+0,5}^{n+1} - \mathcal{E}_{i+0,5}^n}{\tau} + \frac{(PU)_{i+1}^* - (PU)_i^*}{h} = 0, \quad (4.46)$$

где $f_i = f(m_i)$, $f^* = f(t^*)$, $f^n = f(t^n)$,

$$E_{i+0,5}^{n+1} = \mathcal{E}_{i+0,5}^{n+1} - 0,5(U_{i+0,5}^{n+1})^2. \quad (4.47)$$

Вообще говоря, уравнения (4.44)–(4.47) являются общими до тех пор, пока не конкретизированы уравнения для определения вспомогательных величин U_i^* , P_i^* , $(PU)_i^*$. В [3] Лаксом предложена разностная схема, в которой вспомогательные величины U^* , P^* и на ударных волнах, и на непрерывных решениях определяются уравнениями

$$U_i^* = \frac{1}{2}(U_{i+0,5}^n + U_{i-0,5}^n) + \frac{h}{2\tau}(V_{i+0,5}^n - V_{i-0,5}^n), \quad (4.48)$$

$$P_i^* = \frac{1}{2}(P_{i+0,5}^n + P_{i-0,5}^n) - \frac{h}{2\tau}(U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n). \quad (4.49)$$

Общий метод нахождения U_i^* , P_i^* заключается в том, что создается вспомогательная сеточная ячейка с основанием $m_{i-0,5} \leq m \leq m_{i+0,5}$ и высотой $l\tau$, где l некоторый неопределенный параметр [16]. После интегрирования по контуру этой вспомогательной ячейки получается уравнение для вспомогательных величин

$$U_i^* = 0,5(U_{i-0,5}^n + U_{i+0,5}^n) - \frac{l\tau}{h}(P_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n), \quad (4.50)$$

$$P_i^* = 0,5(P_{i-0,5}^n + P_{i+0,5}^n) - \frac{l\tau a^2}{h}(U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n). \quad (4.51)$$

Вычтем (4.50) из (4.48) и (4.51) из (4.49). В результате получим, что в уравнениях для вспомогательных величин в методе Лакса взято значение l , равное [16]

$$l = \frac{h^2}{2\tau^2 a^2} = \frac{1}{2K^2}.$$

Теорема о среднем требует, чтобы вспомогательные значения U_i^* , P_i^* , появившиеся при построении уравнений (4.44)–(4.46), были бы определены в момент t^* , лежащий внутри промежутка $[t^n, t^{n+1}]$. В таком случае l должно удовлетворять условиям

$$0 \leq l \leq 1,$$

из которых следует, что область применимости метода Лакса определяется неравенством

$$K^2 \geq 0,5.$$

В простых задачах с равномерной сеткой по m это условие может быть выполнено. Но если сетка неравномерна, то в части сеточных интервалов оно нарушается.

Для аппроксимации уравнения энергии Лакс использовал вспомогательную величину $(PU)_i^*$, для которой нет соответствующего уравнения. Поэтому для ее определения было предложено уравнение, построенное по аналогии с уравнениями для P_i^* и U_i^*

$$(PU)_i^* = \frac{1}{2}((PU)_{i+0,5}^n + (PU)_{i-0,5}^n) - \frac{h}{2\tau}(\mathcal{E}_{i+0,5}^n - \mathcal{E}_{i-0,5}^n). \quad (4.52)$$

В дифференциальной форме разностные уравнения (4.44)–(4.46) вместе с (4.48), (4.49), (4.52) имеют вид (3.13)–(3.15) с погрешностями аппроксимации

$$\omega_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tau + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial m^2} \frac{h^2}{\tau} + O^2, \quad \omega_2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tau + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial m^2} \frac{h^2}{\tau} + O^2, \quad (4.53)$$

$$\omega_3 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} \tau + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial m^2} \frac{h^2}{\tau} + O^2. \quad (4.54)$$

При $h \rightarrow 0$ и $\tau = \text{const}$ соответствующие слагаемые в уравнениях (4.53), (4.54) стремятся к нулю. Однако с τ дело обстоит сложнее. При $\tau \rightarrow 0$ члены, пропорциональные $\frac{h^2}{\tau}$ в (4.53), (4.54), стремятся к 0 лишь в том

случае, если $\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} \frac{h^2}{\tau} = 0$. Если это условие не выполнено, то сходимость

уравнений (4.44)–(4.46) к исходным дифференциальным уравнениям отсутствует, т.к. уменьшение τ при постоянном h приводит к увеличению погрешности.

Согласно [12–17] уравнение производства энтропии для разностных схем с независимыми $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ имеет вид

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = \omega_3 - U\omega_2 + P\omega_1. \quad (4.55)$$

Подставив (4.53) и (4.54) в (4.55), получим уравнение производства энтропии в виде

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_m = -\frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - U \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) + \frac{h^2}{2\tau} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial m^2} - U \frac{\partial^2 U}{\partial m^2} + P \frac{\partial^2 V}{\partial m^2} \right) + O^2. \quad (4.56)$$

Преобразуем это уравнение в П-форму. Для этого используем уравнения (3.13)–(3.15) в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial m} + \omega_1, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial m} + \omega_2, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\frac{\partial PU}{\partial m} + \omega_3, \quad (4.57)$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – это величины первого порядка малости. Сначала продифференцируем каждое из этих уравнений по t

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial U}{\partial m} + \omega_1, & \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial P}{\partial m} + \omega_2, & \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} &= \frac{\partial PU}{\partial m} + \omega_3, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial m} + 0, & \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= -\frac{\partial^2 P}{\partial t \partial m} + 0, & \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 PU}{\partial t \partial m} + 0. \end{aligned}$$

Подставив эти вторые производные по t в первое слагаемое в правой части уравнения (4.56) и проведя почленное дифференцирование, получим

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - U \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial P}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial t} + 0.$$

Затем с помощью уравнения

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial V}{\partial t}$$

и уравнений (4.57) преобразуем это выражение к виду

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - U \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial P}{\partial m} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial U}{\partial m} \right)^2. \quad (4.58)$$

Перейдём теперь к преобразованию второго слагаемого в правой части уравнения (4.56). Подставим в него

$$\mathcal{E} = E + \frac{1}{2} U^2$$

и проведя почленное дифференцирование, получим

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial m^2} - U \frac{\partial^2 U}{\partial m^2} + P \frac{\partial^2 V}{\partial m^2} = \left(\frac{\partial U}{\partial m} \right)^2 + \frac{\partial^2 E}{\partial m^2} + P \frac{\partial^2 V}{\partial m^2}. \quad (4.59)$$

Рассмотрим зависимость $E(m)$ при постоянном t

$$E(m) = E(V(m), S(m)).$$

Продифференцируем $E(m)$ по m

$$\left(\frac{\partial E}{\partial m} \right)_t = -P \left(\frac{\partial V}{\partial m} \right)_t + T \left(\frac{\partial S}{\partial m} \right)_t. \quad (4.60)$$

Предположим, что энтропия не зависит от m и продифференцируем (4.60)

по m при $\frac{\partial S}{\partial m} = 0$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial m^2} = a^2 \left(\frac{\partial V}{\partial m} \right)^2 - P \frac{\partial^2 V}{\partial m^2}. \quad (4.61)$$

Из зависимости $P(V(m), S(m))$ при $\frac{\partial S}{\partial m} = 0$ следует

$$\left(\frac{\partial P}{\partial m} \right)_t = -a^2 \left(\frac{\partial V}{\partial m} \right)_t. \quad (4.62)$$

Подставив (4.62) в (4.61), а затем в (4.59), получим

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial m^2} - U \frac{\partial^2 U}{\partial m^2} + P \frac{\partial^2 V}{\partial m^2} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial P}{\partial m} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial m} \right)^2. \quad (4.63)$$

Из (4.56), (4.58) и (4.63) следует уравнение производства энтропии в методе Лакса

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_m = \left(a^2 \left(\frac{\partial U}{\partial m} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial m} \right)^2 \right) \frac{\tau}{2K^2} (1 - K^2) + O^2.$$

При $K = 1$ главный член этого уравнения обращается в нуль. Однако при уменьшении K этот главный член монотонно возрастает и при $K = 0$ скорость производства энтропии становится бесконечной. Поскольку при

$K < 1$ скорость изменения энтропии $\left| \frac{\partial S}{\partial t} \right| > \left| \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_\Phi \right|$, то разностная схема

Лакса, согласно [12–17], является сильно диссипативной. При этом энтропия растет и на ударных волнах и на волнах разрежения, т.к. главный член в уравнении производства энтропии неотрицателен.

Рассмотрим дистракцию стационарного разрыва [1] в методе Лакса. Для этого перейдем к переменной $\xi = m - Wt$. После перехода от m и t к ξ уравнения (4.44)–(4.46) вместе с (4.47) и (4.50)–(4.52) примут вид

$$\begin{aligned} WV' + U' + \frac{h^2}{2\tau}(1 - K^2)V'' + O^2 &= 0, \\ WU' - P' + \frac{h^2}{2\tau}(1 - K^2)U'' + O^2 &= 0, \\ W\varepsilon' - (PU)' + \frac{h^2}{2\tau}(1 - K^2)\varepsilon'' + O^2 &= 0. \end{aligned}$$

Проинтегрируем эти уравнения по ξ . Постоянные интегрирования найдем при $\xi = +\infty$, где $U = U_0$, $V = V_0$, $P = P_0$, $E = E_0$, $\varepsilon = \frac{1}{2}U_0^2 + E_0$. В результате получим

$$\begin{aligned} WV + U + AV' - WV_0 - U_0 + O^2 &= 0, \\ WU - WU_0 - P + P_0 + AU' + O^2 &= 0, \\ W\varepsilon - W\varepsilon_0 - PU + A\varepsilon' + P_0U_0 + O^2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.64)$$

где $A = \frac{h^2}{2\tau}(1 - K^2)$. Подставим в (4.64) уравнение состояния идеального газа. Затем все величины выразим через V , а производные через V' . В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение, определяющее профиль $V(\xi)$ в методе Лакса

$$\frac{4A}{W(\gamma + 1)} \frac{dV}{d\xi} + \frac{(V - V_0)(V - V_1)}{V} = O^2, \quad (4.65)$$

где V_1 определяется уравнением (4.35). Решение этого уравнения после отбрасывания членов второго порядка малости имеет вид

$$\xi = \frac{2h^2(1 - K^2)}{\tau W(\gamma + 1)(V_0 - V_1)} (V_1 \ln(V - V_1) - V_0 \ln(V_0 - V)). \quad (4.66)$$

Из (4.66) следует, что

$$\xi = \xi_0 = +\infty \text{ при } V = V_0, \quad \xi = \xi_1 = -\infty \text{ при } V = V_1.$$

Таким образом, дистракция сильного разрыва в методе Лакса бесконечна

$$D_{\text{л}} = \infty.$$

Для определения эффективной дистракции продифференцируем (4.65) и найдем $V_{\text{М}}$ и максимальное значение $V'_{\text{М}}$, которые достигаются при $V'' = 0$

$$V_{\text{М}} = \sqrt{V_0 V}, \quad V'_{\text{М}} = \frac{(\gamma + 1)K}{2h(1 - K^2)} (\sqrt{V_0} - \sqrt{V_1})^2. \quad (4.67)$$

Из (4.67) и (4.17) получим

$$D_{\text{л}}^{\exists} = \frac{2(1 - K^2)}{(\gamma + 1)K} \left(\frac{\sqrt{V_0} + \sqrt{V_1}}{\sqrt{V_0} - \sqrt{V_1}} \right). \quad (4.68)$$

Из (4.68) видно, что эффективное значение $D_{\text{л}}^{\exists} \rightarrow 0$ при $K \rightarrow 1$ и $D_{\text{л}}^{\exists} \rightarrow \infty$ при $K \rightarrow 0$ или $V_1 \rightarrow V_0$.

Наконец, определим, монотонна ли разностная схема Лакса. Для этого рассмотрим систему двух разностных уравнений (4.44) и (4.45). Все рассуждения проведем для уравнения состояния

$$P = P_0 - a^2 (V - V_0), \quad (4.69)$$

где $a = \text{const}$. С помощью (4.69) запишем (4.44) в виде

$$P_{i+0,5}^{n+1} - P_{i+0,5}^n + \frac{\tau a^2}{h} (U_{i+1}^* - U_i^*) = 0. \quad (4.70)$$

Из (4.48) и (4.69) получим уравнение для вспомогательного значения U_i^*

$$U_i^* = \frac{1}{2} (U_{i+0,5}^n + U_{i-0,5}^n) + \frac{h}{2\tau a^2} (P_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n). \quad (4.71)$$

Подставив вспомогательные значения U_i^* из (4.71) в (4.70) и P_i^* из (4.49) в (4.45), получим систему двух уравнений с неизвестными $U_{i+0,5}^{n+1}$ и $P_{i+0,5}^{n+1}$

$$U_{i+0,5}^{n+1} - U_{i+0,5}^n + \frac{\tau}{2h} (P_{i+1,5}^n - P_{i-0,5}^n) - \frac{1}{2} (U_{i+1,5}^n - 2U_{i+0,5}^n + U_{i-0,5}^n) = 0, \quad (4.72)$$

$$P_{i+0,5}^{n+1} - P_{i+0,5}^n + \frac{\tau a^2}{2h} (U_{i+1,5}^n - U_{i-0,5}^n) - \frac{1}{2} (P_{i+1,5}^n - 2P_{i+0,5}^n + P_{i-0,5}^n) = 0. \quad (4.73)$$

Выразим давление и скорость через инварианты $\alpha = P + aU$, $\beta = P - aU$

$$P = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad U = \frac{\alpha - \beta}{2a}.$$

Подставив эти выражения в (4.72) и (4.73), получим

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} + \beta_{i+0,5}^{n+1} = \frac{1}{2} (1 + K) (\alpha_{i-0,5}^n + \beta_{i+1,5}^n) + \frac{1}{2} (1 - K) (\alpha_{i+1,5}^n + \beta_{i-0,5}^n), \quad (4.74)$$

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} - \beta_{i+0,5}^{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha_{i-0,5}^n - \beta_{i+1,5}^n)(1+K) + \frac{1}{2}(\alpha_{i+1,5}^n - \beta_{i-0,5}^n)(1-K). \quad (4.75)$$

Сложим (4.74) и (4.75), а затем, вычтем (4.75) из (4.74). В результате получим два уравнения

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} = \frac{1-K}{2}\alpha_{i+1,5}^n + \frac{1+K}{2}\alpha_{i-0,5}^n, \quad \beta_{i+0,5}^{n+1} = \frac{1+K}{2}\beta_{i+1,5}^n + \frac{1-K}{2}\beta_{i-0,5}^n. \quad (4.76)$$

Из (4.76) следует, что при $0 \leq K \leq 1$ все коэффициенты перед значениями инвариантов в правых частях неотрицательны и т.о. разностная схема Лакса, согласно теореме С.К. Годунова, монотонна.

§ 4. Метод Годунова

В [4] все величины, характеризующие поведение среды под действием нагрузок, определяются в серединах сеточных интервалов по m . Координаты x_i определяются в узлах сетки. Разностные уравнения имеют вид (4.44)–(4.46). Вспомогательные значения P_i^* , U_i^* определяются следующим образом. Все табличные функции в момент t^n предполагаются кусочно-постоянными. Следовательно, в узлах сетки находятся произвольные разрывы. Пока $t = t^n$ произвольные разрывы не распадаются. Но как только станет $t > t^n$, произвольные разрывы распадаются на систему устойчивых разрывов: сильных, слабых и контактных. Значения давления и скорости на контактном разрыве принимаются в качестве вспомогательных величин. Если произвольный разрыв таков, что вправо от x_i распространяется ударная волна, а влево волна разрежения, то уравнения для величин на контактном разрыве имеют вид

$$P_i^* + a_{i-0,5}^n U_i^* = P_{i-0,5}^n + a_{i-0,5}^n U_{i-0,5}^n,$$

$$P_i^* - W_{i+0,5} U_i^* = P_{i+0,5}^n - W_{i+0,5} U_{i+0,5}^n.$$

В общем случае $W_{i+0,5}$ зависит от P_i^* и U_i^* , поскольку задача о распаде произвольного разрыва является нелинейной. Однако в случае слабой ударной волны при $W_{i+0,5} = a + O(h)$, $a_{i-0,5} = a - O(h)$ выражения P_i^* , U_i^* принимают вид

$$P_i^* = \frac{P_{i+0,5}^n + P_{i-0,5}^n}{2} - \frac{a}{2}(U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n), \quad (4.77)$$

$$U_i^* = \frac{U_{i+0,5}^n + U_{i-0,5}^n}{2} - \frac{1}{2a}(P_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n). \quad (4.78)$$

Рассмотрим, насколько эти уравнения согласуются с теоремой о среднем значении. Поскольку P_i^* , U_i^* находятся в момент t^* , удовлетворяющий условиям теоремы о среднем значении функции

$$t^n \leq t^* \leq t^n + \tau,$$

то из (4.77), (4.78) и (4.50), (4.51) следует, что высота вспомогательного контура $l\tau$ равна [16]

$$l\tau = \frac{h}{2a}.$$

Поскольку l должно удовлетворять неравенствам $0 \leq l \leq 1$, то условие выполнения теоремы о среднем принимает вид

$$K \geq 0,5.$$

В случае неравномерной сетки это условие может нарушаться, что приводит к увеличению погрешностей вычислений.

Условие устойчивости метода Годунова [4], полученное спектральным методом, имеет вид

$$K \leq 1.$$

Запишем разностные уравнения (4.44)–(4.46) вместе с (4.77), (4.78) в дифференциальной форме (3.13)–(3.15). Погрешности аппроксимации ω_1 , ω_2 , ω_3 имеют вид

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{h}{2a} \frac{\partial^2 P}{\partial m^2} + O^2, \\ \omega_2 &= -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{ah}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial m^2} + O^2, \\ \omega_3 &= -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - \frac{ah}{2} U \frac{\partial^2 U}{\partial m^2} + \frac{ah}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial m} \right)^2 + \frac{h}{2a} \left(\frac{\partial P}{\partial m} \right)^2 + \frac{h}{2a} P \frac{\partial^2 P}{\partial m^2} + O^2.\end{aligned}$$

Поскольку ω_1 , ω_2 , ω_3 являются независимыми, то согласно [12–17] правая часть уравнения производства энтропии имеет вид (4.55). Подставим ω_1 , ω_2 , ω_3 в (4.55). Затем с помощью разностных законов сохранения (3.13)–(3.15) и их следствий заменим производные по t производными по m . В результате получим уравнение производства энтропии в методе Годунова

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{h}{2a} (1-K) \left(\left(\frac{\partial P}{\partial m} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial U}{\partial m} \right)^2 \right) + O^2. \quad (4.79)$$

Из (4.79) следует, что при $K = \frac{\tau a}{h} < 1$ рассмотренная разностная схема, являющаяся акустическим приближением к схеме Годунова, сильно диссипативна. Поскольку главный член в правой части (4.79) неотри-

пателен, то энтропия растет и на ударных волнах и на волнах разрежения. Скорость роста энтропии ограничена и достигает максимума при $K = 0$

$$T \frac{\partial S}{\partial t} < \frac{h}{2W} \left(\left(\frac{\partial P}{\partial m} \right)^2 + W^2 \left(\frac{\partial U}{\partial m} \right)^2 \right).$$

Исследуем дистракцию ударной волны [1] в разностной схеме Годунова. Для этого перейдем к автомодельной переменной $\xi = m - Wt$ и запишем разностные уравнения в дифференциальной форме

$$WV' + U' - \frac{\tau W^2}{2} V'' - \frac{h}{2W} P'' + O^2 = 0, \quad (4.80)$$

$$WU' - P' - \frac{\tau W^2}{2} U'' + \frac{hW}{2} U'' + O^2 = 0, \quad (4.81)$$

$$W\varepsilon' - (PU)' - \frac{\tau W^2}{2} \varepsilon'' + \frac{hW}{2} (UU')' + \frac{h}{2W} (PP')' + O^2 = 0. \quad (4.82)$$

Проинтегрировав (4.80)–(4.82) по ξ и исключив $P, U, \varepsilon, P', U', \varepsilon'$ получим для идеального газа уравнение для $V(\xi)$

$$\frac{2h(1-K)}{(\gamma+1)} \frac{dV}{d\xi} + \frac{(V-V_0)(V-V_1)}{V} + O(\tau^2, h^2) = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\xi = \frac{2h(1-K)}{(\gamma+1)(V_0-V_1)} (V_1 \ln(V-V_1) V_0 \ln(V_0-V)).$$

Из этого уравнения следует, что

$$\xi = \xi_0 = +\infty \quad \text{при } V=V_0, \quad \xi = \xi_1 = -\infty \quad \text{при } V=V_1.$$

Таким образом, дистракция разрыва в методе Годунова при $K < 1$ бесконечна

$$D_\Gamma = \infty,$$

а при $K \rightarrow 1$ дистракция $D_\Gamma \rightarrow 0$.

Эффективное значение дистракции получается таким же образом, как в методе Лакса, и имеет вид

$$D_\Gamma^\vartheta = \frac{2}{(\gamma+1)} (1-K) \left(\frac{\sqrt{V_0} + \sqrt{V_1}}{\sqrt{V_0} - \sqrt{V_1}} \right).$$

Для определения немонотонности разностной схемы Годунова подставим выражения вспомогательных величин U_i^* и P_i^* (4.77), (4.78) в основные уравнения (4.44)–(4.46). В результате получим уравнения для определения $U_{i+0,5}^{n+1}$, $P_{i+0,5}^{n+1}$

$$U_{i+0,5}^{n+1} = U_{i+0,5}^n - \frac{\tau}{2h}(P_{i+1,5}^n - P_{i-0,5}^n) + \frac{\tau a}{2h}(U_{i+1,5}^n - 2U_{i+0,5}^n + U_{i-0,5}^n),$$

$$P_{i+0,5}^{n+1} = P_{i+0,5}^n - \frac{\tau a^2}{2h}(U_{i+1,5}^n - U_{i-0,5}^n) + \frac{\tau a}{2h}(P_{i+1,5}^n - 2P_{i+0,5}^n + P_{i-0,5}^n).$$

Перейдем в этих уравнениях от U и P к инвариантам α и β . В результате при $a = W$ получим

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} + \beta_{i+0,5}^{n+1} = \alpha_{i+0,5}^n + \beta_{i+0,5}^n + K(\beta_{i+1,5}^n - \alpha_{i+0,5}^n - \beta_{i+0,5}^n + \alpha_{i-0,5}^n), \quad (4.83)$$

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} - \beta_{i+0,5}^{n+1} = \alpha_{i+0,5}^n - \beta_{i+0,5}^n + K(-\beta_{i+1,5}^n - \alpha_{i+0,5}^n + \beta_{i+0,5}^n + \alpha_{i-0,5}^n). \quad (4.84)$$

Сложив (4.83) и (4.84), а затем, отняв (4.84) от (4.83), получим уравнения для α и β инвариантов

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} = \alpha_{i+0,5}^n(1 - K) + \alpha_{i-0,5}^n K,$$

$$\beta_{i+0,5}^{n+1} = \beta_{i+0,5}^n(1 - K) + \beta_{i-0,5}^n K.$$

При $0 \leq K \leq 1$ все множители при значениях α и β неотрицательны и, согласно теореме Годунова, разностная схема, являющаяся акустическим вариантом схемы Годунова, монотонна.

§ 5. Метод Куропатенко. Идея метода

Как и в методах Неймана-Рихтмайера, Лакса и Годунова ударная волна – поверхность сильного разрыва заменяется слоем конечной ширины (ударным слоем), содержащим несколько ячеек сетки. Параметры вещества, находящегося в одной сеточной ячейке, за несколько шагов по времени изменяются от состояния перед сильным разрывом до состояния за сильным разрывом. Эти состояния в случае идеальной среды связаны законами сохранения массы, количества движения и энергии в виде системы нелинейных алгебраических уравнений

$$P_1 - P_0 - W(U_1 - U_0) = 0, \quad (4.85)$$

$$U_1 - U_0 + W(V_1 - V_0) = 0, \quad (4.86)$$

$$\left(E_1 + \frac{1}{2}U_1^2 - E_0 - \frac{1}{2}U_0^2 \right) W - (P_1U_1 - P_0U_0) = 0. \quad (4.87)$$

Состояние вещества перед разрывом, отмеченное индексом «0», считается заданным, а состояние за разрывом с индексом «1» – текущим. К уравнениям (4.85)–(4.87) добавляется уравнение состояния

$$P_1 = P(V_1, E_1). \quad (4.88)$$

Система четырёх уравнений (4.85)–(4.88) содержит пять величин. Т.о. чтобы определить конкретное состояние за разрывом, нужно задать одну из текущих величин, т.е. выбрать её в качестве параметра.

Основная идея, лежащая в основе метода Куропатенко [5], заключается в следующем. Все сеточные функции в интервалах внутри ударного слоя, считаются кусочно-постоянными. В этом случае на границах сеточных интервалов находятся разрывы. В отличие от метода Годунова эти разрывы трактуются не как произвольные разрывы, а как сеточные ударные волны. Анализ величин в интервалах, примыкающих к сеточному разрыву, позволяет определить величины перед разрывом и одну величину за разрывом. После этого из уравнений (4.85)–(4.87) находятся все величины за разрывом и скорость разрыва $W = \frac{dm}{dt}$. Т.о. ударный слой в

любой момент времени t^n представляет собой пакет следующих друг за другом ударных волн меньшей амплитуды. При $t > t^n$ сеточные ударные волны перемещаются внутрь соседних интервалов сетки, и в момент $t^{n+1} = t^n + \tau$ каждый интервал оказывается разделённым сеточной ударной волной на два интервала. В одном интервале величины определяют состояние перед разрывом, в другом за разрывом. Средние в основном сеточном интервале величины в момент t^{n+1} получаются усреднением этой ступеньки. Одновременно с усреднением величин исчезает сеточная ударная волна, находившаяся внутри интервала, и возникает новая сеточная ударная волна на границе интервала. Сеточная ударная волна в ячейке сетки с индексом $i+0,5$ схематически изображены на рис. 4.1.

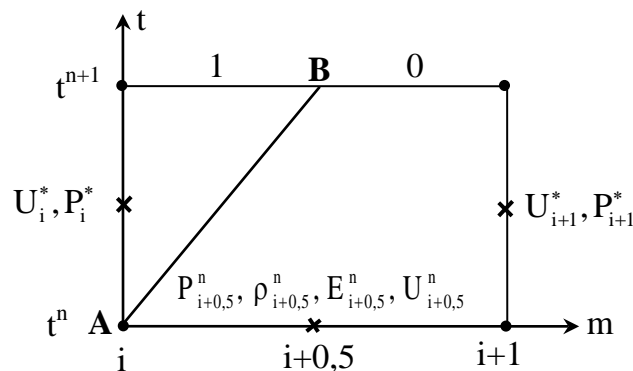


Рис. 4.1. Схематическое изображение «сеточной» ударной волны АВ и состояний перед ней 0 и за ней 1

Изложенный метод означает, что на каждом шаге по времени диссипация энергии определяется единственным физически обоснованным для ударной волны механизмом – законами сохранения на поверхности сильного разрыва.

Чтобы не усложнять понимания идеи метода, рассмотрим разностную схему в простейшей постановке. Одномерное течение идеальной среды с плоской симметрией в лагранжевых координатах и без теплопроводности описывается системой законов сохранения

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial PU}{\partial m} = 0. \quad (4.89)$$

Система разностных законов сохранения получается методами, изложенным в главе 2, и имеет вид

$$\frac{V_{i+0,5}^{n+1} - V_{i+0,5}^n}{\tau} - \frac{U_{i+1}^* - U_i^*}{h} = 0, \quad (4.90)$$

$$\frac{U_{i+0,5}^{n+1} - U_{i+0,5}^n}{\tau} + \frac{P_{i+1}^* - P_i^*}{h} = 0, \quad (4.91)$$

$$\frac{\mathcal{E}_{i+0,5}^{n+1} - \mathcal{E}_{i+0,5}^n}{\tau} + \frac{(PU)_{i+1}^* - (PU)_i^*}{h} = 0, \quad (4.92)$$

где $h=(x_{i+1}-x_i)/V_{i+0,5}=\text{const}$, $\mathcal{E}=E+0,5U^2$. Величины U^* , P^* являются вспомогательными. В соответствии с идеей метода рассмотрим процедуру их определения внутри ударного слоя. Соседние интервалы, лежащие внутри ударного слоя, изображены на рис. 4.2.

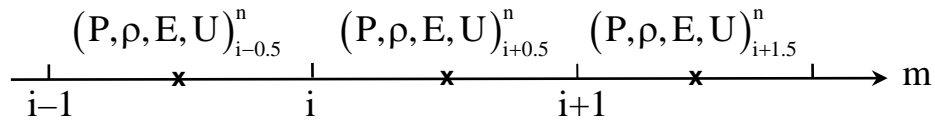


Рис. 4.2. Фрагмент сетки по m в момент t^n

Каждая величина в своём сеточном интервале постоянна. Т.о. в точке i находится разрыв $P_{i-0,5}^n \neq P_{i+0,5}^n$, $\rho_{i-0,5}^n \neq \rho_{i+0,5}^n$, $E_{i-0,5}^n \neq E_{i+0,5}^n$, $U_{i-0,5}^n \neq U_{i+0,5}^n$. Состояние с одной стороны разрыва – это состояние перед разрывом, а одна из величин в соседнем интервале – это величина за разрывом. Условие что разрыв является сеточной ударной волной, имеет вид

$$\frac{U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n}{m_{i+0,5} - m_{i-0,5}} < 0.$$

Сравнение давлений $P_{i+0,5}^n$ и $P_{i-0,5}^n$ позволяет определить знак W_i . Если $P_{i-0,5}^n > P_{i+0,5}^n$, то $W_i > 0$ и ударная волна будет при $t > t^n$ распространяться в интервале с номером $i+0,5$ (как показано на рис. 4.1). В качестве величин перед разрывом в этом случае берутся сеточные значения в момент t^n

$$U_0 = U_{i+0,5}^n, \quad P_0 = P_{i+0,5}^n, \quad \rho_0 = \rho_{i+0,5}^n, \quad E_0 = E_{i+0,5}^n, \quad V_0 = 1/\rho_0,$$

а в качестве величин за разрывом берутся либо скорость $U_{i-0,5}^n$, либо давление $P_{i-0,5}^n$.

Далее решается система уравнений (4.85)–(4.88), в результате чего определяются величины U_1 , P_1 , V_1 , E_1 и W и, соответственно, вспомогательные значения U_i^* и P_i^*

$$U_i^* = U_{i-0,5}^n, \quad P_i^* = P_{i+0,5}^n + W_i (U_{i-0,5}^n - U_{i+0,5}^n), \quad \text{если задано } U_1 \text{ и } W_i > 0, \quad (4.93)$$

$$P_i^* = P_{i-0,5}^n, \quad U_i^* = U_{i+0,5}^n + \frac{(P_{i-0,5}^n - P_{i+0,5}^n)}{W_i}, \quad \text{если задано } P_1 \text{ и } W_i > 0.$$

Аналогично определяются вспомогательные значения U_{i+1}^* , P_{i+1}^*

$$U_{i+1}^* = U_{i+0,5}^*, \quad P_{i+1}^* = P_{i+1,5}^* + W_{i+1} (U_{i+0,5}^* - U_{i+1,5}^*), \quad \text{если задано } U_1 \text{ и } W_{i+1} > 0, \quad (4.94)$$

$$P_{i+1}^* = P_{i+0,5}^*, \quad U_{i+1}^* = U_{i+1,5}^* + \frac{(P_{i+0,5}^* - P_{i+1,5}^*)}{W_{i+1}}, \quad \text{если задано } P_1 \text{ и } W_{i+1} > 0.$$

Если же интервалы $i-0,5$, $i+0,5$, $i+1,5$ лежат внутри ударного слоя, движущегося влево с $W < 0$, то (4.93) и (4.94) изменятся следующим образом

$$U_i^* = U_{i+0,5}^n, \quad P_i^* = P_{i-0,5}^n - W_i (U_{i-0,5}^n - U_{i+0,5}^n), \quad \text{если задано } U_1 \text{ и } W_i < 0,$$

$$P_i^* = P_{i+0,5}^n, \quad U_i^* = U_{i-0,5}^n + (P_{i-0,5}^n - P_{i+0,5}^n)/W_i, \quad \text{если задано } P_1 \text{ и } W_i < 0,$$

$$U_{i+1}^* = U_{i+1,5}^n, \quad P_{i+1}^* = P_{i+0,5}^n - W_{i+1} (U_{i+0,5}^n - U_{i+1,5}^n), \quad \text{если задано } U_1 \text{ и } W_i < 0,$$

$$P_{i+1}^* = P_{i+1,5}^n, \quad U_{i+1}^* = U_{i+0,5}^n + (P_{i+0,5}^n - P_{i+1,5}^n)/W_{i+1}, \quad \text{если задано } P_1 \text{ и } W_i < 0.$$

При взаимодействии двух ударных слоёв или при колебании сеточных функций возможны случаи, когда $W_i > 0$, $W_{i+1} < 0$, или $W_i < 0$, $W_{i+1} > 0$. В первом случае в интервал $i+0,5$ и справа и слева идут сеточные ударные волны, во втором случае ударных волн в интервале $i+0,5$ нет.

В случае $W_i > 0$, $W_{i+1} > 0$ продемонстрируем, что процедура усреднения величин в момент t^{n+1} приводит к уравнениям (4.90)–(4.93). Поскольку ячейка сетки состоит из двух частей, разделённых траекторией сеточного сильного разрыва – линией АВ (рис. 4.1), то в момент t^{n+1} , масса вещества, находящегося за разрывом, равна $W\tau$, масса вещества перед разрывом $h - W\tau$. Термодинамические величины, средние в массе h в момент t^{n+1} находятся с помощью мгновенных законов сохранения массы, количества движения и энергии. В рассматриваемом случае усреднение идёт по двум

массам с массовыми концентрациями $\frac{\tau W}{h}$ для величин за разрывом и $1 - \frac{\tau W}{h}$ – для величин перед разрывом.

Рассмотрим получение удельного объёма $V_{i+0,5}^{n+1}$. Формула усреднения имеет вид

$$V_{i+0,5}^{n+1} = \frac{\tau W}{h} V_n^{n+1} + \left(1 - \frac{\tau W}{h}\right) V_0^{n+1}. \quad (4.95)$$

Значение V_1^{n+1} это постоянное в интервале $W\tau$ значение удельного объёма за фронтом сеточной ударной волны. Величины V_0, U_0, U_1 , входящие в уравнение (4.86), совпадают с сеточными величинами $V_0 = V_{i+0,5}^n$, $U_1 = U_i^*$, $U_0 = U_{i+0,5}^n$

$$V_1^{n+1} = V_{i+0,5}^n - \frac{1}{W} (U_i^* - U_{i+0,5}^n).$$

Входящее в уравнение (4.95) значение V_0^{n+1} определяются из разностного уравнения

$$V_0^{n+1} = V_{i+0,5}^{n+1} + \frac{\tau}{h - W\tau} (U_{i+1}^* - U_{i+0,5}^n).$$

Подставив V_1^{n+1} и V_0^{n+1} в уравнение (4.95), получим разностное уравнение (4.90).

Рассмотрим теперь мгновенный закон сохранения количества движения

$$U_{i+0,5}^{n+1} = \frac{\tau W}{h} U_1^{n+1} + \left(1 - \frac{\tau W}{h}\right) U_0^{n+1}. \quad (4.96)$$

Значение U_1^{n+1} – это постоянное в интервале τW значение скорости за фронтом сеточной ударной волны. Оно связано со значением $U_0^n = U_{i+0,5}^n$ уравнением на разрыве (4.85) в виде

$$U_1^{n+1} = U_{i+0,5}^n + \frac{1}{W} (P_1 - P_{i+0,5}^n). \quad (4.97)$$

Поскольку вспомогательное давление P_i^* в силу (4.93) совпадает с давлением за фронтом сеточной ударной волны $P_1 = P_i^*$, то уравнение (4.97) принимает вид

$$U_1^{n+1} = U_{i+0,5}^n + \frac{1}{W} (P_i^* - P_{i+0,5}^n).$$

В интервале перед сеточным разрывом $P_{i+1}^* \neq P_{i+0,5}^n$. Поэтому за промежуток времени τ скорость вещества в интервале $h - W\tau$ изменится в соответствии с разностным уравнением

$$U_0^{n+1} = U_{i+0,5}^n - \frac{\tau}{h - W\tau} (P_{i+1}^* - P_{i+0,5}^n).$$

Подставив U_1^{n+1} и U_0^{n+1} в уравнение (4.96), получим разностное уравнение (4.91).

Наконец проделаем аналогичную процедуру с мгновенным законом сохранения энергии

$$\mathcal{E}_{i+0,5}^{n+1} = \frac{\tau W}{h} \mathcal{E}_1^{n+1} + \left(1 - \frac{\tau W}{h}\right) \mathcal{E}_0^{n+1}. \quad (4.98)$$

Значение удельной полной энергии \mathcal{E}_1^{n+1} является средним в интервале за фронтом сеточной ударной волны, значение \mathcal{E}_0^{n+1} – среднее в интервале перед фронтом сеточной ударной волны. Значение \mathcal{E}_1^{n+1} и \mathcal{E}_0^{n+1} выражаются через основные и вспомогательные значения сеточных функций с помощью уравнений (4.87) и (4.92) в виде

$$\mathcal{E}_1^{n+1} = \mathcal{E}_{i+0,5}^n + \frac{1}{W} (P_i^* U_i^* - P_{i+0,5}^n U_{i+0,5}^n), \quad (4.99)$$

$$\mathcal{E}_0^{n+1} = \mathcal{E}_{i+0,5}^n - \frac{\tau}{h - W\tau} (P_{i+1}^* U_{i+1}^* - P_{i+0,5}^n U_{i+0,5}^n). \quad (4.100)$$

Подставим (4.99) и (4.100) в (4.98). В результате получим разностное уравнение (4.92).

Подчеркнём, что для обоснования выбора вспомогательных значений U^* , P^* в уравнениях (4.90)–(4.92) было сделано несколько предположений:

- В ударном слое все функции кусочно-постоянны.
- Разрывы на границах сеточных интервалов в момент t^n являются сильными разрывами (сеточными ударными волнами).
- Функции перед сеточным разрывом постоянны. Они выбираются в момент t^n в рассматриваемом интервале.
- Функции U или P за сеточным разрывом постоянны. Одна из них выбирается в момент t^n в соседнем интервале, а вторая рассчитывается из уравнений (4.85)–(4.87).
- Решение в момент t^{n+1} получается путём применения мгновенных законов сохранения.

Метод допускает реализацию на разных сетках [5], [12], [15–22].

§ 6. Метод Куропатенко. Недивергентная разностная схема

В [5] сетки для скорости и для термодинамических величин различаются. Значения P , V , E определяются в серединах сеточных интервалов по массе, значения скорости – в узлах сетки t^n , m_i .

В случае волны разрежения при $U_{i+1} - U_i \geq 0$ разностные уравнения имеют вид

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \frac{P_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n}{h} = 0, \quad (4.101)$$

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \tau U_i^{n+1}, \quad (4.102)$$

$$V_{i+0,5}^{n+1} = \frac{x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1}}{h}, \quad (4.103)$$

$$E_{i+0,5}^{n+1} - E_{i+0,5}^n + \frac{1}{2} (P_{i+0,5}^{n+1} + P_{i+0,5}^n) (V_{i+0,5}^{n+1} - V_{i+0,5}^n) = 0. \quad (4.104)$$

Разностные уравнения (4.101)–(4.104) в дифференциальной форме имеют вид (3.14), (3.16), (3.17), (3.19). Т.о. независимыми погрешностями аппроксимации являются ω_2 , ω_4 , ω_5 и ω_7

$$\omega_2 = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - \frac{h^2}{24} \frac{\partial^3 U}{\partial m^3} + O^3, \quad (4.105)$$

$$\omega_4 = \frac{\tau}{2} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + O^3, \quad \omega_5 = -\frac{h^2}{24} \frac{\partial^3 x}{\partial m^3} + O^3, \quad (4.106)$$

$$\omega_7 = -\frac{\tau^2}{24} \frac{\partial^3 E}{\partial t^3} - \frac{\tau^2}{24} P \frac{\partial^3 V}{\partial t^3} - \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + O^3. \quad (4.107)$$

Зависимые погрешности аппроксимации ω_1 , ω_3 , ω_8 , ω_{10} выражаются через них

$$\omega_1 = \frac{\partial \omega_4}{\partial m} - \frac{\partial \omega_5}{\partial t}, \quad \omega_3 = \omega_7 - U \omega_2 - P \frac{\partial \omega_4}{\partial m} + P \frac{\partial \omega_5}{\partial t},$$

$$\omega_8 = \omega_7, \quad \omega_{10} = \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_E \omega_7.$$

Рассмотрим диссипативность этой разностной схемы на непрерывном решении, где должно быть $S = \text{const}$. Поскольку $\omega_8 = \omega_7$, то уравнение производства энтропии имеет вид (4.107)

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\tau^2}{24} \left(\frac{\partial^3 E}{\partial t^3} + P \frac{\partial^3 V}{\partial t^3} + 3 \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right) + O^3.$$

С помощью дифференцирования уравнения (3.19) найдем $\frac{\partial^3 E}{\partial t^3}$

$$\frac{\partial^3 E}{\partial t^3} = -\frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial P}{\partial t} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - P \frac{\partial^3 V}{\partial t^3} + O^3. \quad (4.108)$$

Подставив (4.108) в уравнение производства энтропии, получим

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\tau^2}{12} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial t} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) + O^2. \quad (4.109)$$

Запишем (3.22) в виде

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_s \frac{\partial V}{\partial t} + \omega_{10}. \quad (4.110)$$

Продифференцировав (4.110) по t , подставим вторую производную $\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$ вместе с (4.110) в (4.109). В результате уравнение производства энтропии на непрерывном решении принимает вид

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\tau^2}{12} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_s \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^3 + O^4.$$

Поскольку $\left(\frac{\partial S}{\partial t} \right) = \left| \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_\Phi \right|$, то разностная схема (4.101)–(4.104) термодинамически нормальна и слабо диссипативна на непрерывных решениях.

В [19] и более поздних работах [20–22] вместо уравнения (4.104) на волнах разрежения использовалось интегрирование вдоль изэнтропы в виде

$$E^{n+1} - E + \int_{V^n}^{V^{n+1}} P(V, E) dV = 0. \quad (4.111)$$

Уравнение (4.111) может быть решено разными способами. Самый простой из них заключается в следующем. Промежуток $V^{n+1} \leq V \leq V^n$ разбивается на N более мелких промежутков. Значения V на концах этих промежутков обозначим индексом v . Тогда

$$V^{v+1} = V^v + \frac{1}{N} (V^{n+1} - V^v).$$

Значению $v=0$ соответствует исходная точка, в которой величины $P^{v=0} = P^n$, $V^{v=0} = V^n$, $E^{v=0} = E^n$ известны. Значение E^{v+1} , соответствующее удельному объёму V^{v+1} , находится по формуле прямоугольников [23]

$$E = E^v - P^v (V^v, E^v) (V^{v+1} - V^v).$$

Затем по УРС находится значение давления $P(V^{v+1}, E)$. Для контроля точности значения E и P пересчитываются по формулам

$$E^{v+1} = E^v - \frac{1}{2} \left(P^v(V^v, E^v) + P(V^{v+1}, E) \right) (V^{v+1} - V^v),$$

$$P^{v+1} = P(V^{v+1}, E^{v+1}).$$

Разность $|E - E^{v+1}|$ есть погрешность. Если она мала, то можно переходить к расчёту P^{v+2}, E^{v+2} . Если же она велика, то следует уменьшить шаги по V , например в 2 раза по формуле

$$\Delta V = \frac{V^{n+1} - V^v}{2(N - v)}$$

и продолжить интегрирование, начиная с точки $V = V^v$ с новым шагом ΔV .

