РФЯЦ-ВНИИТФ

В.Ф.Куропатенко

Обмен импульсом и энергией в неравновесных многокомпонентных средах

Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа
САМГОП-2004

4-7 сентября,
п. Абрау-Дюрсо

1. Основные положения моделей МКС

Рассмотрим смесь из N компонентов. Каждый из них:
1. Сохраняет химические признаки вещества для любой массы.
2. Является сплошной средой в “своем” объеме $d\theta_i$.
3. Характеризуется набором физических величин:

$\bar{U}_i$ – скорость, ρ_i – плотность, P_i – давление, T_i – температура, E_i – удельная внутренняя энергия и др.

Величины P_i, ρ_i, E_i, T_i и др. связаны уравнением состояния. Тензор напряжений $\sigma_{k\ell}$ разделен на шаровую часть − давление P и девиатор $S_{k\ell}$.

Компонент смеси – это вещество. Каждое вещество может претерпевать фазовые переходы. Т.о. рассматривается многокомпонентная многофазная смесь разных веществ.

2. Парциальная плотность

i-й компонент занимает объем $d\theta_i$. Это часть объема $d\theta$. "Размажем" его на весь объем $d\theta$. Виртуальное значение

$$\sigma_i = dM_i / d\theta \qquad (2.1)$$

называется "парциальной" плотностью.

Подставив в (2.1) $dM_i = \rho_i d\theta_i$, получим $\sigma_i = \alpha_i \rho_i$, где $\alpha_i = d\theta_i / d\theta$.

Парциальная плотность σ_i равна произведению физической плотности ρ_i, на объемную концентрацию α_i.

Она непрерывна в объеме $d\theta$. Из закона сохранения массы

$M = \sum_{i=1}^{N} M_i$ **следует:**

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \rho_i .$$

Плотность смеси равна сумме парциальных плотностей компонентов

3. Парциальное давление

Давление P имеет размерность энергии в единице объема Дж/см³. Произведение P_i на $d\theta_i$ есть энергия в объеме $d\theta_i$, $Pd\theta$ есть энергия в объеме $d\theta$. Из закона сохранения энергии следует

$$P = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i .$$

Произведение $\alpha_i P_i$ есть парциальное давление i-го компонента. Оно "размазано" на объем $d\theta$.

Давление смеси равно сумме парциальных давлений компонентов

Это общий закон для смеси. Он не зависит от агрегатных состояний компонентов. Дальтон доказал его только для смеси идеальных газов.

4. Виртуальная Сплошная Среда (ВСС)

После перехода от физических величин к парциальным величинам $\alpha_i P_i$, $\alpha_i \rho_i$, $\alpha_i \rho_i \bar{U}_i$, $\alpha_i \rho_i E_i$ и др. i-й компонент становится сплошной средой во всем объеме $d\theta$ и для него можно написать законы сохранения массы, количества движения и энергии в виде диф. ур-й. Т.о. в каждой точке t, x_k одновременно находятся все компоненты смеси.

Законы сохранения определяют виртуальные величины P, ρ, E, $\bar{U}$ и др.

$$P = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i, \quad \rho = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \rho_i, \quad \rho E = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \rho_i E_i, \quad \rho \bar{U} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \rho_i \bar{U}_i.$$

Это характеристики ВСС. Они непрерывны в пространстве t, x_k и для них можно записать законы сохранения в дифференциальной форме. Т.о. в каждой точке объема $d\theta$ находится N+1 сплошных сред. Они взаимодействуют друг с другом.

5. Сознательные ограничения

«Чтобы понять явление, нужно отбросить «мусор»»

Для понимания сути новой модели МКС будем рассматривать только идеальные сжимаемые среды:

- с нулевым девиатором тензора напряжений (без вязкости, упругости, пластичности и т.д.),
- без теплопроводности,
- без химических реакций (обмен массой отсутствует),
- без воздействия полей.

Все эти физ. процессы при необходимости добавляются в законы сохранения.