Второй способ интегрирования вдоль изэнтропы основан на использовании структуры УРС вещества [24]

$$P = P_x(V) + P_T(V, E_T), \quad E = E_x(V) + E_T.$$

Поскольку зависимость $P_x(V)$ и $E_x(V)$ заданы, то с их помощью находятся значения $P_x^{n+1}(V^{n+1})$ и $E_x^{n+1}(V^{n+1})$. В качестве зависимости между тепловым давлением P_T , тепловой энергией E_T и удельным объёмом V возьмём уравнение, являющееся определением P_T

$$P_T = - \left(\frac{\partial E_T}{\partial V} \right)_s.$$

Согласно [24] зависимость P_T от V и E_T чаще всего представляется в виде

$$P_T = \Gamma(V) E_T / V,$$

где

$$\Gamma(V) = - \frac{d \ln \theta}{d \ln V},$$

а функция $\theta(V)$ есть аналог характеристической температуры Дебая [24]. Из этих трёх уравнений после интегрирования вдоль изэнтропы получается уравнение

$$E_T^{n+1} = E_T^n \theta^n(V^n) / \theta^{n+1}(V^{n+1}),$$

позволяющее определить $E_T(V^{n+1})$ без дробления промежутков $V^{n+1} - V^n$ на более мелкие промежутки. Такой расчет внутренней энергии и давления обеспечивает любую необходимую точность определения энтропии, а уравнение производства энтропии принимает вид

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_m = 0.$$

Для волн сжатия выполняется условие $U_{i+1} - U_i < 0$. В этом случае в уравнениях (4.101), (4.104) вместо P используется динамическое давление \bar{P} , которое является решением уравнений на сильном разрыве. В качестве величин перед сильным разрывом берутся величины в сеточном интервале в момент t^n

$$V_0 = V_{i+0,5}^n, \quad P_0 = P_{i+0,5}^n, \quad E_0 = E_{i+0,5}^n,$$

а в качестве скачка скорости ΔU берется модуль разности сеточных значений U в момент t^{n+1}

$$\Delta U = |U_1 - U_0| = |U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}|.$$

Подставив эти значения в уравнения на сильном разрыве, получим

$$\bar{P}_{i+0,5}^{n+1} = P_{i+0,5}^n - W(U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}), \quad (4.112)$$

где $W > 0$, $U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1} < 0$. Для простейшего уравнения состояния конденсированного вещества

$$P = (\gamma - 1)\rho E + C_{0k}^2(\rho - \rho_{0k})$$

зависимость давления на ударной адиабате от скачка скорости $\Delta U = |U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}|$ имеет вид

$$\bar{P}_{i+0,5}^{n+1} = P_{i+0,5}^n + b\Delta U^2 + \sqrt{(b\Delta U^2)^2 + (a_{i+0,5}^n)^2 \Delta U^2},$$

где $b = \frac{\gamma + 1}{4}\rho_{i+0,5}^n$, $a_{i+0,5}^n = (\rho C)_{i+0,5}^n$, C – скорость звука. Это уравнение имеет две асимптотики:

1. Ударная волна слабая, $b\Delta U \ll a_{i+0,5}^n$. В этом случае выражение для динамического давления линейно зависит от ΔU

$$\bar{P}_{i+0,5}^{n+1} \approx P_{i+0,5}^n + a_{i+0,5}^n \Delta U.$$

2. Ударная волна сильная, $b\Delta U \gg a_{i+0,5}^n$. В этом случае получается квадратичная зависимость давления от ΔU

$$\bar{P}_{i+0,5}^{n+1} \approx P_{i+0,5}^n + \frac{\gamma + 1}{2}\rho_{i+0,5}^n \Delta U^2.$$

Линейная и квадратичная асимптотики ударной адиабаты присущи подавляющему большинству веществ. Для упрощения процедуры нахождения динамического давления может быть использована линейно-квадратичная псевдовязкость [8–19] в виде

$$q = -h \left(a - k\rho h \frac{\partial U}{\partial m} \right) \frac{\partial U}{\partial m}$$

при $\frac{\partial U}{\partial m} < 0$ и $q = 0$ при $\frac{\partial U}{\partial m} \geq 0$, где $a = \rho C$. В работе [9] автор использовал для расчёта ударных волн в зависимости от величины $|\Delta U|$ линейную

$$q = -k_0 \rho C h \left(\frac{\partial U}{\partial m} \right).$$

или квадратичную псевдовязкости

$$q = k_0 \rho h^2 \left(\frac{\partial U}{\partial m} \right)^2.$$

На волнах сжатия уравнения движения (4.101) и энергии (4.104) принимают вид

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \frac{\bar{P}_{i+0,5}^n - \bar{P}_{i-0,5}^n}{h} = 0, \quad (4.113)$$

$$E_{i+0,5}^{n+1} - E_{i+0,5}^n + \frac{1}{2} \left(\bar{P}_{i+0,5}^{n+1} + \bar{P}_{i+0,5}^n \right) \left(V_{i+0,5}^{n+1} - V_{i+0,5}^n \right) = 0. \quad (4.114)$$

В дифференциальной форме разностные уравнения траектории (4.102) и удельного объёма (4.103) имеют вид (3.16), (3.17). При этом ω_4 и ω_5 совпадают с (4.106). Левые части уравнения движения (4.113) и уравнения энергии (4.114) в дифференциальной форме запишем в виде (3.14), (3.19), но выражения для ω_2 , ω_7 будут отличаться от (4.105) и (4.107). Они имеют вид

$$\omega_2 = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + hW \frac{\partial^2 U}{\partial m^2} + \tau \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial m} + O^2, \quad (4.115)$$

$$\omega_7 = -\frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\partial P}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial t} + P \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) + hW \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial m} + O^2. \quad (4.116)$$

Уравнение производства энтропии в случае сеточной ударной волны имеет вид

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = hW \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial m} - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\partial P}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial t} + P \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) + O^2.$$

Подставим сюда вторую производную энергии по времени, полученную после дифференцирования (3.19)

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -P \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial P}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial \omega_7}{\partial t}.$$

Производную $\frac{\partial V}{\partial t}$ заменим на $\frac{\partial U}{\partial m}$ с помощью уравнения (3.13), а производную $\frac{\partial P}{\partial t}$ на производную $\frac{\partial U}{\partial m}$ с помощью уравнения (3.21). В результате уравнение производства энтропии на волне сжатия принимает вид

$$t \frac{\partial S}{\partial T} = ha(1-K) \left(\frac{\partial U}{\partial m} \right)^2 + O^2. \quad (4.117)$$

Это уравнение отличается от уравнения производства энтропии (4.79) в методе Годунова отсутствием слагаемого, пропорционального $\left(\frac{\partial P}{\partial m} \right)^2$. При $K \rightarrow 1$ главный член уравнения производства энтропии, так же, как и в методе Годунова, исчезает.

Рассмотрим далее дистракцию недивергентной разностной схемы. Как и ранее, перейдем к автомоделной переменной $\xi = m - Wt$. Уравнения движения (3.14), траектории (3.16), удельного объёма (3.17) и энергии (3.19) с погрешностями аппроксимации ω_2 (4.115), ω_4 и ω_5 (4.106) и ω_7 (4.116) примут вид

$$WU' - P' - \frac{\tau W^2}{2} U'' + hWU'' - \tau WP'' + O^2 = 0, \quad (4.118)$$

$$Wx' + U - \frac{\tau W}{2} U' + O^2 = 0, \quad (4.119)$$

$$x' - V + O^2 = 0, \quad (4.120)$$

$$E' + PV' - \frac{\tau W}{2} (E'' - P'V' + PV'') - hWV'U' + O^2 = 0. \quad (4.121)$$

Дифференцируя (4.118)–(4.121), исключая x', E'', U', P' и интегрируя полученные уравнения по ξ , получим дифференциальное уравнение для $V(\xi)$, совпадающее с аналогичным уравнением в разностной схеме Годунова. Следовательно, первое дифференциальное приближение (ДП-1) недивергентной РС Куропатенко имеет ту же дистракцию, что и ДП-1 разностной схемы Годунова.

Рассмотрим немонотонность недивергентной разностной схемы. На волне сжатия для уравнения состояния (4.69) запишем следствие из уравнений (4.101)–(4.104) в виде

$$P_{i+0,5}^{n+1} - P_{i+0,5}^n + \frac{\tau a^2}{h} (U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}) = 0. \quad (4.122)$$

Уравнение движения (4.113) после подстановки в него (4.112) взятого на предыдущем шаге по времени, примет вид

$$U_i^{n+1} - U_i^n + \frac{\tau}{h}(P_{i+0,5}^{n-1} - P_{i-0,5}^{n-1}) - K(U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n) = 0, \quad (4.123)$$

где $K = \frac{\tau W}{h}$. С помощью (4.122), записанного в виде

$$P_{i+0,5}^n - P_{i+0,5}^{n-1} + \frac{\tau a^2}{h}(U_{i+1}^n - U_i^n) = 0,$$

исключим $P_{i+0,5}^{n-1}$ и $P_{i-0,5}^{n-1}$ в (4.123). В результате получим

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\tau}{h}(P_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n) - K(K+1)(U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n). \quad (4.124)$$

С помощью этого уравнения запишем (4.122) в виде

$$P_{i+0,5}^{n+1} = P_{i+0,5}^n - Ka(U_{i+1}^n - U_i^n) + K^2(P_{i+1,5}^n - 2P_{i+0,5}^n + P_{i-0,5}^n) + K^2(K+1)a(U_{i+2}^n - 3U_{i+1}^n + 3U_i^n - U_{i-1}^n). \quad (4.125)$$

Подставим выражения P и U через инварианты $P = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$,

$U = \frac{1}{2a}(\alpha - \beta)$ в (4.124) и (4.125) и рассмотрим случай $\beta^n = \text{const}$

$$\begin{aligned} \alpha_i^{n+1} - \beta_i^{n+1} &= \alpha_i^n - \beta_i^n - K(\alpha_{i+0,5}^n - \alpha_{i-0,5}^n) - K(K+1)(\alpha_{i+1}^n - 2\alpha_i^n + \alpha_{i-1}^n), \\ \alpha_{i+0,5}^{n+1} + \beta_{i+0,5}^{n+1} &= \alpha_{i+0,5}^n + \beta_{i+0,5}^n - K(\alpha_{i+1}^n - \alpha_i^n) + K^2(\alpha_{i+1,5}^n - 2\alpha_{i+0,5}^n + \alpha_{i-0,5}^n) + \\ &+ K^2(K+1)(\alpha_{i+2}^n - 3\alpha_{i+1}^n + 3\alpha_i^n - \alpha_{i-1}^n). \end{aligned} \quad (4.126)$$

После уменьшения всех пространственных индексов на 0,5 уравнение для суммы $\alpha_{i+0,5}^{n+1} + \beta_{i+0,5}^{n+1}$ принимает вид

$$\begin{aligned} \alpha_i^{n+1} + \beta_i^{n+1} &= \alpha_i^n + \beta_i^n - K(\alpha_{i+0,5}^n - \alpha_{i-0,5}^n) + K^2(\alpha_{i+1}^n - 2\alpha_i^n + \alpha_{i-1}^n) + \\ &+ K^2(K+1)(\alpha_{i+1,5}^n - 3\alpha_{i+0,5}^n + 3\alpha_{i-0,5}^n - \alpha_{i-1,5}^n). \end{aligned} \quad (4.127)$$

Вычтем первое уравнение (4.126) из (4.127)

$$2\beta_i^{n+1} = 2\beta_i^n + \omega_i,$$

где

$$\omega_i = K^2(\alpha_{i+1}^n - 2\alpha_i^n + \alpha_{i-1}^n) - K^2(1-K)(\alpha_{i+1,5}^n - 3\alpha_{i+0,5}^n + 3\alpha_{i-0,5}^n - \alpha_{i-1,5}^n).$$

Разложим все значения α^n в выражении для ω_i в ряды Тейлора в точке (i, n) . В результате получим

$$2\beta_i^{n+1} = 2\beta_i^n + K^2 h^2 \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial m^2} \right) + O^3.$$

Следовательно, в бегущей волне с $\beta^n = \text{const}$ и $\frac{\partial \alpha}{\partial m} < 0$ станет $\beta_i^{n+1} > \beta_i^n$, т. е. постоянство значения $\beta(m)$ нарушается.

§ 7. Метод Куропатенко. Дивергентная разностная схема

В [19] все термодинамические величины и скорости определены в серединах сеточных интервалов, узлы сетки имеют координаты t^n , m_i . Разностные уравнения имеют вид (4.44)–(4.46). Вспомогательные величины P_i^* , U_i^* определяются с помощью двух различных алгоритмов в зависимости от того, какое решение на вспомогательном промежутке $m_{i-0,5} \leq m \leq m_{i+0,5}$: разрежение или сжатие.

Если внутри вспомогательной ячейки $U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n \geq 0$, то решение в указанном сеточном интервале является непрерывным и P_i^* , U_i^* определяются разностными уравнениями в виде

$$U_i^* = U_i^n - \frac{\tau}{2h}(P_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n), \quad P_i^* = P_i^n - \frac{\tau a^2}{2h}(U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n). \quad (4.128)$$

Вспомогательные величины P_i^* , U_i^* используются только в уравнениях (4.44), (4.45) для нахождения $V_{i+0,5}^{n+1}$, $U_{i+0,5}^{n+1}$. Вместо уравнения энергии (4.46) на волне разрежения используется следствие из законов сохранения в виде (4.111). Применение этого уравнения обеспечивает любую наперед заданную точность определения энтропии и устраняет ложную диссипацию энергии.

Рассмотрим дивергентную РС на волне сжатия. Вспомогательные величины вычисляются из уравнений на поверхности сильного разрыва (4.85)–(4.87) и уравнения состояния (4.88). Величины по обе стороны разрыва задаются следующим образом.

Если $U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n < 0$, то

1. $U_1 = U_{i-0,5}^n$, $(P, V, E, U)_0 = (P, V, E, U)_{i+0,5}^n$ при $P_{i-0,5}^n > P_{i+0,5}^n$,
2. $U_1 = U_{i+0,5}^n$, $(P, V, E, U)_0 = (P, V, E, U)_{i-0,5}^n$ при $P_{i-0,5}^n < P_{i+0,5}^n$.

Остальные величины с индексом «1» находятся из (4.85)–(4.88). Если ограничиться рассмотрением только случая $W > 0$, то P_i^* , U_i^* определяются уравнениями

$$U_i^* = U_{i-0,5}^n, \quad P_i^* = P_{i+0,5}^n - W(U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n). \quad (4.129)$$

Для исследования диссипации энергии на сеточной ударной волне запишем разностные законы сохранения (4.44)–(4.46) вместе со вспомо-

гательными величинами (4.129) в дифференциальной форме (3.13)–(3.15) с погрешностями аппроксимации

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial m^2} O^2, \\ \omega_2 &= -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + hW \frac{\partial^2 U}{\partial m^2} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial m^2} + O^2, \\ \omega_3 &= -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial m} \left(U \frac{\partial P}{\partial m} \right) + \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial m} \left(P \frac{\partial U}{\partial m} \right) + hW \frac{\partial}{\partial m} \left(U \frac{\partial U}{\partial m} \right) + O^2.\end{aligned}$$

Согласно [12, 14] уравнение производства энтропии этой разностной схемы таково

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = \omega_3 + P\omega_1 - U\omega_2.$$

Подставив сюда выражения для $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, получим уравнение производства энтропии на сеточной ударной волне

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = hW \left(\frac{\partial U}{\partial m} \right)^2 - \frac{\tau a^2}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial m} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial m} \right)^2 + O^2.$$

Для дальнейшего упрощения этого уравнения воспользуемся уравнениями (4.129) для вспомогательных величин. Представим все входящие в них величины в виде рядов Тейлора в точке $t^n, m_{i+0,25}$. В результате получим связь производных $\frac{\partial P}{\partial m}$ и $\frac{\partial U}{\partial m}$, которая при $W \approx a$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial P}{\partial m} \right)^2 = a^2 \left(\frac{\partial U}{\partial m} \right)^2 + O^2.$$

Подставив эту связь в уравнение производства энтропии на сеточной ударной волне, получим уравнение

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = ha(1-K) \left(\frac{\partial U}{\partial m} \right)^2 + O^2.$$

совпадающее с уравнением производства энтропии в недивергентной разностной схеме (4.117) с точностью до членов второго порядка малости.

Рассмотрим монотонность этой РС на волне сжатия. Основные уравнения вместе со вспомогательными значениями (4.129) примут вид

$$P_{i+0,5}^{n+1} = P_{i+0,5}^n - \frac{\tau a^2}{h} \left(U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n \right),$$

$$U_{i+0,5}^{n+1} = U_{i+0,5}^n - \frac{\tau}{h} \left(P_{i+1,5}^n - P_{i+0,5}^n - a \left(U_{i+1,5}^n - 2U_{i+0,5}^n + U_{i-0,5}^n \right) \right).$$

Заменим P и U их выражениями через инварианты α и β

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} + \beta_{i+0,5}^{n+1} = \alpha_{i+0,5}^n (1 - K) + \beta_{i+0,5}^n (1 + K) + K \left(\alpha_{i-0,5}^n + \beta_{i-0,5}^n \right),$$

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} - \beta_{i+0,5}^{n+1} = \alpha_{i+0,5}^n (1 - K) - \beta_{i+0,5}^n (1 - 3K) - 2K\beta_{i+1,5}^n + K \left(\alpha_{i-0,5}^n - \beta_{i-0,5}^n \right).$$

Сложив эти два уравнения, получим

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} = \alpha_{i+0,5}^n (1 - K) + K\alpha_{i-0,5}^n - K\beta_{i+0,5}^n + 2K\beta_{i+0,5}^n - K\beta_{i-0,5}^n. \quad (4.130)$$

В случае $\beta^n = \text{const}$ уравнение (4.130) принимает вид

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} = \alpha_{i+0,5}^n (1 - K) + \alpha_{i-0,5}^n K.$$

Оба коэффициента положительны при $0 \leq K \leq 1$ и, таким образом, дивергентная разностная схема Куропатенко на волне сжатия монотонна.

В заключение, аналогично [1] и [20] исследуем дистракцию ударной волны. Перейдём к автомодельной переменной $\xi = m - Wt$. Тогда уравнения (3.27), (3.29) и (3.30) вместе со вспомогательными значениями U_i^* , P_i^* , определяемыми уравнениями (4.111), и погрешностями аппроксимации ω_1 , ω_2 и ω_3 примут вид

$$WV' + U' - \frac{\tau W^2}{2} V'' - \frac{h}{2} U'' + O^2 = 0, \quad (4.131)$$

$$WU' - P' - \frac{\tau W^2}{2} U'' - \frac{h}{2} P'' + hWU'' + O^2 = 0, \quad (4.132)$$

$$W\varepsilon' - (PU)' - \frac{\tau W}{2} PU'' - \frac{h}{2} (UP)'' + \frac{h}{2} (PU)'' - hW(UU)'' + O^2 = 0. \quad (4.133)$$

Проинтегрировав эти уравнения по ξ , получим

$$WV + U - \frac{\tau W^2}{2} V' - \frac{h}{2} U' = WV_0 + U_0 + O^2, \quad (4.134)$$

$$WU - P - \frac{\tau W^2}{2} U' - \frac{h}{2} P' + hWU' = W_0 V_0 - P_0 + O^2, \quad (4.135)$$

$$W\varepsilon - PU - \frac{\tau W}{2} (PU)' - \frac{h}{2} UP' + \frac{h}{2} PU' - hWUU' = W\varepsilon_0 - P_0 U_0 + O^2. \quad (4.136)$$

С помощью (4.131)–(4.133) заменим в (4.134)–(4.136) U' и P' на V' . Затем с помощью (4.134)–(4.136) заменим U и P на V . В результате для идеального газа получим уравнение, описывающее профиль $V(\xi)$. Это уравнение совпадает с аналогичным уравнением в разностной схеме

Годунова. Следовательно, дистракция и эффективная дистракция этой разностной схемы совпадают с D_{Γ} и D_{Γ}^{\ominus} .

§ 8. Сравнительные характеристики методов расчёта ударных волн

Четыре метода диссипации энергии в ударном слое, который в численных методах заменяет бесконечно тонкую поверхность сильного разрыва, авторами были реализованы в виде пяти разностных схем. В предыдущих параграфах описаны разностные уравнения и исследованы такие свойства, как аппроксимация, устойчивость, диссипативность на непрерывных решениях, дистракция и монотонность для пяти разностных схем. Их сравнительные характеристики приведены в табл. 4.2. В выражениях эффективной дистракции ударной волны используется величина

$$D = \frac{2(1-K)}{\gamma+1} \left(\frac{\sqrt{V_0} + \sqrt{V_1}}{\sqrt{V_0} - \sqrt{V_1}} \right).$$

Таблица 4.2

Сравнительные характеристики методов

№ п/п	Характеристика РС	Разностные схемы				
		Неймана-Рихт-майера	Лакса	Годунова	Куропатенко	
					не-дивергентная	дивергентная
1	Дистракция	$2k_0\pi\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$	∞	∞	∞	∞
2	Эффективное значение дистракции	$2k_0\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$	$\frac{1+K}{K}D$	D	D	D
3	Монотонность на ударной волне	нет	есть всегда	есть всегда	условная	есть всегда
4	Наличие эмпирических констант	есть, k_0	нет	нет	нет	нет
5	Условие устойчивости	$K \leq \frac{\sqrt{\gamma}}{2k_0}$	$K \leq 1$	$K \leq 1$	$K \leq 1$	$K \leq 1$
6	Поведение энтропии на непрерывных решениях	по критерию слабой УВ	сильно растёт	сильно растёт	постоянна	постоянна

Из сопоставления приведенных характеристик разностных схем в табл. 4.2 следует, что наиболее предпочтительной для математического моделирования неустановившихся процессов в сплошных средах (газах, жидкостях и твердых телах) является дивергентная разностная схема, реализующая метод Куропатенко. В ней нет эмпирических постоянных, эффективная дистракция не хуже, чем в методе Годунова, она монотонна, в ней сохраняется постоянной энтропия вдоль траекторий на непрерывных решениях и условие устойчивости не жестче, чем в методе Лакса и Годунова.

Глава 5. НЕКОТОРЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДОВ РАСЧЁТА УДАРНЫХ ВОЛН

§ 1. Разностная схема Лакса-Вендрофа

Лакс и Вендроф [1, 2] предложили вспомогательные величины P_i^* , U_i^* в уравнениях (4.43)–(4.45) определять с помощью уравнений

$$P_i^* = P_i^n - (a_i^n)^2 \left(\frac{\tau}{2h} + A_i \right) (U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n),$$

$$U_i^* = U_i^n - \left(\frac{\tau}{2h} + A_i \right) (P_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n),$$

$$(PU)_i^* = (PU)_i^n - \left(\frac{\tau}{2h} + A_i \right) \left(P_i^n (P_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n) + (a_i^n)^2 U_i^n (U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n) \right),$$

где

$$P_i^n = 0,5(P_{i+0,5}^n + P_{i-0,5}^n), \quad U_i^n = 0,5(U_{i+0,5}^n + U_{i-0,5}^n),$$

$$a_i^n = 0,5(a_{i+0,5}^n + a_{i-0,5}^n), \quad a^2 = - \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_s,$$

$$(PU)_i^n = 0,5((PU)_{i+0,5}^n + (PU)_{i-0,5}^n), \quad A_i = 0,25B \left| a_{i+0,5}^n - a_{i-0,5}^n \right| / (a_i^n)^2.$$

Использование этих уравнений для расчета ударных волн равносильно введению в дифференциальные уравнения (1.65)–(1.67) трех искусственных (математических) вязкостей

$$q_p = -\frac{B}{4} h^2 \left| \frac{\partial a}{\partial m} \right| \frac{\partial U}{\partial m}, \quad q_u = -\frac{B}{4} \frac{h^2}{a^2} \left| \frac{\partial a}{\partial m} \right| \frac{\partial P}{\partial m},$$

$$q_{pu} = -\frac{B}{4} \frac{h^2}{a^2} \left| \frac{\partial a}{\partial m} \right| \left(P \frac{\partial P}{\partial m} + a^2 U \frac{\partial U}{\partial m} \right).$$

Поскольку эти псевдовязкости не являются аппроксимационными, то РС Лакса-Вендрофа следует отнести к разностным схемам, являющимся реализацией метода Неймана-Рихтмайера. РС Лакса-Вендрофа содержит безразмерную эмпирическую константу $B \approx 1 \div 2$, которая влияет на границу области устойчивости. Условие устойчивости имеет вид

$$K(K + \frac{1}{2}B) \leq 1,$$

где $K = \tau a / h$, $a = \rho C$. Изложенная выше разностная схема Лакса-Вендрофа даёт немонотонные решения за фронтом ударной волны.

§ 2. Разностная схема «предиктор-корректор»

Разностные уравнения для основных сеточных величин, которые все определяются в серединах сеточных интервалов, берутся в стандартном виде (4.43)–(4.45). Для определения вспомогательных величин P_i^* , U_i^* создается вспомогательный контур с основанием $m_{i-0,5} \leq m \leq m_{i+0,5}$ и высотой $l\tau$. После интегрирования по вспомогательному контуру получаются разностные уравнения для определения P_i^* , U_i^*

$$U_i^* = 0,5(U_{i+0,5}^n + U_{i-0,5}^n) - \frac{l\tau}{h}(P_{i+0,5}^* - P_{i-0,5}^*), \quad (5.1)$$

$$P_i^* = 0,5(P_{i+0,5}^n + P_{i-0,5}^n) - \frac{l\tau(a_i^*)^2}{h}(U_{i+0,5}^* - U_{i-0,5}^*). \quad (5.2)$$

Производные по массовой переменной аппроксимированы в (5.1) и (5.2) разностями также вспомогательных величин, определенных в серединах интервалов сетки. Для их определения запишем уравнения типа (5.1), (5.2)

$$U_{i+0,5}^* = U_{i+0,5}^n - \frac{l\tau}{h}(P_{i+1}^* - P_i^*), \quad (5.3)$$

$$P_{i+0,5}^* = P_{i+0,5}^n - \frac{l\tau(a_{i+0,5}^*)^2}{h}(U_{i+1}^* - U_i^*). \quad (5.4)$$

Подставив (5.3), (5.4) в (5.1), (5.2), получим уравнения для определения вспомогательных величин U_i^* и P_i^*

$$\begin{aligned} -\Phi_{i-0,5}U_{i-1}^* + (1 + \Phi_{i+0,5} + \Phi_{i-0,5})U_i^* - \Phi_{i+0,5}U_{i+1}^* &= \\ &= 0,5(U_{i+0,5}^n + U_{i-0,5}^n) - \frac{l\tau}{h}(P_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\Phi_i P_{i-1}^* + (1 + 2\Phi_i)P_i^* - \Phi_i P_{i+1}^* &= \\ &= 0,5(P_{i+0,5}^n + P_{i-0,5}^n) - \frac{l\tau(a_i^n)^2}{h}(U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n), \end{aligned}$$

где $\Phi_{i+0,5} = \left(\frac{l\tau a_{i+0,5}^n}{h}\right)^2$, $\Phi_{i-0,5} = \left(\frac{l\tau a_{i-0,5}^n}{h}\right)^2$, $\Phi_i = \left(\frac{l\tau a_i^n}{h}\right)^2$.

Для каждой вспомогательной величины получается неявное уравнение. Как правило, эти уравнения решаются прогонкой. Прогонки для U^* и для P^* независимы.

Поскольку речь идет об аппроксимации дифференциальных уравнений без привлечения какого-либо механизма диссипации энергии, т.е. используется аппроксимационная вязкость, то эта разностная схема относится к разностным схемам, реализующим идею, лежащую в основе метода Лакса.

Использовать разностную схему «Предиктор-корректор», по-видимому, первым предложил С.К. Годунов [3].

§ 3. Разностная схема Мак-Кормака

Предложенная в [4] разностная схема для уравнения переноса состоит из двух этапов. Величины, определяемые на каждом из этапов, приведены на рис. 5.1. На первом этапе производная $\frac{\partial U}{\partial x}$ аппроксимируется правосторонней разностью величин в момент t^n , в результате чего разностное уравнение принимает вид

$$\frac{\bar{U}_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + a \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{h} = 0. \quad (5.5)$$

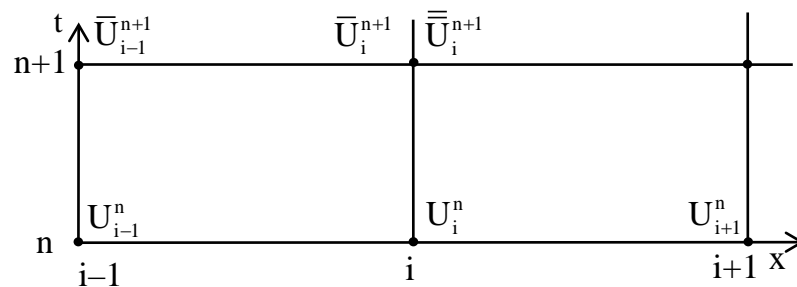


Рис. 5.1 Схематическое изображение шаблона в РС Мак-Кормака

На втором этапе производная по пространству аппроксимируется разностью величин, полученных на первом этапе, взятой с противоположной стороны от точки i

$$\frac{\bar{\bar{U}}_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + a \frac{\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_{i-1}^{n+1}}{h} = 0. \quad (5.6)$$

Окончательный результат получается по формуле

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{U}_i^{n+1} + \bar{\bar{U}}_i^{n+1}). \quad (5.7)$$

Рассмотрим изложенный алгоритм подробнее. Подставив (5.5) в (5.6), получим

$$\frac{\bar{\bar{U}}_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \frac{a}{h} \left(U_i^n - K(U_{i+1}^n - U_i^n) - U_{i-1}^n + K(U_i^n - U_{i-1}^n) \right) = 0, \quad (5.8)$$

где $K = \frac{\tau a}{h}$. Запишем уравнения (5.5) и (5.8) в виде

$$\bar{U}_i^{n+1} = U_i^n - K(U_{i+1}^n - U_i^n),$$

$$\bar{\bar{U}}_i^{n+1} = U_i^n - K(U_i^n - U_{i-1}^n) + K^2(U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n).$$

Подставив \bar{U}_i^{n+1} и $\bar{\bar{U}}_i^{n+1}$ в (5.7), получим выражение для искомого значения U_i^{n+1}

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{K}{2}(U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) + \frac{K^2}{2}(U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n).$$

Запишем это выражение U_i^{n+1} в виде разностного уравнения

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + a \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} - \frac{\tau a^2}{2h^2} (U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n) = 0$$

и приведем это уравнение к каноническому виду

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + a \frac{U_{i+0,5}^* - U_{i-0,5}^*}{h} = 0.$$

Это возможно, если вспомогательные значения $U_{i+0,5}^*$ связаны со значениями сеточной функции в момент t^n уравнениями

$$U_{i+0,5}^* = \frac{U_i^n + U_{i+1}^n}{2} - \frac{\tau a}{2h} (U_{i+1}^n - U_i^n).$$

Это обычное хорошо изученное уравнение для вспомогательного значения U^* . Поэтому РС Мак-Кормака есть запись в другой форме известной РС, предназначенной для расчёта непрерывных течений без ударных волн.

§ 4. TVD-разностные схемы и принудительная монотонизация осциллирующих решений

Полной вариацией называют [5] величину

$$TV(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| dx + \sum_k |[f]_k|$$

где $[f]_k$ – разрывы функции f , x_k – точки разрыва. Полная вариация ограничена если

$$TV(f(x)) \leq C < \infty.$$

Для численного решения полную вариацию определяют так

$$TV(f^n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\Delta_{i+0.5} f^n|$$

где $\Delta_{i+0.5} f = f_{i+1} - f_i$. Разностную схему, решение которой удовлетворяет условию невозрастания полной вариации

$$TV(f^{n+1}) \leq TV(f^n), \quad (5.9)$$

называют TVD схемой.

Ряд авторов [5–7] считают, что применение разностных схем, удовлетворяющих условию TVD (5.9), повышает точность численного решения. Однако есть задачи, в которых рост полной вариации с течением времени определяется физическими причинами. Например, при сжатии сферически симметричной ударной волны к центру симметрии в идеальном холодном газе полная вариация давления равна примерно удвоенному значению на фронте ударной волны P_+ , поскольку наружную границу газового шара всегда можно отодвинуть настолько далеко, что давление на ней будет много меньше P_+ . При уменьшении координаты ударной волны значение P_+ увеличивается и в любые два момента времени $t_2 > t_1$ будет $P_+(t_2) > P_+(t_1)$. Следовательно $TV_2 > TV_1$. Разностные схемы, ограничивающие рост полной вариации, в этой задаче будут давать неверное решение.

Преимущества разностных схем TVD, как правило, демонстрируют на частных решениях задач со стационарными ударными волнами или волнами разрежения, разделяющими состояния вещества с постоянными параметрами, т. е. на таких течениях, в которых TV возрастает со временем только при появлении колебаний. Требование невозрастания полной вариации (5.9) и появилось как средство подавления немонотонности численного решения вызванного свойствами разностной схемы. Связь осцилляций численного решения с величиной TV продемонстрируем на конкретном примере. Пусть в момент t^n имеется монотонная табличная функция $f^n(x)$, изображенная на рис. 5.2. В результате расчётов в момент t^{n+1} получена немонотонная функция $f^{n+1}(x)$ (рис. 5.3). Пусть $f_1^{n+1} = f_1^n$, $f_6^{n+1} = f_6^n$. Для изображенных на рис. 5.2 и рис. 5.3 функций $f(x)$ значения TV^{n+1} и TV^n связаны уравнением

$$TV^{n+1} = TV^n + 2(f_2 + f_4 - f_3 - f_1).$$

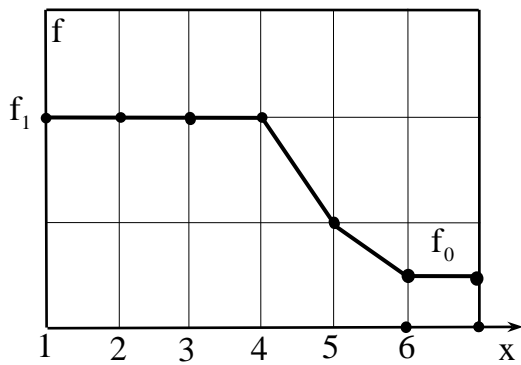


Рис. 5.2. Монотонная зависимость $f^n(x)$ в момент t^n

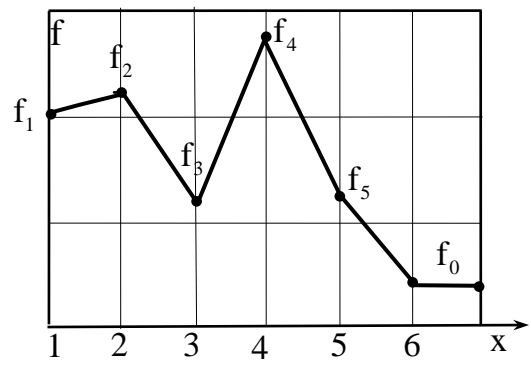


Рис. 5.3. Немонотонная зависимость $f^{n+1}(x)$ в момент $t^{n+1} = t^n + \Delta t$

Поскольку $f_2 > f_1$, $f_4 > f_3$, то $TV^{n+1} > TV^n$. Для предотвращения роста TV в разностное уравнение добавляют разностные аналоги второй, третьей и т.д. производных, умноженных на некоторые функции, которые выбираются из условий монотонности решения. Согласно теореме Годунова [8] монотонность после перехода на момент t^{n+1} сохранится, если все коэффициенты разностной схемы неотрицательны. Но введение функций – монотонизаторов решения искажает разностное уравнение, вследствие чего возникает необходимость повторного исследования аппроксимации и устойчивости.

Существует иной способ подавления нефизических осцилляций разностного решения. Для разделения физических и нефизических осцилляций будем применять простой критерий. Если период колебаний табличной функции совпадает с шагом сетки, то такое колебание будем считать нефизическим, возникшим из-за свойств разностной схемы. Период колебаний, определяемых существом задачи, не изменяется при уменьшении шага сетки. Чтобы моделировать такие колебания необходимо уже в начальных данных выбрать сетку так, чтобы на одну волну приходилось несколько, а ещё лучше несколько десятков точек сетки.

Осцилляции, определённые в соответствии с выше сформулированным критерием, могут быть сглажены различными способами. Рассмотрим несколько самых простых.

В первом способе критерий реализуется так. Определяются три разности сеточных значений функции

$$\Delta_{i-0,5} = f_i - f_{i-1}, \quad \Delta_{i+0,5} = f_{i+1} - f_i, \quad \Delta_{i+1,5} = f_{i+2} - f_{i+1}.$$

Если выполнены условия

$$\Delta_{i+0,5} \cdot \Delta_{i-0,5} < 0 \text{ и } \Delta_{i+0,5} \cdot \Delta_{i+1,5} < 0, \quad (5.10)$$

то можно считать, что в интервале с номером $i+0.5$ находится осцилляция, которая подлежит сглаживанию. Оператор сглаживания, как

правило, не связан с разностной схемой. Процедура сглаживания выглядит следующим образом. Вначале рассчитываются по обычным разностным уравнениям табличные значения функции f_i^{n+1} для $i = 0, 1, 2, \dots, N$. Затем для $i = 1, 2, \dots, N-2$ проверяется условие осцилляции (5.10). На рис. 5.4 изображены возможные ситуации, когда в интервале $i+0,5$ выполнены условия (5.10)

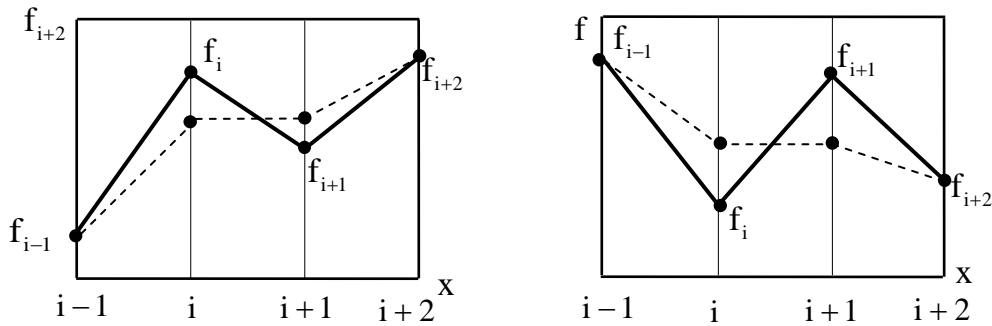


Рис. 5.4. Схематическое изображение осцилляции в промежутке $i + 0,5$ (сплошные линии) и вид функции после сглаживания (пунктирные линии)

Для ликвидации осцилляций, изображённых на рис. 5.4, необходимо, чтобы условия (5.10) прекратили выполняться. Это возможно, например, если новые значения \bar{f}_i и \bar{f}_{i+1} сделать одинаковыми, чтобы было $\bar{\Delta}_{i+0,5} = 0$. Вторым условием является выполнение закона сохранения, например в виде

$$f_i h_i + f_{i+1} h_{i+1} = \bar{f}_i h_i + \bar{f}_{i+1} h_{i+1}. \quad (5.11)$$

При $h = \text{const}$ и условии $\bar{f}_i = \bar{f}_{i+1}$ из (5.11) следует

$$\bar{f}_i = \bar{f}_{i+1} = \frac{1}{2}(f_i + f_{i+1}).$$

Исправленные функции изображены на рис. 5.4 пунктиром.

Вторым возможным способом реализации критерия немонотонности является неравенство

$$\Delta_{i-0,5} \cdot \Delta_{i+0,5} < 0, \quad (5.12)$$

Возможные ситуации, когда выполняется критерий (5.12), изображены на рис. 5.5.

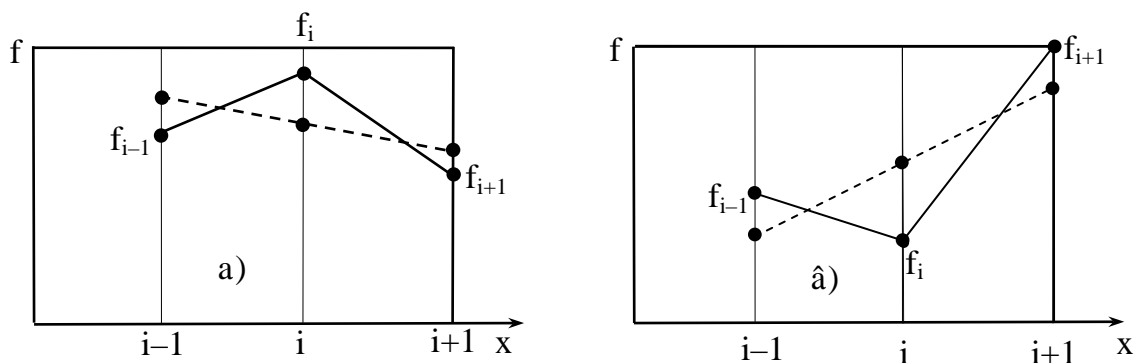


Рис. 5.5. Схематическое изображение осцилляции в точке i (сплошные линии) и вид функции после сглаживания вторым способом (пунктирные линии)

При ликвидации этих осцилляций потребуем, чтобы выполнялся закон сохранения

$$\sum_{k=i-1}^{i+1} f_k h_k = A = \text{const}.$$

Тогда при $h = \text{const}$ сумма новых значений \bar{f} и сумма старых значений f должны быть равны

$$\bar{f}_{i-1} + \bar{f}_i + \bar{f}_{i+1} = f_{i-1} + f_i + f_{i+1}. \quad (5.13)$$

Или

$$\Delta f_{i-1} + \Delta f_i + \Delta f_{i+1} = 0,$$

где $\Delta f = \bar{f} - f$. Если было $f_i > f_{i-1}$ и $f_i > f_{i+1}$, то, например, потребуем, чтобы стало

$$\bar{f}_i = \frac{1}{2}\bar{f}_{i+1} + \frac{1}{2}\bar{f}_{i-1}.$$

Этого недостаточно. Сохраним наклон

$$\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} = \frac{\bar{f}_{i+1} - \bar{f}_{i-1}}{2h}. \quad (5.14)$$

Подставим \bar{f}_i в (5.13)

$$\bar{f}_{i+1} + \bar{f}_{i-1} = \frac{2}{3}(f_{i+1} + f_i + f_{i-1}). \quad (5.15)$$

Система двух уравнений (5.14) и (5.15) дает решение

$$\bar{f}_{i+1} = \frac{5}{6}f_{i+1} + \frac{1}{3}f_i - \frac{1}{6}f_{i-1}, \quad \bar{f}_{i-1} = -\frac{1}{6}f_{i+1} + \frac{1}{3}f_i + \frac{5}{6}f_{i-1},$$

$$\bar{f}_i = \frac{1}{2}(\bar{f}_{i+1} + \bar{f}_{i-1}) = \frac{1}{3}(f_{i+1} + f_i + f_{i-1}).$$

В случае применения критерия (5.12) возможен ещё один способ сглаживания немонотонности. Из трёх значений f_{i-1} , f_i , f_{i+1} изменяются два соседних так, чтобы их разность стала равна нулю и критерий (5.12) перестал бы выполняться. При этом третье значение может изменяться, а может и не изменяться. В ситуации, изображённой на рис. 5.5 а) понижаем f_i и повышаем f_{i-1} и f_{i+1} , но так как $f_i - f_{i-1} < f_i - f_{i+1}$, то понижаем f_i до тех пор, пока f_i не сравняется с f_{i-1} (пунктирная линия на рис. 5.6). Из условия $f_{i-1} = f_i$ и закона сохранения (5.13) получается уравнение

$$2\bar{f}_i + \bar{f}_{i+1} = f_{i-1} + f_i + f_{i+1}. \quad (5.16)$$

Второе уравнение получим, сделав предположение, что абсолютное изменение f_{i+1} совпадает с абсолютным изменением f_{i-1} , то есть

$$\bar{f}_{i+1} - f_{i+1} = \bar{f}_{i-1} - f_{i-1}. \quad (5.17)$$

Решение системы уравнений (5.16) и (5.17) при условии $\bar{f}_{i-1} = \bar{f}_i$ имеет вид

$$\bar{f}_{i-1} = \bar{f}_i = \frac{1}{3}(2f_{i-1} + f_i), \quad \bar{f}_{i+1} = f_{i+1} + \frac{1}{3}(f_i - f_{i-1}).$$

Возможны и другие способы ликвидации или уменьшения осцилляций.

Операторы сглаживания обоснованы и применены в 1973 г. С.К. Годуновым [9], а к концу прошлого века они стали применяться в работах зарубежных и российских авторов.

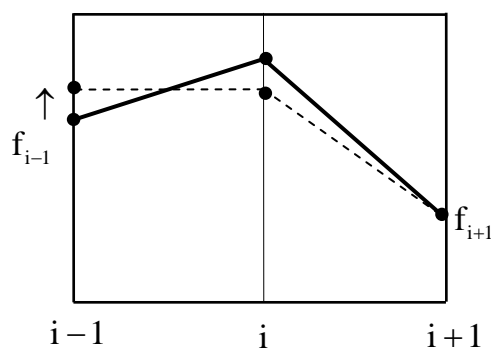


Рис. 5.6. Схематическое изображение осцилляции в точке f — до сглаживания, — — — после сглаживания

§ 5. Разностные схемы в Эйлеровых координатах

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в эйлеровых координатах

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U}{\partial x} = 0, \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \frac{\partial \rho U^2}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial \rho(E + 0,5U^2)}{\partial t} + \frac{\partial \rho U(E + 0,5U^2)}{\partial x} + \frac{\partial P U}{\partial x} = 0. \quad (5.20)$$

Сеточный шаблон строится на фрагменте сетки в эйлеровых координатах, изображённой на рис. 5.7. Все основные величины определяются в серединах сеточных интервалов. Разностные уравнения получаются следующим образом.

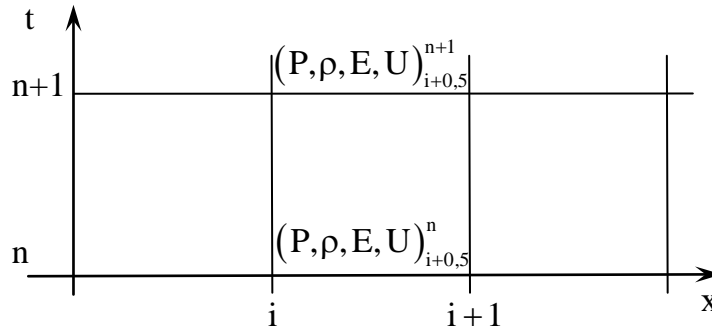


Рис. 5.7. Фрагмент эйлеровой сетки

Умножим уравнение (5.18) на $dt dx$ и проинтегрируем его по сеточной ячейке $t^n \leq t \leq t^{n+1}$, $x_i \leq x \leq x_{i+1}$

$$\iint_{t,x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U}{\partial x} \right) dt dx = 0.$$

Проведём однократное интегрирование и запишем полученное уравнение в виде

$$\int_x (\rho(t^{n+1}, x) - \rho(t^n, x)) dx + \int_t (\rho(t, x_{i+1}) U(t, x_{i+1}) - \rho(t, x_i) U(t, x_i)) dt = 0. \quad (5.21)$$

Применив теорему о среднем значении в каждом из интегралов в уравнении (5.21), получим уравнение

$$(\rho_{i+0,5}^{n+1} - \rho_{i+0,5}^n) h + ((\rho U)_{i+1}^* - (\rho U)_i^*) \tau = 0.$$

Аналогично поступим с уравнениями (5.19) и (5.20). Разделив каждое из полученных уравнений на τ и $h = x_{i+1} - x_i$, получим разностные уравнения в эйлеровых координатах

$$\frac{\rho_{i+0,5}^{n+1} - \rho_{i+0,5}^n}{\tau} + \frac{(\rho U)_{i+1}^* - (\rho U)_i^*}{h} = 0, \quad (5.22)$$

$$\frac{\rho_{i+0,5}^{n+1} U_{i+0,5}^{n+1} - \rho_{i+0,5}^n U_{i+0,5}^n}{\tau} + \frac{P_{i+1}^* + \rho_{i+1}^* (U_{i+1}^*)^2 - P_i^* - \rho_i^* (U_i^*)^2}{h} = 0, \quad (5.23)$$

$$\frac{\rho_{i+0,5}^{n+1} \mathcal{E}_{i+0,5}^{n+1} - \rho_{i+0,5}^n \mathcal{E}_{i+0,5}^n}{\tau} + \frac{P_{i+1}^* U_{i+1}^* - P_i^* U_i^* + \rho_{i+1}^* U_{i+1}^* \mathcal{E}_{i+1}^* - \rho_i^* U_i^* \mathcal{E}_i^*}{h} = 0. \quad (5.24)$$

Уравнения (5.22)–(5.24) содержат вспомогательные величины со звездочками: $(\rho U) \tau$ – поток массы через боковую грань ячейки за время τ , $(\rho U^2) \tau$ – поток количества движения через боковую грань ячейки за время τ , $(\rho \mathcal{E}) U \tau$ – поток энергии через боковую грань ячейки за время τ , $P \tau$ – импульс давления на боковой грани ячейки, $P^* U \tau$ – работа давления на боковой грани ячейки.

Если в лагранжевых координатах была потребность определять только P^* и U^* , то в эйлеровых координатах нужно находить ещё и экстенсивные величины ρ_i^* , \mathcal{E}_i^* .

Использование экстенсивных величин ρ_i^* , \mathcal{E}_i^* , которые разрывны на контактных границах, создает проблемы со счетом контактных границ в разностных схемах в эйлеровых координатах. Да и уравнения для вспомогательных величин оказываются более сложными, чем в методах расчёта в лагранжевых координатах. И хотя при решении ряда задач эти трудности преодолевались [9–11], применение двухэтапных методов, в которых на первом этапе используется разностная схема счёта в лагранжевых координатах, снимает ряд проблем и делает процедуру расчётов более простой.

Рассмотрим структуру любого из двухэтапных методов. На первом этапе сетка трактуется как лагранжева. Для определения вспомогательных значений U^* , P^* и основных величин в момент t^{n+1} применяется любой из известных методов расчета в лагранжевых координатах. При этом эйлеровы координаты границ ячеек x_i^n изменяются и принимают значения x_i^{n+1} . На втором этапе создается новая сетка и производится переинтерполяция с сетки x_i^{n+1} на новую сетку. Переинтерполяция должна проводиться в соответствии с мгновенными (при $t = \text{const}$) законами сохранения массы, импульса и энергии. Новая сетка может совпадать с исходной эйлеровой сеткой x_i^n , но может и отличаться от неё (подвижная эйлерова сетка).

Для демонстрации двухэтапного метода используем дивергентную разностную схему Куропатенко (глава 4, § 7). Сеточный шаблон изображён на рис. 5.8. Все сеточные величины (P , ρ , E , \mathcal{E} , U) определяются в серединах сеточных интервалов по лагранжевой координате m . Граница между сеточными интервалами при $m = m_i$ имеет

эйлерову координату x_i^n . В момент $t^{n+1} = t^n + \tau$ лагранжева координата m_i сохраняется, а эйлерова координата i -й точки изменяется и принимает значение x_i^{n+1} .

В начале лагранжевого (первого) этапа вспомогательные значения $U_i^* P_i^*$ находятся следующим образом. Если $U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n \geq 0$, то

$$U_i^* = 0,5(U_{i+0,5}^n + U_{i-0,5}^n) - \frac{\tau}{2h}(P_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n),$$

$$P_i^* = 0,5(P_{i+0,5}^n + P_{i-0,5}^n) - \frac{\tau}{2h}(a_i^n)^2 (U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n),$$

где $h = m_{i+0,5} - m_{i-0,5}$. Если же $U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n < 0$, то

$$U_+ = U_{i-0,5}^n, (P, \rho, E, U)_- = (P, \rho, E, U)_{i+0,5}^n, \text{ если } P_{i-0,5}^n > P_{i+0,5}^n,$$

$$U_+ = U_{i+0,5}^n, (P, \rho, E, U)_- = (P, \rho, E, U)_{i-0,5}^n, \text{ если } P_{i-0,5}^n < P_{i+0,5}^n.$$

Затем из условий на сильном разрыве находится P_+ . Далее полагается

$$U_i^* = U_+, P_i^* = P_+.$$

После определения вспомогательных величин $U_i^*, P_i^*, U_{i+1}^*, P_{i+1}^*$ находятся основные величины $(P, \rho, E, U)_{i+0,5}^{n+1}$ по уравнениям

$$V_{i+0,5}^{n+1} = V_{i+0,5}^n + \frac{\tau}{h}(U_{i+1}^* - U_i^*), \quad \varepsilon_{i+0,5}^{n+1} = \varepsilon_{i+0,5}^n - \frac{\tau}{h}(P_{i+1}^* U_{i+1}^* - P_i^* U_i^*),$$

$$\varepsilon_{i+0,5}^{n+1} = \varepsilon_{i+0,5}^n - \frac{\tau}{h}(P_{i+1}^* U_{i+1}^* - P_i^* U_i^*), \quad E_{i+0,5}^{n+1} = E_{i+0,5}^n - \frac{1}{2}(U_{i+0,5}^{n+1})^2$$

и $P^{n+1}(V^{n+1}, E^{n+1})$ по уравнению состояния. Координаты концов интервала с номером $i + 0,5$ определяются с помощью уравнений

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \tau U_i^*, \quad x_{i+1}^{n+1} = x_{i+1}^n + \tau U_{i+1}^*.$$

Определенные с помощью лагранжевого метода в момент t^{n+1} величины приведены на рис. 5.8.

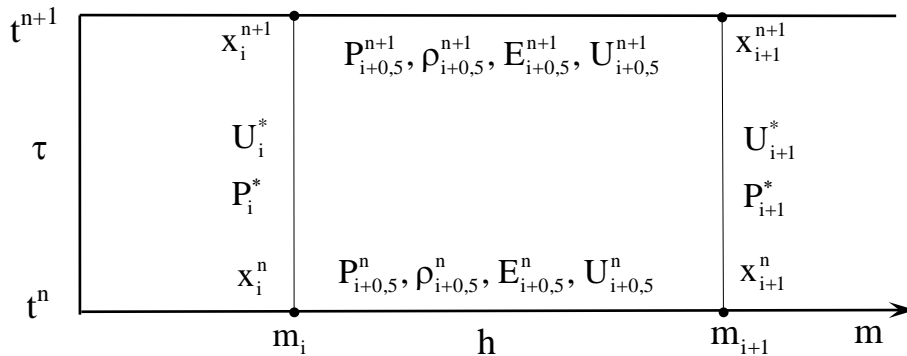


Рис. 5.8. Элемент сеточного шаблона первого этапа метода в лагранжевых координатах

На этом первый этап заканчивается.

В эйлеровых координатах концы интервала с номером $i + 0,5$ могут сместиться в положительном либо отрицательном направлении. В случае нетривиального течения ($U_i^* \neq 0, U_{i+1}^* \neq 0$) возможны четыре разных ситуации, которые определяются знаками вспомогательных скоростей.

Ситуация 1. $U_i^* > 0, U_{i+1}^* > 0$. Оба конца сеточного интервала $i + 0,5$ смещаются вправо, вследствие чего в интервале эйлеровой сетки образуется два вспомогательных интервала

$$\Delta x_L = x_i^{n+1} - x_i^n, \quad \Delta x_0 = x_{i+1}^n - x_i^{n+1}.$$

Ситуация 1 схематически изображена на рис. 5.9. Будем считать решение кусочно-постоянным в лагранжевых координатах. Тогда массы, импульсы и энергии этих интервалов равны

$$\begin{aligned} \Delta M_L &= \rho_{i-0,5}^{n+1} \Delta x_L, & \Delta K_L &= U_{i-0,5}^{n+1} \Delta M_L, & \Delta Q_L &= \mathcal{E}_{i-0,5}^{n+1} \Delta M_L, \\ \Delta M_0 &= \rho_{i+0,5}^{n+1} \Delta x_0, & \Delta K_0 &= U_{i+0,5}^{n+1} \Delta M_0, & \Delta Q_0 &= \mathcal{E}_{i+0,5}^{n+1} \Delta M_0. \end{aligned}$$

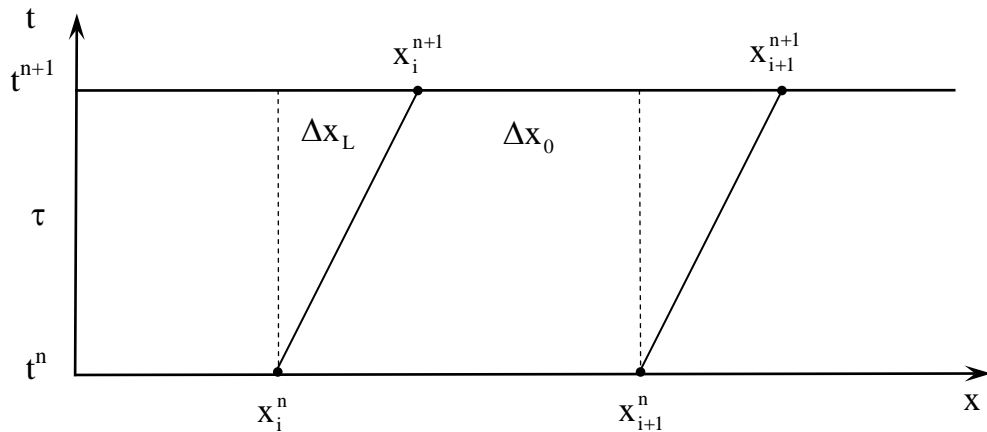


Рис. 5.9. Траектории точек x_i^n, x_{i+1}^n в пространстве t, x в ситуации 1 (сплошные линии) и эйлерова сетка (пунктир)

В рассматриваемой эйлеровой ячейке $x_i^n \leq x \leq x_{i+1}^n$ осталась масса ΔM_0 и в нее вошла масса ΔM_L . Значения плотности, скорости и удельной полной энергии эйлеровой ячейки в момент t^{n+1} находятся из законов сохранения массы, количества движения и энергии

$$\rho_{i+0,5}^e = (\Delta M_L + \Delta M_0) / (x_{i+1}^n - x_i^n), \quad (5.25)$$

$$U_{i+0,5}^e = (\Delta K_L + \Delta K_0) / (\Delta M_L + \Delta M_0), \quad (5.26)$$

$$\mathcal{E}_{i+0,5}^e = (\Delta Q_L + \Delta Q_0) / (\Delta M_L + \Delta M_0). \quad (5.27)$$

Уравнения (5.25)–(5.27) могут применяться в том случае, если в интервалах Δx_L и Δx_0 находится одно и то же вещество. Если же вещества разные, то для сохранения контактной границы эйлеров интервал должен

быть разделен на столько интервалов, сколько разных веществ в нем находится в момент t^{n+1} .

Рассмотрим изменение кинетической энергии при переходе от величин, определенных на лагранжевой сетке, к величинам, определенным на эйлеровой сетке. Сумма кинетических энергий интервалов ΔM_L и ΔM_0 на лагранжевой сетке равна

$$\bar{Q}_{i+0,5} = 0,5 \left((U_{i-0,5}^{n+1})^2 \Delta M_L + (U_{i+0,5}^{n+1})^2 \Delta M_0 \right). \quad (5.28)$$

Кинетическая энергия объединенного интервала $\Delta M_L + \Delta M_0$ на эйлеровой сетке определяется его скоростью $U_{i+0,5}^e$ по формуле

$$Q_{i+0,5}^e = 0,5 (U_{i+0,5}^e)^2 (\Delta M_L + \Delta M_0). \quad (5.29)$$

Избыточная кинетическая энергия

$$\Delta Q_{i+0,5} = \bar{Q}_{i+0,5} - Q_{i+0,5}^e \quad (5.30)$$

переходит во внутреннюю энергию. Эта избыточная кинетическая энергия всегда положительна. Покажем это. Подставим (5.28) и (5.29) в (5.30). В результате получим

$$\Delta Q_{i+0,5} = 0,5 \left((U_{i-0,5}^{n+1})^2 \Delta M_L + (U_{i+0,5}^{n+1})^2 \Delta M_0 - (U_{i+0,5}^e)^2 (\Delta M_L + \Delta M_0) \right).$$

Обозначим массовые концентрации интервалов ΔM_L и ΔM_0 в объединенном интервале через ξ_0 и ξ_L , где

$$\xi_0 = \Delta M_0 / (\Delta M_0 + \Delta M_L), \quad \xi_L = \Delta M_L / (\Delta M_0 + \Delta M_L).$$

Массовые концентрации ξ_0 и ξ_L удовлетворяют условию

$$\xi_0 + \xi_L = 1. \quad (5.31)$$

Преобразуем выражение $\Delta Q_{i+0,5}$ следующим образом. Вынесем за скобки $\Delta M_L + \Delta M_0$ и вместо $U_{i+0,5}^e$ подставим его выражение через скорости интервалов ΔM_L и ΔM_0

$$U_{i+0,5}^e = U_{i-0,5}^{n+1} \xi_L + U_{i+0,5}^{n+1} \xi_0. \quad (5.32)$$

С помощью (5.32) запишем $\Delta Q_{i+0,5}$ в виде

$$\Delta Q_{i+0,5} = 0,5 (\Delta M_L + \Delta M_0) \left((U_{i-0,5}^{n+1})^2 \xi_L + (U_{i+0,5}^{n+1})^2 \xi_0 - U_{i+0,5}^e (U_{i-0,5}^{n+1} \xi_L + U_{i+0,5}^{n+1} \xi_0) \right).$$

Выражение в скобке преобразуем, добавив равную нулю величину

$$A = - U_{i+0,5}^e (U_{i-0,5}^{n+1} \xi_L + U_{i+0,5}^{n+1} \xi_0) + (U_{i+0,5}^e)^2 (\xi_L + \xi_0).$$

Эта величина равна нулю в силу (5.31) и (5.32). Окончательно величина избыточной кинетической энергии примет вид

$$\Delta Q_{i+0,5} = 0,5(\Delta M_L + \Delta M_0) \left(\xi_L (U_{i-0,5}^{n+1} - U_{i+0,5}^e)^2 + \xi_0 (U_{i+0,5}^{n+1} - U_{i+0,5}^e)^2 \right).$$

Внутренняя энергия объединенного интервала $\Delta M_L + \Delta M_0$ состоит из суммы внутренних энергий интервалов ΔM_L и ΔM_0 и избыточной кинетической энергии

$$E_{i+0,5}^e (\Delta M_L + \Delta M_0) = E_{i-0,5}^{n+1} \Delta M_L + E_{i+0,5}^{n+1} \Delta M_0 + \Delta Q_{i+0,5}. \quad (5.33)$$

После подстановки $\Delta Q_{i+0,5}$ в (5.33) и деления на $\Delta M_L + \Delta M_0$ выражение для внутренней энергии интервала эйлеровой сетки примет вид

$$E_{i+0,5}^e = \xi_L \left(E_{i-0,5}^{n+1} + 0,5 (U_{i-0,5}^{n+1} - U_{i+0,5}^e)^2 \right) + \xi_0 \left(E_{i+0,5}^{n+1} + 0,5 (U_{i+0,5}^{n+1} - U_{i+0,5}^e)^2 \right).$$

Давление находится по $\rho_{i+0,5}^e$, $E_{i+0,5}^e$ и уравнению состояния.

Ситуация 2. $U_i^* < 0$, $U_{i+1}^* < 0$. Оба конца сеточного интервала с номером $i + 0,5$ смещаются влево, вследствие чего образуется два вспомогательных интервала

$$\Delta x_0 = x_{i+1}^{n+1} - x_i^n, \quad \Delta x_R = x_{i+1}^n - x_{i+1}^{n+1}.$$

Ситуация 2 схематически изображена на рис. 5.10. Массы, импульсы и энергии этих интервалов равны

$$\begin{aligned} \Delta M_0 &= \rho_{i+0,5}^{n+1} \Delta x_0, & \Delta K_0 &= U_{i+0,5}^{n+1} \Delta M_0, & \Delta \mathcal{E}_0 &= \mathcal{E}_{i+0,5}^{n+1} \Delta M_0, \\ \Delta M_R &= \rho_{i+1,5}^{n+1} \Delta x_R, & \Delta K_R &= U_{i+1,5}^{n+1} \Delta M_R, & \Delta \mathcal{E}_R &= \mathcal{E}_{i+1,5}^{n+1} \Delta M_R. \end{aligned}$$

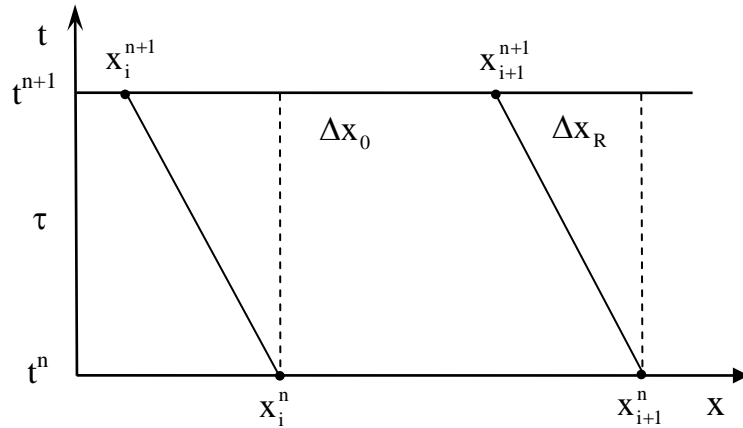


Рис. 5.10. Траектории точек x_i^n , x_{i+1}^n в пространстве t, x в ситуации 2 (сплошные линии) и эйлерова сетка (пунктир)

Значения плотности, скорости и удельной внутренней энергии определяются по формулам

$$\begin{aligned} \rho_{i+0,5}^e &= (\Delta M_0 + \Delta M_R) / (x_{i+1}^n - x_i^n), \\ \xi_0 &= \Delta M_0 / (\Delta M_0 + \Delta M_R), \quad \xi_R = \Delta M_R / (\Delta M_0 + \Delta M_R), \end{aligned}$$

$$U_{i+0,5}^e = \xi_0 U_{i+0,5}^{n+1} + \xi_R U_{i+1,5}^{n+1},$$

$$E_{i+0,5}^e = \xi_0 \left(E_{i+0,5}^{n+1} + 0,5 (U_{i+0,5}^{n+1} - U_{i+0,5}^e)^2 \right) + \xi_R \left(E_{i+1,5}^{n+1} + 0,5 (U_{i+0,5}^{n+1} - U_{i+0,5}^e)^2 \right).$$

Давление находится по $\rho_{i+0,5}^e$, $E_{i+0,5}^e$ и уравнению состояния.

Ситуация 3. $U_i^* < 0, U_{i+1}^* > 0$. Все величины в эйлеровом интервале с номером $i + 0,5$ совпадают с величинами в лагранжевом интервале

$$P_{i+0,5}^e = P_{i+0,5}^{n+1}, \quad \rho_{i+0,5}^e = \rho_{i+0,5}^{n+1}, \quad U_{i+0,5}^e = U_{i+0,5}^{n+1}, \quad E_{i+0,5}^e = E_{i+0,5}^{n+1}.$$

Ситуация 3 схематически изображена на рис. 5.11.

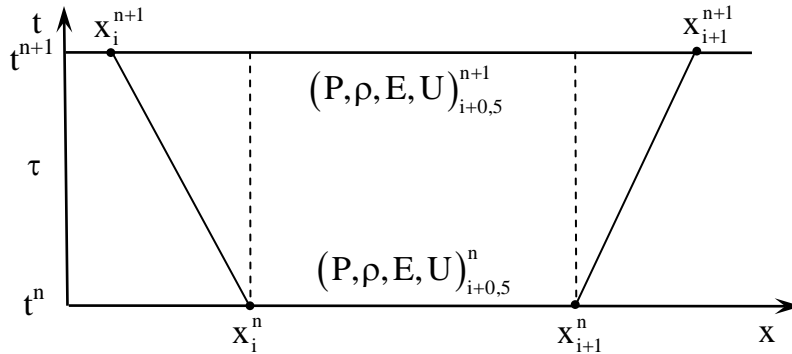


Рис. 5.11 Траектории точек x_i^n, x_{i+1}^n в пространстве t, x в ситуации 3 (сплошные линии) и эйлерова сетка (пунктир)

Ситуация 4. $U_i^* > 0, U_{i+1}^* < 0$. В эйлеровой ячейке $x_i^n \leq x \leq x_{i+1}^n$ находится три вспомогательных интервала

$$\begin{aligned} \Delta x_L &= x_i^{n+1} - x_i^n, & \Delta x_0 &= x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1}, & \Delta x_R &= x_{i+1}^n - x_{i+1}^{n+1}, \\ \Delta M_L &= \rho_{i-0,5}^{n+1} \Delta x_L, & \Delta M_0 &= \rho_{i+0,5}^{n+1} \Delta x_0, & \Delta M_R &= \rho_{i+1,5}^{n+1} \Delta x_R, \\ \Delta K_L &= U_{i-0,5}^{n+1} \Delta M_L, & \Delta K_0 &= U_{i+0,5}^{n+1} \Delta M_0, & \Delta K_R &= U_{i+1,5}^{n+1} \Delta M_R, \\ \Delta Q_L &= \varepsilon_{i-0,5}^{n+1} \Delta M_L, & \Delta Q_0 &= \varepsilon_{i+0,5}^{n+1} \Delta M_0, & \Delta Q_R &= \varepsilon_{i+1,5}^{n+1} \Delta M_R. \end{aligned}$$

Ситуация 4 схематически изображена на рис. 5.12.

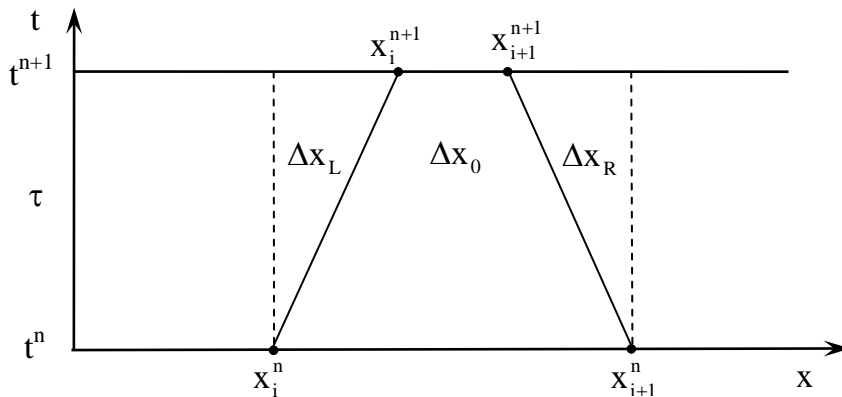


Рис. 5.12. Траектории точек x_i^n, x_{i+1}^n в пространстве t, x в ситуации 4 (сплошные линии) и эйлерова сетка (пунктир)

Значения плотности, скорости и удельной внутренней энергии определяются по формулам

$$\begin{aligned}\rho_{i+0,5}^e &= (\Delta M_L + \Delta M_0 + \Delta M_R) / (x_{i+1}^n - x_i^n), \\ \xi_L &= \Delta M_L / (\Delta M_L + \Delta M_0 + \Delta M_R), \quad \xi_0 = \Delta M_0 / (\Delta M_L + \Delta M_0 + \Delta M_R), \\ \xi_R &= \Delta M_R / (\Delta M_L + \Delta M_0 + \Delta M_R), \\ U_{i+0,5}^e &= \xi_L U_{i-0,5}^{n+1} + \xi_0 U_{i+0,5}^{n+1} + \xi_R U_{i+1,5}^{n+1}, \\ E_{i+0,5}^e &= \xi_L \left(E_{i-0,5}^{n+1} + 0,5 (U_{i-0,5}^{n+1} - U_{i+0,5}^e)^2 \right) + \xi_0 \left(E_{i+0,5}^{n+1} + 0,5 (U_{i+0,5}^{n+1} - U_{i+0,5}^e)^2 \right) + \\ &+ \xi_R \left(E_{i+1,5}^{n+1} + 0,5 (U_{i+1,5}^{n+1} - U_{i+0,5}^e)^2 \right).\end{aligned}$$

Давление $P_{i+0,5}^e$ находится по $\rho_{i+0,5}^e$, $E_{i+0,5}^e$ и уравнению состояния.

На этом вычисления основных величин в момент t^{n+1} в эйлеровой ячейке заканчиваются.

Вообще говоря, метод, примененный на втором этапе, является методом переноса (пересчета) величин с одной пространственной сетки (старой) на другую сетку (новую, не обязательно эйлерову). Пусть в ячейке «новой» сетки размером Δx находится N интервалов «старой» сетки, в которых решение уже найдено, т.е. известны величины Δx_k , ρ_k , U_k , P_k , E_k . При этом часть интервалов старой сетки попали в ячейку Δx целиком, а часть – частично. Важно, что значения Δx_k удовлетворяют условию

$$\Delta x = \sum_{k=1}^N \Delta x_k. \quad (5.34)$$

Массы интервалов «старой» сетки и масса интервала эйлеровой ячейки определяются с помощью уравнений

$$\Delta M_k = \rho_k \Delta x_k, \quad \Delta M = \sum_{k=1}^N \Delta M_k. \quad (5.35)$$

Введем объемные и массовые концентрации

$$\alpha_k = \frac{\Delta x_k}{\Delta x}, \quad \xi_k = \frac{\Delta M_k}{\Delta M}. \quad (5.36)$$

Из (5.36) следует, что α_k и ρ_k удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k = 1, \quad \sum_{k=1}^N \xi_k = 1. \quad (5.37)$$

Из законов сохранения массы, количества движения и энергии следуют уравнения для определения величин средних в новой ячейке

$$\rho = \sum_{k=1}^N \alpha_k \rho_k, \quad (5.38)$$

$$U = \sum_{k=1}^N \xi_k U_k, \quad (5.39)$$

$$E = \sum_{k=1}^N \xi_k \left(E_k + 0,5(U_k - U)^2 \right). \quad (5.40)$$

Уравнение (5.37) формально можно применять и в том случае, когда интервалы Δx_k содержат разные вещества (с разными уравнениями состояния). Однако нерешенным остается вопрос, с помощью какого уравнения состояния найти давление по ρ и E . Чаще всего для «многокомпонентной» ячейки давление определяется [12] с помощью уравнения Дальтона

$$P = \sum_{k=1}^N \alpha_k P_k. \quad (5.41)$$

Метод изложен для случая одной пространственной переменной. Уравнения второго этапа обобщаются на случай двух или трех пространственных переменных и, по существу, являются методом переноса величин с одной пространственной сетки на другую. Формально вместо Δx в уравнениях (5.34)–(5.38) следует взять объем $\Delta \theta$. Тогда вместо (5.34), (5.36) получим

$$\Delta \theta = \sum_{k=1}^N \Delta \theta_k, \quad \Delta M = \sum_{k=1}^N \rho_k \Delta \theta_k,$$

$$\alpha_k = \frac{\Delta \theta_k}{\Delta \theta}, \quad \xi_k = \frac{\rho_k \Delta \theta_k}{\Delta M}.$$

Уравнения (5.38)–(5.41) не изменяются.

Глава 6. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК

§ 1. История метода характеристик

В предыдущих главах были рассмотрены так называемые однородные разностные методы, не выделяющие разрывов, т. е. заменяющие разрыв некоторым переходным слоем конечной ширины. Эти методы обладают дистракцией разрывов (сильных, слабых, а в некоторых методах и контактных) и осцилляцией решения за разрывом. Следует отметить, что при увеличении дистракции, как правило, уменьшается амплитуда осцилляций.

В отличие от однородных методов метод характеристик не приводит к дистракции разрывов и осцилляциям, так как слабые разрывы распространяются вдоль характеристик. Этот метод содержит естественные ограничения, связанные с устойчивостью. Волны сжатия, волны разрежения и области непрерывного течения в методе характеристик отделены друг от друга характеристическими кривыми. Таким образом, на характеристической сетке все отдельные волны разделены, и их положение определяется с хорошей точностью.

Применение метода характеристик для решения практических задач началось еще в позапрошлом веке [1]. До середины XX века в аэродинамике метод характеристик не был востребован, т. к. при дозвуковых скоростях ($U^2 < C^2$) уравнения, описывающие стационарное обтекание летательного аппарата идеальным газом, не имеют вещественных характеристик. Появление самолетов, летающих со сверхзвуковыми скоростями, явилось мощным толчком для развития метода характеристик в аэродинамике. В разных странах появилось много версий метода характеристик [2–9].

Примерно в то же самое время (середина пятидесятых годов) в СССР и за рубежом возник метод характеристик для расчетов одномерных нестационарных движений сжимаемых жидкостей и газов [10, 11]. Одновременно появились работы, в которых метод характеристик применялся для расчетов нестационарных двумерных и трехмерных пространственных течений [12–14].

§ 2. Метод характеристик. Основные уравнения

Особенно сильно недостатки конечно-разностных методов проявляются при расчете центрированных волн разрежения в окрестности точки образования такой волны. Поскольку градиенты всех величин близки к бесконечности в масштабах одного сеточного интервала, то резко возрастают погрешности.

Метод характеристик позволяет обеспечить удовлетворительную точность расчета таких задач.

С другой стороны, сложность логики метода характеристик быстро возрастает с увеличением числа рассматриваемых разрывов, в то время как в конечноразностных методах иметь дело со сложными системами не труднее, чем с простыми. Ограничения метода характеристик становятся более очевидными при обсуждении различных конкретных задач.

Рассмотрим уравнения идеальной среды в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{(v-1)\rho U}{r} = 0, \quad (6.1)$$

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} + \rho U \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \quad (6.2)$$

$$\rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \rho U \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r} + P \frac{\partial U}{\partial r} + U \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{(v-1)PU}{r} = 0, \quad (6.3)$$

$$P = P(\rho, E). \quad (6.4)$$

В уравнениях (6.1)–(6.4) r – пространственная Эйлера координата, v – показатель симметрии течения, $v = 1$ для плоских одномерных течений, $v = 2$ – для цилиндрически симметричных течений и $v = 3$ – для сферически симметричных течений. С помощью выражения $\mathcal{E} = E + 0,5U^2$ и уравнения движения (6.2) преобразуем уравнение энергии (6.3) и виду

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho U \frac{\partial E}{\partial r} + P \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{(v-1)PU}{r} = 0. \quad (6.5)$$

Умножим (6.2) на λ , (6.5) на μ (λ и μ пока произвольные функции) и сложим с (6.1)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial r} + \lambda \rho \frac{\partial U}{\partial t} + (\rho + \lambda \rho U + \mu P) \frac{\partial U}{\partial r} + \\ & + \mu \rho \left(\frac{\partial E}{\partial t} + U \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{(v-1)U}{r} (\rho + \mu P) = 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Полученное уравнение содержит комбинации производных величин ρ , U , E , совпадающие по форме с характеристическим оператором $A(t,r) \frac{\partial f}{\partial t} + B(t,r) \frac{\partial f}{\partial r}$ при $A \neq 0$, $B \neq 0$. Что касается функции P , то

коэффициент при $\frac{\partial P}{\partial t}$ оказался в (6.6) равным нулю, что не соответствует

условию существования характеристического оператора. Т. о. для давления P не может быть выбрано характеристическое направление. Однако, уравнение (6.6) содержит производные трех термодинамических величин,

которые связаны уравнением состояния (6.4). Дифференцируя P в (6.4) по r , получим

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_E \frac{\partial \rho}{\partial r} + \left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_\rho \frac{\partial E}{\partial r}. \quad (6.7)$$

С помощью соотношения (6.7) исключим $\frac{\partial P}{\partial r}$ из (6.6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (U + \lambda P_\rho) \frac{\partial \rho}{\partial r} + \lambda \rho \frac{\partial U}{\partial t} + (\rho + \lambda \rho U + \mu P) \frac{\partial U}{\partial r} + \\ + \mu \rho \frac{\partial E}{\partial t} + (\mu \rho U + \lambda P_E) \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{(v-1)U}{r} (\rho + \mu P) = 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Здесь введены обозначения

$$P_\rho = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_E, \quad P_E = \left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_\rho.$$

Левая часть уравнения (6.8) содержит производные ρ , U , E по направлениям. Чтобы три направления, определяемые коэффициентами уравнения (6.8), совпадали, необходимо, чтобы указанные коэффициенты были пропорциональны

$$\frac{U + \lambda P_\rho}{1} = \frac{\lambda \rho U + \rho + \mu P}{\lambda \rho} = \frac{\mu \rho U + \lambda P_E}{\mu \rho} = \frac{dr}{dt}. \quad (6.9)$$

Таким образом, получаются уравнения для нахождения λ и μ , при которых направления дифференцирования ρ , E , U совпадают

$$\lambda (P_E - \mu \rho P_\rho) = 0, \quad \lambda^2 \rho P_\rho - \mu P - \rho = 0. \quad (6.10)$$

Решая систему уравнений (6.10), получим три набора значений λ и μ , являющихся решениями этой системы

$$\lambda_1 = \frac{C}{P_\rho}, \quad \mu_1 = \frac{P_E}{\rho P_\rho}, \quad (6.11)$$

$$\lambda_2 = -\frac{C}{P_\rho}, \quad \mu_2 = \frac{P_E}{\rho P_\rho}, \quad (6.12)$$

$$\lambda_3 = 0, \quad \mu_3 = -\frac{\rho}{P}, \quad (6.13)$$

где

$$C = \sqrt{P_\rho + \frac{P P_E}{\rho^2}}.$$

Подставляя (6.11)–(6.13) в (6.9), получим три различных характеристических направления в каждой точке x, t

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_1 = U + C, \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)_2 = U - C, \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)_3 = U. \quad (6.14)$$

Соответственно, вместо уравнения (6.8) получим три уравнения в характеристической форме. Уравнения вдоль первого и второго характеристических направлений (6.14) имеют вид

$$P_\rho \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{1,2} \pm \rho C \left(\frac{dU}{dt}\right)_{1,2} + P_E \left(\frac{dE}{dt}\right)_{1,2} + \frac{(\nu-1)\rho UC^2}{r} = 0, \quad (6.15)$$

где

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_1 = \frac{\partial}{\partial t} + (U + C)\frac{\partial}{\partial r}, \quad \left(\frac{d}{dt}\right)_2 = \frac{\partial}{\partial t} + (U - C)\frac{\partial}{\partial r}.$$

Уравнение вдоль третьего характеристического направления, которое является линией тока, получается из (6.8) при $\lambda_3 = 0$ и $\mu_3 = -\rho/P$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{\rho^2}{P} \left(\frac{\partial E}{\partial t} + U \frac{\partial E}{\partial r} \right) = 0. \quad (6.16)$$

После перехода к производной по третьему характеристическому направлению (6.16) принимает вид

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_3 - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_3 = 0, \quad (6.17)$$

где $\left(\frac{d}{dt}\right)_2 = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial r}$. Сравнив (6.17) с (2.29), получаем, что вдоль третьего

характеристического направления $\left(\frac{dS}{dt}\right)_3 = 0$ или $S = \text{const}$.

Характеристическая форма (6.15), (6.17) уравнений идеальной сплошной среды не является единственной. Воспользовавшись выражением для производной $\frac{dP}{dt}$

$$\frac{dP}{dt} = P_\rho \frac{d\rho}{dt} + P_E \frac{dE}{dt},$$

можно (6.15) и (6.16) записать в виде

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_{1,2} \pm \rho C \left(\frac{dU}{dt}\right)_{1,2} + \frac{(\nu-1)\rho UC^2}{r} = 0, \quad (6.18)$$

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_3 - C^2 \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_3 = 0. \quad (6.19)$$

В случае идеального газа с уравнением состояния (1.154) уравнение (6.18) запишем в виде, содержащем $\left(\frac{dC}{dt}\right)_{1,2}$. Для этого выразим ρ через C

$$\rho = \left(\frac{C^2}{\gamma f(S)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (6.20)$$

и подставим в (1.154)

$$P = \left(\frac{C^{2\gamma}}{\gamma^\gamma f(S)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Предположим, что $f(S) \neq \text{const}$ и продифференцируем P по t

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_{1,2} = \frac{2}{\gamma-1} C^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} (\gamma f(S))^{-\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{dC}{dt}\right)_{1,2} - \frac{1}{\gamma-1} C^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} (\gamma f(S))^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{df}{dt}\right)_{1,2}. \quad (6.21)$$

Подставив (6.20) и (6.21) в (6.18) и сократив общий множитель $C^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} (\gamma f(S))^{-\frac{1}{\gamma-1}} \neq 0$, получим

$$\frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{dC}{dt}\right)_{1,2} \pm \left(\frac{dU}{dt}\right)_{1,2} - \frac{C}{\gamma(\gamma-1)} f(S)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left(\frac{df}{dt}\right)_{1,2} + \frac{(\nu-1)UC}{r} = 0. \quad (6.22)$$

Поскольку

$$\left(\frac{df(S)}{dt}\right)_{1,2} = \frac{df}{dS} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_r + (U \pm C) \frac{df}{dS} \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)_t,$$

а вдоль траектории (третьей характеристики) $S = \text{const}$, то эта производная принимает вид

$$\left(\frac{df(S)}{dt}\right)_{1,2} = \pm C \frac{df(S)}{dS} \frac{\partial S}{\partial r}.$$

Даже для идеального газа уравнение (6.22) не интегрируется. Сделаем два упрощающих предположения:

$$\frac{\partial S}{\partial r} = 0, \quad \nu = 1.$$

Тогда уравнение (6.22) принимает вид

$$\frac{2}{\gamma-1} \frac{dC}{dt} \pm \frac{dU}{dt} = 0 \quad (6.23)$$

вдоль характеристик $\frac{dr}{dt} = U \pm C$. После интегрирования (6.23) получаются

уравнения для инвариантов Римана:

$$\alpha = U + \frac{2}{\gamma - 1}C = \text{const} \text{ вдоль характеристики } \frac{dr}{dt} = U + C,$$

$$\beta = U - \frac{2}{\gamma - 1}C = \text{const} \text{ вдоль характеристики } \frac{dr}{dt} = U - C.$$

Вернемся теперь к следующей из (6.18) общей форме уравнений вдоль 1-го и 2-го характеристических направлений

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (U \pm C) \frac{\partial P}{\partial r} \pm \rho C \left(\frac{\partial U}{\partial t} + (U \pm C) \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{(\nu - 1)\rho U C^2}{r} = 0.$$

Вдоль первого и второго характеристических направлений

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)_{1,2} = U \pm C$$

справедливы уравнения

$$dP \pm \rho C dU + \frac{(\nu - 1)\rho U C^2}{r} dt = 0, \quad (6.24)$$

а вдоль третьего характеристического направления

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)_3 = U \quad (6.25)$$

– уравнение (6.17). Это основные уравнения метода характеристик.

§ 3. Расчёт величин в точке пересечения характеристик

Пусть решение известно на некоторой сетке. Рассмотрим две соседние точки А и В, изображённые на рис. 6.1, в которых известны все величины. Через точку А проведем прямую линию с таким же наклоном, как у α характеристики в точке А

$$\frac{dr}{dt} = (U + C)_A,$$

а через точку В прямую линию, касательную к β характеристике в точке В

$$\frac{dr}{dt} = (U - C)_B.$$

Эти прямые линии, касательные к характеристикам в некоторых точках будем дальше называть характеристиками в кавычках.

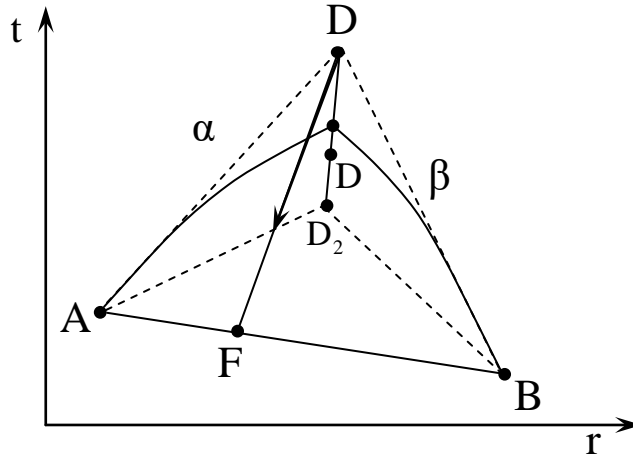


Рис. 6.1. Схематическое изображение характеристики к (сплошные линии), касательных к ним (пунктир) и третьей характеристики DF

Аппроксимируем эти уравнения разностными уравнениями

$$r_D = r_A + (U + C)_A (t_D - t_A), \quad r_D = r_B + (U - C)_B (t_D - t_B),$$

которые запишем в виде системы двух линейных неоднородных уравнений

$$r_D - (U + C)_A t_D = r_A - (U + C)_A t_A,$$

$$r_D - (U - C)_B t_D = r_B - (U - C)_B t_B.$$

Решением этой системы уравнений являются координаты точки пересечения «характеристик»

$$t_D = \frac{(r_B - r_A) + (U + C)_A t_A - (U - C)_B t_B}{(U + C)_A - (U - C)_B},$$

$$r_D = \frac{r_B (U + C)_A - r_A (U - C)_B + (U + C)_A (U - C)_B (t_A - t_B)}{(U + C)_A - (U - C)_B}.$$

Для нахождения P_D и U_D в точке D аппроксимируем уравнения (6.24) вдоль «характеристик»

$$P_D - P_A + \rho_A C_A (U_D - U_A) + \frac{(\nu - 1) \rho_A U_A C_A^2}{r_A} (t_D - t_A) = 0,$$

$$P_D - P_B - \rho_B C_B (U_D - U_B) + \frac{(\nu - 1) \rho_B U_B C_B^2}{r_B} (t_D - t_B) = 0.$$

Запишем эту систему уравнений иначе

$$P_D + \rho_A C_A U_D = \Phi_A, \quad P_D - \rho_B C_B U_D = \Phi_B, \quad (6.26)$$

где

$$\Phi_A = P_A - \rho_A C_A U_A - \frac{(\nu - 1) \rho_A U_A C_A^2}{r_A} (t_D - t_A),$$

$$\Phi_B = P_B + \rho_B C_B U_B - \frac{(v-1)\rho_B U_B C_B^2}{r_B} (t_D - t_B).$$

Решение системы уравнений (6.26) имеет вид

$$U_D = \frac{\Phi_A - \Phi_B}{\rho_A C_A + \rho_B C_B}, \quad P_D = \frac{\rho_A C_A \Phi_B + \rho_B C_B \Phi_A}{\rho_A C_A + \rho_B C_B}.$$

Нахождение P_D и U_D – лишь полдела. Нужно ещё найти ρ_D , E_D , C_D . Воспользуемся третьей «характеристикой», имеющей уравнение (6.25). Аппроксимируем это уравнение разностным уравнением

$$r_F = r_D + U_D (t_F - t_D). \quad (6.27)$$

Значения r_F и t_F являются координатами точки пересечения разностной «характеристики» (6.27) с прямой линией, проходящей через точки А и В с известными значениями всех величин. Проинтерполируем r и t в точку F по отрезку АВ

$$r_F = r_B + (r_A - r_B) \frac{t_F - t_B}{t_A - t_B}. \quad (6.28)$$

Из двух уравнений (6.27) и (6.28) находим координаты точки F r_F и t_F

$$t_F = \frac{(r_D - r_A)t_B + (r_B - r_D)t_A + U_D t_D (t_A - t_B)}{(r_B - r_A) + U_D (t_A - t_B)},$$

$$r_F = r_D + U_D (t_F - t_D).$$

Используем формулу линейной интерполяции между точками А и В

$$f = f_A + (f_B - f_A) \frac{(r - r_A)}{(r_B - r_A)}. \quad (6.29)$$

Формула (6.29) при $r \rightarrow r_A$ дает $f \rightarrow f_A$, а если $r \rightarrow r_B$, то $f \rightarrow f_B$. Таким образом, определяются

$$U_F = U_A + (U_B - U_A) \frac{(r_F - r_A)}{(r_B - r_A)}, \quad \rho_F = \rho_A + (\rho_B - \rho_A) \frac{(r_F - r_A)}{(r_B - r_A)},$$

$$E_F = E_A + (E_B - E_A) \frac{(r_F - r_A)}{(r_B - r_A)}.$$

P_F , C_F находятся из УРС.

Аппроксимируем уравнение (6.19) вдоль третьей «характеристики»

$$P_D - P_F = C_F^2 (\rho_D - \rho_F). \quad (6.30)$$

Поскольку P_D уже известно, то из (6.30) находим ρ_D

$$\rho_D = \rho_F + \frac{1}{C_F^2} (P_D - P_F).$$

Значения P_D , ρ_D и E_D должны удовлетворять УРС

$$F(P, \rho, E) = 0.$$

Отсюда находится E_D . Наконец, из УРС в точке D находятся производные $\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_E$ и $\left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_\rho$, а затем находится скорость звука по формуле

$$C_D^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_E + \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_\rho. \quad (6.31)$$

Таким образом, в точке D найдены

$$r_D, t_D, P_D, U_D, \rho_D, C_D, E_D.$$

В случае если необходимо повысить точность определения положения точки D и точность величин в этой точке, производится второй этап вычислений. Для этого все величины в точке D запоминаются, и им присваивается индекс 1. Затем из точек A и B проводятся «характеристики» первого и второго семейств с наклонами

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_1 = U_D + C_D, \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)_2 = U_D - C_D.$$

Далее повторяется алгоритм первого этапа. Т.е. находятся координаты точки пересечения этих прямых r_{D2}, t_{D2} (точка D_2 на рис. 6.1), находятся значения $P_{D2}, U_{D2}, \rho_{D2}, E_{D2}, C_{D2}$. Окончательные величины находятся по формулам

$$r_D = 0,5(r_{D1} + r_{D2}), \quad t_D = 0,5(t_{D1} + t_{D2}),$$

$$\rho_D = 0,5(\rho_{D1} + \rho_{D2}), \quad E_D = 0,5(E_{D1} + E_{D2}), \quad P_D = 0,5(P_{D1} + P_{D2}).$$

Значения P_D и C_D пересчитываются по УРС.

§ 4. Расчёт сильного разрыва

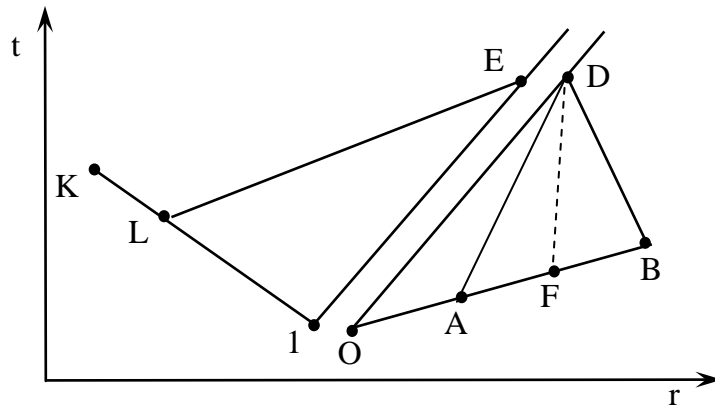


Рис. 6.2. Взаимное расположение «характеристик» и ударной волны

Пусть перед началом вычислений известны величины P, ρ, E, U, C, t, r в точках $K, 1, O$ и B , изображённых на рис. 6.2. Координаты точек O и 1 совпадают, т.к. эти точки лежат на поверхности сильного разрыва и характеризуют состояние перед разрывом и за ним. Кроме того известна скорость распространения сильного разрыва D . Рассмотрим случай когда $W = \rho_-(D - U_-) > 0$.