6. Законы сохранения компонента (классика)

Широко применяют законы сохранения массы, импульса и энергии i-го компонента в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i) + \nabla \alpha_i \rho_i \bar{U}_i = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i \bar{U}_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha_i \rho_i U_{ki} \bar{U}_i) + \nabla \alpha_i P_i = \alpha_i \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \bar{R}_{ji},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i \varepsilon_i) + \nabla(\alpha_i \bar{U}_i (P_i + \rho_i \varepsilon_i)) = \alpha_i \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \Phi_{ji},$$

$$\varepsilon_i = E_i + 0{,}5 \bar{U}_i^2, \qquad \text{УРС}: \quad P_i = P(\rho_i, E_i).$$

$\bar{R}_{ji}$ и Φ_{ji} – интенсивности потоков импульса и энергии к i-му компоненту от j-го компонента ($\bar{R}_{ii}$ =0, Φ_{ii}=0).

Порядок индексов ij указывает, что i-й компонент воздействует на j-й.

Система не замкнута: 5N уравнений и 6N искомых функций.

7. Способы замыкания системы уравнений

Для замыкания системы уравнений i-го компонента делают какое-либо из упрощающих предположений:

1. **Равновесие по скоростям $\bar{U}_i = \bar{U}$. Получается 5N+1 уравнений для 5N+1 величин (α_i, ρ_i, P_i, ε_i, E_i и $\bar{U}$).**
2. **Равновесие по давлениям P_i=P. Получается система 6N уравнений для 6N величин: α_i, P_i, ρ_i, $\bar{U}_i$, ε_i, E_i.**
3. **Если i-й компонент ИГ, то переход от ρ_i и P_i к $\sigma_i = \alpha_i \rho_i$ и $\Pi_i = \alpha_i P_i$ замыкает систему уравнений, т.к. УРС ИГ не изменяется $P_i = (\gamma-1)\rho_i E_i$ или $\Pi_i = (\gamma-1)\sigma_i E_i$.**

Возможны и другие упрощающие предположения.

Это частные решения проблемы замыкания системы законов сохранения i-го компонента.

Наша задача: найти общее решение.

8. Взаимодействия компонентов

Возможны 2 типа взаимодействия.

1 тип. Парное взаимодействие

Компоненты i и j обмениваются количеством движения J и энергией Q **независимо** от остальных. Потоки ΔJ_{ij} и ΔQ_{ij} удовлетворяют условиям

$$\Delta J_{ij} = -\Delta J_{ji}, \quad \Delta Q_{ij} = -\Delta Q_{ji},$$

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta J_{ij} = \Delta J_{i0} = -\Delta J_{0i}, \quad \sum_{j=1}^{N} \Delta Q_{ij} = \Delta Q_{i0} = -\Delta Q_{0i}.$$

Т.е. ΔJ_{i0} и ΔQ_{i0} – это суммы независимых потоков ΔJ_{ij} и ΔQ_{ij}.

Порядок индексов указывает направление взаимодействия. Просуммировав ΔJ_{i0} и ΔQ_{i0} по i, получим

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \Delta J_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \Delta J_{i0} = 0, \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \Delta Q_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \Delta Q_{i0} = 0.$$

Как правило, в существующих моделях учитываются только парные взаимодействия.

9. Взаимодействия компонентов – 2

2 тип. Кластерное взаимодействие

Переход к парциальным величинам $\alpha_i\rho_i$, $\alpha_i P_i$, $\alpha_i\rho_i E_i$, $\alpha_i\rho_i \bar{U}_i$ и др. позволил ввести в рассмотрение ВСС с характеристиками P, ρ, E, $\bar{U}_i$, T и др. Силы и потоки, связанные с ВСС, обозначим индексом “s”. В процессе релаксации к равновесному состоянию P_P, ρ_P, E_P, $\bar{U}_P$ характеристики компонентов и ВСС изменяются

$$P_i \to P_P, \quad \bar{U}_i \to \bar{U}_P, \quad T_i \to T_P, \quad P \to P_P, \quad \bar{U} \to \bar{U}_P, \quad T \to T_P.$$

При отсутствии равновесия

$$P \neq P_P, \quad \bar{U} \neq \bar{U}_P, \quad T \neq T_P$$

на ВСС действуют силы $F_{is} \neq 0$ и потоки $Q_{is} \neq 0$ от i-х компонентов. Они удовлетворяют уравнениям

$$\Delta J_{is} = -\Delta J_{si}, \quad \sum_{i=1}^{N} \Delta J_{is} = \Delta J_{0s} = -\Delta J_{s0}, \quad \Delta Q_{is} = -\Delta Q_{si},$$