Проведём траекторию сильного разрыва из точки O до пересечения с «характеристикой» второго семейства, выходящей из точки B . Координаты точки их пересечения D находятся из системы двух линейных уравнений

$$r_D = r_O + D(t_D - t_O), \quad r_D = r_B + (U_B - C_B)(t_D - t_B)$$

по формулам

$$t_D = \frac{r_B - t_B(U_B - C_B) - r_O + Dt_O}{D + C_B - U_B},$$

$$r_D = r_O + \frac{D(r_B - r_O + (U_B - C_B)(t_O - t_B))}{D + C_B - U_B}.$$

Чтобы определить P, ρ, E, U, C в точке D , нужно построить характеристический треугольник, изображённый на рис. 6.2. Сначала нужно найти точку A (точка пересечения «характеристики» 1 семейства с отрезком OB). Точки O, B, D и A изображены на рис. 6.3.

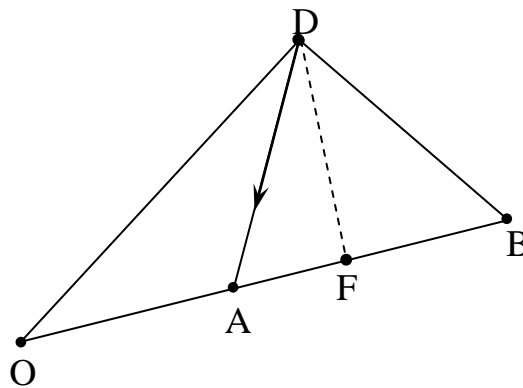


Рис. 6.3. Взаимное расположение фронта ударной волны OD и «характеристик» BD, AD и FD перед фронтом

Рассмотрим характеристику первого семейства, проходящую через точку D . Её наклон неизвестен. Предположим, что эта «характеристика», как и «характеристика» BD , прямая линия, а её наклон определяется величиной $U + C$ в точке A (рис. 6.3). В этой точке «характеристика» AD пересекается с отрезком OB . Рассмотрим систему уравнений для определения этих величин.

Уравнение «характеристики» AD имеет вид

$$r_D = r_A + (U_A + C_A)(t_D - t_A). \quad (6.32)$$

Вдоль отрезка ОВ используем линейную интерполяцию $r(t)$

$$r_A = r_O + \frac{r_B - r_O}{t_B - t_O}(t_A - t_O). \quad (6.33)$$

Уравнения (6.32), (6.33) связывают неизвестные величины r_A, t_A, U_A, C_A . Ещё два уравнения, связывающие U_A и C_A с r_A , – это уравнения интерполяции вдоль отрезка ОВ

$$U_A = U_O + \frac{U_B - U_O}{r_B - r_O}(r_A - r_O), \quad C_A = C_O + \frac{C_B - C_O}{r_B - r_O}(r_A - r_O). \quad (6.34)$$

Исключив в (6.32) и (6.33) t_A и подставив в полученное уравнение U_A и C_A из (6.34), получим уравнение для определения r_A

$$\omega_1 (r_A - r_O)^2 + \omega_2 (r_A - r_O) - \omega_3 = 0, \quad (6.35)$$

где

$$\omega_1 = \frac{(t_B - t_O)((U_B + C_B) - (U_O + C_O))}{r_B - r_O},$$

$$\omega_2 = (t_B - t_O)(U_O + C_O) - (r_B - r_O),$$

$$\omega_3 = (t_D - t_O)((r_B - r_D)(U_O + C_O) + (r_D - r_O)(U_B + C_B)) - (r_B - r_O)(r_D - r_O).$$

После нахождения r_A из (6.35) находится t_A из (6.33), затем величина U_A из (6.34). Затем с помощью линейных интерполяций находятся ρ_A и E_A

$$\rho_A = \rho_O + \frac{\rho_B - \rho_O}{r_B - r_O}(r_A - r_O), \quad E_A = E_O + \frac{E_B - E_O}{r_B - r_O}(r_A - r_O).$$

По ρ_A и E_A находится P_A из уравнения состояния, затем в точке А находятся $\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_E$, $\left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_\rho$ и C_A^2 по формуле (6.31). Таким образом,

завершено построение стандартного «характеристического» треугольника ABD. Далее для определения величин в точке D применяется алгоритм, изложенный в § 3.

Величины в точке D описывают состояние перед ударной волной. Чтобы найти величины за фронтом ударной волны в точке E (рис. 6.4), нужно через точку E провести характеристику первого семейства, найти её пересечение (точку L) с отрезком K1, соединяющим точки, в которых известны все величины в области за фронтом, и затем с помощью уравнения вдоль этой характеристики найти U_+ (скорость в точке E). Построение стандартного характеристического треугольника LE1

аналогично построению треугольника ABD. Чтобы найти $r_L, t_L, U_L, \rho_L, E_L, P_L, C_L$ решается система уравнений

$$r_E - r_L - (U_L + C_L)(t_E - t_L) = 0, \quad (6.36)$$

$$r_L - r_K - \frac{r_1 - r_K}{t_1 - t_K}(t_L - t_K) = 0, \quad (6.37)$$

$$U_L - U_K - \frac{U_1 - U_K}{r_1 - r_K}(r_L - r_K) = 0, \quad (6.38)$$

$$C_L - C_K - \frac{C_1 - C_K}{r_1 - r_K}(r_L - r_K) = 0. \quad (6.39)$$

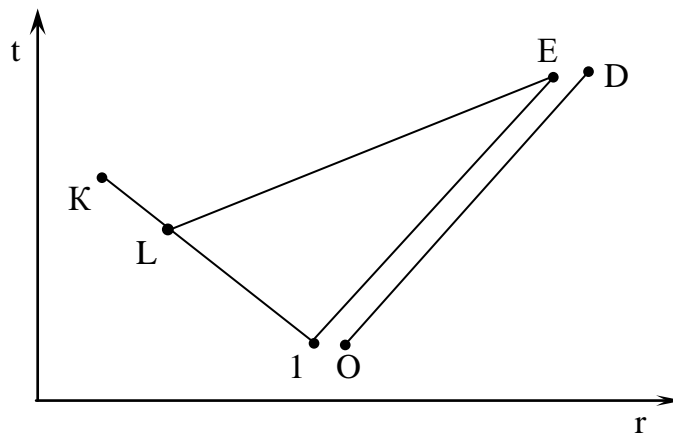


Рис.6.4. Взаимное расположение фронта ударной волны 1E и «характеристики» LE за фронтом ударной волны

Вначале исключим t_L в (6.36), (6.37). Затем в полученное уравнение подставим U_L из (6.38) и C_L из (6.39). В результате получается уравнение

$$\Omega_1 x^2 - \Omega_2 x - \Omega_3 = 0, \quad (6.40)$$

где

$$x = \frac{r_L - r_K}{r_1 - r_K}, \quad \Omega_1 = (t_1 - t_K)(U_1 + C_1 - U_K - C_K),$$

$$\Omega_2 = r_1 - r_K + (U_K + C_K)(t_1 - t_K) + (t_E - t_K)(U_1 + C_1 - U_K - C_K),$$

$$\Omega_3 = (U_K + C_K)(t_E - t_K) + r_E - r_K.$$

После нахождения x из уравнения (6.40) определяется r_L

$$r_L = r_K + x(r_1 - r_K).$$

Затем из (6.37) определяется t_L

$$t_L = t_K + x(t_1 - t_K),$$

а из (6.38), определяется U_L . Значения ρ_L и E_L находятся интерполяциями

$$\begin{aligned}\rho_L &= \rho_K + x(\rho_1 - \rho_K), \\ E_L &= E_K + x(E_1 - E_K).\end{aligned}$$

Затем по УРС определяется P_L , производные $\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_E$, $\left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_\rho$ и скорость звука C_L по формуле (6.31). Затем записывается уравнение вдоль α «характеристики», выходящей из точки F в точку E (рис. 6.4).

$$P_E - P_L + \rho_L C_L (U_E - U_L) + \frac{(v-1)\rho_L U_L C_L^2}{r_L} (t_E - t_L) = 0.$$

Поскольку

$$P_+ = P_E, \quad U_+ = U_E,$$

то это уравнение замыкает систему уравнений на сильном разрыве

$$\begin{aligned}\rho_+(D - U_+) - \rho_-(D - U_-) &= 0, \\ \rho_-(D - U_-)(U_+ - U_-) - P_+ + P_- &= 0, \\ E_+ - E_- + \frac{1}{2}(P_+ + P_-)\left(\frac{1}{\rho_+} - \frac{1}{\rho_-}\right) &= 0, \\ P_+ &= P(\rho_+, E_+).\end{aligned}$$

Решая полученную систему 5 уравнений с 5 неизвестными, находим

$$P_+, \rho_+, E_+, U_+, D.$$

При необходимости повышения точности может быть организован 2-й этап – пересчет с использованием величин в точке E (рис. 6.4).

§ 5. Расчёт контактного разрыва

Контактный разрыв на рис. 6.5 обозначен точкой F. Справа от неё задана точка B, в которой известны $P_B, \rho_B, E_B, C_B, U_B, r_B, t_B$, слева задана точка K, в которой известны $P_K, \rho_K, E_K, C_K, U_K, r_K, t_K$. В точке F с координатами t_F, r_F интенсивные величины общие P_F, U_F , а экстенсивные величины различные – правые $\rho_{FR}, E_{FR}, C_{FR}$ и левые $\rho_{FL}, E_{FL}, C_{FL}$.

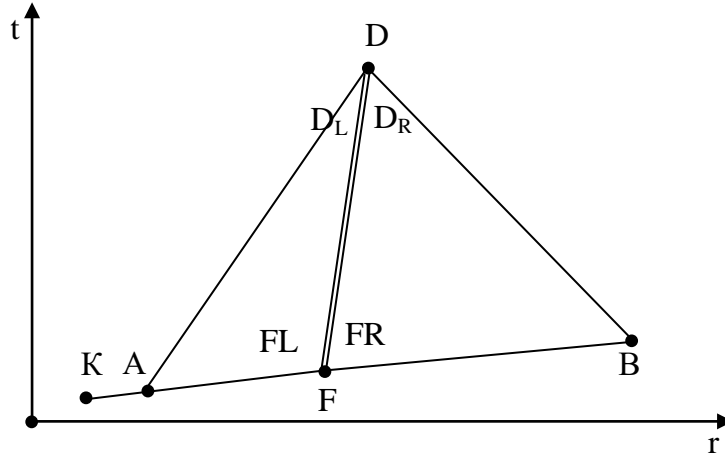


Рис. 6.5. Траектория контактной границы FD, «характеристики» второго семейства BD и «характеристики» первого семейства AD

Для определения координат точки D проводим из точки B «характеристику» второго семейства до пересечения с «характеристикой» третьего семейства, выходящей из точки F

$$r_D = r_F + U_F(t_D - t_F), \quad (6.41)$$

$$r_D = r_B + (U_B - C_B)(t_D - t_B). \quad (6.42)$$

Из уравнений (6.41), (6.42) находятся r_D и t_D

$$t_D = t_F + \frac{(U_B - C_B)(t_F - t_B) + r_B - r_F}{U_F - U_B + C_B},$$

$$r_D = r_F + U_F \cdot \frac{(U_B - C_B)(t_F - t_B) + r_B - r_F}{U_F - U_B + C_B}.$$

Через точку D с координатами r_D , t_D проходит прямолинейная «характеристика» первого семейства AD, которая в точке A пересекается с прямой линией KF. Величины в точке пересечения A находятся линейными интерполяциями. В результате получается система четырёх линейных уравнений

$$r_D - r_A - (U_A + C_A)(t_D - t_A) = 0, \quad (6.43)$$

$$r_A - r_K - \frac{r_F - r_K}{t_F - t_K}(t_A - t_K) = 0, \quad (6.44)$$

$$U_A - U_K - \frac{U_F - U_K}{r_F - r_K}(r_A - r_K) = 0, \quad (6.45)$$

$$C_A - C_K - \frac{C_{FL} - C_K}{r_F - r_K}(r_A - r_K) = 0. \quad (6.46)$$

Исключив t_A из уравнений (6.43) и (6.44) и подставив в полученное уравнение U_A из (6.45) и C_A из (6.46), приходим к уравнению для определения r_A

$$\omega_1 (r_A - r_K)^2 + \omega_2 (r_A - r_K) + \omega_3 = 0,$$

где

$$\omega_1 = \frac{(U_F + C_{FL} - U_K - C_K)(t_F - t_K)}{(r_F - r_K)^2},$$

$$\omega_2 = \frac{(U_K + C_K)(t_F - t_K) - (U_F + C_{FL} - U_K - C_K)(t_A - t_K)}{r_F - r_K} + 1,$$

$$\omega_3 = r_K - r_D - (U_K + C_K)(t_D - t_K).$$

После определения r_A из (6.41) находится U_A , затем из формул линейной интерполяции

$$\rho_A = \rho_K + \frac{\rho_{FL} - \rho_K}{r_F - r_K} (r_A - r_K), \quad E_A = E_K + \frac{E_{FL} - E_K}{r_F - r_K} (r_A - r_K).$$

находятся ρ_A и E_A . Из УРС по ρ_A , E_A находятся P_A и C_A .

Из уравнений «характеристик» первого и второго семейств AD и BD

$$P_D - P_A + \rho_A C_A (U_D - U_A) + \frac{(v-1)\rho_A C_A^2 U_A}{r_A} (t_D - t_A) = 0,$$

$$P_D - P_B - \rho_B C_B (U_D - U_B) + \frac{(v-1)\rho_B C_B^2 U_B}{r_B} (t_D - t_B) = 0,$$

находятся P_D и U_D .

Затем из двух уравнений вдоль траектории FD находятся ρ_{DL} и ρ_{DR}

$$\rho_{DL} = \rho_{FL} + \frac{1}{C_{FL}^2} (P_D - P_F),$$

$$\rho_{DR} = \rho_{FR} + \frac{1}{C_{FR}^2} (P_D - P_F).$$

E_{DL} и E_{DR} находятся по УРСп и УРСл по значениям ρ_{DL} , P_D и ρ_{DR} , P_D .

Аналогично находятся и C_{DL} и C_{DR} .

§ 6. Метод характеристик с фиксированными шагами по времени

Все величины задаются в узлах регулярной сетки t^n, x_i

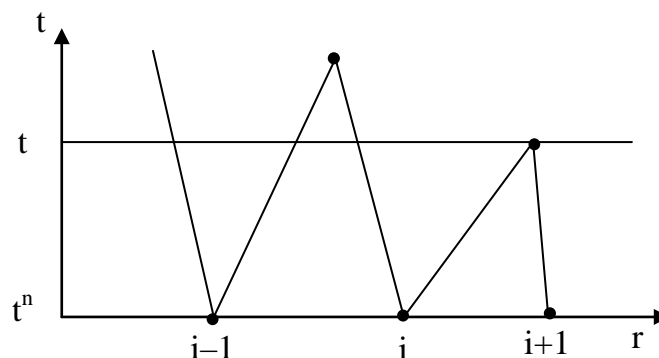


Рис. 6.6. Расположение «характеристик» относительно линии $t = \text{const}$

Одним из недостатков решения с помощью характеристической сетки является то обстоятельство, что точки пересечения «характеристик» находятся в разные моменты времени (рис. 6.6). Если же требуется иметь решение в виде распределения по пространству в заданные моменты времени, как это часто случается, то возникает трудоёмкая проблема интерполирования на характеристической сетке по двум переменным. Эти трудности уменьшаются, если интегрирование по времени t проводится с шагом τ , одинаковым для всех точек пространственной сетки. Эта схема имеет то преимущество, что необходимое здесь интерполирование ведётся всегда по одной переменной.

Уравнения «характеристик» всех трёх семейств имеют вид (6.14). Вдоль них справедливы характеристические уравнения (6.15) и (6.17). Кроме того, вдоль «характеристик» третьего семейства выполняется уравнение (6.19).

В момент времени t^n известна последовательность точек с текущим индексом i ($i = 0, 1, 2, \dots, N$). В этих точках заданы табличные функции, определяющие решение

$$(P_i^n, \rho_i^n, E_i^n, C_i^n, T_i^n \dots r_i^n).$$

Рассмотрим алгоритм перехода из точки E (рис. 6.7) с координатами $t^n, r_i^n = r_E^n$ в некоторую точку, в момент $t^{n+1} = t^n + \tau$. Из точки E проведём «характеристику» первого семейства

$$r_A = r_E + (U_E + C_E)\tau.$$

Величина τ задана, величины U_E, C_E известны. Таким образом находится координата точки A (рис. 6.7).

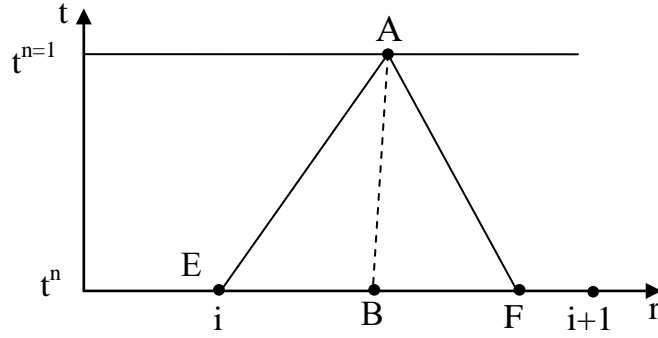


Рис. 6.7. Характеристический треугольник

Аппроксимируем проходящую через точку А β «характеристику» разностным уравнением

$$r_A = r_F + (U_F - C_F)\tau. \quad (6.47)$$

Значения величин r_F , U_F , C_F , входящих в уравнение (6.47), вообще говоря, неизвестны. Однако, известны значения r , U , и C в точках r_i, t^n и r_{i+1}, t^n . Используем уравнения линейной интерполяции

$$U_F = U_i^n + (U_{i+1}^n - U_i^n) \frac{r_F - r_i^n}{r_{i+1}^n - r_i^n}, \quad (6.48)$$

$$C_F = C_i^n + (C_{i+1}^n - C_i^n) \frac{r_F - r_i^n}{r_{i+1}^n - r_i^n}. \quad (6.49)$$

Подставив (6.48) и (6.49) в (6.47), получим уравнение для определения r_F

$$r_F = r_i + \frac{2\tau C_i (r_{i+1} - r_i)}{r_{i+1} - r_i + \tau(U_{i+1} - C_{i+1} - U_i + C_i)}.$$

После определения r_F линейной интерполяцией находятся значения ρ_F и E_F

$$\rho_F = \rho_i^n + (\rho_{i+1}^n - \rho_i^n) \frac{r_F - r_i^n}{r_{i+1}^n - r_i^n}, \quad E_F = E_i^n + (E_{i+1}^n - E_i^n) \frac{r_F - r_i^n}{r_{i+1}^n - r_i^n}.$$

Затем по уравнению состояния $P = P(\rho, E)$ находится P_F и C_F .

Уравнения вдоль «характеристик» первого и второго семейств (6.15) аппроксимируются разностными уравнениями

$$P_A - P_E + \rho_E C_E (U_A - U_E) + \frac{(v-1)\rho_E U_E C_E^2}{r_E} \tau = 0, \quad (6.50)$$

$$P_A - P_F - \rho_F C_F (U_A - U_F) + \frac{(v-1)\rho_F U_F C_F^2}{r_F} \tau = 0. \quad (6.51)$$

Из уравнений (6.50), (6.51) находятся P_A и U_A

$$P_A = \frac{P_E \rho_F C_F + P_F \rho_E C_E}{\rho_F C_F + \rho_E C_E} + \frac{\rho_F C_F \rho_E C_E (U_E - U_F)}{\rho_F C_F + \rho_E C_E} -$$

$$- \frac{(\nu - 1) \tau \rho_E C_E \rho_F C_F}{\rho_F C_F + \rho_E C_E} \left(\frac{U_E C_E}{r_E} + \frac{U_F C_F}{r_F} \right),$$

$$U_A = \frac{P_E - P_F + \rho_F C_F U_F + \rho_E C_E U_E}{\rho_F C_F + \rho_E C_E} -$$

$$- \frac{(\nu - 1) \tau}{\rho_F C_F + \rho_E C_E} \left(\frac{\rho_E U_E C_E^2}{r_E} - \frac{\rho_F U_F C_F^2}{r_F} \right).$$

Для нахождения ρ_A , E_A и C_A проведем через точку А «характеристику» третьего семейства (6.14). Аппроксимируем её разностным уравнением

$$r_B = r_A - U_A \tau.$$

С помощью линейных интерполяций между точками r_i, t^n и r_{i-1}, t^n находятся величины в точке В

$$\rho_B = \rho_i^n + (\rho_{i+1}^n - \rho_i^n) \frac{r_B - r_i^n}{r_{i+1}^n - r_i^n}, \quad E_B = E_i^n + (E_{i+1}^n - E_i^n) \frac{r_B - r_i^n}{r_{i+1}^n - r_i^n}.$$

Давление P_B находится с помощью уравнения состояния

$$P_B = P(\rho_B, E_B).$$

Значения ρ_A и E_A , соответствующие значению P_A , находятся интегрированием уравнения изэнтропы вместе с уравнением состояния

$$E_A - E_B + \int_{V_B}^{V_A} P(V, E) dV = 0,$$

где $V = 1/\rho$. Значения C_A находятся из уравнения состояния

$$C_A^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_E + \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_\rho.$$

Т.о. в результате применения изложенного алгоритма определены все величины в точке А

$$P_A, \rho_A, E_A, U_A, C_A, r_A.$$

Глава 7. ЭТАЛОННЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Выбор эталонных задач

Простейшие теоретические методы априорного исследования свойств разностных уравнений изложены в главе 2. В главах 4 и 5 эти методы применены для оценки свойств конкретных разностных методов и схем. Конечно, от разностных методов требуется, чтобы они надёжно прогнозировали характеристики тех процессов, для моделирования которых они применяются. Различие между результатами математического и физического экспериментов определяется многими причинами. Одним из важнейших способов проверки достоинств и недостатков математической модели является расчёт эталонных задач, имеющих аналитическое решение, и сравнение результатов расчётов с этими решениями. В этой главе рассмотрены некоторые задачи, имеющие точное аналитическое решение. Даются постановки задач (начальные данные, граничные условия, уравнения состояния и другие характеристики физической модели) и приводятся их решения либо в виде формул, либо в виде таблиц. Для проверки качества разностной схемы следует решить ту же задачу численно и сравнить результаты.

Круг рассмотренных эталонных задач ограничен моделями идеальной сплошной среды и простыми уравнениями состояния (УРС) идеального газа и конденсированного состояния. Уравнения идеальной среды Эйлера-Гельмгольца составляют адиабатическое ядро любой модели механики сплошной среды [1]. Соответственно, погрешности разностной схемы (РС) при расчётах течений идеальной жидкости являются составной частью погрешностей РС, предназначенной для моделирования поведения любой реальной среды. Погрешности РС для расчёта упругости, пластичности, вязкости, теплопроводности, магнитных полей, химических реакций, фазовых переходов и т. д. суммируются с погрешностями РС адиабатического ядра. Эти погрешности могут компенсировать друг друга. Чтобы не возникало иллюзий относительно точности результатов, следует оценивать каждый источник погрешностей в отдельности. Ещё один источник погрешностей возникает при расчётах задач в двумерной или трёхмерной пространственной постановках. В лагранжевых координатах причиной погрешностей является деформация сеточных ячеек из-за сопротивления проскальзыванию относительно друг друга. В эйлеровых координатах сеточные ячейки сохраняют свою форму, но вещество перетекает из ячейки в ячейку. В результате быстро забывается история изменения параметров каждой массовой частицы. Чтобы не обсуждать эти вопросы, ограничимся рассмотрением задач в одномерной пространственной постановке. Образно говоря, такой подход можно сформулировать

так: чтобы ясно увидеть главную идею, нужно сбросить все окружающие её «одежды». Поэтому и рассматриваются эталонные задачи только в одномерной постановке для идеальной среды и с простейшими УРС.

Все эталонные задачи разбиты на три группы. Это задачи со стационарными ударными волнами, задачи с нестационарными ударными волнами и задачи без ударных волн. В задачах со стационарными ударными волнами вне зоны дистракции ударной волны производные в точном решении равны нулю и т. о. погрешности аппроксимации должны быть равны нулю. В зоне дистракции ударной волны производные величин и погрешности аппроксимации достигают больших значений. В этой зоне сильный разрыв заменяется «размазанным» на несколько интервалов сетки профилем, в котором меняется энтропия. На таких задачах проверяются реальная дистракция разрыва, монотонность, поведение энтропии, зависимость результатов расчёта от соотношения шагов сетки по пространству и по времени, зависимость численного решения от размеров сеточных интервалов (от числа точек сетки в области интегрирования уравнений). Все эти свойства проявляются по-разному на сильных и на слабых ударных волнах. Под силой разрыва понимается отношение давления за разрывом к давлению перед разрывом.

Другую группу эталонных задач составляют задачи, с нестационарными ударными волнами, в которых вне зоны дистракции ударной волны производные велики и зависящие от них погрешности аппроксимации велики. Это задача о точечном взрыве и задача о фокусировке ударной волны.

Третью группу задач составляют задачи без ударных волн. В задачах о распространении волны разрежения по покоящемуся веществу с постоянными параметрами проверяется поведение численного решения в области слабых разрывов, свойство монотонности, поведение энтропии. Рассмотрены волны разрежения разной силы. Под силой волны разрежения понимается отношение давления перед волной разрежения к давлению за ней. Т. о. при истечении вещества в вакуум, образуется бесконечно сильная волна разрежения. В задаче о фокусировке сферической оболочки граничные условия и энерговыведение подобраны так, чтобы плотность вещества оставалась постоянной, несмотря на большие градиенты давлений и скоростей.

В качестве примера несколько аналитических решений использованы для сопоставления с результатами расчётов по разностным схемам, основанным на методе диссипации энергии, изложенном в [2–5].

§ 2. Стационарная ударная волна

Рассмотрим вещество, параметры которого P_0, V_0, E_0, U_0 не изменяются со временем. В момент t_0 левая граница этого вещества рывком начинает двигаться с положительной постоянной скоростью и от неё в вещество пойдёт ударная волна. Уравнения (1.110)–(1.112) связывают состояние вещества перед разрывом $P_- = P_0, \rho_- = \rho_0, E_- = E_0, U_- = U_0$ с состоянием за разрывом $P = P_+, \rho = \rho_+, E = E_+, U = U_+$ и со скоростью разрыва W . Этих величин больше, чем уравнений (1.110)–(1.112) вместе с уравнением состояния. Чтобы решить эту систему уравнений нужно одну из величин взять в качестве параметра. Будем считать, что задано значение одной из интенсивных величин P или U . Сначала рассмотрим случай, когда задано U . Для уравнения состояния (УРС) идеального газа в виде

$$PV = (\gamma - 1)E \quad (7.1)$$

преобразуем уравнения на разрыве (1.110), (1.111), (1.115) к зависимости P от U и от остальных величин с индексом «0»

$$P = P_0 + \frac{\gamma + 1}{4} \frac{\Delta U^2}{V_0} + \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4} \frac{\Delta U^2}{V_0}\right)^2 + \frac{\gamma P_0}{V_0} \Delta U^2}, \quad (7.2)$$

где $\Delta U = U - U_0$. Из этих же уравнений можно выразить U через P

$$U = U_0 \pm (P - P_0) \sqrt{\frac{2V_0}{(\gamma + 1)P + (\gamma - 1)P_0}}. \quad (7.3)$$

Из уравнений (1.110)–(1.112) находится W

$$W = (P - P_0)/(U - U_0). \quad (7.4)$$

Затем V выражается через уже определённые U и W

$$V = V_0 - (U - U_0)/W, \quad (7.5)$$

и, наконец, E

$$E = E_0 + \frac{(P + P_0)(U - U_0)^2}{2(P - P_0)}. \quad (7.6)$$

В случае сильной ударной волны отношение P_0 к P равно 0 и уравнения (7.2)–(7.6) упрощаются

$$P = \frac{(\gamma + 1)(U - U_0)^2}{2V_0}, \quad U = U_0 \pm \sqrt{\frac{2PV_0}{\gamma + 1}}, \quad (7.7)$$

$$W = P/(U - U_0), \quad (7.8)$$

$$V = V_0 - (U - U_0)^2/P, \quad E = 0,5(U - U_0)^2. \quad (7.9)$$

Из (7.7) и (7.9) следует, что на сильной ударной волне достигается предельное сжатие

$$V = V_0 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (7.10)$$

и в переменных P, V ударная адиабата имеет вид вертикальной линии.

В случае конденсированного вещества простейшее уравнение состояния имеет вид

$$P = (n - 1)\rho E + C_{0k}^2 (\rho - \rho_{0k}), \quad (7.11)$$

где $\rho = 1/V$ – плотность вещества, ρ_{0k} – плотность в точке с координатами $T = 0, P = 0, C_{0k}$ – скорость звука в этой точке. Для УРС (7.11) уравнения на разрыве (1.110)–(1.111) и (1.115) преобразуются к уравнению ударной адиабаты

$$P = P_0 + \frac{n+1}{4}\rho_0\Delta U^2 + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\rho_0\Delta U^2\right)^2 + \rho_0\Delta U^2(nP_0 + \rho_{0k}C_{0k}^2)}. \quad (7.12)$$

Обратная зависимость $U(P)$ имеет вид

$$U = U_0 \pm \frac{P - P_0}{\sqrt{\rho_0 \left(\frac{n+1}{2}(P - P_0) + nP_0 + \rho_{0k}C_{0k}^2 \right)}}. \quad (7.13)$$

Выражения для W, V и E (7.4)–(7.6) остаются без изменений. В случае сильной ударной волны в конденсированном веществе зависимости $P(U)$ и $U(P)$ получаются из (7.12) и (7.13) при $P_0 = 0$, выражения же для W, V и E не изменяются. Зависимость $V(P)$, имеющая для сильной ударной волны в идеальном газе вид (7.10), в случае конденсированного вещества изменяется

$$V = V_0 \frac{(n-1)P + 2\rho_{0k}C_{0k}^2}{(n+1)P + 2\rho_{0k}C_{0k}^2}. \quad (7.14)$$

Т. о. в конденсированном веществе сила ударной волны определяется не только малостью P_0 , но также и величиной $\rho_{0k}C_{0k}^2$. Если $P \ll \rho_{0k}C_{0k}^2$, то

$$V \sim V_0, \text{ если же } P \gg \rho_{0k}C_{0k}^2, \text{ то } V \sim V_0 \frac{n-1}{n+1}.$$

Рассмотрим далее несколько задач, в которых главным объектом исследования является стационарная ударная волна. Для удобства все величины, входящие в уравнения (7.1)–(7.14), будем рассматривать в безразмерном виде. Поэтому и в газе, и в конденсированном веществе начальная безразмерная плотность равна единице. Переход к плотности с размерностью г/см^3 совершается путём умножения на постоянную

величину, использованную при переходе к безразмерной плотности. Аналогично следует поступать со всеми остальными величинами.

Задача № 1. Сильная ударная волна в одноатомном газе. В области $0 \leq x_0 \leq 1$ в момент $t=0$ находится одноатомный идеальный газ с уравнением состояния (7.1) и параметрами $\gamma = 5/3$, $P_0 = 0$, $\rho_0 = 1$, $E_0 = 0$, $U_0 = 0$. Величина x_0 – это эйлерова координата в момент $t=0$. При расчётах по разностной схеме в лагранжевых координатах величина x_0 является лагранжевой координатой. При $t > 0$ на левой границе ($x_0 = 0$) задана скорость $U_g(t) = 1$, на правой границе ($x_0 = 1$) $U=0$.

Величины за фронтом ударной волны, и скорость фронта W определяются из уравнений (7.7)–(7.9) $\rho = 4$, $E = 0,5$, $P = 4/3$, $W = 4/3$. В момент $t = 0,375$ ударная волна находится в точке с координатой $x_0 = 0,5$, аналитическое решение определяется величинами

$$\begin{aligned} P = 1,33333, \rho = 4,0, E = 0,5, U = 1,0 & \quad \text{при } x_0 \leq 0,5, \\ P = 0, \rho = 1,0, E = 0, U = 0 & \quad \text{при } x_0 \geq 0,5. \end{aligned}$$

На рис. 7.1–7.4 приведены профили $P(x_0)$, $U(x_0)$, $\rho(x_0)$ и $E(x_0)$ в момент $t = 0,375$. Сплошная линия — аналитическое решение, маркеры – расчёт по разностной схеме из [4]. Все расчёты проводились на равномерной по x_0 сетке с числом точек $N=100$ и с числом куранта, равным 0,5. Значение дистракции, определённое по алгоритму, изложенному в главе 4, равно $D = 3F$, где $F \approx 1$ зависит от УРС, от соотношения шагов по времени и по пространству и от разностной схемы.

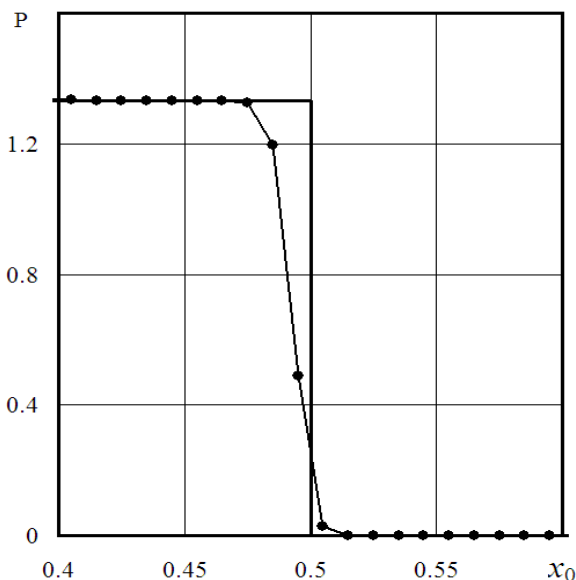


Рис. 7.1. Задача 1. Зависимость $P(x_0)$ в момент $t = 0,375$

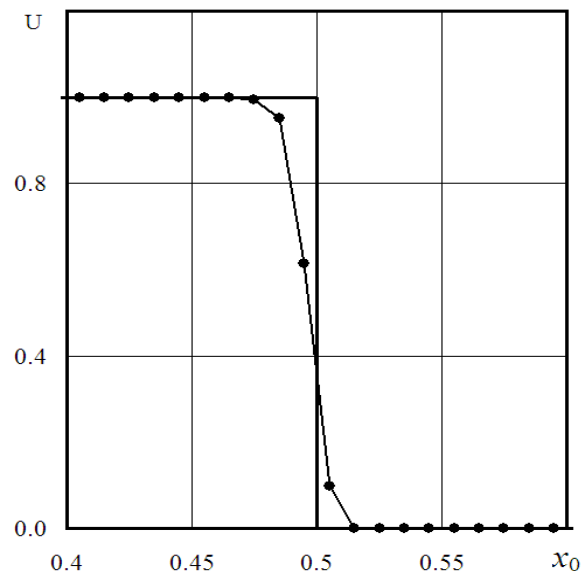


Рис. 7.2. Задача 1. Зависимость $U(x_0)$ в момент $t = 0,375$

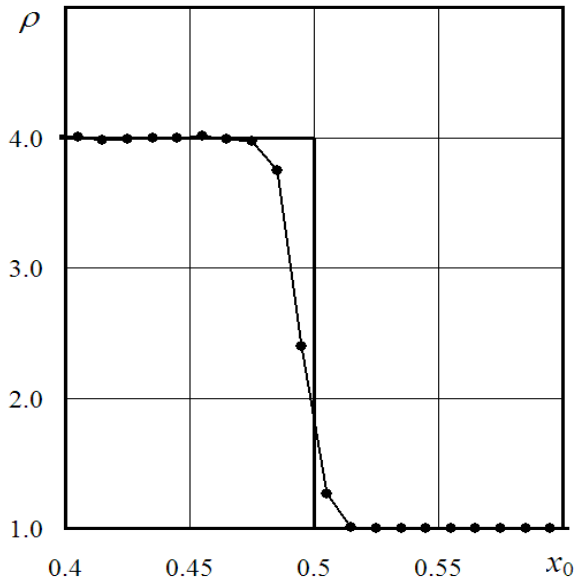


Рис. 7.3. Задача 1. Зависимость $\rho(x_0)$ в момент $t = 0,375$

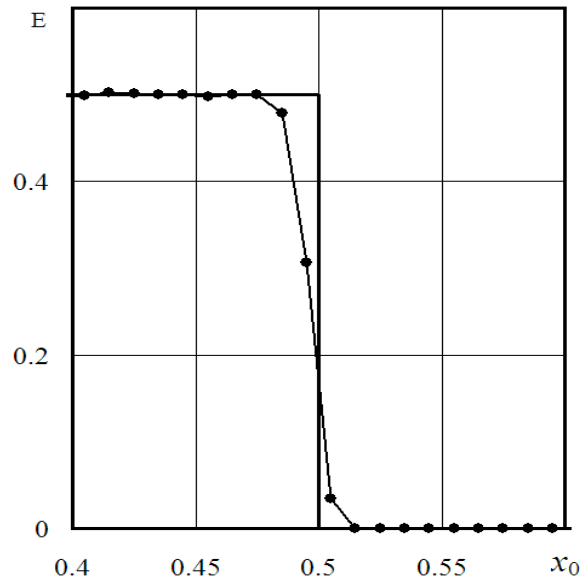


Рис. 7.4. Задача 1. Зависимость $E(x_0)$ в момент $t = 0,375$

Задача № 2. Сильная ударная волна в многоатомном газе. В задаче 1 сжатие газа за ударной волной равно 4. Рассмотрим теперь многоатомный идеальный газ (7.1) (этилен) с $\gamma = 1,25$. Все остальные параметры возьмём, как в задаче 1: $\rho_0 = 1$, $P_0 = 0$, $E_0 = 0$, $U_0 = 0$. Граничные условия возьмём такие же, как в задаче 1 $U(x_0 = 0, t) = 1$, $U(x_0 = 1, t) = 0$.

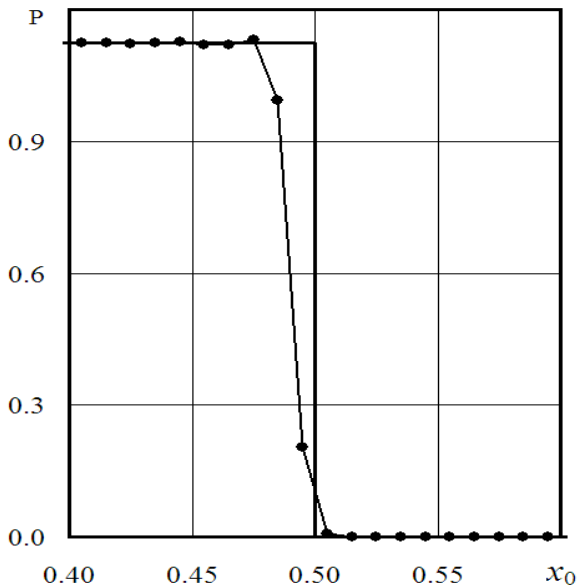


Рис. 7.5. Задача 2. Зависимость $P(x_0)$ в момент $t = 0,44444$

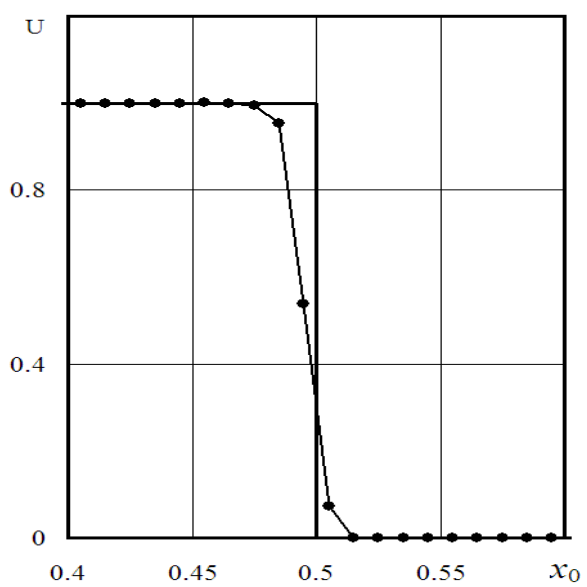


Рис. 7.6. Задача 2. Зависимость $U(x_0)$ в момент $t = 0,44444$

Величины за фронтом ударной волны и скорость фронта определяются из уравнений (7.7)–(7.9): $\rho = 9$, $E = 0,5$, $P = 1,125$, $W = 1,125$. В момент $t = 0,44444$ ударная волна находится в точке с координатой $x_0 = 0,5$,

аналитическое решение задачи 2 в момент $t = 0,44444$ определяется величинами

$$\begin{aligned} P = 1,125, \rho = 9,0, E = 0,5, U = 1 & \quad \text{при } x_0 \leq 0,5, \\ P = 0, \rho = 1,0, E = 0, U = 0 & \quad \text{при } x_0 \geq 0,5. \end{aligned}$$

Значение дистракции, определённое по алгоритму, изложенному в главе 4, равно $D = 3F$. На рис. 7.5–7.8 приведены зависимости $P(x_0)$, $U(x_0)$, $\rho(x_0)$, $E(x_0)$. Сплошная линия — — аналитическое решение, маркеры — расчёты по разностной схеме из [4]. Расчёты проводились на равномерной по x_0 сетке с числом точек $N=100$ и с числом куранта равным 0,5.

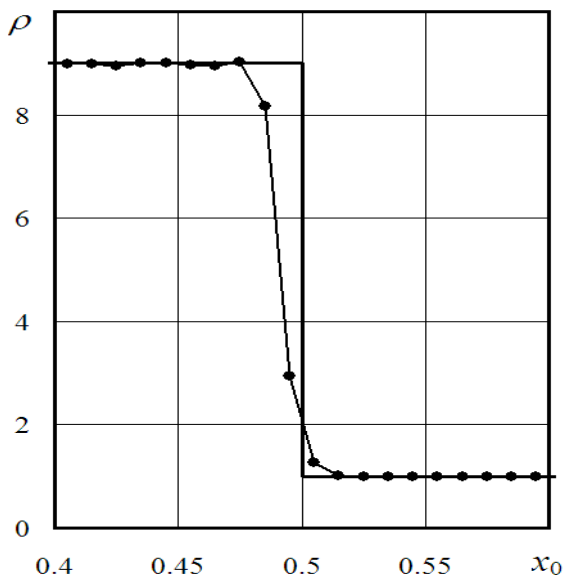


Рис. 7.7. Задача 2. Зависимость $\rho(x_0)$ в момент $t = 0,44444$

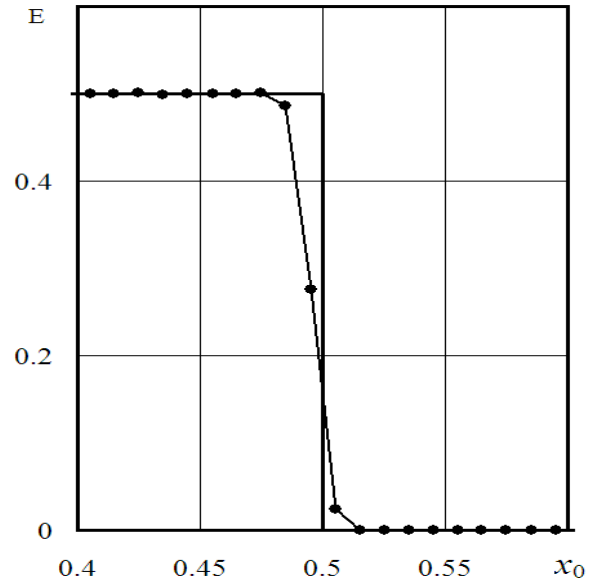


Рис. 7.8. Задача 2. Зависимость $E(x_0)$ в момент $t = 0,44444$

Задача № 3. Слабая ударная волна в одноатомном газе. В области $0 \leq x_0 \leq 1$ в момент $t = 0$ находится одноатомный идеальный газ с уравнением состояния (7.1) и параметрами $\gamma = 5/3$, $\rho_0 = 1$, $P_0 = 1$, $E_0 = 1,5$, $U_0 = 0$. При $t > 0$ на левой границе при $x_0 = 0$ задана скорость $U = 0,5$, на правой границе при $x_0 = 1$ $U = 0$. Величины за фронтом ударной волны и скорость фронта определяются из уравнений (7.2)–(7.6): $\rho = 1,428573$, $E = 1,925$, $P = 1,833333$, $W = 1,666666$. Аналитическое решение задачи в момент $t = 0,3$ определяется величинами

$$\begin{aligned} P = 1,83333, \rho = 1,42857, E = 1,925, U = 0,5 & \quad \text{при } x_0 \leq 0,5, \\ P = 1,0, \rho = 1,0, E = 1,50, U = 0 & \quad \text{при } x_0 \geq 0,5. \end{aligned}$$

Ожидаемое значение дистракции, определённое по алгоритму, изложенному в главе 4, равно $D = 11,2F$. На рис. 7.9–7.12 приведены зависимости $P(x_0)$, $U(x_0)$, $\rho(x_0)$ и $E(x_0)$ в момент времени $t = 0,3$. Сплошная линия — — аналитическое решение, маркеры — расчёты по разностной

схеме из [4]. Расчёты проводились на равномерной по x_0 сетке с числом точек $N=100$ и с числом куранта, равным 0,5.

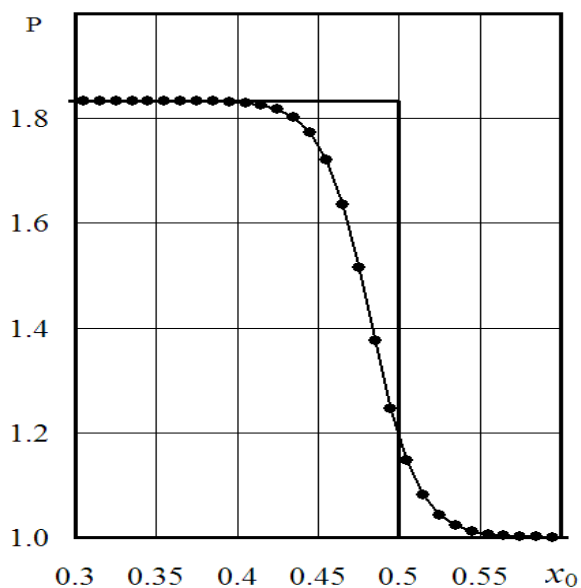


Рис. 7.9. Задача 3. Зависимость $P(x_0)$ в момент $t = 0,3$

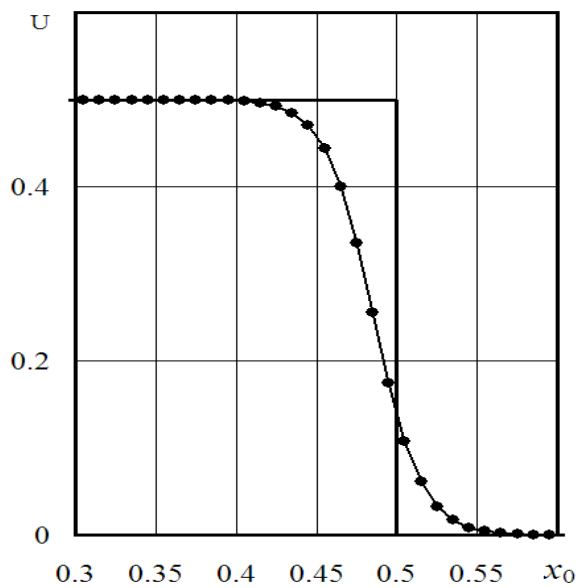


Рис. 7.10. Задача 3. Зависимость $U(x_0)$ в момент $t = 0,3$

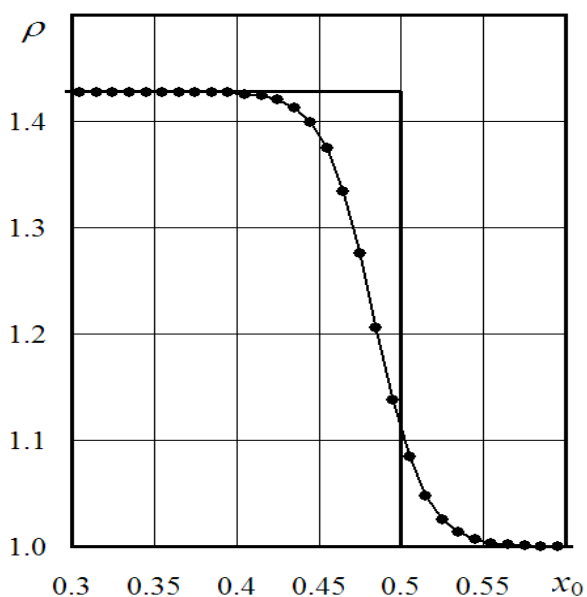


Рис. 7.11. Задача 3. Зависимость $\rho(x_0)$ в момент $t = 0,3$

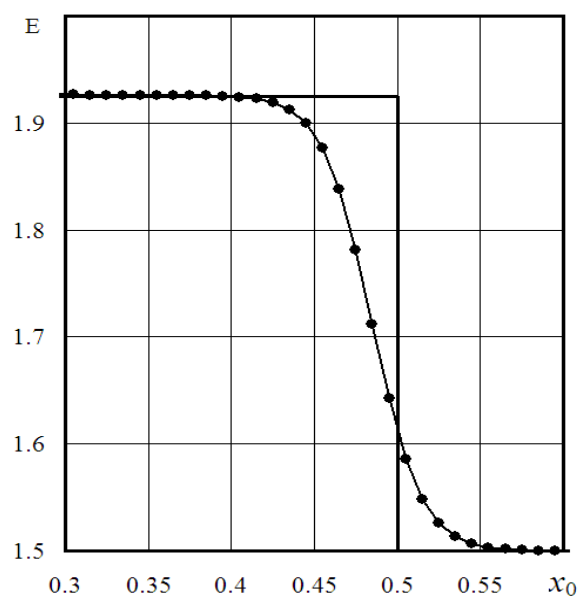


Рис. 7.12. Задача 3. Зависимость $E(x_0)$ в момент $t = 0,3$

Задача № 4. Сильная ударная волна в конденсированном веществе. В области $0 \leq x_0 \leq 1$ в момент $t = 0$, находится конденсированное вещество с уравнением состояния (7.11), которое при $\rho_{ok} = 1, C_{ok} = 1$ имеет вид

$$P = (n-1)\rho E + \rho - 1, \quad (7.15)$$

где P – безразмерное давление $P / \rho_{ok} C_{ok}^2$, ρ – безразмерная плотность ρ / ρ_{ok} , E – безразмерная удельная внутренняя энергия E / C_{ok}^2 . При $t = 0$ вещество имеет следующие параметры: $\rho_0 = 1, E_0 = 0, P_0 = 0, U_0 = 0, n = 3$. При $t > 0$

на левой границе при $x_0 = 0$ задана скорость $U_g = 2$, на правой границе при $x_0 = 1$ $U = 0$. Уравнение для безразмерного давления P получается из (7.12)

$$P = \frac{n+1}{4} \rho_0 U^2 + \sqrt{\left(\frac{n+1}{4} \rho_0 U^2\right)^2 + \rho_0 U^2}. \quad (7.16)$$

Из (7.8), (7.9) и (7.16) получаются $P = 8,472136$, $\rho = 1,89443$, $E = 2,0$, $W = 4,236068$. Аналитическое решение задачи 4 в момент $t = 0,118034$ определяется значениями

$$\begin{aligned} P = 8,47214, \rho = 1,89443, E = 2,0, U = 2,0 & \quad \text{при } x_0 \leq 0,5, \\ P = 0, \rho = 1,0, E = 0, U = 0 & \quad \text{при } x_0 \geq 0,5. \end{aligned}$$

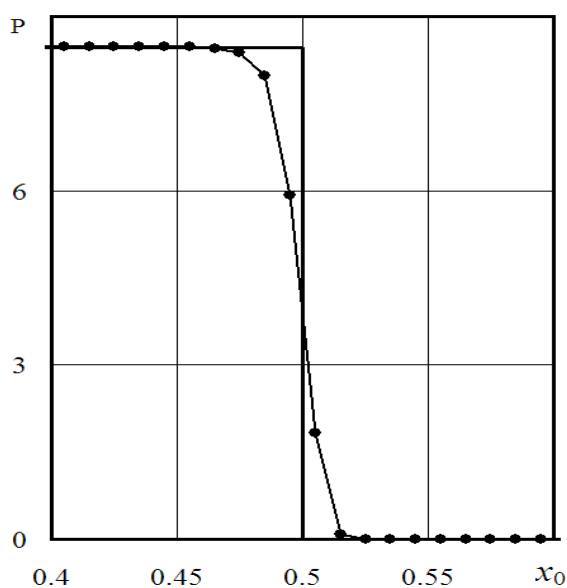


Рис. 7.13. Задача 4. Зависимость $P(x_0)$ в момент $t = 0,118034$

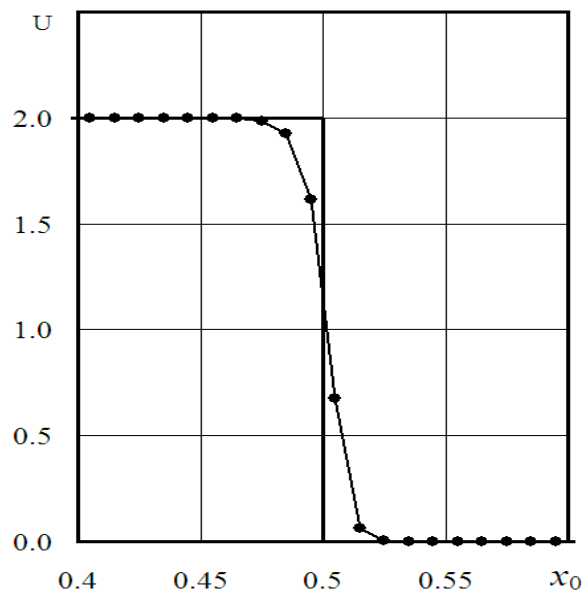


Рис. 7.14. Задача 4. Зависимость $U(x_0)$ в момент $t = 0,118034$

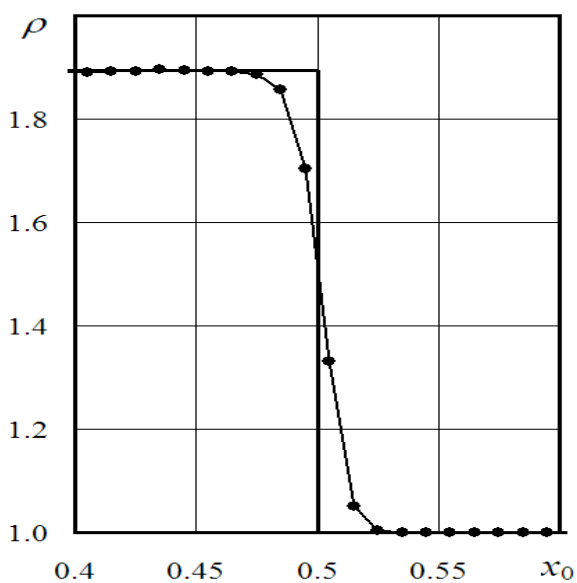


Рис. 7.15. Задача 4. Зависимость $\rho(x_0)$ в момент $t = 0,118034$

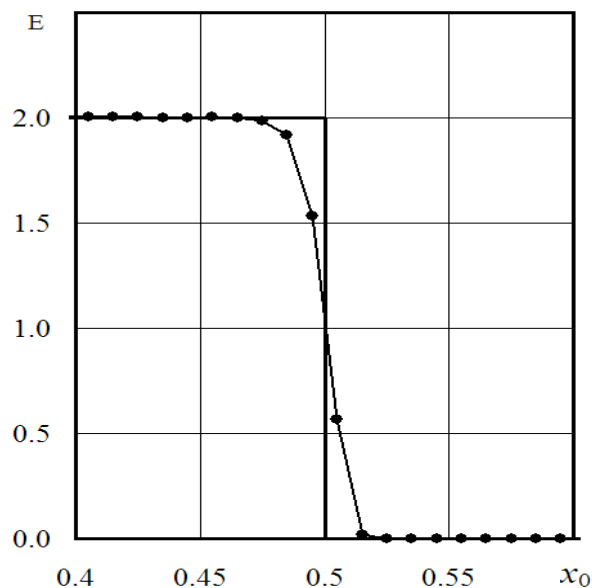


Рис. 7.16. Задача 4. Зависимость $E(x_0)$ в момент $t = 0,118034$

Ожидаемое значение дистракции равно $D = 8,3F$. На рис. 7.13–7.16 приведены зависимости $P(x_0)$, $U(x_0)$, $\rho(x_0)$, $E(x_0)$ в момент $t = 0,118034$. Сплошная линия — — аналитическое решение, маркеры — результат расчёта по разностной схеме из [4]. Расчёты проводились на равномерной по x_0 сетке с числом точек $N=100$ и с числом куранта, равным 0,5.

Задача № 5. Слабая ударная волна в конденсированном веществе. При $t = 0$ в области $0 \leq x_0 \leq 1$ вещество с УРС (7.15) имеет следующие параметры: $\rho_0 = 1$, $E_0 = 2$, $P_0 = 4$, $U_0 = 0$, $n = 3$. При $t > 0$ скорость на левой границе $U = 1$, на правой границе $U = 0$. Величины за ударной волной таковы: $P = 8,741657$, $\rho = 1,267261$, $E = 3,343587$, $W = 4,741657$.

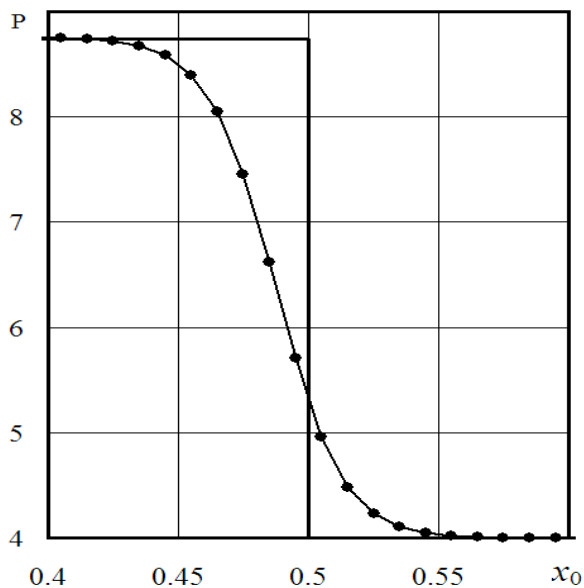


Рис. 7.17. Задача 5. Зависимость $P(x_0)$ в момент $t = 0,105448$

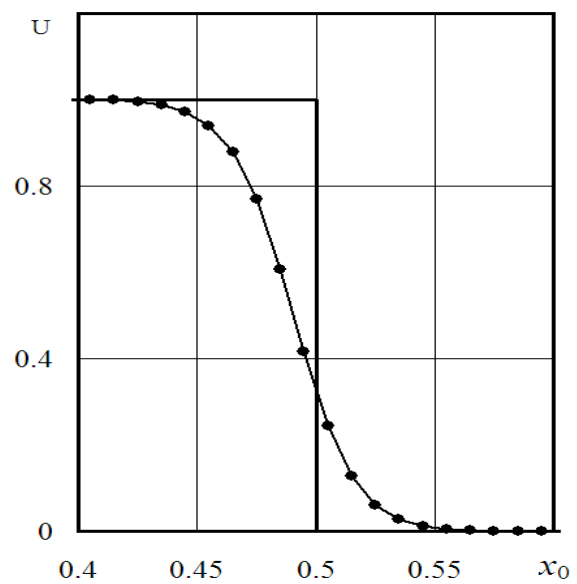


Рис. 7.18. Задача 5. Зависимость $U(x_0)$ в момент $t = 0,105448$

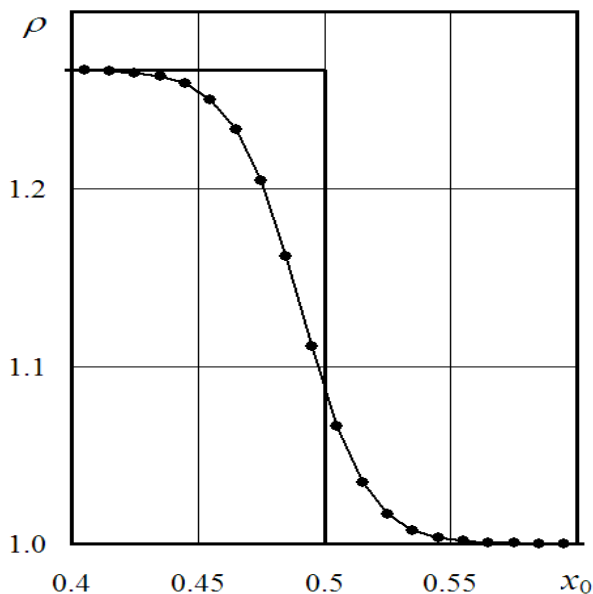


Рис. 7.19. Задача 5. Зависимость $\rho(x_0)$ в момент $t = 0,105448$

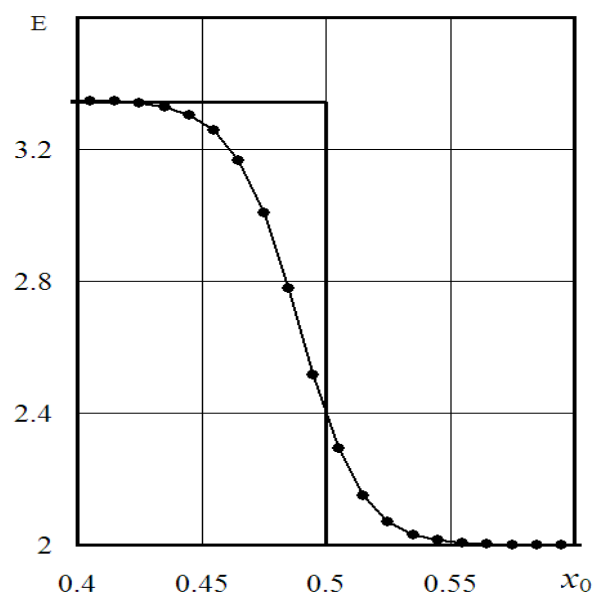


Рис. 7.20. Задача 5. Зависимость $E(x_0)$ в момент $t = 0,105448$

Аналитическое решение задачи 5 в момент $t = 0,105448$ определяется значениями

$$\begin{aligned} P = 8,74166, \rho = 1,26726, E = 3,34359, U = 1,0 & \quad \text{при } x_0 \leq 0,5, \\ P = 4,0, \rho = 1,0, E = 2,0, U = 0 & \quad \text{при } x_0 \geq 0,5. \end{aligned}$$

Ожидаемое значение дистракции $D = 17F$. На рис. 7.17–7.20 приведены зависимости $P(x_0)$, $U(x_0)$, $\rho(x_0)$, $E(x_0)$ в момент $t = 0,105448$. Сплошная линия — — аналитическое решение, маркеры — результат расчёта по разностной схеме из [4]. Расчёты проводились на равномерной по x_0 сетке с числом точек $N=100$ и с числом куранта, равным 0,5.

§ 3. Волна разрежения

Рассмотрим законы сохранения в характеристической форме (6.14), (6.15) и (6.17). Ограничимся случаями, когда волна разрежения распространяется по постоянному фону и симметрия движения плоская. В этом случае уравнения вдоль первого, второго и третьего характеристических направлений (глава 6) принимают вид

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_{1,2} \pm \rho C \left(\frac{dU}{dt}\right)_{1,2} = 0, \quad \left(\frac{dP}{dt}\right)_3 - C^2 \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_3 = 0. \quad (7.17)$$

Сами же характеристические направления определяются уравнениями (6.14). Уравнения (7.17) содержат три термодинамических величины P , ρ , C . Поскольку энтропия во всём течении постоянна, то с помощью уравнения состояния идеального газа

$$P = f(S)\rho^\gamma \quad (7.18)$$

можно ρ и C выразить через P и проинтегрировать первые два уравнения (7.17).

Уравнения (7.17) с помощью УРС (7.18) преобразуются следующим образом. В выражениях для квадрата скорости звука в текущем и исходном состояниях

$$C^2 = \gamma f(S)\rho^{\gamma-1}, \quad C_0^2 = \gamma f(S)\rho_0^{\gamma-1} \quad (7.19)$$

исключим энтропийную функцию $f(S)$. В результате получим зависимость плотности ρ от скорости звука

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{C}{C_0}\right)^{2/(\gamma-1)}. \quad (7.20)$$

Из (7.18), (7.19) и (7.20) следует зависимость давления от скорости звука

$$P = P_0 \left(\frac{C}{C_0}\right)^{2\gamma/(\gamma-1)}. \quad (7.21)$$

Подставим (7.19)–(7.21) в (7.17) и запишем эти уравнения в виде

$$\frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{dC}{dt} \right)_{1,2} \pm \left(\frac{dU}{dt} \right)_{1,2} = 0.$$

Проинтегрировав эти уравнения получим, что вдоль первого характеристического направления

$$\frac{dx}{dt} = U + C \quad (7.22)$$

справедливо уравнение

$$\frac{2}{\gamma-1} C + U = \text{const}, \quad (7.23)$$

а вдоль второго характеристического направления

$$\frac{dx}{dt} = U - C \quad (7.24)$$

справедливо уравнение

$$\frac{2}{\gamma-1} C - U = \text{const}. \quad (7.25)$$

Величины, стоящие в левых частях (7.23) и (7.25), называются инвариантами Римана

$$\alpha = U + \frac{2}{\gamma-1} C, \quad \beta = U - \frac{2}{\gamma-1} C. \quad (7.26)$$

Выразим U и C и наклоны характеристик (7.22) и (7.24) через α и β (7.26)

$$U = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad C = \frac{\gamma-1}{4}(\alpha - \beta), \quad (7.27)$$

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_1 = \frac{\gamma+1}{4}\alpha + \frac{3-\gamma}{4}\beta, \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)_2 = \frac{3-\gamma}{4}\alpha - \frac{\gamma+1}{4}\beta. \quad (7.28)$$

Величина $\alpha = \text{const}$ вдоль характеристики первого семейства, $\beta = \text{const}$ – вдоль характеристики второго семейства. Если инвариант противоположного семейства в (7.27) и (7.28) постоянен, то из уравнений (7.27) и (7.28) следует, что характеристика прямая линия, на которой $U = \text{const}$, $C = \text{const}$.

При $t = 0$ в покоящемся ($U_0 = 0$) в области OA газе (рис. 7.21) заданы давление P_0 и плотность ρ_0 и, значит, скорость звука C_0 и энтропийная функция f_0 . При $t > 0$ левая граница OF области, в которой находится газ, двигается с постоянной отрицательной скоростью. Характеристика 1^{10} семейства, OC , выходящая из точки O , является границей исходного состояния газа. Она определяется уравнением

$$x = x_* + C_0 t,$$

где x_* – координата точки О.

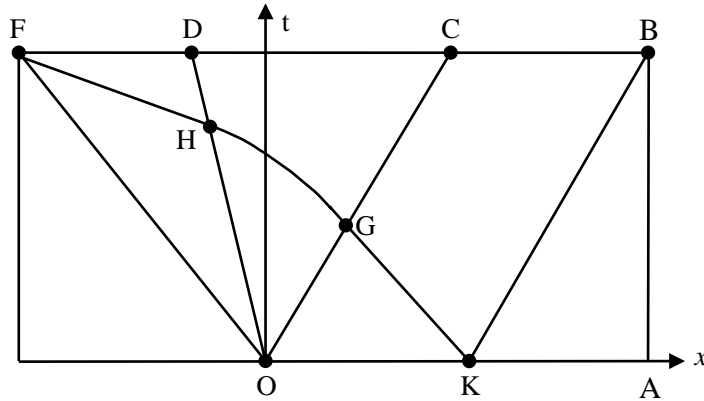


Рис. 7.21. Траектории слабых разрывов ОС и OD, левой границы OE, правой границы AB, характеристики 1^{го} семейства KB и характеристики 2^{го} семейства KGHF

Левее характеристики ОС находится область волны разрежения OCD, ограниченная слева характеристикой 1^{го} семейства OD. Между характеристикой OD и границей OF лежит область постоянного течения. Скорость газа в этой области равна скорости границы $U_F = \text{const}$. Характеристика второго семейства KGHF, начинаясь в произвольной точке К исходной области, выходит на границу. Вдоль неё сохраняется β инвариант

$$\frac{2}{\gamma-1} C_F - U_F = \frac{2}{\gamma-1} C_0.$$

Поскольку скорость границы задана, то это уравнение позволяет определить скорость звука на границе

$$C_F = C_0 + \frac{\gamma-1}{2} U_F.$$

Значение скорости звука в газе не может быть отрицательным. Минимальное значение $C_F = 0$ соответствует скорости истечения газа в вакуум

$$-\frac{2}{\gamma-1} C_0 \leq U_F \leq 0.$$

Т. о. в области ODF $U = U_F$, $C = C_F$. Поэтому зависимости (7.20) и (7.21) принимают вид

$$\rho_F = \rho_0 \left(\frac{C_F}{C_0} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad P_F = P_0 \left(\frac{C_F}{C_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}},$$

а из уравнения состояние идеального газа в виде (7.1) и (7.18) находятся E_F, f_F

$$E_F = \frac{P_F}{(\gamma-1)\rho_F}, \quad f_F = P_F/\rho_F^\gamma.$$

Рассмотрим теперь область волны разрежения OCD. Все характеристики первого семейства в этой области – это прямые линии, выходящие из точки O и имеющие уравнение

$$x = x_* + (U + C)t. \quad (7.29)$$

Справа в эту область входят характеристики 2^{го} семейства KGHF, вдоль которых U и C связаны уравнением

$$\frac{2}{\gamma-1}C - U = \frac{2}{\gamma-1}C_0. \quad (7.30)$$

Из (7.29) и (7.30) следуют зависимости U и C от t и x в области волны разрежения

$$U = \frac{2}{\gamma+1} \frac{x-x_*}{t} - \frac{2}{\gamma+1}C_0, \quad C = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \cdot \frac{x-x_*}{t} + \frac{2}{\gamma+1}C_0. \quad (7.31)$$

Из (7.31) видно, что в области волны разрежения OCD U и C линейно зависят от x и в этой области

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_t = \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{t}, \quad \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_t = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{1}{t}.$$

В примыкающих к волне разрежения областях OABC и ODF по условиям задачи

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_t = 0, \quad \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_t = 0.$$

Таким образом, характеристики OC и OD являются слабыми разрывами (см. главу 1). Поскольку свойства этих слабых разрывов различны, то в качестве критерия для их различия введём величину

$$F = \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x+\varepsilon} - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x-\varepsilon} \right) \left(\frac{dx}{dt} - U \right),$$

где x – координата точки на слабом разрыве, $\frac{dx}{dt}$ – скорость слабого

разрыва, ε – малое число. Если $F < 0$, то слабый разрыв является слабым разрывом типа 2, если же $F > 0$, то типа 3. Очевидно, что при $F = 0$ слабого разрыва нет.

Уравнения (7.31) определяют зависимости U и C от x и t в волне разрежения. Подставив $C(x, t)$ из (7.31) в (7.20) и (7.21), получим зависимости ρ и P от x и t

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{x - x_*}{C_0 t} + \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{2/(\gamma - 1)}, \quad P = P_0 \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{x - x_*}{C_0 t} + \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{2\gamma/(\gamma - 1)}. \quad (7.32)$$

Рассмотрим несколько эталонных задач, в которых рассчитываются волны разрежения.

Задача № 6. Истечение одноатомного идеального газа в вакуум. В области $0 \leq x_0 \leq 1$ задан идеальный газ (7.1) с $\gamma = 5/3$. На правой границе при $x_0 = 1$ задана скорость $U = 0$, на левой границе при $x_0 = 0$ задано давление $P = 0$. Параметры газа при $t = 0$, $P_0 = 15$, $\rho_0 = 1,0$, $E_0 = 22,5$, $U_0 = 0$, $C_0 = 5$, $f(S)_0 = 15$. Предельная скорость границы, определённая по уравнению (7.28) при $C_F = 0$, равна $U_F = -15$. В этом случае слабый разрыв OD типа 3 совпадает с границей (область постоянного течения между ними отсутствует). Траектории слабых разрывов и границы в этой задаче определяются уравнениями $x_C = 5t$, $x_D = -15t$, $x_F = -15t$. В области OABC сохраняются исходные значения P_0 , ρ_0 , U_0 , C_0 . В области волны разрежения величины определяются из уравнений (7.31) и (7.32) и при $x_* = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \rho &= \left(\frac{x}{20t} + \frac{3}{4} \right)^3, & P &= 15 \left(\frac{x}{20t} + \frac{3}{4} \right)^5, \\ C &= 1.25 \left(\frac{x}{5t} + 3 \right), & U &= 0.75 \left(\frac{x}{t} - 5 \right). \end{aligned} \quad (7.33)$$

Заменим зависимости P , ρ , C , U от x и t , зависимостями P , ρ , C , U от x_0 и t . Величины x и x_0 связаны уравнением

$$\rho_0 x_0 = \int_{-15t}^x \rho(x) dx.$$

Подставим сюда $\rho(x, t)$ из (7.33). Затем проинтегрируем и получим зависимость x от x_0

$$\frac{x}{20t} + \frac{3}{4} = \left(\frac{x_0}{5t} \right)^{1/4}.$$

С помощью этого выражения запишем (7.33) в виде

$$\begin{aligned} \rho &= \left(\frac{x_0}{5t}\right)^{3/4}, & P &= 15 \left(\frac{x_0}{5t}\right)^{5/4}, \\ C &= 5 \left(\frac{x_0}{5t}\right)^{1/4}, & U &= 15 \left(\left(\frac{x_0}{5t}\right)^{1/4} - 1 \right). \end{aligned} \quad (7.34)$$

В момент $t = 0,1$ аналитическое решение принимает вид

$$P = 15(2x_0)^{5/4}, \quad \rho = (2x_0)^{3/4}, \quad U = 15 \left((2x_0)^{1/4} - 1 \right) \quad \text{при } 0 \leq x_0 \leq 0,5,$$

$$P = 15, \quad \rho = 1,0, \quad U = 0 \quad \text{при } 0,5 \leq x_0 \leq 1.$$

Зависимости $P(x_0)$ и $U(x_0)$ в момент $t=0,1$ приведены на рис. 7.22, 7.23 (сплошная линия). Маркерами, соединёнными тонкой линией, изображены результаты расчётов по разностной схеме из [5]. Расчёты проводились на равномерной по x_0 сетке с числом точек $N=100$ и с числом куранта, равным $0,5$. Кроме зависимостей $P(x_0)$ и $U(x_0)$ в момент $t = 0,1$ следует сравнить зависимость энтропийной функции $f(x) = P(x_0)/\rho(x_0)^\gamma$ с аналитическим значением $f = 15$. Одним из критериев качества разностной схемы является величина

$$F = \sum_{i=0}^N \left(1 - \frac{f_i}{15} \right)^2 \rho_i \Delta x_i,$$

где i – номер сеточного интервала.

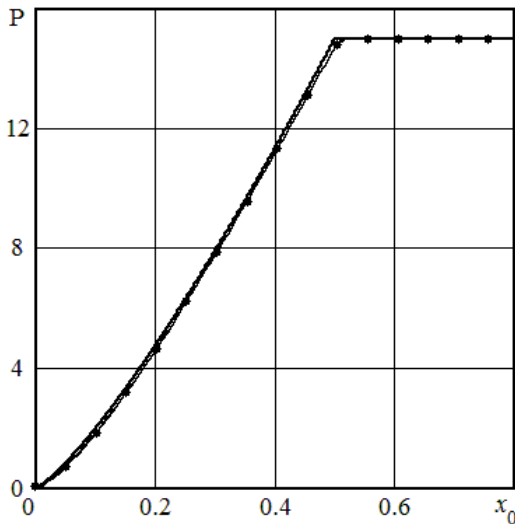


Рис. 7.22. Задача 6. Зависимость $P(x_0)$ в момент $t = 0,1$

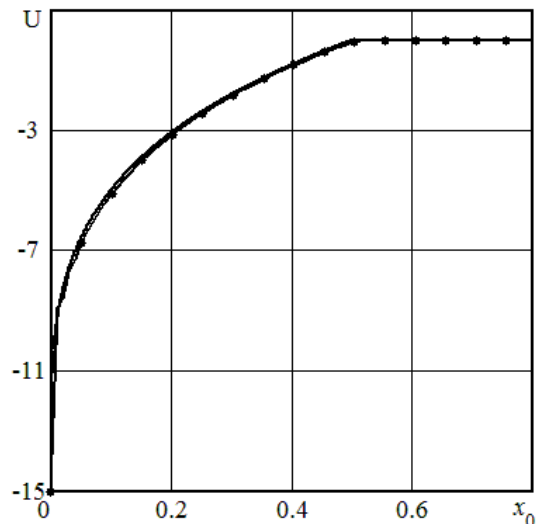


Рис. 7.23. Задача 6. Зависимость $U(x_0)$ в момент $t = 0,1$

Задача № 7. Сильная волна разрежения в одноатомном идеальном газе (7.1) с $\gamma = 5/3$. Начальные значения параметров газа в области $0 \leq x_0 \leq 1$ $P_0 = 15$, $\rho_0 = 1$, $E_0 = 22,5$, $U_0 = 0$, $C_0 = 5$, $f(S)_0 = 15$. На правой границе ($x_0 = 1,0$) задана скорость $U = 0$, на левой границе $U_F = -6$. Скорость звука в области постоянного течения ODF равна $C_F = 3$.

Траектории слабых разрывов границы в этой задаче определяются уравнениями $x_C = 5t$, $x_D = -3t$, $x_F = -6t$. В области волны разрежения OCD зависимости $P(x)$, $\rho(x)$, $S(x)$, $U(x)$ определяются из уравнений (7.32) и аналитическое решение в момент $t = 0,1$ имеет вид

$$\begin{aligned} P = 15,0 \quad \rho = 1,0, \quad U = 0 & \quad \text{при } 0,5 \leq x \leq 1, \\ \rho = (0,5x + 0,75)^3, \quad P = 15\rho^{5/3}, \quad U = 3,75(2x - 1) & \quad \text{при } -0,3 \leq x \leq 0,5, \quad (7.35) \\ P = 1,16640, \quad \rho = 0,2160, \quad U = -6,0 & \quad \text{при } -0,6 \leq x \leq -0,3. \end{aligned}$$

Перейдём к зависимостям P , ρ , S , U от x_0 . Величины x и x_0 связаны уравнением

$$(x_D - x_F)\rho_F + \int_{x_0}^x \rho(x) dx = \rho_0 x_0. \quad (7.36)$$

Подставив сюда $\rho(x, t)$ из (7.32) при $x_* = 0$, $\rho_0 = 1$ и $\gamma = 5/3$ и проинтегрировав, получим при $t = 0,1$ зависимость x от x_0 $(0,5x + 0,75)^4 = 2x_0$. Из (7.35) после замены x на x_0 следует аналитическое решение в момент $t = 0,1$.

$$\begin{aligned} P = 15,0 \quad \rho = 1,0, \quad U = 0 & \quad \text{при } 0,5 \leq x_0 \leq 1, \\ P = 15(2x_0)^{5/4}, \quad \rho = (2x_0)^{3/4}, \quad U = 15((2x_0)^{1/4} - 1) & \quad \text{при } 0,0648 \leq x_0 \leq 0,5, \\ P = 1,16640, \quad \rho = 0,216, \quad U = -6,0 & \quad \text{при } 0 \leq x_0 \leq 0,0648. \end{aligned}$$

Зависимости $P(x_0)$ и $U(x_0)$ приведены на рис. 7.24, 7.25 (сплошные линии). Здесь же приведены результаты расчётов: по разностной схеме из [5], (маркеры, соединённые линией). Расчёты проводились на равномерной по x_0 сетке с числом точек $N = 100$ и с числом Куранта, равным 0,5.

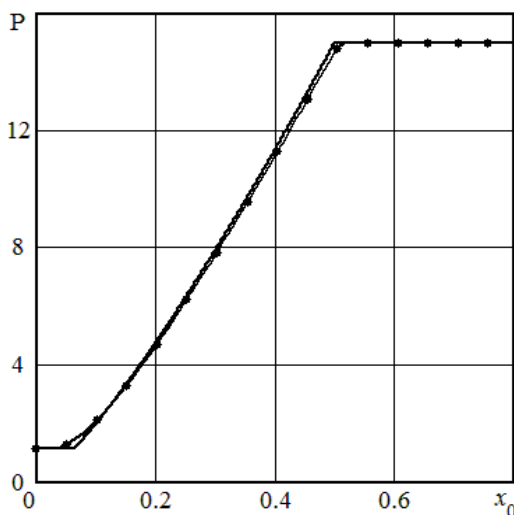


Рис. 7.24. Задача 7. Зависимость $P(x_0)$ в момент $t = 0,1$

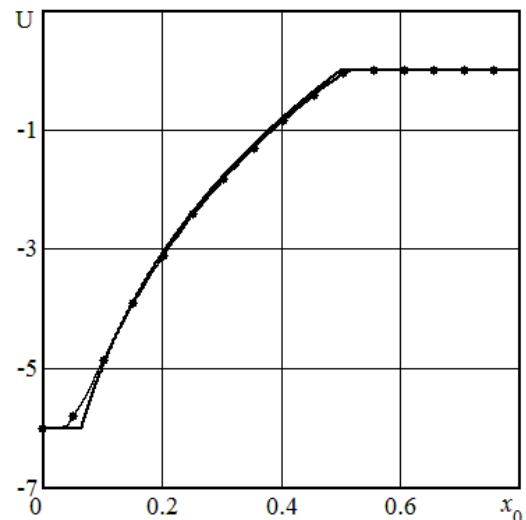


Рис. 7.25. Задача 7. Зависимость $U(x_0)$ в момент $t = 0,1$

Задача № 8. Слабая волна разрежения в одноатомном идеальном газе (7.1) с $\gamma = 5/3$. Начальные значения параметров газа в области $0 \leq x \leq 1$ такие же, как в задаче 6 $P_0 = 15$, $\rho_0 = 1$, $E_0 = 22,5$, $U_0 = 0$, $C_0 = 5$, $f(S)_0 = 15$. На правой границе ($x_0 = 1,0$) задана скорость $U = 0$, на левой границе $U_F = -1,5$. Скорость звука в области ODE постоянного течения, примыкающего к границе OF, равна $C_F = 4,5$. Траектории слабых разрывов и левой границы определяются уравнениями $x_C = 5t$, $x_D = 3t$, $x_F = -1,5t$. В области волны разрежения OCD величины определяются из уравнений (7.32). После замены зависимостей от x зависимостями от x_0 аналитическое решение задачи 8 в момент $t = 0,1$ определяются уравнениями

$$\begin{aligned} P = 15,0 \quad \rho = 1,0, \quad U = 0 & \quad \text{при } 0,5 \leq x_0 \leq 1, \\ P = 15(2x_0)^{5/4}, \quad \rho = (2x_0)^{3/4}, \quad U = 15((2x_0)^{1/4} - 1) & \quad \text{при } 0,3805 \leq x_0 \leq 0,5, \\ P = 8,85735, \quad \rho = 0,7290, \quad U = -1,50 & \quad \text{при } 0 \leq x_0 \leq 0,32805. \end{aligned}$$

Оно приведено на рис. 7.26, 7.27 сплошной линией. Кроме того там же приведены результаты расчётов: по разностной схеме из [5], (маркеры, соединённые линией). Расчёты проводились на равномерной по x_0 сетке с числом точек $N=100$ и с числом куранта, равным 0,5.

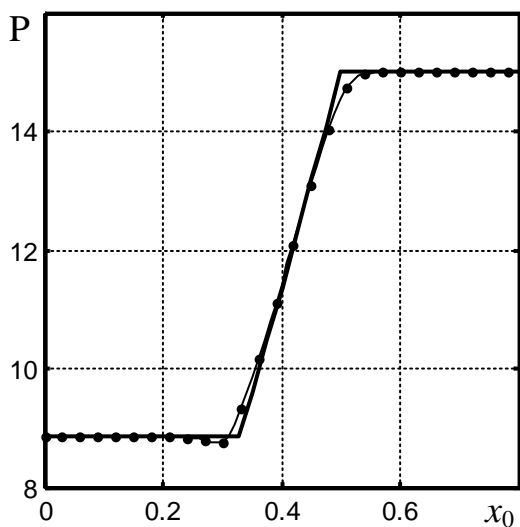


Рис. 7.26. Задача 8. Зависимость $P(x_0)$ в момент $t = 0,1$

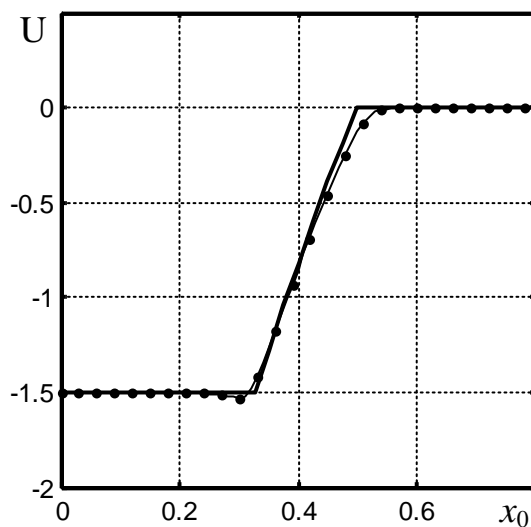


Рис. 7.27. Задача 8. Зависимость $U(x_0)$ в момент $t = 0,1$

Задача № 9. Слабая волна разрежения в многоатомном идеальном газе (7.1) с $\gamma = 1.25$. Начальные значения параметров газа в области $0 \leq x_0 \leq 1$ $P_0 = 20$, $\rho_0 = 1$, $E_0 = 80$, $U_0 = 0$, $C_0 = 5$, $f(S)_0 = 20$. На правой границе ($x_0 = 1,0$) задана скорость $U = 0$, на левой границе $U_F = -1,0$. Скорость звука в области ODF постоянного течения, примыкающего к границе OF, равна $C_F = 4,875$. Траектории слабых разрывов и левой границы определяются уравнениями

$$x_C = 5t, \quad x_D = 3,875t, \quad x_F = -t.$$

В области волны разрежения OCD величины определяются из уравнений (7.33) или (7.34). Аналитическое решение задачи 9 в момент $t = 0,1$ определяются уравнениями

$$P = 20,0 \quad \rho = 1,0, \quad U = 0 \quad \text{при } 0,5 \leq x_0 \leq 1,$$

$$P = 20(2x_0)^{10/9}, \quad \rho = (2x_0)^{8/9}, \quad U = 40\left((2x_0)^{1/9} - 1\right) \quad \text{при } 0,398118 \leq x_0 \leq 0,5,$$

$$P = 15,5266, \quad \rho = 0,816652, \quad U = -1,0 \quad \text{при } 0 \leq x_0 \leq 0,398118.$$

Эти зависимости приведены на рис. 7.28, 7.29 (сплошные линии). Результаты расчётов по разностной схеме из [5] приведены маркерами, соединёнными линией. Расчёты проводились на равномерной по x_0 сетке с числом точек $N=100$ и с числом куранта, равным 0,5. Кроме зависимостей $P(x_0)$ и $U(x_0)$ в момент $t = 0,1$ следует сравнить полученную в расчётах зависимость $f(x_0) = P/\rho^\gamma$ с аналогичным значением $f = 20$.

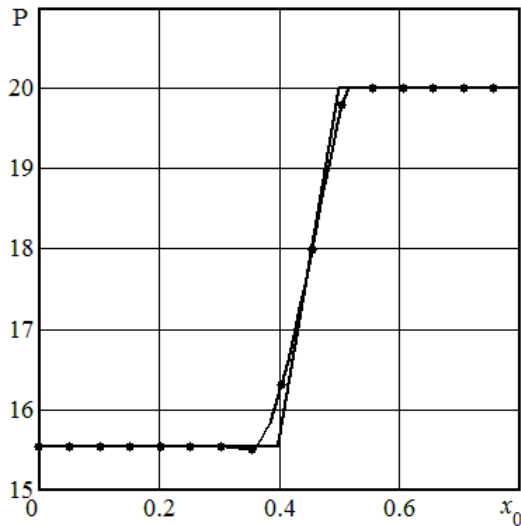


Рис. 7.28. Задача 9. Зависимость $P(x_0)$ в момент $t = 0,1$

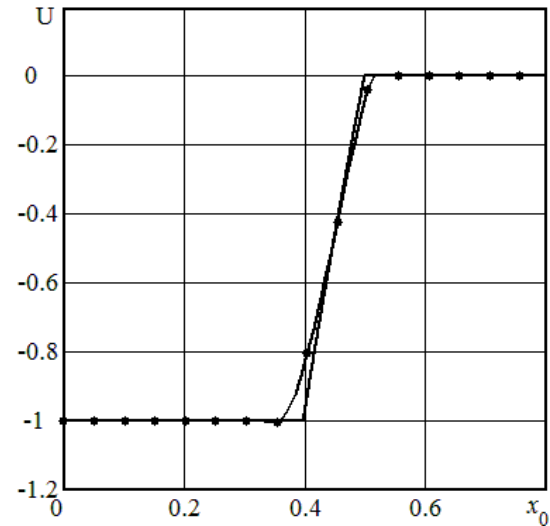


Рис. 7.29. Задача 9. Зависимость $U(x_0)$ в момент $t = 0,1$

Перейдём теперь к рассмотрению волн разрежения в конденсированном веществе с уравнением состояния (7.11). В соответствии с теорией УРС, изложенной в главе 1, давление и удельная внутренняя энергия складываются из тепловых и холодных компонентов

$$P = P_T + P_x, \quad E = E_T + E_x, \quad (7.37)$$

где

$$P_T = (n-1)\rho E_T, \quad P_x = (n-1)\rho E_x + C_{0k}^2 (\rho - \rho_{0k}). \quad (7.38)$$

По определению P_x связано с E_x уравнением

$$P_x = \rho^2 \frac{dE_x}{d\rho}. \quad (7.39)$$

Подставив (7.39) во второе уравнение (7.38), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dE_x}{d\rho} - \frac{n-1}{\rho} E_x = \frac{C_{0k}^2 (\rho - \rho_{0k})}{\rho^2}.$$

Решение этого уравнения после нормировки в точке ρ_{0k} , $E_x = 0$ имеет вид

$$E_x = C_{0k}^2 \left(\frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{\rho}{\rho_{0k}} \right)^{n-1} + \frac{\rho_{0k}}{n\rho} - \frac{1}{n-1} \right). \quad (7.40)$$

Из (7.38) и (7.40) следует зависимость $P_x(\rho)$

$$P_x = \frac{\rho_{0k} C_{0k}^2}{n} \left(\left(\frac{\rho}{\rho_{0k}} \right)^n - 1 \right).$$

Поскольку зависимость $P_T(\rho, E_T)$ (7.38) по форме совпадает с УРС идеального газа (7.1), то в соответствии с (7.37) можно написать

$$P = \frac{\rho_{0k} C_{0k}^2}{n} \left((1+f(S)) \left(\frac{\rho}{\rho_{0k}} \right)^n - 1 \right), \quad (7.41)$$

$$E = \frac{C_{0k}^2}{n-1} \left(\left(\frac{1+f(S)}{n} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_{0k}} \right)^{n-1} + \frac{n-1}{n} \frac{\rho_{0k}}{\rho} - 1 \right).$$

Продифференцировав (7.41), получим выражение для C^2

$$C^2 = C_{0k}^2 (1+f(S)) \left(\frac{\rho}{\rho_{0k}} \right)^{n-1}. \quad (7.42)$$

Начальные параметры жидкости P_0, ρ_0, C_0 подставим в (7.41) и (7.42) и запишем их так

$$1+f(S) = \left(\frac{nP_0}{\rho_{0k} C_{0k}^2} + 1 \right) \left(\frac{\rho_{0k}}{\rho_0} \right)^n, \quad 1+f(S) = \left(\frac{C_0}{C_{0k}} \right)^2 \left(\frac{\rho_{0k}}{\rho_0} \right)^{n-1}. \quad (7.43)$$

С помощью этих выражений исключим энтропийную функцию в (7.41) и (7.42)

$$P = \left(P_0 + \frac{\rho_{0k} C_{0k}^2}{n} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - \frac{\rho_{0k} C_{0k}^2}{n}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{C}{C_0} \right)^{\frac{2}{n-1}}. \quad (7.44)$$

От размерных величин P, ρ, C и U перейдём к безразмерным $\bar{P}, \bar{\rho}, \bar{C}, \bar{U}$ по формулам

$$\bar{P} = \frac{P}{\rho_{0k} C_{0k}^2}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{0k}}, \quad \bar{C} = \frac{C}{C_{0k}}, \quad \bar{U} = \frac{U}{C_{0k}}.$$

Далее у безразмерных величин опустим черту. В результате уравнение для P в (7.44) примет вид

$$P = \frac{nP_0 + 1}{n} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - \frac{1}{n}, \quad (7.45)$$

а уравнение для ρ в (7.44) не изменится. Продифференцировав (7.45), получим выражение для безразмерной скорости звука

$$C^2 = \frac{nP_0 + 1}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{n-1},$$

из которого следует, что при $\rho = \rho_0$

$$\rho_0 C_0^2 = nP_0 + 1. \quad (7.46)$$

С помощью (7.44) и (7.46) запишем (7.45) в виде зависимости P от C

$$P = \frac{\rho_0 C_0^2}{n} \left(\frac{C}{C_0} \right)^{\frac{2n}{n-1}} - \frac{1}{n} \quad (7.47)$$

После подстановки (7.44) и (7.46) в (7.17) получим уравнения

$$\frac{2}{n-1} \left(\frac{dC}{dt} \right)_{1,2} \pm \left(\frac{dU}{dt} \right)_{1,2} = 0.$$

Эти уравнения отличаются от таких же уравнений для идеального газа тем, что вместо γ , которое для идеального газа изменяется в диапазоне $1 \leq \gamma \leq 5/3$, стоит n , которое для конденсированных сред принимает значение $n \approx 2 \div 3$. Следовательно, для жидкости вместо (7.23)–(7.28) получим

$$\frac{2}{n-1} C \pm U = \text{const}, \quad (7.48)$$

$$\alpha = U + \frac{2}{n-1} C, \quad \beta = U - \frac{2}{n-1} C,$$

$$U = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad C = \frac{n-1}{4}(\alpha - \beta),$$

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_1 = \frac{n+1}{4} \alpha + \frac{3-n}{4} \beta, \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)_2 = \frac{3-n}{4} \alpha - \frac{n+1}{4} \beta.$$

Во всех рассматриваемых задачах β инвариант постоянен, что даёт связь U и C вдоль β характеристики

$$U - \frac{2}{n-1}C = -\frac{2}{n-1}C_0. \quad (7.49)$$

Поскольку α инвариант на характеристиках $1^{\text{го}}$ семейства постоянен, то в волне разрежения уравнение α характеристики при $x_* = 0$ имеет вид

$$\frac{x}{t} = U + C. \quad (7.50)$$

Из (7.49), (7.50) получаются зависимости $U(x, t)$ и $C(x, t)$ в волне разрежения

$$U = \frac{2C_0}{n+1} \left(\frac{x}{C_0 t} - 1 \right), \quad (7.51)$$

$$\frac{C}{C_0} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{x}{C_0 t} + \frac{2}{n+1}. \quad (7.52)$$

Подставив (7.50) в (7.42) и (7.45), получим

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{x}{C_0 t} + \frac{2}{n+1} \right)^{2/(n-1)}, \quad (7.53)$$

$$P = \frac{\rho_0 C_0^2}{n} \left(\frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{x}{C_0 t} + \frac{2}{n+1} \right)^{2n/(n-1)} - \frac{1}{n}. \quad (7.54)$$

Связь между эйлеровой координатой x и лагранжевой координатой x_0 получается из уравнения (7.36) после подстановки в него $\rho(x, t)$ (7.53) и интегрирования. Эта связь такова

$$\frac{n-1}{n+1} \frac{x}{C_0 t} + \frac{2}{n+1} = \left(\frac{x_0}{C_0 t} \right)^{(n+1)/(n-1)}. \quad (7.55)$$

После перехода от x к x_0 с помощью уравнения (7.55) зависимости (7.51), (7.53), (7.54) принимают вид

$$P = \frac{\rho_0 C_0^2}{n} \left(\frac{x_0}{C_0 t} \right)^{2n(n+1)} - \frac{1}{n}, \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{x_0}{C_0 t} \right)^{2(n+1)}, \quad (7.56)$$

$$U = \frac{2C_0}{n+1} \left(\left(\frac{x_0}{C_0 t} \right)^{(n-1)/(n+1)} - 1 \right). \quad (7.57)$$

Задача № 10. Истечение конденсированного вещества в вакуум. Уравнение состояния имеет вид (7.15) с показателем степени $n = 3$. Начальные значения параметров жидкости в области $0 \leq x_0 \leq 1$, $P_0 = 1$, $\rho_0 = 1$, $U_0 = 0$. Подставив эти значения в (7.15), (7.43) и (7.46), получим

$C_0=2, E_0=0,5, f(S)_0=3,0$. На правой границе $U = 0$, на левой границе $P = 0$. Предельная скорость левой границы при $P = 0$ равна $U_F = -0,740079$. Значение $C_F = 1,25992$ в области постоянного течения примыкающей к левой границе. В момент $t = 0,25$ координаты слабых разрывов и левой границы таковы (рис. 7.21)

$$x_F = -0,25, x_D = 0, x_C = 0,5.$$

В области волны разрежения ОСД величины определяются из (7.56), (7.57). Аналитическое решение в момент $t = 0,25$ определяется уравнениями

$$\begin{aligned} P = 1,0, \rho = 1,0, U = 0, C = 2,0 & \quad \text{при } 0,5 \leq x_0 \leq 1, \\ P = \frac{4}{3}(2x_0)^{3/2} - \frac{1}{3}, U = 2\left((2x_0)^{1/2} - 1\right), \rho = (2x_0)^{1/2} & \quad \text{при } 0,198425 \leq x_0 \leq 0,5, \\ P = 0, \rho = 0,629960, U = 0,740079 & \quad \text{при } 0 \leq x_0 \leq 0,198425. \end{aligned}$$

Зависимости (7.57) приведены на рис. 7.30, 7.31 сплошными линиями. Маркерами изображены результаты расчётов по разностной схеме из [5]. Расчёты проводились на равномерной по x_0 сетке с числом точек $N=100$ и с числом куранта, равным 0,5.