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta Q_{is} = \Delta Q_{0s} = -\Delta Q_{s0}, \quad \Delta F_{is} = -F_{si}, \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i F_{is} = F_{0s} = -F_{s0}.$$

10. Интенсивность потоков импульса R и энергии Ф

В большинстве известных моделей выполняются условия парного взаимодействия

$$\bar{R}_{ij} = -\bar{R}_{ji}, \quad \Phi_{ij} = -\Phi_{ji}. \qquad (10.1)$$

Просуммируем по j. Результат обозначим индексом “0”

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \bar{R}_{ij} = \bar{R}_{i0}, \quad \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \Phi_{ij} = \Phi_{i0}. \qquad (10.2)$$

Далее просуммируем по i с учетом (10.1)

$$\bar{R}_{00} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j R_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i R_{i0}, \quad \Phi_{00} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j \Phi_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i R_{i0}. \qquad (10.3)$$

Из (10.1), (10.3) и условия $\bar{R}_{ii} = 0, \quad \Phi_{ii} = 0$ следует

$$\bar{R}_{00} = 0, \quad \Phi_{00} = 0.$$

11. Принципиальная особенность МКС

В общем случае МКС неравновесна. Но по теории неравновесных процессов каждый вид неравновесности порождает соответствующие силы и потоки. Поэтому введем в законы сохранения силу F_{si} (тензор) и поток энергии $\bar{Q}_{si}$. Тогда законы сохранения принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i) + \nabla \alpha_i \rho_i \bar{U}_i = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i \bar{U}_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha_i \rho_i U_{ki} \bar{U}_i) + \nabla \alpha_i P_i + \frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha_i \bar{F}_{ksi}) - \alpha_i \bar{R}_{0i} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i \varepsilon_i) + \nabla(\alpha_i \bar{U}_i (P_i + \rho_i \varepsilon_i)) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha_i \bar{F}_{ksi} \bar{U}_i) + \nabla \alpha_i \bar{Q}_{si} - \alpha_i \Phi_{0i} = 0.$$

12. Законы сохранения ВСС

Непрерывность ρ, P, E, ε, $\bar{U}$ позволяет записать законы сохранения ВСС. Если смесь неравновесна, то и ВСС неравновесна и в ней действуют релаксационные силы и потоки. Тогда З.С. имеют вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\rho\bar{U} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\bar{U}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho U_k \bar{U}) + \nabla P + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\bar{F}_{kis}\right) = 0, \qquad (12.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \nabla\bar{U}(P + \rho\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\bar{U}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\bar{F}_{kis}\right) + \nabla\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\bar{Q}_{is} = 0. \qquad (12.2)$$

Силы $\bar{F}_{kis}$ и потоки энергии $\bar{Q}_{is}$ удовлетворяют условиям кластерного взаимодействия i-го компонента с ВСС.

$$\bar{F}_{kis} = -\bar{F}_{ksi}, \qquad \bar{Q}_{is} = -\bar{Q}_{si}. \qquad (12.3)$$

13. Связь МКС с ВСС. Закон сохранения массы

МКС – модель мезоуровня (компоненты ≡ структурные элементы модели).

ВСС – модель макроуровня (нет структурных элементов, среда сплошная).

Определим условия, при которых усредненные величины удовлетворяют уравнениям ВСС. Подставим

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \rho_i, \quad \rho \bar{U} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \rho_i \bar{U}_i$$

в первое уравнение ВСС. Получим

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_i \rho_i) + \nabla \alpha_i \rho_i \bar{U}_i \right) = 0.$$

Каждое слагаемое под знаком суммы равно нулю, т.к. оно совпадает с уравнением сохранения массы i-го компонента.