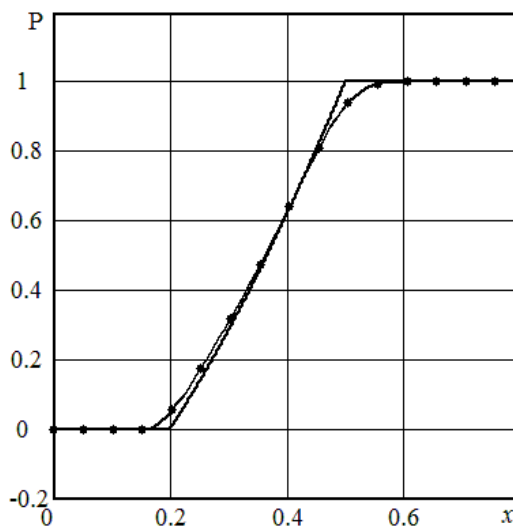


Рис. 7.30. Задача 10.
Зависимость
 $P(x_0)$ в момент $t = 0,25$

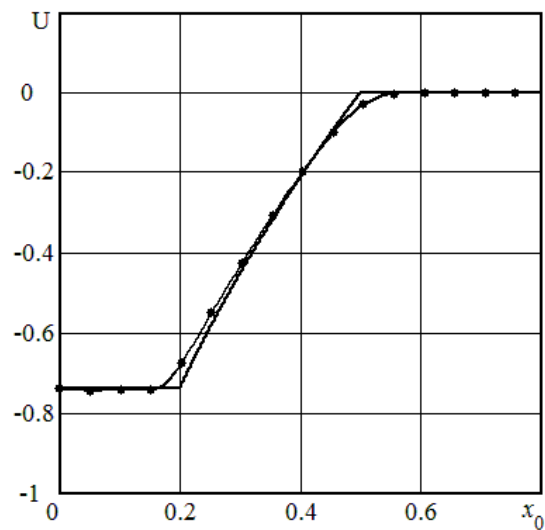


Рис. 7.31. Задача 10. Зависимость
 $U(x_0)$ в момент $t = 0,25$

Задача № 11. Слабая волна разрежения в конденсированном веществе с уравнением состояния (7.12) при $n = 3, \rho_{ок}=1, C_{ок}=1$. Начальные значения жидкости в области $0 \leq x_0 \leq 1$ $P_0 = 1, \rho_0 = 1, E_0 = 0,5, C_0 = 2, U = 0, f(S)_0 = 3,0$. На правой границе задано $U = 0$, на левой границе $P_F = 0,5$. В области течения, примыкающего к левой границе, скорость U_F и скорость звука C_F равны $U_F = -0,290024, C_F = 1,70998$. В момент $t = 0,25$ координаты слабых разрывов и левой границы таковы $x_F = -0,072506,$

$x_D = 0,354989$, $x_C = 0,5$. В области волны разрежения OCD величины находятся из уравнений (7.56), (7.57). Аналитическое решение в момент $t = 0,25$ определяется уравнениями

$$P = 1, \rho = 1, U = 0 \quad \text{при } 0,5 \leq x \leq 1,$$

$$P = \frac{4}{3}(2x_0)^{3/2} - \frac{1}{3}, \rho = (2x_0)^{1/2}, U = 2\left((2x_0)^{1/2} - 1\right), \quad \text{при } 0,365502 \leq x_0 \leq 0,5,$$

$$P = 0,5, \rho = 0,854988, U = -0,290024 \quad \text{при } 0 \leq x_0 \leq 0,365502.$$

Зависимости $P(x_0)$ и $U(x_0)$ в момент $t = 0,25$ приведены на рис. 7.32, 7.33 (сплошные линии). Результаты расчётов по разностной схеме из [5] изображены маркерами. Расчёты проводились на равномерной по x_0 сетке с числом точек $N=100$ и с числом куранта, равным $0,5$.

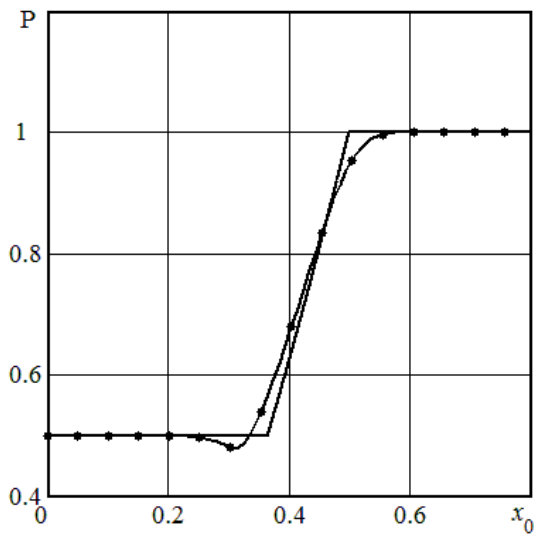


Рис. 7.32. Задача 11. Зависимость $P(x_0)$ в момент $t = 0,25$

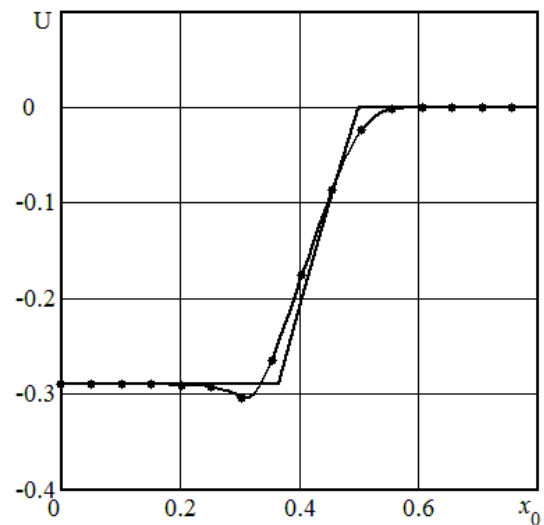


Рис. 7.33. Задача 11. Зависимость $U(x_0)$ в момент $t = 0,25$

§ 4. Разрушение мгновенно прогретой пластины

Рассмотрим плоскую покоящуюся пластину толщиной $2h$ из материала с плотностью ρ_0 . В начальный момент времени $t = 0$ вещество пластины мгновенно прогревается равномерно по всей её толщине [6]. Это приводит к увеличению удельной внутренней энергии до значения E_1 , а давление – до значения P_1 . Плотность при этом не меняется $\rho = \rho_0$. Будем считать, что свойства идеального конденсированного вещества определяются уравнением состояния (7.15) с $n = 3$, которое связывает безразмерные величины P , ρ и E . Поскольку на поверхностях пластины давление остаётся равным нулю, то эти поверхности становятся произвольными разрывами, после распада которых в вещество распространяются центрированные волны разрежения, а сами границы двигаются с постоянной скоростью в течение некоторого времени. Волновая картина симметрична относительно плоскости, проходящей через центр пластины.

Поэтому поместим начало координат в центр пластины и будем рассматривать процессы в полупластине с начальной толщиной h и граничным условием в начале координат $U = 0$. Аналитическое исследование процессов, происходящих в прогретой пластине, проведём по аналогии с [7, 8]. Траектории слабых разрывов и границы схематически изображены на рис. 7.34.

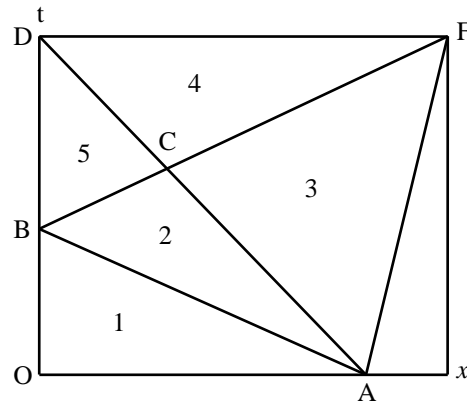


Рис. 7.34. Схематическое изображение слабых разрывов AB, AD и BF и границы AF

Слабые разрывы делят плоскость x, t на несколько областей.

Область 1 – исходное прогретое вещество с параметрами $P_1, \rho_1, E_1, U_1 = 0, C_1$, которые связаны уравнениями

$$P_1 = 2\rho_1 E_1 + \rho_1 - 1, \quad C_1 = \sqrt{\frac{3P_1 + 1}{\rho_1}}.$$

Из (7.41) следует уравнение для энтропийной функции

$$f(S) = \left(\frac{C_1}{\rho_1}\right)^2 - 1.$$

Область 2. Центрированная волна разрежения. Из точки A с координатами $t = 0, x = h$ выходит веер характеристик второго семейства

$$\frac{x-h}{t} = U - C, \quad (7.58)$$

которые пересекаются с характеристиками первого семейства, выходящими из области 1. Вдоль них выполняется соотношение

$$U + C = C_1. \quad (7.59)$$

Из (7.58) и (7.59) следуют зависимости от x и t величин в области 2

$$U_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x-h}{t} + C_1 \right), \quad C_2 = \frac{1}{2} \left(C_1 - \frac{x-h}{t} \right). \quad (7.60)$$

Из (7.44), (7.47) и (7.60) следует

$$\rho_2 = \frac{1}{2}\rho_1 \left(1 - \frac{x-h}{C_1 t}\right), \quad (7.61)$$

$$P_2 = \frac{\rho_1 C_1^2}{3} \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{x-h}{C_1 t}\right)\right)^3 - \frac{1}{3}. \quad (7.62)$$

Подставив (7.61) и (7.62) в уравнение состояния (7.15), получим

$$E_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{P_2 + 1}{\rho_2} - 1\right).$$

Область 3. Эта область примыкает к правой границе, на которой $P = 0$. Из условия $P_3 = 0$ и уравнения состояния (7.47) следует

$$C_3 = \left(\frac{C_1}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (7.63)$$

Из выражения β инварианта (7.48) и из (7.63) следует

$$U_3 = C_1 - \left(\frac{C_1}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Из уравнений (7.44) и (7.63) получается значение ρ_3 , а из уравнения состояния (7.15) – значение E_3

$$\rho_3 = \left(\frac{\rho_1}{C_1}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad E_3 = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{C_1}{\rho_1}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right).$$

Область 4. Взаимодействие левой центрированной волны разрежения с центром в точке $t = 0$, $x = -h$ со стационарным течением в области 3. Решение определяется уравнениями α характеристиками и β инварианта

$$\frac{x+h}{t} = U + C, \quad U_3 - C_3 = U - C. \quad (7.64)$$

Из (7.64) следуют зависимости U и C от x и t

$$U_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{x+h}{t} + U_3 - C_3\right), \quad C_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{x+h}{t} - U_3 + C_3\right). \quad (7.65)$$

Из (7.44), (7.47) и (7.65) получаются зависимости $P(x, t)$ и $\rho(x, t)$

$$\rho_4 = \frac{\rho_1}{2C_1} \left(\frac{x+h}{t} - U_3 + C_3\right), \quad P_4 = \frac{\rho_1}{24C_1} \left(\frac{x+h}{t} - U_3 + C_3\right)^3 - \frac{1}{3}. \quad (7.66)$$

Область 5. Область интерференции двух центрированных волн разрежения (из точки А и точки $t = 0, x = -h$). Значения U и C получаются из уравнений для α и β характеристик

$$\frac{x+h}{t} = U + C, \quad \frac{x-h}{t} = U - C,$$

$$U_5 = \frac{x}{t}, \quad C_5 = \frac{h}{t}.$$

Поскольку C_5 не зависит от x , а зависит только от t , то и все термодинамические величины в области 5 не зависят от x

$$P_5 = \frac{\rho_1 C_1^2}{3} \left(\frac{h}{C_1 t} \right)^3 - \frac{1}{3}, \quad \rho_5 = \rho_1 \left(\frac{h}{C_1 t} \right), \quad E_5 = \frac{P_5 + 1}{2\rho_5} - \frac{1}{2}.$$

Область 5 ограничена слабым разрывом типа 2 ВС и слабым разрывом типа 3 CD. В точке с координатами $x_B = 0, t_B = \frac{h}{C_1}$ параметры вещества принимают значения $C_B = C_1, P_B = P_1, \rho_B = \rho_1, E_B = E_1$. В точке С – пересечения слабого разрыва ВС и слабого разрыва АС

$$t_C = h \left(\frac{\rho_1}{C_1} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad x_C = h \left(\rho_1^{\frac{1}{3}} C_1^{\frac{2}{3}} - 1 \right)$$

параметры вещества принимают значения

$$P_C = 0, \quad \rho_C = \left(\frac{\rho_1}{C_1} \right)^{\frac{2}{3}} = \rho_3, \quad E_C = E_3, \quad U_C = C_1 - \left(\frac{C_1}{\rho_1} \right)^{\frac{2}{3}} = U_3.$$

Следовательно, в момент $t = t_C$ во всей пластине $P = 0$. При $t > t_C$ давления P_5 и частично P_4 становятся отрицательными. В области отрицательных давлений состояние вещества является метастабильным. В нём накапливается микроповреждённость и при некотором $P = \sigma < 0$ происходит разрушение вещества, когда микропоры сливаются и образуют большую пору (трещину) с давлением $P = 0$.

В точке D – наивысшей точке области 5

$$x_D = 0, \quad t_D = \frac{h}{2C_3 - C_1}$$

параметры вещества принимают значения

$$\rho_D = \rho_1 \left(2 \frac{C_3}{C_1} - 1 \right), \quad P_D = \frac{\rho_1 C_1^2}{3} \left(2 \frac{C_3}{C_1} - 1 \right)^3 - \frac{1}{3},$$

$$U_D = 0, \quad C_D = 2C_3 - C_1, \quad E_D = \frac{P_D + 1}{2\rho_D} - \frac{1}{2}.$$

Если $P_D > \sigma$, то откольного разрушения нет. Если $P_D = \sigma$, то разрушение происходит в точке D и пластина $-h \leq x_0 \leq h$ разделяется на две равные части. Если $P_D < \sigma$, то разрушение происходит в момент $t_c < t_\sigma < t_D$ на отрезке $0 \leq x \leq x_\sigma$, где

$$t_\sigma = h \left(\frac{\rho_1}{C_1(3\sigma + 1)} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad x_\sigma = h \left(1 + \frac{2 - C_1^{\frac{2}{3}} \rho_1^{\frac{1}{3}}}{(3\sigma + 1)^{\frac{1}{3}}} \right).$$

Масса вещества, в котором достигается давление разрушения $P_5 = \sigma$, равна

$$M_\sigma = \rho_1 \left(\frac{h}{C_1 t_\sigma} \right) x_\sigma.$$

На этом изложение аналитического решения закончим и перейдём к конкретной задаче.

Задача № 12. В полупластине толщиной $h = 1$ и начальной плотностью $\rho_1 = 1$ находится конденсированное вещество с уравнением состояния (7.15) при $n = 3$. В момент $t = 0$ в области $0 \leq x_0 \leq 1$ мгновенно выделяется энергия, в результате чего $E_1 = 0,5$, $P_1 = 1$, $C_1 = 2$. Прочность вещества в соответствии с моделью мгновенного откола равна $\sigma = -1/6$. Граничные условия таковы: на левой границе $U = 0$ (плоскость симметрии), на правой границе $P = 0$. После распада разрыва возникают два слабых разрыва, которые делят плоскость x, t на несколько областей (рис. 7.34).

Область 1. Невозмущённое вещество. $P_1 = 1$, $\rho_1 = 1$, $E_1 = 0,5$, $C_1 = 2$, $U_1 = 0$.

Область 2. Центрированная волна разрежения. Решение определяется уравнениями

$$P_2 = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{x-1}{2t} \right)^3 - \frac{1}{3}, \quad \rho_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x-1}{2t} \right),$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{x-1}{t} \right), \quad U_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x-1}{t} + 2 \right).$$

Область 3. Стационарное течение. Решение определяется значениями $P_3 = 0$, $\rho_3 = 0,629961$, $E_3 = 0,293700$, $C_3 = 1,259921$, $U_3 = 0,740079$.

Область 4. Взаимодействие центрированной волны разрежения со стационарным течением. Из (7.65) и (7.66) получаем

$$\begin{aligned}
 U_4 &= \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{t} - 0,519842 \right), & C_4 &= \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{t} + 0,519842 \right), \\
 \rho_4 &= \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{t} + 0,519842 \right), & P_4 &= \frac{1}{48} \left(\frac{x+1}{t} + 0,519842 \right)^3 - \frac{1}{3}.
 \end{aligned}
 \tag{7.67}$$

Линия уровня $P = \sigma$, на которой разрушается сплошная среда, следует из (7.67) и имеет вид

$$x = 1,480158t - 1. \tag{7.68}$$

Область 5. Область интерференции двух центрированных волн. Решение в этой области имеет вид

$$\begin{aligned}
 U_5 &= \frac{x}{t}, & C_5 &= \frac{1}{t}, & P_5 &= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2t} \right)^3 - \frac{1}{3}, \\
 \rho_5 &= \frac{1}{2t}, & E_5 &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{t} \right)^2 + \frac{2t}{3}.
 \end{aligned}$$

При достижении давления равного прочности $\sigma < 0$ происходит разрушение вещества. Поскольку P в области не зависит от x , то разрушение происходит одновременно во всей массе вещества в области 5. При выбранном значении $\sigma = -1/6$ разрушение происходит в момент $t_\sigma = 1,0$ в области $0 \leq x \leq x_\sigma$, где $x_\sigma = 0,480158$. Масса вещества, превратившегося после разрушения в порошок, равна $m_\sigma = 0,240079$. В момент разрушения давление скачком повышается от значения $P = \sigma = -1/6$ до значения $P = 0$. Т. о. в точке t_σ, x_σ возникает разрыв. Состояние вещества перед разрывом характеризуется величинами $P_\sigma = -1/6, \rho_\sigma = 0,5, E_\sigma = 0,333333, U_\sigma = 0,480158$. Состояние за разрывом определяется значением $P = 0$ и следующими из уравнений на сильном разрыве величинами $\rho_+ = 0,625, E_+ = 0,3, U_+ = 0,738357$. Скорость ударной волны $D = 1,77115$. Поскольку наклон линии уровня σ (7.68) в области $4 \frac{dx}{dt} = 1,480158$ меньше D , то из точки $t = 1, x_\sigma = 0,480158$ по области 4 распространяется ударная волна, которая изменяет все параметры вещества, в том числе и энтропию.

Значения основных величин, характеризующих решение задачи в момент откольного разрушения $t_\sigma = 1$, приведены в табл. 7.1.

Характеристики решения в момент разрушения

№	Величина	Значение в точном решении
1.	Момент разрушения	$t_{\sigma}=1$
2.	Область разрушения	$0 \leq x \leq 0,480158$
3.	Масса разрушенного вещества	0,240079
4.	Область стационарного течения	$1 \leq x \leq 1,740079$
5.	Энтропийная функция	0

Зависимости $P(x)$ и $\rho(x)$ в момент t_{σ} изображены на рис. 7.35, зависимости $C(x)$, $U(x)$ в момент t_{σ} – на рис. 7.36. Энтропийная функция рассчитывается при $t=\text{const}$ по формуле

$$F(S) = \sum_{i=1}^N \left(4 - \frac{3P_i + 1}{\rho_i^3} \right)^2 \rho_i \Delta x_i.$$



Рис. 7.35. Задача 12. Зависимости 1 – $P(x)$ и 2 – $\rho(x)$ в момент разрушения $t_{\sigma}=1$

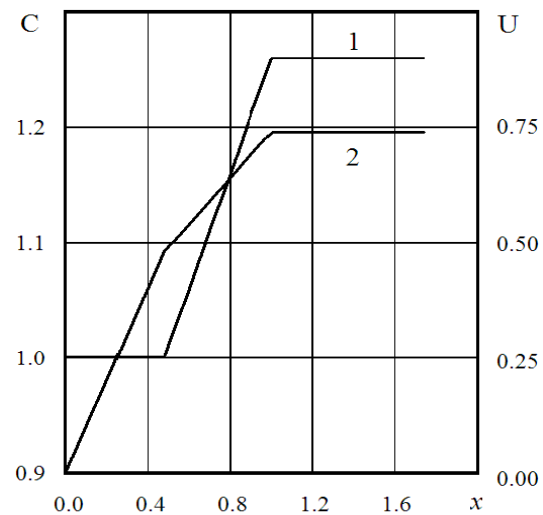


Рис. 7.36. Задача 12. Зависимости 1 – $C(x)$ и 2 – $U(x)$ в момент $t_{\sigma}=1$

§ 5. Движение сферической оболочки из идеальной сжимаемой жидкости

Проблема коллапса пузырьков в жидкости возникла в связи с кавитационной коррозией гребных винтов. Первое решение задачи о схлопывании сферического пузырька в несжимаемой идеальной жидкости было получено Рэлеем в 1917 году. Второе дыхание проблема приобрела при создании атомного оружия. Е.И. Забабахин построил аналитическое решение о фокусировке сферической оболочки из несжимаемого материала под действием начального импульса. Публикация этого решения стала возможной только в 1965 году [9]. Модель несжимаемой вязкой жидкости была создана Навье и Стоксом в период 1820–1850 гг.

Для сферически симметричных движений без вязкости она сводится к двум уравнениям

$$\frac{\partial r^2 U}{\partial M} = 0, \quad (7.69)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + 4\pi r^2 \frac{\partial P}{\partial M} = 0. \quad (7.70)$$

Модель не содержала ни уравнения энергии, ни уравнения состояния, которые появились много лет спустя. Возможность строить аналитические решения сделала модель широко распространённой среди механиков и математиков вплоть до настоящего времени.

Захлопывание пустой полости в сжимаемой идеальной жидкости рассматривал Ж. Хантер [10]. Уравнение состояния было взято в виде $P = A(\delta^\gamma - 1)$, где $\delta = \rho/\rho_0$. Однако решение строилось для области $\delta^\gamma \gg 1$, так что фактически жидкость описывалась уравнением состояния газа $P = A\delta^\gamma$. Такое решение имеет физический смысл лишь в ограниченной области, далёкой от фокусировки. Глубокий анализ построенных автомодельных решений о схлопывании полости в газе приведён в обзоре Я.М. Каждана и К.В. Брушлинского [11]. Далее Е.И. Забабахин рассмотрел коллапс сферического пузырька в вязкой жидкости [12]. Подробный обзор работ по схлопыванию сферических полостей в жидкости приведён в [13]. Полная модель механики сплошной среды – уравнения Эйлера-Гельмгольца в случае одномерных сферически симметричных течений идеальной сплошной сжимаемой среды включает закон сохранения массы

$$\frac{\partial V}{\partial t} - 4\pi \frac{\partial r^2 U}{\partial M} = 0, \quad (7.71)$$

уравнение движения (7.70) и закон сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(E + \frac{1}{2} U^2 \right) + 4\pi \frac{\partial r^2 P U}{\partial M} = 0. \quad (7.72)$$

В уравнениях (7.69)–(7.72) V – удельный объём, P – давление, U – скорость, r – эйлерова и M – лагранжева координаты, t – время, E – удельная внутренняя энергия. Из уравнений (7.70)–(7.72) следует уравнение для удельной внутренней энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \quad (7.73)$$

Уравнения (7.69)–(7.73) записаны в лагранжевых координатах. Входящие в них частные производные по времени являются субстанциональными производными, поскольку берутся при постоянном M , т. е. вдоль траектории частицы.

Из термодинамики известно, что сжимаемость β_s и скорость звука C определяются уравнениями

$$\beta_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_s, \quad C^2 = -V^2 \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_s.$$

Таким образом, квадрат скорости звука обратно пропорционален сжимаемости

$$C^2 = V/\beta_s.$$

В природе нет несжимаемых веществ, просто в механике рассматривается обширный класс течений, в которых плотность остаётся постоянной при изменении времени. Постоянство плотности в течении многими воспринимается как несжимаемость, т. е. как $\beta_s = 0$ и $C^2 = \infty$. Это заблуждение. Свойство течения – это не свойство вещества.

В сжимаемой жидкости с конечным удельным объёмом при $\beta_s > 0$ всегда $C^2 > 0$ и система уравнений (7.70)–(7.72) имеет три вещественных характеристики. Предположение же о несжимаемости ($\beta_s = 0$) означает, что $C = \infty$ и система (7.70)–(7.72) не является гиперболической. И то, и другое противоречит физическим фактам. Как правило [14], в модели «несжимаемой» жидкости закон сохранения энергии (7.72) и уравнение состояния не рассматриваются. Это порождает внутреннее противоречие модели. Из (7.73) следует, что в идеальной «несжимаемой» жидкости $E = \text{const}$ при $V = \text{const}$. Но в этом случае из уравнения состояния $P = P(V, E)$ следует, что и $P = \text{const}$. Однако при $V = \text{const}$ система уравнений (7.70), (7.72) имеет ряд решений, в которых P изменяется. Противоречие состоит в том, что с **одной стороны, P изменяется, с другой стороны, P постоянно.** Это противоречие неустранимо в рамках модели адиабатической «несжимаемой» среды, включающей только уравнения (7.69), (7.70). Оно устраняется, если предположить, что среда не адиабатична, т. е. в ней действуют источники энергии. В этом случае (7.73) должно быть записано в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -P \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial t}. \quad (7.74)$$

Система уравнений (7.70), (7.71), (7.74) позволяет строить решения, в которых плотность постоянна. Для поддержания постоянной плотности в жидкости нужно вкладывать энергию.

Представим P и E в виде суммы холодных и тепловых компонентов

$$P = P_x(V) + P_T, \quad E = E_x(V) + E_T, \quad P_x = -\frac{dE_x}{dV} \quad (7.75)$$

Подставим (7.75) в (7.74). В результате получим уравнение для теплового давления и тепловой внутренней энергии

$$\frac{\partial E_T}{\partial t} = -P_T \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial t}.$$

В общем случае изменение E_T определяется диссипативной функцией q и работой теплового давления P_T при изменении удельного объёма. Но при $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ изменение тепловой энергии определяется только диссипативной функцией q

$$\frac{\partial E_T}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial t}.$$

Из теории уравнений состояния [15] следует, что для жидкости P_T и E_T связаны уравнением $P_T V = \Gamma(V) E_T$. При $V = \text{const}$ везде ниже это уравнение будет использоваться в виде

$$P V_0 = \Gamma E, \quad (7.76)$$

где $\Gamma = \text{const}$, $P = P_T$, $E = E_T$. Поскольку $P(t, M)$ является решением уравнений (7.69), (7.70), то и следующая из (7.76) зависимость $E(t, M)$ в каждом течении вполне конкретна. Она определена необходимостью выполнения условия $V = \text{const}$.

Одной из известных диссипативных функций является вязкость. Но поскольку у каждого вещества коэффициент вязкости вполне конкретен, то вязкость обеспечивает лишь часть диссипации энергии, необходимой для поддержания постоянной плотности. Везде ниже ограничимся течениями, в которых удельный объём не зависит ни от M , ни от t , т. е. $V = \text{const}$. При этом жидкость является сжимаемой, т. к. её сжимаемость β_S не равна нулю.

При $V = V_0$ уравнение, связывающее эйлерову координату r с лагранжевой координатой M ,

$$dM = 4\pi r^2 \frac{1}{V_0} dr$$

удаётся проинтегрировать от $M = 0$ при $r = r_B$ до любого конечного M

$$r = \left(r_B^3 + \frac{3V_0}{4\pi} M \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (7.77)$$

Здесь r_B координата границы каверны, зависящая от времени. Кроме того, при $V = V_0$ уравнение (7.71) сводится к уравнению (7.69), которое имеет решение

$$r^2 U = f(t). \quad (7.78)$$

Поскольку f не зависит от M , то (7.78) справедливо для любого M . На границе пузырька, где $M = 0$, r_B – координата и U_B – скорость границы пузырька, уравнение (7.78) принимает вид

$$r_B^2 U_B = f(t). \quad (7.79)$$

Из (7.78) и (7.79) следует зависимость скорости от координаты

$$U = U_B \frac{r_B^2}{r^2}. \quad (7.80)$$

Выразим U_B из (7.79) и подставим в уравнение траектории границы

$$\frac{\partial r_B}{\partial t} = U_B. \quad (7.81)$$

Проинтегрировав уравнение (7.81) вместе с (7.79), получим зависимость r_B от t

$$r_B = \left(r_{B0}^3 + \int_{t_0}^t 3f(t) dt \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (7.82)$$

Из (7.79) и (7.82) видно, что траектория поверхности полости полностью определяется функцией $f(t)$. Если $f(t) < 0$, то и $U_B < 0$ и т. о. полость коллапсирует. Время фокусировки поверхности полости t_Φ определяется из (7.82) при $r_B = 0$

$$r_{B0}^3 + \int_{t_0}^{t_\Phi} 3f(t) dt = 0.$$

Рассмотрим далее уравнение (7.70). Выразим U через $f(t)$ и r из (7.78), подставим в (7.70) и преобразуем полученное уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial M} = -\frac{1}{4\pi r^2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{df}{dt} - \frac{2f^2}{r^5} \right). \quad (7.83)$$

Подставим в (7.83) зависимость r от M (7.77), умножим на dM и проинтегрируем от 0 до M

$$P = P_B(t) + \frac{1}{V_0} \left(\frac{df}{dt} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_B} \right) - \frac{f^2}{2} \left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r_B^4} \right) \right). \quad (7.84)$$

В этом уравнении r зависит от t и M в соответствии с (7.77) $P_B(t)$ – давление на поверхности каверны (при $M = 0$). Зависимость $P_B(t)$ определяется либо находящимся внутри полости газом, либо поверхностным натяжением. При отсутствии того и другого $P_B = 0$. Предельное при $r = \infty$ давление обозначим P_∞

$$P_{\infty}(t) = P_B(t) - \frac{1}{V_0} \left(\frac{df}{dt} \frac{1}{r_B} - \frac{f^2}{2} \frac{1}{r_B^4} \right). \quad (7.85)$$

Из четырёх зависимостей от времени $P_{\infty}(t)$, $P_B(t)$, $r_B(t)$ и $f(t)$ любые две являются независимыми. Иными словами, рассматриваются течения с двухфункциональным произволом.

С помощью (7.85) запишем (7.84) в виде

$$P = P_{\infty}(t) + \frac{1}{V_0} \left(\frac{df}{dt} \frac{1}{r} - \frac{f^2}{2r^4} \right). \quad (7.86)$$

Из (7.76) и (7.86) следует выражение для удельной внутренней энергии

$$E = \frac{V_0}{\Gamma} P_{\infty}(t) + \frac{1}{\Gamma} \left(\frac{df}{dt} \frac{1}{r} - \frac{f^2}{2r^4} \right). \quad (7.87)$$

Продифференцировав (7.87) по t , получим уравнение для скорости диссипации энергии

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{\Gamma} \left(V_0 \frac{dP_{\infty}(t)}{dt} + \frac{1}{r} \frac{d^2 f}{dt^2} - \frac{2f}{r^4} \frac{df}{dt} + \frac{2f^3}{r^7} \right). \quad (7.88)$$

Уравнения (7.77)–(7.88) носят общий характер. Величины r , U , P , E , $\frac{\partial P}{\partial M}$ и

$\frac{\partial q}{\partial t}$ зависят от t и M . Все эти зависимости становятся конкретными после задания двух из четырёх функций от t : $P_{\infty}(t)$, $P_B(t)$, $r_B(t)$ и $f(t)$.

Рассмотрим несколько частных решений удобных для использования их в качестве эталонных. Класс простейших решений определяется выбором произвольной функции $f(t)$ следующим образом

$$f = dr_B^{\alpha}, \quad (7.89)$$

где d и α – постоянные величины. Из (7.79) и (7.89) найдём d при $t = t_0$

$$d = U_{B0} r_{B0}^{2-\alpha}.$$

Подставив d в (7.89), получим функцию $f(t)$ виде

$$f = U_{B0} r_{B0}^{2-\alpha} r_B^{\alpha} \quad (7.90)$$

с одной постоянной величиной α . Избранной форме f (7.90) соответствуют

$$\frac{df}{dt} = \alpha U_{B0}^2 r_{B0}^{2(2-\alpha)} r_B^{2\alpha-3}, \quad (7.91)$$

$$U_B = U_{B0} r_{B0}^{2-\alpha} r_B^{\alpha-2}, \quad U = U_{B0} r_{B0}^{2-\alpha} r_B^{\alpha} r^{-2}.$$

Для полного определения класса решений ограничимся случаем, когда давление на границе каверны равно нулю $P_B = 0$. Из (7.85), (7.90) и (7.91) в этом случае следует уравнение для $P_\infty(t)$

$$P_\infty = \frac{1}{V_0} U_{B0}^2 r_{B0}^{2(2-\alpha)} r_B^{2(\alpha-2)} \left(\frac{1}{2} - \alpha \right).$$

Из условия, что тепловое давление не может быть отрицательным даже на бесконечности, следует ограничение на область возможных значений $\alpha \leq 0,5$.

Для рассматриваемого класса решений зависимость $P(r)$ имеет вид

$$P = \frac{U_{B0}^2}{V_0} \left(\frac{r_{B0}}{r_B} \right)^{2(2-\alpha)} \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_B^4}{r^4} \right) - \alpha \left(1 - \frac{r_B}{r} \right) \right). \quad (7.92)$$

При $\alpha = 0,5$ решение из рассматриваемого класса совпадает с решением Рэлея-Забабахина

$$P_B = 0, \quad P_\infty = 0, \quad U_B = U_{B0} \left(\frac{r_{B0}}{r_B} \right)^{3/2}.$$

Упростим задачу ещё больше и будем считать, что в (7.90) $\alpha = 0$. Определим траекторию границы каверны для решения с $\alpha = 0$ и $P_B = 0$. В этом случае

$$f = U_{B0} r_{B0}^2 = \text{const}, \quad U_B = U_{B0} r_{B0}^2 r_B^{-2}. \quad (7.93)$$

Подставив f в (7.82) и проинтегрировав, получим

$$r_B = \left(r_{B0}^3 + 3U_{B0} r_{B0}^2 (t - t_0) \right)^{1/3}.$$

Момент фокусировки определяется из этого уравнения при $r_B = 0$

$$t_f = t_0 - \frac{r_{B0}}{3U_{B0}}. \quad (7.94)$$

С помощью (7.94) уравнение траектории границы преобразуется к виду

$$r_B = r_{B0} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{1/3}.$$

Следуя [14, 16, 17] рассмотрим фокусировку оболочки, на внутренней границе которой давление равно нулю, а функция $f(t)$ имеет вид (7.93). В начальный момент t_0 радиус и скорость внутренней границы r_{B0} и $U_{B0} < 0$ заданы. В соответствии с уравнением (7.80) скорость в момент t_0 в оболочке зависит от радиуса

$$U = U_{B0} \left(\frac{r_{B0}}{r} \right)^2. \quad (7.95)$$

Все величины на наружной границе оболочки обозначим индексом «а». Пусть масса оболочки задана и равна M_a . Координата наружной поверхности r_a связана с координатой внутренней поверхности r_B уравнением

$$r_a = (r_B^3 + b)^{1/3},$$

где $b = \frac{3V_0}{4\pi} M_a = r_{a0}^3 - r_{B0}^3$. Начальная скорость наружной границы определяется из (7.95)

$$U_{a0} = U_{B0} \left(\frac{r_{B0}}{r_{a0}} \right)^2. \quad (7.96)$$

При $\alpha = 0$, $P_B = 0$ и $f(t) = \text{const}$ уравнения для давления (7.92), удельной внутренней энергии (7.87) и энерговыделения (7.88) принимают вид

$$P = \frac{U_{B0}^2}{2V_0} \left(\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{-4/3} - \left(\frac{r_{B0}}{r} \right)^4 \right), \quad (7.97)$$

$$E = \frac{U_{B0}^2}{2\Gamma} \left(\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{-4/3} - \left(\frac{r_{B0}}{r} \right)^4 \right), \quad (7.98)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{2U_{B0}^3}{\Gamma r_{B0}} \left(\left(\frac{r_{B0}}{r} \right)^7 - \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{-7/3} \right). \quad (7.99)$$

Определим теперь давление и скорость на наружной границе оболочки

$$U_a = U_{B0} \left(\left(\frac{r_{a0}}{r_{B0}} \right)^3 - \frac{t - t_0}{t_f - t_0} \right)^{-2/3},$$

$$P_a = \frac{U_{B0}^2}{2V_0} \left(\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{-4/3} - \left(\left(\frac{r_{a0}}{r_{B0}} \right)^3 - \frac{t - t_0}{t_f - t_0} \right)^{-4/3} \right). \quad (7.100)$$

В начальных данных при $t = t_0$ U_{a0} определяется из (7.96) а P_{a0} получается из (7.100)

$$P_{a0} = \frac{U_{B0}^2}{2V_0} \left(1 - \left(\frac{r_{B0}}{r_{a0}} \right)^4 \right).$$

Перейдём от эйлеровой координаты r к лагранжевой координате M . Они связаны уравнением (7.77). Подставив отношение r/r_{B0} в (7.95), (7.97) – (7.99), получим решение в виде зависимостей U , P , E и $\frac{\partial E}{\partial t}$ от t и M

$$\begin{aligned} P &= \frac{U_{B0}^2}{2V_0} \left(\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{-4/3} - \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} + \frac{3V_0 M}{4\pi r_{B0}^3} \right)^{-4/3} \right), \\ E &= \frac{U_{B0}^2}{2\Gamma} \left(\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{-4/3} - \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} + \frac{3V_0 M}{4\pi r_{B0}^3} \right)^{-4/3} \right), \\ U &= U_{B0} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} + \frac{3V_0 M}{4\pi r_{B0}^3} \right)^{-2/3}, \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{2U_{B0}^3}{\Gamma r_{B0}} \left(\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} + \frac{3V_0 M}{4\pi r_{B0}^3} \right)^{-7/3} - \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{-7/3} \right). \end{aligned} \quad (7.101)$$

В качестве эталонной задачи рассмотрим движение 10% оболочки.

Задача № 13. В момент $t_0 = 0$ оболочка имеет размеры $r_{B0} = 1$, $r_{a0} = 1,1$. Удельный объём вещества оболочки $V_0 = 1$, а её масса равна $M_a = 1,38649$. При $t_0 = 0$ задана скорость внутренней границы $U_{B0} = -1$.

Уравнение состояния вещества оболочки

$$P = \Gamma \rho E + C_{ok}^2 (\rho - \rho_{ok})$$

при $\rho_{ok} = 1$, $C_{ok} = 1$, $\Gamma = 2$. В начальный момент в оболочке заданы распределения давления, удельной внутренней энергии и скорости

$$\begin{aligned} P(M) &= 1 - \left(1 + \frac{3M}{4\pi} \right)^{-4/3}, \quad E(M) = \frac{1}{4} \left(1 - \left(1 + \frac{3M}{4\pi} \right)^{-4/3} \right), \\ U &= U_{B0} \left(\frac{4\pi r_{B0}^3 \rho_0}{3M} \right)^{2/3}. \end{aligned}$$

Граничные условия: $P_B = 0$ при $t \geq 0$, $M = 0$, $U_a = -(1,1^3 - 3t)^{-2/3}$ при $t \geq 0$, $M = M_a$. Из (7.94) определяется время фокусировки $t_f = 1/3$. При $t \geq 0$ задано энерговыделение, зависящее от t и M

$$\frac{dq}{dt} = \left(1 - 3t + \frac{3M}{4\pi} \right)^{-7/3} - (1 - 3t)^{-7/3}.$$

При $t \geq 0$ и $M_a \geq M \geq 0$ решение имеет вид

$$E(t, M) = \frac{1}{4} \left((1-3t)^{-4/3} - \left(1-3t + \frac{3M}{4\pi} \right)^{-4/3} \right), \quad P = 2E, \quad \rho = 1,$$

$$U(t, M) = - \left(1-3t + \frac{3M}{4\pi} \right)^{-2/3}.$$

На рис. 7.37, 7.38 изображены зависимости от $m=M/M_a$ давления и скорости на моменты времени $t_1 = 0,30$, $t_2 = 0,32$.

Кроме того должна быть проверка на несжимаемость

$$F_1 = \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{V_i}{V_0} \right)^2 \frac{\Delta M_i}{M_a}$$

и оценка сходимости по моменту фокусировки

$$t_{fN} = F_2 \left(\frac{1}{N} \right).$$

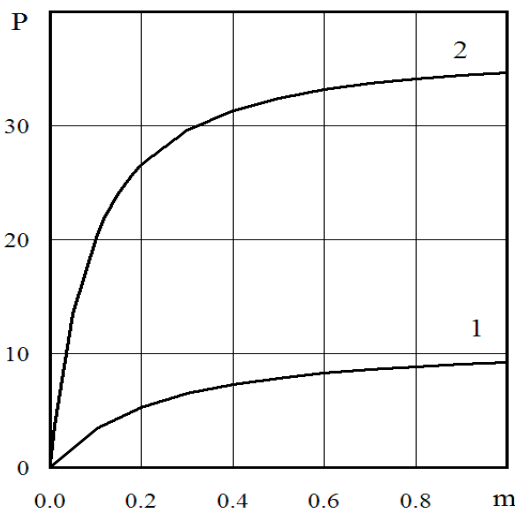


Рис. 7.37. Задача 13 Зависимость $P(m)$ на моменты времени 1– $t=0,3$, 2– $t=0,32$

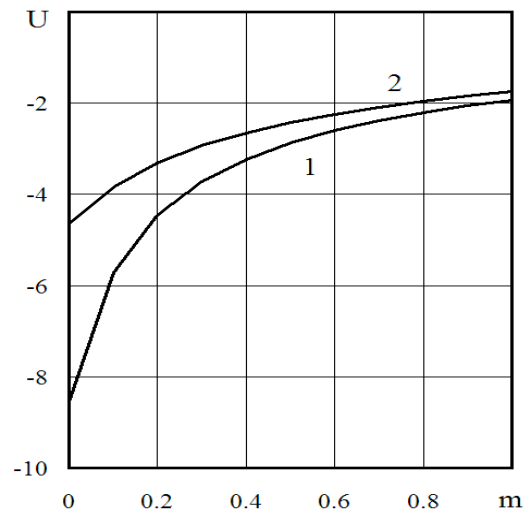


Рис. 7.38. Задача 13. Зависимость $U(m)$ на моменты времени 1– $t=0,3$, 2– $t=0,32$

§ 6. Задача о точечном взрыве

Аналитическое решение задачи о точечном взрыве было получено Л.И. Седовым в 1946 г. и независимо от него Г.И. Тейлором в 1947 г. Задача формулируется следующим образом. Пусть в момент времени $t = 0$ в точке $r = 0$ выделилась конечная энергия Q_0 . Будем считать, что в этот момент все величины в газе с уравнением состояния

$$P = (\gamma - 1)\rho E \quad (7.102)$$

постоянны и равны P_0 , ρ_0 , E_0 , $U_0 = 0$. Поскольку в точке $r = 0$, $t = 0$ находится разрыв, не удовлетворяющий условиям на сильном, слабом или контактном разрыве, то при $t > 0$ произойдет распад этого разрыва с

образованием ударной волны, распространяющейся по газу. Полная энергия Q_0 выделилась в нулевом объеме. Значит, удельная энергия равна $+\infty$. Это позволяет на первоначальной стадии взрыва пренебречь энергией E_0 и давлением P_0 перед фронтом ударной волны по сравнению с этими же величинами за фронтом. Условия на фронте в этом случае запишутся в виде

$$\rho_1(D - U_1) - \rho_0 D = 0, \quad \rho_0 D U_1 - P_1 = 0, \quad E_1 + 0,5 P_1 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0} \right) = 0.$$

Индексом «1» обозначены величины за фронтом ударной волны. С помощью уравнения состояния (7.102) преобразуем эти законы сохранения

$$P_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 D^2, \quad U_1 = \frac{2}{\gamma + 1} D, \quad \rho_1 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0, \quad (7.103)$$

$$E_1 = \frac{2}{(\gamma + 1)^2} D^2, \quad \varepsilon_1 = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^2 D^2.$$

Зададим траекторию ударной волны в виде

$$r_1 = b t^n, \quad (7.104)$$

где b и n некоторые постоянные величины. Продифференцировав траекторию (7.104), получим выражение для скорости ударной волны

$$D = b n t^{n-1}. \quad (7.105)$$

В рассматриваемой задаче $r_1 = 0$ и $D = \infty$ при $t = 0$. Следовательно, n должно удовлетворять условиям $0 < n < 1$.

Течение газа между центром взрыва и фронтом ударной волны, т. е. в области $0 \leq r \leq r_1, t > 0$, определяется законами сохранения идеальной нетеплопроводной среды

$$r^{v-1} \frac{\partial}{\partial t} (\rho) + \frac{\partial}{\partial r} (r^{v-1} \rho U) = 0, \quad (7.106)$$

$$r^{v-1} \frac{\partial}{\partial t} (\rho U) + \frac{\partial}{\partial r} (r^{v-1} \rho U^2) + r^{v-1} \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \quad (7.107)$$

$$r^{v-1} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial r} (r^{v-1} U (P + \rho \varepsilon)) = 0, \quad (7.108)$$

где $\varepsilon = E + 0,5 U^2$ и $v = 1, 2, 3$. Для построения решения уравнений (7.103), (7.106)–(7.108) перейдем от переменных r, t к новым переменным $t, \xi(r, t)$. Зависимость $\xi(r, t)$ выберем так, чтобы она была постоянной на ударной волне с траекторией (7.104). В простейшем случае такой зависимостью является

$$\xi = \frac{r}{bt^n}. \quad (7.109)$$

На ударной волне $r = r_1$ и из (7.104) и (7.109) следует $\xi_1 = 1$.

В постановке задачи заданы ρ_0 и Q_0 . Безразмерная комбинация этих величин вместе с r и t , определенная в соответствии с теорией подобия и размерностей [18], имеет вид

$$\xi = \left(\left(\frac{\rho_0}{Q_0} \right)^{\frac{1}{\nu+2}} rt^{\frac{2}{\nu+2}} \right)^K.$$

При $K=1$ это выражение совпадает с (7.109) при условии, что

$$b = \left(\frac{Q_0}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{\nu+2}}, \quad n = \frac{2}{\nu+2}. \quad (7.110)$$

В основе метода разделения переменных лежит такое представление функций P , ρ , E , U , \mathcal{E}

$$\begin{aligned} P &= \alpha_p(t) \Pi(\xi), & \rho &= \alpha_\rho(t) \delta(\xi), & U &= \alpha_U(t) M(\xi), \\ E &= \alpha_E(t) J(\xi), & \mathcal{E} &= \alpha_{\mathcal{E}}(t) Q(\xi). \end{aligned} \quad (7.111)$$

Функции $\alpha_p(t)$, $\alpha_\rho(t)$, $\alpha_U(t)$, $\alpha_E(t)$ и $\Pi(\xi)$, $\delta(\xi)$, $M(\xi)$, $J(\xi)$, $Q(\xi)$ определим на ударной волне, где соотношения (7.111) принимают вид

$$\begin{aligned} P_1 &= \alpha_p(t) \Pi_1, & \rho_1 &= \alpha_\rho(t) \delta_1, & U_1 &= \alpha_U(t) M_1, \\ E_1 &= \alpha_E(t) J_1, & \mathcal{E}_1 &= \alpha_{\mathcal{E}}(t) Q_1. \end{aligned} \quad (7.112)$$

Подставив выражение (7.105) для D в (7.103), получим

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{2}{\gamma+1} \rho_0 b^2 n^2 t^{2(n-1)}, & \rho_1 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_0, & U_1 &= \frac{2}{\gamma+1} b n t^{n-1}, \\ E_1 &= \frac{2}{(\gamma+1)^2} b^2 n^2 t^{2(n-1)}, & \mathcal{E}_1 &= \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^2 b^2 n^2 t^{2(n-1)}. \end{aligned} \quad (7.113)$$

Величины, зависящие от задачи и от времени отнесем к $\alpha(t)$, а величины, зависящие от уравнения состояния – к Π_1 , δ_1 , M_1 , J_1 , Q_1 . Тогда из (7.112) и (7.113) следует

$$\alpha_U = b n t^{n-1}, \quad \alpha_\rho = \rho_0, \quad \alpha_P = \alpha_\rho \alpha_U^2, \quad \alpha_E = \alpha_U^2, \quad (7.114)$$

$$M_1 = \frac{2}{\gamma+1}, \quad \delta_1 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad \Pi_1 = \frac{2}{\gamma+1},$$

$$J_1 = \frac{2}{(\gamma+1)^2}, \quad Q_1 = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^2. \quad (7.115)$$

Подставим в (7.106) – (7.108) величины (7.111), а затем заменим производные по t и r производными по t и ξ согласно формулам

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_r = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_\xi + \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_r, \quad \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_t = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)_t,$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_r = -\frac{n\xi}{t}, \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)_t = \frac{1}{bt^n}.$$

Дифференцирование по ξ будем обозначать штрихом. Тогда уравнения (7.106) – (7.108) примут вид

$$\varphi_1 \xi^{v-1} \delta - \omega_1 \xi^v \delta' + (\xi^{v-1} \delta M)' = 0, \quad (7.116)$$

$$\varphi_2 \delta M \xi^{v-1} - \omega_2 \xi^v (\delta M)' + \xi^{v-1} \Pi' + (\xi^{v-1} \delta M^2)' = 0, \quad (7.117)$$

$$\varphi_3 \delta Q \xi^{v-1} - \omega_3 \xi^v (\delta Q)' + (\xi^{v-1} M (\Pi + \delta Q))' = 0, \quad (7.118)$$

где

$$\varphi_1 = \frac{bt^n}{\alpha_p \alpha_U} \frac{d\alpha_p}{dt}, \quad \varphi_2 = \frac{bt^n}{\alpha_p \alpha_U^2} \frac{d\alpha_p \alpha_U}{dt}, \quad \varphi_3 = \frac{bt^n}{\alpha_p \alpha_U^3} \frac{d\alpha_p \alpha_U^2}{dt}, \quad \omega_1 = \frac{nbt^{n-1}}{\alpha_U}.$$

Подставив в эти выражения α_p и α_U из (7.114) и n из (7.110), получим

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = -0,5v, \quad \varphi_3 = -v, \quad \omega_1 = 1. \quad (7.119)$$

Поскольку значения b и n определены (7.110) на ударной волне, функция $\alpha_U(t)$ принимает вид

$$\alpha_U = \frac{2}{\gamma+2} \left(\frac{Q_0}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{v+2}} t^{\frac{v}{v+2}}. \quad (7.120)$$

После подстановки значений $\omega_1, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (7.119) уравнения (7.116) – (7.118) упрощаются

$$\xi^v \delta' - (\xi^{v-1} \delta M)' = 0, \quad (7.121)$$

$$0.5v \delta M \xi^{v-1} + \xi^v (\delta M)' - \xi^{v-1} \Pi' - (\xi^{v-1} \delta M^2)' = 0, \quad (7.122)$$

$$\left(\xi^{\nu} \left(\frac{\Pi}{\gamma-1} + 0,5\delta M^2 \right) \right)' - \left(\xi^{\nu-1} M \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \Pi + 0,5\delta M^2 \right) \right)' = 0. \quad (7.123)$$

Уравнение (7.123) интегрируется. Постоянную интегрирования определим в точке $\xi=1$, Π_1 , δ_1 , M_1 . В результате получим первый интеграл системы законов сохранения

$$0,5\delta M^2(M-\xi) + \Pi \left(M + \frac{M-\xi}{\gamma-1} \right) = 0. \quad (7.124)$$

Получим далее ещё один интеграл системы (7.121) – (7.123). С этой целью преобразуем уравнение (7.122) к виду

$$\Pi' + (M-\xi)\delta M' - 0,5\nu\delta M = 0. \quad (7.125)$$

Продифференцируем (7.124) по ξ и вычтем (7.125), умноженное на M

$$\Pi M' + \frac{((M-\xi)\Pi)'}{\gamma-1} + 0,5M^2(M-\xi)\delta' + 0,5M^2\delta(M-\xi)' + 0,5\nu\delta M^2 = 0. \quad (7.126)$$

В третье, четвертое и пятое слагаемые уравнения (7.126) подставим комбинации функций, образованные из (7.124). В результате получим уравнение

$$\Pi M' + \frac{(\Pi(M-\xi))'}{\gamma-1} - \Pi \left(M + \frac{M-\xi}{\gamma-1} \right) \left(\frac{(M-\xi)'}{M-\xi} + \frac{\delta'}{\delta} + \frac{\nu}{M-\xi} \right) = 0. \quad (7.127)$$

Преобразуем теперь уравнение (7.121) к виду

$$\frac{(M-\xi)'}{M-\xi} + \frac{\delta'}{\delta} + \frac{\nu}{M-\xi} = -\frac{\nu-1}{\xi}. \quad (7.128)$$

Подставим левую часть этого выражения в последний член (7.127), почленно продифференцируем второй член и разделим полученный результат на $\Pi(M-\xi)$

$$\frac{M'}{M-\xi} + \frac{(\nu-1)M}{\xi(M-\xi)} + \frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{(M-\xi)'}{M-\xi} + \frac{\Pi'}{\Pi} + \frac{\nu-1}{\xi} \right) = 0. \quad (7.129)$$

Преобразуем далее (7.128) так, чтобы его левая часть содержала первый и второй члены уравнения (7.129)

$$\frac{M'}{M-\xi} + \frac{(\nu-1)M}{\xi(M-\xi)} = -\frac{\delta'}{\delta}. \quad (7.130)$$

Вычтем (7.130) из (7.129) и умножим полученное уравнение на $(\gamma-1)$. В результате всех проделанных преобразований получается уравнение

$$\frac{(M-\xi)'}{M-\xi} + \frac{\Pi'}{\Pi} + \frac{\nu-1}{\xi} - (\gamma-1)\frac{\delta'}{\delta} = 0. \quad (7.131)$$

В результате интегрирования уравнения (7.131) получается зависимость между M , Π и δ

$$\frac{(M-\xi)\Pi\xi^{\nu-1}}{\delta^{\gamma-1}} = C_2 = \text{const.}$$

Постоянная интегрирования C_2 находится из условий (7.115) на фронте ударной волны при $\xi = 1$

$$C_2 = -\frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^\gamma.$$

Таким образом, второй интеграл системы уравнений (7.121)–(7.123) имеет вид

$$\Pi(M-\xi)\xi^{\nu-1} + \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^\gamma \delta^{\gamma-1} = 0. \quad (7.132)$$

Уравнение (7.129) содержит производные M' и Π' . Из уравнения (7.125) выразим Π' через M , δ и M' , а из уравнения (7.124) выразим Π через M и δ . Разделив Π' на Π , получим

$$\frac{\Pi'}{\Pi} = \frac{(\gamma M - \xi)((M - \xi)M' - 0,5\nu M)}{0,5(\gamma - 1)M^2(M - \xi)}.$$

Подставив это соотношение в (7.129), после несложных преобразований получим обыкновенное дифференциальное уравнение для M

$$M' = -\frac{M}{\xi} \frac{\frac{(\gamma-1)\gamma(\nu-1)}{2} \left(\frac{M}{\xi} \right)^2 - \frac{\nu(2\gamma-1)}{2} \left(\frac{M}{\xi} \right) + \frac{\nu}{2}}{\frac{(\gamma+1)\gamma}{2} \left(\frac{M}{\xi} \right)^2 - (\gamma+1) \left(\frac{M}{\xi} \right) + 1}. \quad (7.133)$$

Если сделать подстановку

$$\frac{\gamma+1}{2} \frac{M}{\xi} = F,$$

то уравнение (7.133) приводится к виду

$$\frac{d\xi}{\xi} = \left[-\frac{2}{\nu+2} \frac{1}{F} - \frac{\beta_1}{F-\alpha_1} + \frac{\beta_2}{F-\alpha_2} \right] dF, \quad (7.134)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{(\nu+2)(\gamma+1)}{2(\gamma\nu-\nu+2)}, \quad \alpha_2 = \frac{\gamma+1}{2\gamma}, \quad \beta_1 = \beta_2 + \frac{2(\alpha_1-1)}{\nu+2}, \quad \beta_2 = \frac{\gamma-1}{2\gamma-2+\nu}.$$

Уравнение (7.134) интегрируется

$$\xi = C_3 F^{-\frac{2}{\nu+2}} (F - \alpha_1)^{-\beta_1} (F - \alpha_2)^{\beta_2}.$$

Постоянная интегрирования C_3 находится из условий на фронте ударной волны (7.115) при $\xi = 1$

$$C_3 = (1 - \alpha_1)^{\beta_1} (1 - \alpha_2)^{-\beta_2}.$$

Окончательно, для определения зависимости M от ξ получается следующее алгебраическое уравнение

$$\xi^{\frac{(\gamma-1)(\nu-1)}{\gamma\nu-\nu+2}} \left(\frac{\gamma+1}{2} M \right)^{\frac{2}{\nu+2}} \left(\frac{(\gamma+1)M - 2\alpha_1\xi}{2(1-\alpha_1)} \right)^{\beta_1} - \left(\frac{(\gamma+1)M - 2\alpha_2\xi}{2(1-\alpha_2)} \right)^{\beta_2} = 0.$$

Исключив Π из (7.124) и (7.132), получим уравнение, позволяющее вычислить зависимость $\delta(\xi)$, при условии, что зависимость $M(\xi)$ уже найдена. Зависимость $\Pi(\xi)$ находится либо из (7.124), либо из (7.132). Зависимость безразмерной внутренней энергии J от ξ получается из приведенного уравнения состояния идеального газа

$$\Pi(\xi) = (\gamma - 1)\delta(\xi)J(\xi)$$

по уже найденным $\Pi(\xi)$ и $\delta(\xi)$. На втором этапе построения аналитического решения нужно перейти от безразмерных величин к размерным с помощью уравнений (7.111).

Размерные величины на фронте ударной волны определяются уравнениями (7.103) – (7.105), (7.110) и (7.120) и имеют вид зависимостей от положения ударной волны r_1

$$P_1 = \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{2}{\nu+2} \right)^2 \frac{Q_0}{r_1^\nu}, \quad (7.135)$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_0, \quad U_1 = \frac{4}{(\gamma+1)(\nu+2)} \left(\frac{Q_0}{\rho_0 r_1^\nu} \right)^{0.5}, \quad (7.136)$$

$$E_1 = \frac{8}{(\gamma+1)^2 (\nu+2)^2} \frac{Q_0}{\rho_0 r_1^\nu}, \quad D_1 = \frac{2}{\nu+2} \left(\frac{Q_0}{\rho_0 r_1^\nu} \right)^{0.5}.$$

В заключение определим характер решения в окрестности фронта ударной волны $\xi = 1$. Для этого подставим (7.114) в (7.133) при $\xi = 1$

$$M' = \frac{4\gamma + 3v - \gamma v}{(\gamma + 1)^2}.$$

Из (7.115), (7.125) и (7.130) при $\xi = 1$ следует

$$\Pi'_1 = \frac{4\gamma^2 + 6\gamma v - 4\gamma - 2v}{(\gamma + 1)^2 (\gamma - 1)}, \quad \delta'_1 = \frac{5v + 2\gamma - 2 + \gamma v}{(\gamma - 1)^2}.$$

Переходя к размерным величинам, получим из (7.135) и (7.136) при $r = r_1$ значения производных P , U и ρ по r при постоянном t на фронте ударной волны

$$\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)_t = \frac{P_1(2\gamma^2 + 3\gamma v - 2\gamma - v)}{(\gamma^2 - 1)r_1}, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_t = \frac{U_1(4\gamma + 3v - \gamma v)}{2(\gamma + 1)r_1},$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)_t = \frac{\rho_1(5v + 2(\gamma - 1) + \gamma v)}{(\gamma^2 - 1)r_1}.$$

Определим коэффициент затухания ударной волны $\beta = \frac{d \ln P_1}{d \ln r_1}$. Для этого

продифференцируем (7.135) по r_1

$$\frac{dP_1}{dr_1} = -\frac{vP_1}{r_1}.$$

Следовательно

$$\beta = -v.$$

Иными словами, коэффициент затухания ударной волны не зависит ни от энергии взрыва, ни от параметра уравнения состояния γ , а определяется исключительно типом симметрии задачи.

Задача № 14. На рис. 7.39–7.42 приведены результаты решения задачи для сферического случая $v = 3$. В момент времени $t = 0$ в точке $r = 0$ выделилась конечная энергия $Q_0 = 1$. Начальные давление, плотность и скорость для идеального газа с $\gamma = 5/3$ равны соответственно $P_0 = 0$, $\rho_0 = 1$, $U_0 = 0$. На рис. 7.39 изображены зависимости $M(\xi)$, $\delta(\xi)$ и $\Pi(\xi)$ в диапазоне $0 \leq \xi \leq 1$. Профили давления, плотности и скорости на моменты времени $t_1 = 0,1$, $t_2 = 0,5$, $t_3 = 1$ приведены на рис. 7.40–7.42. Соответствующие зависимости $M(\xi)$, $\delta(\xi)$ и $\Pi(\xi)$ приведены в табл. 7.2, а зависимости $P(r)$, $\rho(r)$, $U(r)$ для этих же моментов времени приведены в табл. 7.3–7.5.

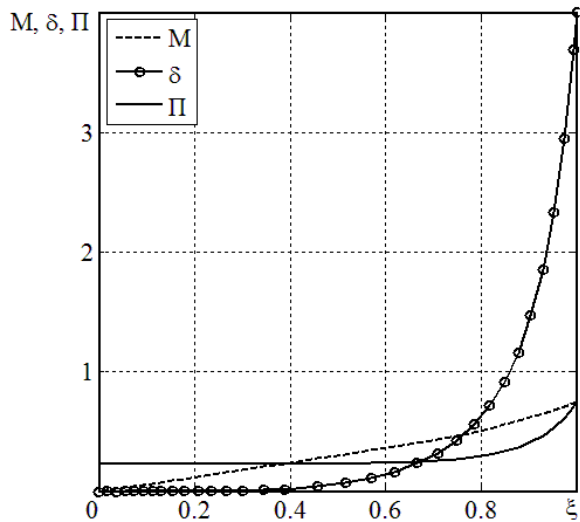


Рис.7.39. Задача 14. Зависимости $M(\xi)$, $\delta(\xi)$ и $\Pi(\xi)$

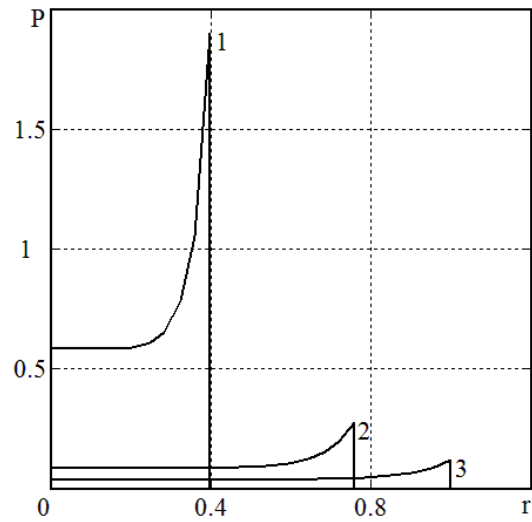


Рис.7.40. Задача 14. Профиль давления на моменты времени $t_1=0,1$, $t_2=0,5$, $t_3=1$

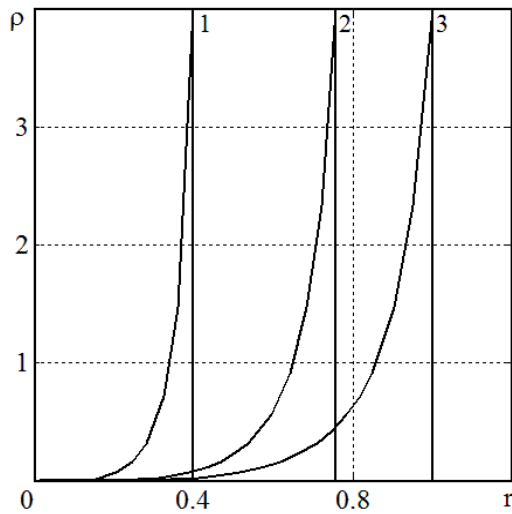


Рис.7.41. Задача 14. Профиль плотности на моменты времени $t_1=0,1$, $t_2=0,5$, $t_3=1$

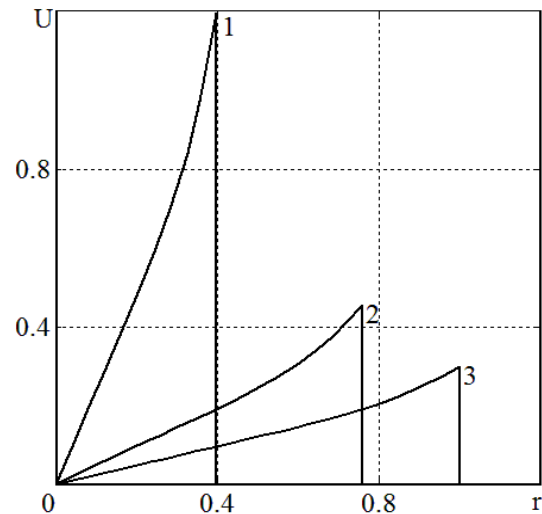


Рис.7.42. Задача 14. Профиль скорости на моменты времени $t_1=0,1$, $t_2=0,5$, $t_3=1$

Таблица 7.2

Задача 14. Зависимости Π , δ , M от ξ

№	ξ	Π	δ	M	№	ξ	Π	δ	M
1	1,00	0,750	4,000	0,750	12	0,45	0,231	0,037	0,270
2	0,95	0,530	2,300	0,676	13	0,40	0,230	0,022	0,240
3	0,90	0,408	1,424	0,615	14	0,35	0,230	0,012	0,210
4	0,85	0,339	0,931	0,560	15	0,30	0,230	0,006	0,180
5	0,80	0,297	0,630	0,512	16	0,25	0,230	0,003	0,150
6	0,75	0,271	0,435	0,470	17	0,20	0,230	0,001	0,120
7	0,70	0,255	0,302	0,432	18	0,15	0,230	0	0,090
8	0,65	0,245	0,208	0,397	19	0,10	0,230	0	0,060
9	0,60	0,238	0,142	0,364	20	0,05	0,230	0	0,030
10	0,55	0,234	0,094	0,332	21	0	0,230	0	0
11	0,50	0,232	0,061	0,301					

Таблица 7.3

Задача 14. Зависимости P , ρ , U от r на момент $t = 0,1$

№	r	P	ρ	U	№	r	P	ρ	U
0	1,00	0	1	0	11	0,22	0,595	0,096	0,531
1	0,40	0	1	0	12	0,20	0,589	0,062	0,481
2	0,40	1,902	4,000	1,194	13	0,18	0,585	0,038	0,433
3	0,38	1,379	2,407	1,090	14	0,16	0,584	0,022	0,384
4	0,36	1,056	1,480	0,988	15	0,14	0,583	0,012	0,336
5	0,34	0,870	0,962	0,898	16	0,12	0,582	0,006	0,288
6	0,32	0,760	0,649	0,821	17	0,10	0,582	0,003	0,240
7	0,30	0,691	0,446	0,753	18	0,08	0,582	0,001	0,192
8	0,28	0,649	0,309	0,691	19	0,06	0,582	$3 \cdot 10^{-3}$	0,144
9	0,26	0,622	0,213	0,635	20	0,03	0,582	$2 \cdot 10^{-4}$	0,072
10	0,24	0,605	0,145	0,582	21	0	0,582	0	0

Таблица 7.4

Задача 14. Зависимости P , ρ , U от r на момент $t = 0,5$

№	r	P	ρ	U	№	r	P	ρ	U
0	1,00	0	1	0	11	0,40	0,086	0,078	0,193
1	0,76	0	1	0	12	0,36	0,085	0,048	0,173
2	0,76	0,276	4,000	0,455	13	0,32	0,085	0,028	0,154
3	0,72	0,195	2,299	0,411	14	0,28	0,084	0,015	0,134
4	0,68	0,148	1,390	0,371	15	0,24	0,084	0,007	0,115
5	0,64	0,122	0,891	0,336	16	0,20	0,084	0,003	0,096
6	0,60	0,107	0,592	0,306	17	0,16	0,084	0,001	0,077
7	0,56	0,098	0,401	0,280	18	0,12	0,084	$5 \cdot 10^{-3}$	0,058
8	0,52	0,093	0,272	0,256	19	0,08	0,084	$2 \cdot 10^{-3}$	0,038
9	0,48	0,089	0,183	0,234	20	0,04	0,084	$5 \cdot 10^{-4}$	0,019
10	0,44	0,087	0,121	0,213	21	0	0,084	0	0

Таблица 7.5

Задача 14. Зависимости P , ρ , U от r на момент $t = 1$

№	r	P	ρ	U	№	r	P	ρ	U
1	1,00	0,120	4,000	0,300	11	0,50	0,037	0,061	0,120
2	0,95	0,085	2,298	0,271	12	0,45	0,037	0,037	0,108
3	0,90	0,058	0,630	0,205	13	0,40	0,037	0,022	0,096
4	0,85	0,054	0,931	0,224	14	0,35	0,037	0,012	0,084
5	0,80	0,048	0,630	0,205	15	0,30	0,037	0,006	0,072
6	0,75	0,043	0,435	0,188	16	0,25	0,037	0,003	0,060
7	0,70	0,041	0,302	0,173	17	0,20	0,037	0,001	0,048
8	0,65	0,039	0,208	0,159	18	0,15	0,037	$5 \cdot 10^{-4}$	0,036
9	0,60	0,038	0,142	0,145	19	0,10	0,037	$2 \cdot 10^{-4}$	0,024
10	0,55	0,037	0,094	0,133	20	0	0,037	0	0

§ 7. Ударная волна в газовом шаре

В разные годы появился ряд работ [10, 19–23], содержащих автомодельное решение задачи о фокусировке ударной волны (УВ) в идеальном газе с уравнением состояния

$$P = f(S)\rho^\gamma. \quad (7.137)$$

В [24, 25] рассмотрена задача о сжатии ударной волны в газовом шаре с наружной границей. В момент $t = t_0$ в газе давление $P_0 = 0$, плотность $\rho_0 = \text{const}$, скорость $U_0 = 0$, удельная внутренняя энергия $E_0 = 0$. Граница газового шара находится в точке r_0, t_0 . На границе задана начальная скорость $U_{g0} < 0$. Иными словами, на границе задан разрыв скорости. После распада разрыва в газ пойдёт УВ. Граница при $t > t_0$ будет двигаться по определённому закону, согласованному с движением УВ.

Сферически симметричная сходящаяся к центру ударная волна – это поверхность, движение которой определяется зависимостью $r_w(t)$. В случае распространения УВ по холодному покоящемуся идеальному газу с перечисленными выше параметрами условия на УВ имеют вид [8]

$$\rho_w(D - U_w) = \rho_0 D, \quad P_w = \rho_0 D U_w, \quad \rho_0 D \mathcal{E}_w = P_w U_w, \quad (7.138)$$

где \mathcal{E} – удельная полная энергия, D – скорость УВ. Индексом «0» обозначены величины перед УВ, индексом «W» – за УВ. В начальный момент времени t_0 УВ выходит из точки t_0, r_0 со скоростью D_0 , которая определяется скоростью границы шара U_{g0} . В момент фокусировки УВ t_f её координата r_w равна нулю. Перечисленным условиям удовлетворяет уравнение траектории УВ

$$r_w = r_0 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^n \quad (7.139)$$

при $n > 0$. Скорость УВ получается дифференцированием r_w

$$D = -\frac{r_0 n}{t_f - t_0} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1}. \quad (7.140)$$

В момент фокусировки УВ при $t = t_f$ из-за сферичности должно быть $D = -\infty$. Следовательно, показатель n должен удовлетворять условиям

$$0 < n < 1.$$

При $t = t_0$ из (7.140) следует связь между r_0, t_0, D_0 и n

$$D_0 = -\frac{r_0 n}{t_f - t_0}. \quad (7.141)$$

Поскольку величины D_0, t_0 и r_0 заданы при постановке задачи, то из (7.141) получается зависимость t_f от показателя степени n

$$t_f = t_0 - \frac{r_0 n}{D_0},$$

а с помощью (7.141) выражение (7.140) принимает вид

$$D = D_0 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1}. \quad (7.142)$$

В случае уравнения состояния идеального газа

$$P = (\gamma - 1) \rho E, \quad (7.143)$$

где $E = \mathcal{E} - 0,5U^2$, условия (7.138) на ударной волне принимают вид

$$\rho_w = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0, \quad U_w = \frac{2}{\gamma + 1} D, \quad P_w = \rho_0 D U_w. \quad (7.144)$$

При переходе от независимых термодинамических переменных ρ и E к переменным ρ и S давление принимает вид зависимости от энтропии и плотности (7.137). Подставив на ударной волне P_w и ρ_w из (7.144) в (7.137), получим зависимость $f(S)$ от скорости ударной волны

$$f(S) = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0^{1-\gamma} D^2 \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^\gamma. \quad (7.145)$$

Энтропия сохраняется вдоль траектории каждой частицы вещества, прошедшей через фронт ударной волны. Положение частицы меняется со временем, однако её массовая координата m остаётся неизменной

$$m_w = \frac{4}{3} \pi \rho_0 r_w^3. \quad (7.146)$$

Поскольку D зависит от r_w , то из (7.138), (7.142), (7.145) и (7.146) следует зависимость $f(m)$ в газе за ударной волной, справедливая в любой момент времени, включая и момент фокусировки

$$f(S) = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^\gamma \rho_0^{(1-\gamma)} D_0^2 \left(\frac{m_0}{m} \right)^{\frac{2(1-n)}{3n}}.$$

На фронте УВ газ приобретает скорость $U_w < 0$, поэтому в течение некоторого промежутка времени каждая частица движется к центру симметрии. Параметры течения газа определяются законом сохранения массы, уравнением движения и уравнением внутренней энергии

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2\rho U}{r} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + U \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) &= 0.\end{aligned}\tag{7.147}$$

Для идеального газа (7.143) преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial r} + \gamma P \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2U}{r} \right) = 0.\tag{7.148}$$

Три уравнения (7.147), (7.148) содержат три характеристики движения газа P , ρ и U . Граничными условиями являются зависимости $P_w(t)$, $U_w(t)$ на ударной волне и $P_g(t)$, $U_g(t)$ на границе газового шара.

Для решения задачи перейдём от переменных t , r к новым переменным t , $\xi(t, r)$. В результате такого перехода вместо уравнений (7.147), (7.148) будем рассматривать уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \left(U \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \rho \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{2\rho U}{r} = 0,\tag{7.149}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \left(U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial r} = 0,\tag{7.150}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \left(U \frac{\partial P}{\partial \xi} + \gamma P \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{2\gamma P U}{r} = 0.\tag{7.151}$$

Переменная $\xi(t, r)$, выбирается следующим образом. Преобразуем уравнение траектории ударной волны (7.139) так, чтобы комбинация r_w и t была бы постоянной

$$\frac{r_w}{r_0} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n = 1.\tag{7.152}$$

В качестве $\xi(t, r)$ возьмём такую функцию, чтобы она была бы постоянной на ударной волне. Проще всего взять её в виде

$$\xi = \frac{r}{r_0} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n.\tag{7.153}$$

На ударной волне $r = r_w$ и из (7.152), (7.153) следует, что $\xi_w = 1$.
Производные

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{r n}{r_0 (t_f - t)} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n, \quad \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{r_0} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n$$

вместе со следующей из (7.153) зависимостью $r(t, \xi)$

$$r = r_0 \xi \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^n$$

подставим в (7.149) – (7.151)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{n \xi}{t_f - t} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \left(U \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \rho \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \frac{1}{r_0} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n + \frac{2\rho U}{r_0 \xi} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n = 0, \quad (7.154)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{n \xi}{t_f - t} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \left(U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \xi} \right) \frac{1}{r_0} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n = 0, \quad (7.155)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{n \xi}{t_f - t} \frac{\partial P}{\partial \xi} + \left(U \frac{\partial P}{\partial \xi} + \gamma P \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \frac{1}{r_0} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n + \frac{2\gamma P U}{r_0 \xi} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n = 0. \quad (7.156)$$

Согласно [23] будем искать решение системы уравнений (7.154) – (7.156) в виде

$$P = \alpha_p(t) \Pi(\xi), \quad \rho = \alpha_\rho(t) \delta(\xi), \quad U = \alpha_u(t) M(\xi). \quad (7.157)$$

Обозначим дифференцирование по t точкой сверху величины, дифференцирование по ξ – штрихом. Подставив (7.157) в (7.154) – (7.156), получим

$$\varphi_1 \delta + \omega \xi \delta' + M \delta' + \delta M' + \frac{2M\delta}{\xi} = 0, \quad (7.158)$$

$$\varphi_2 \delta M + \omega \delta \xi M' + \delta M M' + \Pi' = 0,$$

$$\varphi_3 \Pi + \omega \xi \Pi' + M \Pi' + \gamma \Pi M' + \frac{2\gamma M \Pi}{\xi} = 0, \quad (7.159)$$

где

$$\varphi_1 = \frac{\dot{\alpha}_\rho}{\alpha_\rho \beta}, \quad \varphi_2 = \frac{\dot{\alpha}_u}{\alpha_u \beta}, \quad \varphi_3 = \frac{\dot{\alpha}_p}{\alpha_p \beta}, \quad \omega = \frac{n}{\beta(t_f - t)}, \quad \beta = \frac{\alpha_u}{r_0} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n. \quad (7.160)$$

Для разделения системы уравнений (7.158), (7.159) на две системы, одна из которых содержит величины, зависящие только от t , а вторая – только от ξ , нужно, чтобы было

$$\varphi_1(t) = \text{const}, \quad \varphi_2(t) = \text{const}, \quad \varphi_3(t) = \text{const}, \quad \omega(t) = \text{const}.$$

Функции $\alpha_\rho(t)$, $\alpha_u(t)$, $\alpha_p(t) \alpha_i$ определим на ударной волне. Предварительно преобразуем второе и третье уравнения (7.144) к виду

$$U_w = \frac{2D_0}{\gamma+1} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1}, \quad P_w = \frac{\gamma-1}{2} \rho_w U_w^2. \quad (7.161)$$

Из (7.157) и (7.161) на ударной волне следует

$$\alpha_p(t) \delta_w = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_0, \quad \alpha_u M_w = \frac{2D_0}{\gamma+1} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1}, \quad \alpha_p \Pi_w = \frac{\gamma-1}{2} \alpha_p \delta_w \alpha_u^2 M_w^2.$$

В этих уравнениях величины δ_w , M_w и Π_w не определены. Для устранения произвола по аналогии с [11, 24] примем, что

$$\delta_w = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad M_w = \frac{2}{\gamma+1}, \quad \Pi_w = \frac{2}{\gamma+1}. \quad (7.162)$$

При таком выборе δ_w , Π_w , M_w функции α_p , α_u и α_p принимают вид

$$\alpha_p = \rho_0, \quad \alpha_u = D_0 \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^{1-n}, \quad \alpha_p = \rho_0 D_0^2 \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^{2(1-n)}. \quad (7.163)$$

Из уравнений (7.160) и (7.163) определяются φ_1 , φ_2 , φ_3 и ω

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{n-1}{n}, \quad \varphi_3 = \frac{2(n-1)}{n}, \quad \omega = -1.$$

С помощью полученных значений φ_1 , φ_2 , φ_3 , ω уравнения (7.158), (7.159) принимают вид

$$(M - \xi) \delta' + \delta M' + \frac{2M\delta}{\xi} = 0, \quad (7.164)$$

$$\frac{n-1}{n} \delta M + M' \delta (M - \xi) + \Pi' = 0,$$

$$\frac{2(n-1)}{n} \Pi + \Pi' (M - \xi) + \gamma \Pi M' + \frac{2\gamma M \Pi}{\xi} = 0. \quad (7.165)$$

Уравнения (7.164), (7.165) образуют относительно M', δ', Π' систему линейных неоднородных уравнений. Если определитель этой системы

$$Z = (M - \xi) (\gamma \Pi - \delta (M - \xi)^2) \quad (7.166)$$

не равен нулю, то система имеет единственное решение. Из (7.162) и (7.166) следует, что на ударной волне $Z(1) = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1} < 0$. В момент

фокусировки $\xi = \infty$ и, следовательно, $Z(\infty) = +\infty$, если при $\xi \rightarrow \infty$ M не стремится к $+\infty$ как ξ^α , где $\alpha > 1$. Поскольку рассматривается газовый шар конечного размера и время фокусировки конечно, то естественно потребовать, чтобы M_∞, Π_∞ и δ_∞ были бы конечны. Из сказанного

следует, что существует такое значение ξ_* при котором $Z_* = 0$ и M, Π, δ принимают значения M_*, Π_*, δ_* . В областях $1 \leq \xi < \xi_*$ и $\xi_* < \xi < \infty$ $Z \neq 0$ и в этих областях, как сказано выше, система уравнений (7.164), (7.165) имеет единственное решение. В точке же ξ_* следует рассмотреть матрицу коэффициентов $\|A\|$ и расширенную матрицу $\|B\|$, где

$$\|A\| = \begin{vmatrix} \delta_* & M_* - \xi_* & 0 \\ \delta_* (M_* - \xi_*) & 0 & 1 \\ \gamma \Pi_* & 0 & (M_* - \xi_*) \end{vmatrix},$$

$$\|B\| = \begin{vmatrix} \delta_* & M_* - \xi_* & 0 & -\frac{2M_*\delta_*}{\xi_*} \\ \delta_* (M_* - \xi_*) & 0 & 1 & -\frac{n-1}{n}\delta_*M_* \\ \gamma \Pi_* & 0 & (M_* - \xi_*) & -2\Pi_*\left(\frac{M_*\Pi_*}{\xi_*} + \frac{n-1}{n}\right) \end{vmatrix}.$$

Анализ матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ показывает, что их ранги совпадают и равны 2, все миноры третьего порядка равны нулю и, следовательно, система (7.164), (7.165) при $\xi = \xi_*$ имеет единственное решение. Легко показать, что равенство нулю всех миноров третьего порядка приводит к уравнению

$$(n-1)\xi_* (2(M_* - \xi_*) - \gamma M_*) + 2\gamma n M_* (M_* - \xi_*) = 0. \quad (7.167)$$

Значение n находится из условия, что уравнение (7.167) выполняется одновременно с уравнением

$$Z_* = (M_* - \xi_*) (\gamma \Pi_* - \delta_* (M_* - \xi_*)^2) = 0. \quad (7.168)$$

Из уравнений (7.167) и (7.168) для каждого значения γ находится соответствующее значение n . Результатом применения изложенной выше процедуры являются значения $n(\gamma)$, которые приведены в табл. 7.6.

Таблица 7.6

γ	n	ρ_f	t_f
1,1	0,795973	184,465	0,758066
1,2	0,757142	59,5525	0,6883106
4/3	0,729259	26,5447	0,6250790
1,4	0,717175	20,0714	0,5976454
5/3	0,688377	9,549680	0,5162826

В областях, где $Z \neq 0$, выпишем решение системы уравнений (7.164), (7.165)

$$M' = \frac{R_M}{\xi n R}, \quad \delta' = \frac{\delta R_\delta}{n \xi (M - \xi) R}, \quad \Pi' = \frac{\delta(\xi - M) R_\Pi}{n \xi R}, \quad (7.169)$$

где

$$R = \gamma \Pi - \delta(M - \xi)^2, \quad R_M = 2(n - 1)\xi \Pi + 2\gamma n M \Pi + (n - 1)\xi \delta M(M - \xi),$$

$$R_\delta = R_M - 2n M R, \quad R_\Pi = R_M - \frac{(n - 1)\xi M R}{M - \xi}.$$

Функции $M(\xi)$, $\delta(\xi)$, $\Pi(\xi)$, находятся при определённом значении n путём интегрирования уравнений (7.169) в области $1 \leq \xi < \infty$.

Для практических применений полученного решения нужно перейти от функций $M(\xi)$, $\delta(\xi)$, $\Pi(\xi)$ к функциям $U(t, r)$, $\rho(t, r)$, $P(t, r)$, характеризующим состояние и движение газа в переменных r, t . Они получаются из уравнений (7.157) следующим образом. В любой фиксированный момент времени $t_0 < t < t_f$ из (7.153) получается однозначная зависимость $\xi(r)$, после чего из уравнений (7.157) вычисляются

$$U(t, r) = D_0 M(\xi(t, r)) \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^{1-n}, \quad (7.170)$$

$$P(t, r) = \rho_0 D_0^2 \Pi(\xi(t, r)) \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^{2(1-n)},$$

$$\rho(t, r) = \rho_0 \delta(\xi(t, r)). \quad (7.171)$$

Эти функции вычисляются в области $r_w \leq r \leq r_g$, занятой газом в момент t .

Безразмерная координата границы газового шара ξ_g в момент t находится из закона сохранения массы

$$\int_{r_w}^{r_g} 4\pi r^2 \rho(r) dr = \frac{4}{3} \pi \rho_0 (r_0^3 - r_w^3),$$

который в переменных t, ξ принимает вид

$$\int_1^{\xi_g} \delta \xi^2 d\xi - \frac{1}{3} \left(\left(1 - \frac{(t - t_0) D_0}{r_0 n} \right)^{-3n} - 1 \right) = 0.$$

Затем по найденному значению ξ_g для фиксированного t из (7.153) находится $r_g(t)$, а из зависимостей $M(\xi)$ и $\Pi(\xi)$ определяются M_g и Π_g ,

по которым из (7.157) находятся $U_g(t)$ и $P_g(t)$. Таким образом получаются табличные зависимости $U_g(t)$, $P_g(t)$, $r_g(t)$.

Момент фокусировки ударной волны t_f находится из (7.142) после того, как заданы U_{g0} , r_0 , t_0 , γ , $D_0 = \frac{\gamma+1}{2} U_{g0}$, и найдено $n(\gamma)$. Для $r_0 = 1$, $U_{g0} = -1$, $t_0 = 0$ значения времени фокусировки для разных γ приведены в табл. 7.6. В точке t_f , $r_w = 0$ находится ударная волна, за фронтом которой $D = -\infty$, $U_w = -\infty$, $P_w = \infty$, $\rho_w = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$, $\xi_w = 1$. Изложенное решение было применено для оценки точности нескольких методов расчёта ударных волн.

Задача № 15. Холодный газовый шар размером $r_{g0} = 1$ имел параметры $P_0 = 0$, $\rho_0 = 1$, $U_0 = 0$, $U_{g0} = -1$, $\gamma = 5/3$. Граничное условие определялось с помощью уравнения (7.170) в соответствии с описанным выше алгоритмом. Зависимости давления и скорости границы от времени приведены в табл. 7.7. Профили давления, плотности и скорости на несколько моментов времени приведены на рис. 7.43–7.45. Цифра 1 соответствует $t = 0,4$, цифра 2 – $t = 0,45$, цифра 3 – $t = 0,5$. Сплошная линия – это аналитическое решение данной работы, –o– – это расчёты по программе ВОЛНА [26] с выделением разрывов, ----- – расчёты по программе ВОЛНА без выделения разрывов. Расчёты выполнены на равномерной по r при $t = t_0$ сетке с числом точек $N=100$. На рис. 7.44 виден энтропийный след в профилях $\rho(r)$, полученных по методу без выделения разрывов. След образовался при формировании «размазанной» ударной волны возле границы газового шара. На рис. 7.46 изображены зависимости $M(\xi)$, $\Pi(\xi)$ и $\delta(\xi)$ в диапазоне $1 \leq \xi \leq 5$. На рис. 7.47, 7.48 приведены аналогичные результаты, полученные при проведении расчётов по разностной схеме [5]. На этих рисунках сплошной линией показано аналитическое решение, линией с маркерами – численный расчёт.

В табл. 7.8–7.10 приведены зависимости $P(r)$, $\rho(r)$ и $U(r)$, полученные из аналитического решения, на моменты времени $t = 0,4$, $t = 0,45$ и $t = 0,5$, соответственно. В табл. 7.11 приведены аналитические зависимости $\Pi(\xi)$, $\delta(\xi)$ и $M(\xi)$ в диапазоне $1 \leq \xi \leq 10$. Для того, чтобы построить решение $P(r)$, $\rho(r)$ и $U(r)$ в любой выбранный момент времени t_* , задаем ξ из табл. 7.11 и находим r из формулы (7.153), затем по формулам (7.170) и (7.171) вычисляем $P(r)$, $\rho(r)$ и $U(r)$.