14. Связь МКС с ВСС. Закон сохранения импульса

Подставим в уравнение движения ВСС (12.1) выражения

$$P = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i, \quad \rho \bar{U} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \rho_i \bar{U}_i, \quad \rho U_k = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \rho_i U_{ki},$$

$$\bar{F}_{kis} = -\bar{F}_{ksi}, \qquad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \bar{R}_{0i} = 0.$$

Получим

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i \bar{U}_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha_i \rho_i U_{ki} \bar{U}) + \nabla \alpha_i P_i - \frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha_i \bar{F}_{ksi}) - \alpha_i \bar{R}_{0i}\right) = 0. \qquad (14.1)$$

Выберем выражение силы $\bar{F}_{ksi}$ так, чтобы каждое слагаемое в этой сумме совпадало с уравнением движения i-го компонента

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i \bar{U}_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha_i \rho_i U_{ki} \bar{U}_i) + \nabla \alpha_i P_i + \frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha_i \bar{F}_{ksi}) - \alpha_i \bar{R}_{0i} = 0. \qquad (14.2)$$

15. Сила $\bar{F}_{ksi}$

Вычтем i-е слагаемое в (14.1) из (14.2). Получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha_i(\rho_i U_{ki}(\bar{U}_i - \bar{U}) + 2\bar{F}_{ksi})) = 0.$$

Проинтегрируем. Постоянную интегрирования найдем из условия

$$\bar{F}_{ksi} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{U}_i = \bar{U}.$$

В результате получим выражение силы, действующей на i-й компонент со стороны смеси

$$\bar{F}_{ksi} = 0.5\rho_i U_{ki}(\bar{U} - \bar{U}_i).$$

Видно, что $\bar{F}_{ksi} = -\bar{F}_{kis}$.

Поскольку множитель перед разностью $\bar{U} - \bar{U}_i$ зависит только от i-го компонента, то условия взаимности Онзагера для сил $\bar{F}_{ksi}$ не выполняются при взаимодействии i-го компонента со смесью.

16. Неравновесная кинетическая энергия

Уравнение энергии ВСС

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)+\nabla\bar{U}(P+\rho\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{U}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\bar{F}_{kis})+\nabla\left(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\bar{Q}_{is}\right)=0 \qquad (16.1)$$

содержит величину $\varepsilon=E+0,5\bar{U}\bar{U}$, **где**

$$\rho E=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\rho_i E_i.$$

Подставим сюда $E=\varepsilon-0.5\bar{U}\bar{U}$, $E_i=\varepsilon_i-0.5\bar{U}_i\bar{U}_i$. **Тогда**

$$\rho\varepsilon=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\rho_i\varepsilon_i-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\rho_i H_i.$$

Величина H_i есть неравновесная кинетическая энергия i-го компонента

$$H_i=0.5(\bar{U}_i\bar{U}_i-\bar{U}\bar{U}).$$

17. Следствие уравнения энергии

Подставим в уравнение энергии ВСС (12.2) выражения

$$P=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i P_i,\quad \rho\varepsilon=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\rho_i(\varepsilon_i-H_i),\quad H_i=0{,}5(\bar U_i\bar U_i-\bar U\bar U),$$

$$\bar Q_{is}=-\bar Q_{si},\quad \bar F_{kis}=-\bar F_{ksi}\quad 0=-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\Phi_{0i},\quad \bar F_{ksi}=0{,}5\rho_i U_{ki}(\bar U-\bar U_i).$$

Получим

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i\rho_i(\varepsilon_i-H_i))+\nabla(\alpha_i(\bar U(P_i+\rho_i\varepsilon_i-\rho_i H_i)-\bar Q_{si}))-\frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha_i\bar F_{ksi}\bar U)-\alpha_i\Phi_{0i}\right)=0.$$

Выберем $\bar Q_{si}$ так, чтобы каждое слагаемое с индексом i совпало с уравнением энергии i-го компонента

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i\rho_i\varepsilon_i)+\nabla(\alpha_i(\bar U_i(P_i+\rho_i\varepsilon_i)+\bar Q_{si}))+\frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha_i\bar F_{ksi}\bar U_i)-\alpha_i\Phi_{0i}=0.$$

Условие их равенства имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i\rho_i H_i)+\nabla(\alpha_i(2\bar Q_{si}+(\bar U_i-\bar U)(P_i+\rho_i\varepsilon_i)+\bar U\rho_i H_i))+\frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha_i\bar F_{ksi}(\bar U_i+\bar U))=0.$$