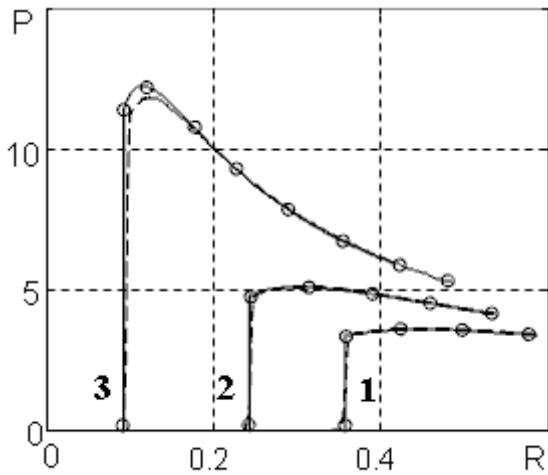


Рис. 7.43. Задача 15. Профили давления на три момента времени

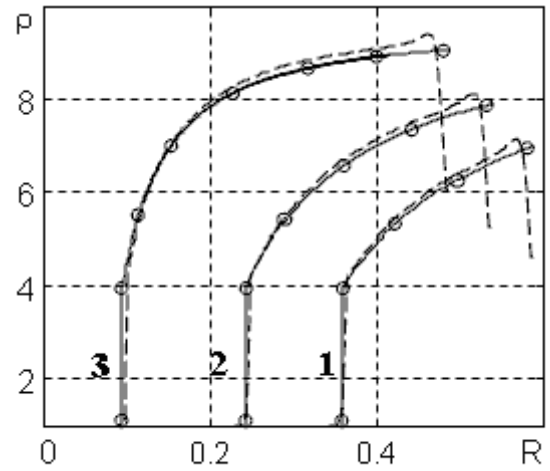


Рис. 7.44. Задача 15. Профили плотности на три момента времени

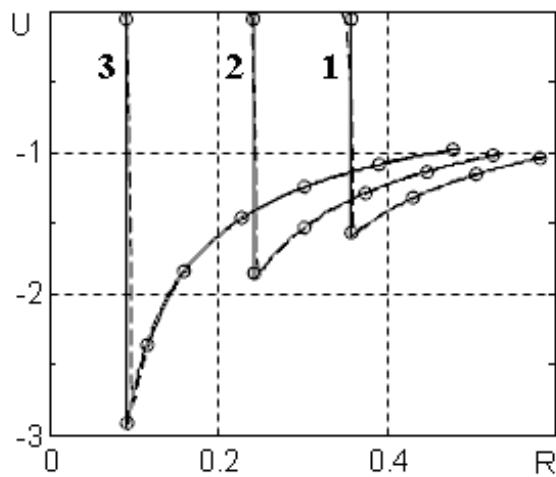


Рис. 7.45. Задача 15. Профили скорости на три момента времени

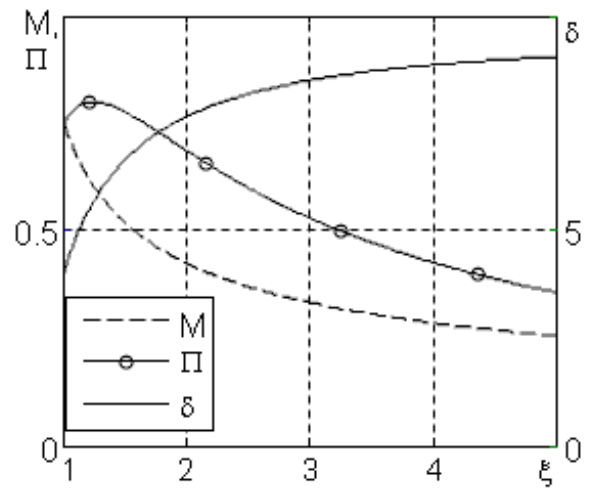


Рис. 7.46. Задача 15. Профили безразмерных величин $M(\xi)$, $\Pi(\xi)$, $\delta(\xi)$

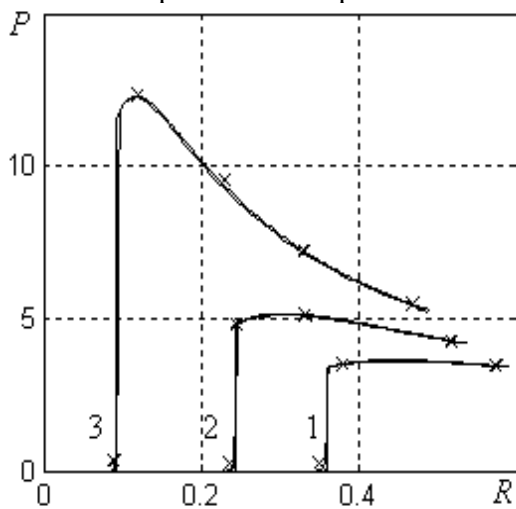


Рис. 7.47. Задача 15. Профили давления, — точное решение, x — расчёт по РС из [5]

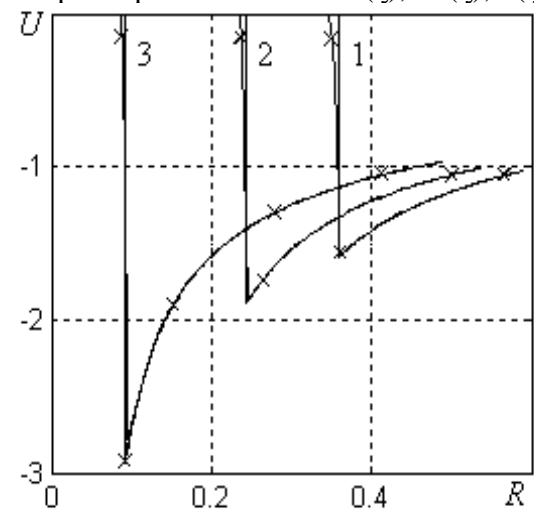


Рис. 7.48. Задача 15 Профили скорости, — точное решение, x — расчёт по РС из [5]

Таблица 7.7

Задача 15. Граничное условие в случае $\gamma = 5/3$

№	t	U	P	№	t	U	P
1	0	-1,00000	1,333333	17	0,30	-1,045146	2,445445
2	0,04	-1,008791	1,415094	18	0,31	-1,044921	2,517083
3	0,07	-1,015161	1,484529	19	0,32	-1,044473	2,592849
4	0,10	-1,021256	1,562232	20	0,33	-1,043787	2,673060
5	0,13	-1,026982	1,649664	21	0,34	-1,042842	2,758063
6	0,16	-1,032224	1,748622	22	0,35	-1,041619	2,848236
7	0,18	-1,035380	1,822074	23	0,36	-1,040097	2,943996
8	0,20	-1,038211	1,902413	24	0,37	-1,038251	3,045798
9	0,22	-1,040657	1,990554	25	0,38	-1,036058	3,154141
10	0,23	-1,041717	2,037877	26	0,39	-1,033488	3,269573
11	0,24	-1,042655	2,087565	27	0,40	-1,030514	3,392698
12	0,25	-1,043463	2,139778	28	0,42	-1,023220	3,664748
13	0,26	-1,044129	2,194694	29	0,45	-1,008354	4,149469
14	0,27	-1,044643	2,252502	30	0,50	-0,969947	5,233492
15	0,28	-1,044992	2,313410	31	0,55	-0,899013	6,144230
16	0,29	-1,045165	2,377642				

Таблица 7.8

Задача 15. Зависимости P, ρ , U от r на момент t=0,4 для $\gamma = 5/3$

№	r	P(r)	$\rho(r)$	U(r)	№	r	P(r)	$\rho(r)$	U(r)
1	0	0	1	0	25	0,4613	3,5969	5,8839	-1,2441
2	0,3584	0	1	0	26	0,4660	3,5944	5,9404	-1,2335
3	0,3584	3,3761	4,0000	-1,5912	27	0,4706	3,5912	5,9954	-1,2232
4	0,3631	3,4043	4,1303	-1,5681	28	0,4753	3,5874	6,0488	-1,2132
5	0,3678	3,4299	4,2533	-1,5460	29	0,4800	3,5831	6,1009	-1,2034
6	0,3724	3,4533	4,3698	-1,5249	30	0,4847	3,5783	6,1515	-1,1938
7	0,3771	3,4744	4,4806	-1,5047	31	0,4894	3,5730	6,2009	-1,1845
8	0,3818	3,4935	4,5863	-1,4854	32	0,4940	3,5672	6,2490	-1,1755
9	0,3865	3,5106	4,6873	-1,4668	33	0,4987	3,5611	6,2959	-1,1666
10	0,3911	3,5258	4,7840	-1,4489	34	0,5034	3,5545	6,3416	-1,1579
11	0,3958	3,5394	4,8768	-1,4318	35	0,5081	3,5476	6,3861	-1,1495
12	0,4005	3,5513	4,9661	-1,4153	36	0,5127	3,5403	6,4296	-1,1412
13	0,4052	3,5616	5,0519	-1,3993	37	0,5174	3,5328	6,4721	-1,1332
14	0,4098	3,5706	5,1347	-1,3840	38	0,5221	3,5249	6,5136	-1,1253
15	0,4145	3,5782	5,2145	-1,3691	39	0,5268	3,5167	6,5540	-1,1176
16	0,4192	3,5846	5,2915	-1,3548	40	0,5314	3,5083	6,5936	-1,1100
17	0,4239	3,5898	5,3660	-1,3409	41	0,5361	3,4997	6,6322	-1,1026
18	0,4286	3,5939	5,4380	-1,3275	42	0,5408	3,4908	6,6700	-1,0954
19	0,4332	3,5969	5,5078	-1,3145	43	0,5455	3,4817	6,7069	-1,0883
20	0,4379	3,5990	5,5753	-1,3019	44	0,5502	3,4724	6,7430	-1,0814
21	0,4426	3,6002	5,6407	-1,2897	45	0,5548	3,4630	6,7783	-1,0746
22	0,4473	3,6005	5,7043	-1,2778	46	0,5595	3,4533	6,8128	-1,0679
23	0,4519	3,6001	5,7659	-1,2662	47	0,5876	3,3927	7,0053	-1,0305
24	0,4566	3,5989	5,8258	-1,2550					

Таблица 7.9

Задача 15. Зависимости P, ρ, U от r на момент t = 0,45 для $\gamma = 5/3$

№	r	P (r)	ρ(r)	U(r)	№	r	P (r)	ρ(r)	U(r)
1	0	0	1	0	25	0,3750	4,9234	6,7585	-1,2848
2	0,2434	0	1	0	26	0,3810	4,8977	6,8237	-1,2698
3	0,2434	4,7924	4,0000	-1,8959	27	0,3870	4,8712	6,8863	-1,2554
4	0,2494	4,8648	4,2393	-1,8450	28	0,3930	4,8441	6,9465	-1,2415
5	0,2554	4,9253	4,4553	-1,7983	29	0,3989	4,8165	7,0044	-1,2280
6	0,2613	4,9752	4,6525	-1,7552	30	0,4049	4,7883	7,0600	-1,2150
7	0,2673	5,0156	4,8340	-1,7153	31	0,4109	4,7598	7,1136	-1,2025
8	0,2733	5,0475	5,0023	-1,6782	32	0,4169	4,7310	7,1653	-1,1903
9	0,2793	5,0720	5,1590	-1,6435	33	0,4229	4,7018	7,2150	-1,1785
10	0,2853	5,0899	5,3054	-1,6111	34	0,4289	4,6725	7,2631	-1,1671
11	0,2913	5,1019	5,4428	-1,5806	35	0,4348	4,6431	7,3094	-1,1561
12	0,2972	5,1088	5,5721	-1,5518	36	0,4408	4,6135	7,3541	-1,1454
13	0,3032	5,1111	5,6939	-1,5247	37	0,4468	4,5839	7,3974	-1,1350
14	0,3092	5,1093	5,8091	-1,4990	38	0,4528	4,5542	7,4392	-1,1249
15	0,3152	5,1039	5,9181	-1,4747	39	0,4588	4,5245	7,4796	-1,1151
16	0,3212	5,0953	6,0215	-1,4515	40	0,4647	4,4949	7,5187	-1,1055
17	0,3272	5,0838	6,1197	-1,4295	41	0,4707	4,4653	7,5566	-1,0962
18	0,3331	5,0699	6,2131	-1,4085	42	0,4767	4,4358	7,5933	-1,0872
19	0,3391	5,0538	6,3021	-1,3885	43	0,4827	4,4065	7,6288	-1,0784
20	0,3451	5,0357	6,3870	-1,3694	44	0,4887	4,3772	7,6633	-1,0698
21	0,3511	5,0159	6,4680	-1,3510	45	0,4947	4,3481	7,6967	-1,0615
22	0,3571	4,9946	6,5454	-1,3335	46	0,5006	4,3192	7,7291	-1,0533
23	0,3630	4,9720	6,6195	-1,3166	47	0,5365	4,1495	7,9048	-1,0084
24	0,3690	4,9482	6,6905	-1,3004					

Таблица 7.10

Задача 15. Зависимости P, ρ, U от r на момент t = 0,5 для $\gamma = 5/3$

№	r	P (r)	№	U(r)	№	r	P (r)	ρ(r)	U(r)
1	0	0	1	0	25	0,2697	8,2860	8,4543	-1,3249
2	0,0926	0	1	0	26	0,2777	8,1137	8,5003	-1,3032
3	0,0926	11,4956	4,0000	-2,9363	27	0,2858	7,9479	8,5430	-1,2826
4	0,1007	11,9886	4,7516	-2,6848	28	0,2938	7,7882	8,5829	-1,2630
5	0,1087	12,2118	5,3157	-2,4917	29	0,3019	7,6343	8,6202	-1,2444
6	0,1168	12,2584	5,7648	-2,3370	30	0,3099	7,4862	8,6552	-1,2267
7	0,1248	12,1902	6,1336	-2,2092	31	0,3180	7,3433	8,6879	-1,2097
8	0,1328	12,0473	6,4426	-2,1014	32	0,3260	7,2056	8,7187	-1,1936
9	0,1409	11,8565	6,7055	-2,0087	33	0,3341	7,0728	8,7477	-1,1781
10	0,1489	11,6358	6,9319	-1,9280	34	0,3421	6,9447	8,7750	-1,1632
11	0,1570	11,3974	7,1288	-1,8568	35	0,3502	6,8209	8,8007	-1,1489
12	0,1650	11,1497	7,3015	-1,7935	36	0,3582	6,7015	8,8251	-1,1352
13	0,1731	10,8984	7,4540	-1,7366	37	0,3663	6,5861	8,8481	-1,1221
14	0,1811	10,6474	7,5896	-1,6852	38	0,3743	6,4745	8,8699	-1,1094
15	0,1892	10,3996	7,7109	-1,6384	39	0,3824	6,3666	8,8906	-1,0971

Окончание табл. 7.10

№	r	P(r)	№	U(r)	№	r	P(r)	$\rho(r)$	U(r)
16	0,1972	10,1567	7,8199	-1,5956	40	0,3904	6,2622	8,9103	-1,0854
17	0,2053	9,9198	7,9184	-1,5563	41	0,3985	6,1612	8,9290	-1,0740
18	0,2133	9,6898	8,0076	-1,5199	42	0,4065	6,0634	8,9468	-1,0630
19	0,2214	9,4670	8,0889	-1,4862	43	0,4146	5,9686	8,9637	-1,0523
20	0,2294	9,2517	8,1632	-1,4548	44	0,4226	5,8768	8,9799	-1,0420
21	0,2375	9,0439	8,2312	-1,4254	45	0,4307	5,7878	8,9953	-1,0320
22	0,2455	8,8437	8,2938	-1,3980	46	0,4387	5,7014	9,0100	-1,0224
23	0,2536	8,6507	8,3515	-1,3722	47	0,4870	5,2335	9,0860	-0,9700
24	0,2616	8,4649	8,4049	-1,3478					

Таблица 7.11

Задача 15. Зависимости Π , δ , M от ξ для $\gamma = 5/3$

№	ξ	$\Pi(\xi)$	$\delta(\xi)$	$M(\xi)$	№	ξ	$\Pi(\xi)$	$\delta(\xi)$	$M(\xi)$
1	1,000	0,7500	4,0000	0,7500	24	1,828	0,7188	7,3840	0,4503
2	1,036	0,7660	4,3422	0,7211	25	1,864	0,7120	7,4454	0,4444
3	1,072	0,7781	4,6391	0,6955	26	1,900	0,7052	7,5039	0,4388
4	1,108	0,7870	4,9018	0,6727	27	1,936	0,6984	7,5597	0,4334
5	1,144	0,7933	5,1375	0,6521	28	1,972	0,6917	7,6129	0,4282
6	1,180	0,7973	5,3508	0,6334	29	2,296	0,6335	8,0000	0,3890
7	1,216	0,7993	5,5453	0,6163	30	2,620	0,5816	8,2718	0,3596
8	1,252	0,7999	5,7236	0,6005	31	2,944	0,5364	8,4716	0,3363
9	1,288	0,7990	5,8879	0,5860	32	3,268	0,4972	8,6236	0,3174
10	1,324	0,7971	6,0398	0,5726	33	3,592	0,4630	8,7426	0,3016
11	1,360	0,7942	6,1807	0,5601	34	3,916	0,4330	8,8379	0,2881
12	1,396	0,7906	6,3118	0,5484	35	4,240	0,4067	8,9156	0,2764
13	1,432	0,7863	6,4341	0,5375	36	4,564	0,3834	8,9799	0,2661
14	1,468	0,7815	6,5485	0,5272	37	4,888	0,3626	9,0340	0,2570
15	1,504	0,7762	6,6558	0,5176	38	5,212	0,3440	9,0800	0,2489
16	1,540	0,7706	6,7565	0,5085	39	5,536	0,3272	9,1193	0,2415
17	1,576	0,7647	6,8513	0,4998	40	5,860	0,3120	9,1535	0,2348
18	1,612	0,7585	6,9406	0,4917	41	6,832	0,2741	9,2326	0,2178
19	1,648	0,7522	7,0249	0,4839	42	7,804	0,2445	9,2883	0,2043
20	1,684	0,7457	7,1046	0,4765	43	8,776	0,2209	9,3293	0,1931
21	1,720	0,7390	7,1801	0,4695	44	9,748	0,2016	9,3605	0,1838
22	1,756	0,7323	7,2516	0,4628	45	10,00	0,1971	9,3674	0,1816
23	1,792	0,7256	7,3195	0,4564					

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Предисловие и введение

1. Roach P.J. Computational Fluid Dynamics. – Albuquerque: Hermosa Publishers, 1976. (Русское издание: П. Роуч. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.)
2. Рождественский Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. – М.: Наука, 1968. – 592 с.
3. Куропатенко В.Ф. Модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко. – Челябинск: Изд-во ЧелГУ, 2007. – 302 с.
4. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
5. Рябенский А.Ф. Об устойчивости разностных уравнений / В.С. Рябенский, А.Ф. Филиппов. – М.: Техтеорлит, 1956. – 171 с.
6. Березин И.С. Методы вычислений / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Физматгиз, 1959. – Ч. 1. – 464 с.; – Ч. 2. – 620 с.
7. Рихтмайер Р.Д. Разностные методы решения краевых задач / Р.Д. Рихтмайер. – М.: ИЛ, 1960. – 262 с.
8. Годунов С.К. Введение в теорию разностных схем / С.К. Годунов, В.С. Рябенский. – М.: Физматгиз, 1962. – 340 с.
9. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1971. – 550 с.
10. Рихтмайер Р.Д. Разностные методы решения краевых задач / Р.Д. Рихтмайер, К. Мортон. – М.: Мир, 1972. – 418 с.
11. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов. – М.: Наука, 1973. – 631 с.
12. Годунов С.К. Разностные схемы / С.К. Годунов, В.С. Рябенский. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
13. Самарский А.А. Введение в численные методы / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1982. – 271 с.
14. Хёрмандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных / Л. Хёрмандер. – М.: ИЛ, 1959. – 131 с.
15. Данфорд Н. Линейные операторы / Н. Данфорд, Д.Т. Шварц. – М.: ИЛ, 1962. – 895 с.
16. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент / А.А. Самарский, Н.В. Змитренко, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.П. Михайлов, Ю.П. Попов. – М.: Наука, 1988. – 170 с.
17. Рябенский В.С. О применении метода конечных разностей к решению задачи Коши / В.С. Рябенский // Доклады Академии Наук СССР. – 1952. – Т. 86, № 6. – С. 1071–1074.

18. Мейман Н.Н. К теории уравнений в частных производных / Н.Н. Мейман // Доклады Академии Наук СССР. – 1954. – Т. 96, № 4. – С. 593–596.

19. Lax P.D. Survey of stability of linear finite difference equations / P.D. Lax, R.D. Richtmeyer // Commun Pure and Appl. Math. – 1956. – V. 9. – P. 267–293.

20. Куропатенко В.Ф. Исследование дистракции разрывов в методах расчёта ударных волн / В.Ф. Куропатенко, И.Р. Макеева // Математическое моделирование. – 2006. – Т. 18, № 3. – С. 120–128.

21. Neumann J. A method for the numerical calculation of hydrodynamical shocks / J. Neumann, R.J. Richtmayer // Appl. Phys. – 1950. – V. 21, № 3 – P. 232 – 237.

22. Уилкинс М.Л. Расчёт упругопластических течений / М.Л. Уилкинс // Вычисл. методы в гидродинамике – М.: Мир, 1967. – С. 212–263.

23. Самарский А.А. О численном решении уравнений газодинамики с различными типами вязкостей / А.А. Самарский, В.Я. Арсенин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.– 1961. – Т. 1, № 2. – С. 357–380.

24. Куропатенко В.Ф. Об одной форме псевдовязкости / В.Ф. Куропатенко // Изв. СО АН СССР, Сер. технич. – 1967. – № 3. Вып. 3. – С. 81–82.

25. Дьяченко В.Ф. О численном счёте разрывных решений квазилинейных систем / В.Ф. Дьяченко // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.– 1961. – Т. 1, № 6. – С. 1127–1129.

26. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / Н.Н. Анучина, К.И. Бабенко, С.К. Годунов, Н.А. Дмитриев и др. – М.: Наука, 1979. – 295 с.

27. Куропатенко В.Ф. О моделировании динамических процессов в сферических и цилиндрических оболочках / В.Ф. Куропатенко, Ю.Н. Андреев // Вычислительная механика сплошных сред. – 2010. – Т. 3, N 4. – С 53–67.

Глава 1

1. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики / Л.В. Овсянников. М.: Наука, 1981. – 368 с.

2. Панин В.Е. Структурные уровни деформации твёрдых тел / В.Е. Панин, В.В. Лихачев, Ю.В. Гриняев. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-е, 1985. – 229 с.

3. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов / В.Е. Панин, В.Е. Егорушкин, П.В. Макаров и др. – Новосибирск: Наука, 1995. – Т. 1. – 298 с., Т. 2. – 320 с.

4. Куропатенко В.Ф. Мезомеханика однокомпонентных и многокомпонентных материалов / В.Ф. Куропатенко // Физическая мезомеханика. – 2001. – Т. 4, № 3. – С. 49–55.
5. Alder B.J. Wenwright. Studies in molecular dynamics. I. General method / B.J. Alder // J. Chem. Phys. – 1959. – V. 31, N 2. – P. 459–466.
6. Verlet L. Computer «experiments» oh classical fluids. I. Thermodynamical properties of Lennard – Jones molecules / L. Verlet // Phys. Rev. – 1967. – V. 159, N 1. – P. 98–103.
7. Two dimensional hydrodynamic calculation / F.H. Harlow, D.O. Dickman, D.E. Harris, R.E. Martin. – Los Alamos Scientitic Lad. Rep NLA-2301, 1959.
8. Харлоу Ф.Х. Численный метод «частиц в ячейках» для задач гидродинамики / Ф.Х. Харлоу // Вычислительные методы в гидродинамике. Под ред. С.С. Григоряна и Ю.Д. Шмыгловского М.: Мир, 1967. – 383 с.
9. Вычислительные методы в физике плазмы / под ред. Б. Олдера, С. Фернбаха, М. Ротенберга. – М.: Мир, 1974. – 514 с.
10. Хокни Р. Численное моделирование методом частиц / Р. Хокни, Дж. Иствуд. – М.: Мир, 1987. – 638 с.
11. Механика. От дискретного к сплошному / под ред. В.М. Фомина. – Новосибирск: Наука, 2008. – 343 с.
12. Куропатенко В.Ф. Модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко. – Челябинск: Изд. ЧелГУ, 2007. – 302 с.
13. Куропатенко В.Ф. Уравнения состояния компонентов плотной низкотемпературной плазмы / В.Ф. Куропатенко. // Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Серия Б. Т. VII – 1. М.: Янус – К. 2008. – С. 436–450.

Глава 2

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – М.: Техтеорлит, 1957. – Т. 1. – 478 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Техтеорлит, 1955.– Т. 1. – 440 с.
3. Самарский А.А. Введение в теорию разностных / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1971. – 550 с.
4. Гутер Р.С. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта / Р.С. Гутер, Б.В. Овчинский. – М.: Физматлит, 1962. – 350 с.
5. Хаусхолдер А.С. Основы численного анализа / А.С. Хаусхолдер. – М.: ИЛ, 1956. – 320 с.

6. Бут Э.Д. Численные методы / Э.Д. Бут. – М.: Физматлит, 1959. – 239 с.
7. Березин И.С. Методы вычислений / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Физматгиз., 1959. – Ч. 1. – 464 с.; Ч. 2. – 620 с.
8. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Физматгиз, 1963. – 659 с.
9. Демидович Б.П. Численные методы анализа / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. – М.: Физматгиз, 1963. – 400 с.
10. Хемминг Р.В. Численные методы / Р.В. Хемминг. – М.: Наука, 1968. – 399 с.
11. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов. – М.: Наука, 1973. – 631 с.
12. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
13. Рихтмайер Р.Д. Разностные методы решения краевых задач / Р.Д. Рихтмайер. – М.: ИЛ, 1960. – 262 с.
14. Рождественский Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко – М.: Наука, 1968. – 592 с.
15. Дьяченко В.Ф. Основные понятия вычислительной математики / В.Ф. Дьяченко. – М.: Наука, 1977. – 127 с.
16. Калиткин Н.Н. Введение в численный анализ / Н.Н. Калиткин, Н.А. Гольцов. – М.: Изд. МГУЛ, 2003. – 143 с.
17. Рихтмайер Р.Д. Разностные методы решения краевых задач / Р.Д. Рихтмайер, К. Мортон. – М.: Мир, 1972. – 418 с.
18. Lax P.D. Survey of stability of linear finite difference equations / P.D. Lax, R.D. Richtmeyer. // *Communs Pure and Appl. Math.* – 1956. – V. 9. – P. 267–281.
19. Годунов С.К. Введение в теорию разностных схем / С.К. Годунов, В.С. Рябенький. – М.: Физматлит. – 1962. – 340 с.
20. Шокин Ю.И. Метод дифференциального приближения / Ю.И. Шокин – Новосибирск: Наука, 1979. – 221 с.
21. Яненко Н.Н. Классификация разностных схем для одномерной газовой динамики методом дифференциального приближения / Н.Н. Яненко, Ю.И. Шокин, Л.А. Тушева, З.И. Федотова // Численные методы механики сплошной среды. – 1980. – Т. 11, № 2. – С. 122–156.
22. Шокин Ю.И. Введение в метод дифференциального приближения. Учебное пособие / Ю.И. Шокин, Г.С. Хакимзянов. – Новосибирск: НГУ, 1997. – 143 с.
23. Бронштейн И.Н. Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. М.: Техтеорлит, 1955. – 608 с.

Глава 3

1. Яненко Н.Н. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике / Н.Н. Яненко, Ю.И. Шокин. – Новосибирск: Наука, 1985. – 364 с.
2. Шокин Ю.И. Об одном классе инвариантных разностных схем / Ю.И. Шокин, З.И. Федотова // Численные методы механики сплошной среды – 1972. – Т. 3, № 5. – С. 85–94.
3. Куропатенко В.Ф. Локальная консервативность разностных схем для уравнений газовой динамики / В.Ф. Куропатенко // Журнал выч. матем. и матем. физики. – 1985. – Т. 25, № 8. – С. 1176–1188.
4. Куропатенко В.Ф. О полной консервативности разностных законов сохранения / В.Ф. Куропатенко // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Численные методы решения задач математической физики. – 1982. – Вып. 3(11). – С. 3–5.
5. Зельдович Я.Б. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений / Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер. – М.: Физмат, 1963. – 632 с.
6. Lax P.D. Weak solution of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computations / P.D. Lax // Conn. Pure and Appl. Math. – 1954. – V. 7 – P. 159–193.
7. Годунов С.К. Разностный метод счёта разрывных решений уравнений газодинамики / С.К. Годунов // Матем. сб. – 1959. – Вып. 3 – № 47(89). – С. 271–306.
8. Neumann J. A method for the numerical calculation of hydrodynamical shocks / J. Neumann, R. Richtmayer // J. Appl. Phys. – 1950. – V. 21, N 3 – P. 232–237.
9. Куропатенко В.Ф. Исследование дистракции разрывов в методах расчёта ударных волн / В.Ф. Куропатенко, И.Р. Макеева // Математическое моделирование. – 2006. – Т. 18, № 3. – С. 120–128.
10. Куропатенко В.Ф. Метод расчёта ударных волн / В.Ф. Куропатенко // ДАН СССР. – 1960. – Вып. 3, – № 4. – С. 771–772.
11. Рихтмайер Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон. – М.: Мир, 1972. – 418 с.
12. Куропатенко В.Ф. Об одной форме псевдовязкости / В.Ф. Куропатенко // Изв. СО АН СССР, Сер. технич. – 1967. – Вып. 3. – № 3, – С. 81–82.
13. Уилкинс М.Л. Расчёт упругопластических течений / М.Л. Уилкинс // Вычисл. методы в гидродинамике – М.: Мир, 1967. – С. 212–263.
14. Самарский А.А. О численном решении уравнений газодинамики с различными типами вязкостей / А.А. Самарский, В.Я. Арсенин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1961. – Т. 1, № 2. – С. 357–380.

Глава 4

1. Куропатенко В.Ф. Исследование дистракции разрывов в методах расчёта ударных волн / В.Ф. Куропатенко, И.Р. Макеева // Математическое моделирование. – 2006. – Т. 18, № 3. – С. 120–128.

2. Neumann J. A method for the numerical calculation of hydrodynamical shocks / J. Neumann, R. Richtmayer // J. Appl. Phys. –1950. – V. 21, N 3 – P. 232–237.

3. Lax P.D. Weak solution of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computations / P.D. Lax // Conn. Pure and Appl. Math. – 1954. – V. 7, N 1 – P. 159–193.

4. Годунов С.К. Разностный метод расчёта ударных волн / С.К. Годунов // УМН. – 1957. – Т. 12. – Вып. 1. – С. 176–177.

5. Куропатенко В.Ф. Метод расчёта ударных волн / В.Ф. Куропатенко // ДАН СССР.– 1960. – Вып. 3. – № 4. – С. 771–772.

6. Рождественский Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. – М.: Наука, 1968. – 592 с.

7. Рихтмайер Р. Разностные методы решения краевых задач / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. – М.: Мир, 1972. – 418 с.

8. Куропатенко В.Ф. Об одной форме псевдовязкости / В.Ф. Куропатенко // Изв. СО АН СССР, Сер. технич. – 1967. – Вып. 3. – № 3. – С. 81–82.

9. Уилкинс М.Л. Расчёт упругопластических течений / М.Л. Уилкинс // Вычисл. методы в гидродинамике – М.: Мир, 1967. – С. 212–263.

10. Самарский А.А. О численном решении уравнений газодинамики с различными типами вязкостей / А.А. Самарский, В.Я. Арсенин. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – Т. 1, № 2. – С. 357–380.

11. Becker R. Stossstelle und Detonation / R. Becker // Z. Phys. – 1922 – V. 8. – P. 43–52.

12. Куропатенко В.Ф. Локальная консервативность разностных схем для уравнений газовой динамики / В.Ф. Куропатенко // Журнал выч. матем. и матем. физики.–1985. – Т. 25, № 8. – С. 1176–1188.

13. Яненко Н.Н. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике./ Н.Н. Яненко, Ю.И. Шокин.– Новосибирск: Наука, 1985. – 364 с.

14. Шокин Ю.И. Об одном классе инвариантных разностных схем / Ю.И. Шокин, З.И. Федотова // Численные методы механики сплошной среды. – 1972. – Т. 3, № 5. – С. 85–94.

15. Куропатенко В.Ф. О полной консервативности разностных законов сохранения / В.Ф. Куропатенко // Вопросы атомной науки и техники.

Серия: Численные методы решения задач математической физики. – 1982.– Вып.3(11).– С. 3–5.

16. Куропатенко В.Ф. О точности вычисления энтропии в разностных схемах для уравнений газовой динамики / В.Ф. Куропатенко // Сб. Численные методы механики сплошной среды. – 1978. – Т. 9, № 7. – С. 49 – 59.

17. Куропатенко В.Ф. Связь дивергентности с консервативностью разностных схем для уравнений газовой динамики / В.Ф. Куропатенко // Вопросы атомной науки и техники. Серия Математическое моделирование физических процессов. – 1990.– Вып. 2. – С. 63–69.

18. Куропатенко В.Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики / В.Ф. Куропатенко // Труды матем. института им. В.А. Стеклова. – 1966.– Т. 74, Ч. 1. – С. 107–137.

19. Куропатенко В.Ф. Об одном разностном методе расчёта ударных волн / В.Ф. Куропатенко // Журнал вычисл. математики и математической физики. –1963. – Т. 3, № 1. – С. 201–204.

20. Куропатенко В.Ф. Разностный метод расчёта ударных волн с повышенными свойствами монотонности / В.Ф. Куропатенко, И.Р. Макеева // Препринт ВНИИТФ. –1997.– № 120.

21. Куропатенко В.Ф. Метод построения разностных схем для численного интегрирования уравнений газодинамики / В.Ф. Куропатенко // Известия ВУЗов., Сер. Математика. – 1962.– № 3(28). – С. 75–83.

22. Алексеева Т.И. Аддитивный безусловно устойчивый разностный метод расчёта мелких неоднородностей гидродинамического потока / Т.И. Алексеева, В.Ф. Куропатенко // Численные методы механики сплошной среды. – 1981. – Т. 12, № 4. – С. 3–15.

23. Куропатенко В.Ф. Явный безусловно устойчивый разностный метод расчёта течений жидкости / В.Ф. Куропатенко // Численные методы механики сплошной среды. – 1984. – Т. 15, № 4. – С. 84–92.

24. Куропатенко В.Ф. Влияние фазовых переходов на распространение ударных волн в сплошных средах / В.Ф. Куропатенко // Численные методы механики сплошной среды. – 1984. – Т. 15, № 2. – С. 81–89.

Глава 5

1. Lax P.D. B. System of Conservation Laws / P.D. Lax, B. Wendroff // Comp. Pure Appl. Math. – 1960. – N. 13. – P. 217.

2. Lax P.D. Difference Schemes for Hyperbolic Equation with High Order of Accuracy / P.D. Lax, B. Wendroff // Comp. Pure Appl. Math. – 1964. – N 17. – P. 381.

3. Алалыкин Г.Б. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. / Г.Б. Алалыкин, С.К. Годунов, И.Л. Киреева, Л.А. Плинер. – М.: Наука, 1970. – 111 с.
4. MacCormack R.W. The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering / R.W. MacCormack // AIAA. – 1969. – P. 69–354.
5. Harten A. A high resolution scheme for the computation of weak solutions of hyperbolic conservation laws / A. Harten // J. Comp. Phys. – 1983. – V. 49. – P. 357–393.
6. Harten A. On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes / A. Harten // SIAM J. of Numer. Anal. – 1984. – V. 21, N 1. – P. 1–23.
7. Harten A. Uniformly high-order accurate essentially non-oscillatory scheme / A. Harten, S. Osher // SIAM J. of Numer. Anal. – 1987. – V. 24, N 2. – P. 279–309.
8. Годунов С.К. Разностный метод счёта разрывных решений уравнений газодинамики / С.К. Годунов // Матем. сб. – 1959. – Вып. 3. – № 47(89). – С. 271–306.
9. Числовое решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
10. Белоцерковский О.М. Нестационарный метод «крупных частиц» для газодинамических расчётов / О.М. Белоцерковский, Ю.М. Давыдов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1971. – Т. 11, № 1. – С. 182–207.
11. Белоцерковский О.М. Метод «крупных частиц» в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. / О.М. Белоцерковский, Ю.М. Давыдов – М.: Наука, 1982. – 392 с.
12. Куропатенко В.Ф. Обмен импульсом и энергией в неравновесных многокомпонентных средах / В.Ф. Куропатенко // Прикладная механика и техническая физика. – 2005. – Т. 46, № 1. – С. 7–15.

Глава 6

1. Марков А.А. Исчисление конечных разностей / А.А. Марков. – СПб., 1889.
2. Ферри А. Аэродинамика сверхзвуковых течений / А. Ферри. – М.: Техтеорлит, 1953. – 463 с.
3. Зауэр Р. Течения сжимаемой жидкости / Р. Зауэр. – М.: ИЛ, 1954. – 312 с.
4. Панов Д.Ю. Численное решение квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных / Д.Ю. Панов. – М.: Техтеорлит, 1957. – 215 с.

5. Гудерлей К.Г. Теория околзвуковых течений/ К.Г. Гудерлей. – М.: ИЛ, 1960. – 412 с.
6. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости / Р. Мизес. – М.: ИЛ, 1961. – 587 с.
7. Бай Ши-и. Введение в теорию течения сжимаемой жидкости / Бай Ши-и. – М.: ИЛ, 1962. – 410 с.
8. Магомедов К.М. Расчёт пространственного обтекания притупленных конусов методом характеристик с учётом равновесных физико-химических превращений / К.М. Магомедов // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1967. – № 3. – С. 130–137.
9. Чушкин П.И. Метод характеристик для пространственных сверхзвуковых течений / П.И. Чушкин. – М.: ВЦ АН СССР, 1968. – 122 с.
10. Жуков А.И. Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики / А.И. Жуков. – Труды МИАН СССР, 1960. – № 58. – С. 5–149.
11. Хоскин Н.Э. Метод характеристик для решения уравнений одномерного неустановившегося течения / Н.Э. Хоскин // В книге Вычислительные методы в гидродинамике. Под ред. Б. Олдера. – М.: Мир, 1967. – С. 264–291.
12. Русанов В.В. Метод характеристик для пространственных течений газа / В.В. Русанов // Теоретическая гидромеханика. Под ред. Л.И. Седова. – М.: Оборонгиз, 1953. – Вып. 3 – № 11. – С. 71–8.
13. Ричардсон Д.Дж. Метод характеристик для решения уравнений гидродинамики двумерных неустановившихся течений / Д.Дж. Ричардсон // В кн. Вычислительные методы в гидродинамике. Под ред. Б. Олдера. – М.: Мир, 1967.– С. 292–315.
14. Магомедов К.М. Сеточно-характеристические численные методы / К.М. Магомедов, А.С. Холодов. – М.: Наука, 1988. – 288 с.

Глава 7

1. Куропатенко В.Ф. Модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко. – Челябинск: Изд-во ЧелГУ, 2007. – 302 с.
2. Куропатенко В.Ф. Об одном методе сквозного счёта ударных волн / В.Ф. Куропатенко // Вестник ЮУрГУ. Серия Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 62–75.
3. Куропатенко В.Ф. Метод расчёта ударных волн / В.Ф. Куропатенко // ДАН СССР. – 1960. – Т. 3, № 4. – С. 771–772.
4. Куропатенко В.Ф. О влиянии свойств разностных схем на математическое моделирование динамических процессов / В.Ф. Куропатенко, И.А. Доровских, И.Р. Макеева // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11, Часть 2. – С. 9–11.

5. Kuropanenko V.F. A Method for Shock Calculation / V.F. Kuropanenko, M.N. Yakimova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2015. – V. 2, N 2. – P. 60–70.

6. Кинетика динамического разрушения металлов в режиме импульсного объёмного разогрева / Е.К. Бонюшкин, Н.И. Завада, С.А. Новиков, А.Я. Учаев. – Саров: РФЯЦ–ВНИИЭФ, 1998. – 275 с.

7. Куропатенко В.Ф. Дробление вещества при симметричном столкновении пластин / В.Ф. Куропатенко // Численные методы механики сплошной среды. – 1970. – Т. 1, № 5. – С. 69–77.

8. Глушак Б.Л. Исследование прочности материалов при динамических нагрузках / Б.Л. Глушак, В.Ф. Куропатенко, С.А. Новиков. – Новосибирск: Наука, 1992. – 294 с.

9. Забабахин Е.И. Кумуляция энергии и её границы / Е.И. Забабахин // – УФН.: 1965. – Т. 85. – Вып. 4. – С. 721–726.

10. Hunter G. On the collapse of an empty cavity in water / G. Hunter // Journ. Fluid Mech. – 1960. – V. 8, N 2. – P. 241 – 263. Рус. перевод: Механика. – 1961. – № 3(68). – С. 77–100.

11. Брушлинский К.В. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики / К.В. Брушлинский, Я.М. Каждан // Успехи математических наук. – 1963. – Т. 18, № 2. – С. 3–23.

12. Забабахин Е.И. Явления неограниченной кумуляции / Е.И. Забабахин // Механика в СССР за 50 лет, Т. 2. Механика жидкости и газа. – М.: Физ.мат.лит., 1965. – С. 313–342.

13. Забабахин Е.И. Явления неограниченной кумуляции / Е.И. Забабахин, И.Е. Забабахин. – Наука, 1988. – 172 с.

14. Куропатенко В.Ф. Коллапс сферических полостей и кумуляция энергии в идеальной сжимаемой жидкости / В.Ф. Куропатенко // Физика горения и взрыва. – 2015. – Т. 51, № 1. – С. 57–65.

15. Куропатенко В.Ф. Уравнения состояния компонентов плотной низкотемпературной плазмы / В.Ф. Куропатенко // Энциклопедия низкотемпературной плазмы: Серия Б. Т. VII–I. – Часть 2. – М: Янус-К, 2008. – С. 436–450.

16. Забабахин Е.И. Некоторые вопросы газодинамики взрыва / Е.И. Забабахин. – Снежинск: Изд-во РФЯЦ–ВНИИТФ, 1997. – 203 с.
Забабахин Е.И. Кумуляция и неустойчивость / Е.И. Забабахин. – Снежинск: Изд-во РФЯЦ–ВНИИТФ, 1998. – 110 с.

17. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике / Л.И. Седов. – Москва: Тех.теор.лит., 1954. – 328 с.

18. Guderley G. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse / G. Guderley // Luftfahrtforschung. – 1942. – V. 19, N 9. – P. 302–312.

19. Седов Л.И. О неустановившихся движениях сжимаемой жидкости / Л.И. Седов // Доклады Академии наук СССР. – 1945. – Т. 47, № 2. – С. 94–96.

20. Станюкович К.П. Автомодельные решения уравнений гидромеханики, обладающих центральной симметрии / К.П. Станюкович // Доклады Академии наук СССР. – 1945. – Т. 48, № 5. – С. 331–333.

21. Крайко А.Н. Сферически и цилиндрически симметричное нестационарное сжатие идеального газа / А.Н. Крайко // Доклад на VII Забабахинских научных чтениях. – Снежинск, 1997. – С. 13. –URL: www.vniitf.ru/rig/konfes/7zst/reports/6-1.pdf.

22. Крайко А.Н. Быстрое цилиндрически и сферически симметричное сильное сжатие идеального газа / А.Н. Крайко // Прикладная математика и механика. – 2007. – Т. 71, № 5. – С. 774–760.

23. Куропатенко В.Ф. Динамическое сжатие холодного газового шара / В.Ф. Куропатенко, Е.С. Шестаковская, М.Н. Якимова // Доклады академии наук. – 2015. – Т. 461, № 5. – С. 530–532.

24. Шестаковская Е.С. Ударная волна в газовом шаре / В.Ф. Куропатенко, Е.С. Шестаковская, М.Н. Якимова // Вестник ЮУрГУ. Серия Математическое моделирование и программирование – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 14–29.

25. Куропатенко В.Ф. Комплекс программ ВОЛНА и неоднородный разностный метод расчёта неустановившихся движений сжимаемых сплошных сред / В.Ф. Куропатенко, В.И. Кузнецова, Г.В. Коваленко, Г.И. Михайлова, Г.Н. Сапожникова // Вопросы атомной науки и техники. Серия Математическое моделирование физических процессов. – 1989. – Вып. 2, – С. 9–25.

Научное издание

Куропатенко Валентин Фёдорович,
Шестаковская Елена Сергеевна

**ОСНОВЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ
МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

Монография

Техн. редактор *А.В. Миних*
Дизайн обложки *А.С. Шахрай*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 10.01.2017. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 14,88. Тираж 500 экз. Заказ 1/9.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.



Куропатенко Валентин Фёдорович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Российского Федерального Ядерного Центра – Всероссийского НИИ Технической физики имени академика Е.И. Забабахина, профессор Челябинского и Южно-Уральского государственных университетов. Окончил в 1956 г. математико-механический факультет Ленинградского государственного университета имени А.А. Жданова.

Специалист в области механики, автор 440 научных работ, из них 7 монографий. Им созданы модели поведения сплошных сред под действием динамических нагрузок. Разработаны уравнения состояния металлов, продуктов взрыва, композитов и горных пород. Он является автором метода расчёта ударных волн, основанного на оригинальном механизме диссипации энергии, и неоднородного метода расчёта нестационарных движений сплошных сред, в котором выделяются все разрывы. Им разработана модель многокомпонентной неравновесной среды.



Шестаковская Елена Сергеевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Вычислительная механика» Южно-Уральского государственного университета. Окончила в 1999 г. физический факультет Челябинского государственного университета.

Специалист в области механики сплошных сред. Автор 30 научных работ. Ею разработан метод расчёта динамики гетерогенной среды с химически активной газовой фазой. В соавторстве с Куропатенко В.Ф. разработаны аналитические решения о сходящейся ударной волне в эйлеровых и лагранжевых координатах.

Излагаются способы построения разностных уравнений механики сплошной среды. Анализируются свойства разностных уравнений и методы исследований аппроксимации, устойчивости, монотонности, дистракции. Рассматриваются методы расчёта ударных волн и волн разрежения. Указывается способ построения для каждого разностного метода уравнения производства энтропии. Книга ориентирована на широкий круг специалистов, занимающихся созданием и применением математических моделей механики сплошной среды, а также может быть полезна студентам старших курсов и аспирантам.