18. Поток энергии и замыкающее уравнение

Подставим в условие равенства уравнений энергии выражение $\bar{F}_{k0i} = 0{,}5\rho_i U_{ki}(\bar{U} - \bar{U}_i)$ и преобразуем его к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i\rho_i H_i) + \nabla\alpha_i\rho_i H_i(\bar{U} - \bar{U}_i) + \nabla(\alpha_i(2\bar{Q}_{si} + (P_i + \rho_i\varepsilon_i)(\bar{U}_i - \bar{U}))) = 0.$$

Выбор $\bar{Q}_{si}$ неоднозначен. Выберем $\bar{Q}_{si}$ так, чтобы поток энергии не зависел от H_i. Тогда

$$\bar{Q}_{si} = 0{,}5(P_i + \rho_i\varepsilon_i)(\bar{U} - \bar{U}_i).$$

Остальные члены дают уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i\rho_i H_i) + \nabla\alpha_i\rho_i H_i(\bar{U} - \bar{U}_i)) = 0.$$

Это уравнение замыкает систему уравнений i-го компонента.

Его-то и не хватало!

19. Особенности модели

1. Новые сила F_{si} и поток энергии $\bar{Q}_{si}$

$$\bar{F}_{ksi} = 0{,}5\rho_i U_{ki}(\bar{U} - \bar{U}_i), \qquad \bar{Q}_{si} = 0{,}5(P_i + \rho_i \varepsilon_i)(\bar{U} - \bar{U}_i)$$

содержат величины структурного уровня МКС с индексом i и барицентрическую скорость $\bar{U}$ − величину макроуровня. Это типично для уравнений мезомеханики.

2. Сила F_{si} и поток $\bar{Q}_{si}$ универсальны: они не содержат эмпирических констант, не зависят от размеров и формы частиц взаимодействующих компонентов, шероховатости частиц, теплоемкостей, скоростей звука и др., влияющих на времена релаксации.

3. Сила F_{si} и поток $\bar{Q}_{si}$ обращаются в ноль при равновесии по скоростям $\bar{U} = \bar{U}_i$.

20. Термодинамическая непротиворечивость модели

Если МКС термодинамически изолированная система, то законы сохранения ВСС должны выполняться одновременно с законами сохранения компонентов.

Это проверяется:

− суммированием по i каждого закона сохранения компонента,

− использованием уравнений осреднения,

− использованием выражений для силы $\bar{F}_{ksi}$ и потока $\bar{Q}_{si}$

$$\bar{F}_{ksi} = 0{,}5\rho_i U_{ki}(\bar{U} - \bar{U}_i), \qquad \bar{Q}_{si} = 0{,}5(P_i + \rho_i \varepsilon_i)(\bar{U} - \bar{U}_i),$$

− использованием нового замыкающего уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i H_i) + \nabla(\alpha_i \rho_i H_i(\bar{U} - \bar{U}_i)) = 0.$$

После этого из системы 3N законов сохранения компонентов получается система 3-х законов сохранения ВСС.

21. Замкнутость системы уравнений

1. $\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i\rho_i) + \nabla\alpha_i\rho_i\bar{U}_i = 0,$

2. $\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i\rho_i\bar{U}_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha_i\rho_i U_{ik}\bar{U}_i) + \nabla\alpha_i P_i + \frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha_i\bar{\bar{F}}_{ksi}) = \alpha_i\bar{R}_{0i},$

3. $\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i\rho_i\varepsilon_i) + \nabla(\alpha_i\bar{U}_i(P_i + \rho_i\varepsilon_i)) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha_i\bar{\bar{F}}_{ksi}\bar{U}_i) + \nabla\alpha_i\bar{Q}_{si} = \alpha_i\Phi_{0i},$

4. $\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i\rho_i H_i) + \nabla(\alpha_i\rho_i H_i(\bar{U} - \bar{U}_i) = 0,$

5. $\varepsilon_i = E_i + 0{,}5\bar{U}_i^2,$

6. УРС : $P_i = P_i(\rho_i, E_i),$

7. УРС : $T_i = T_i(\rho_i, E_i),$

8. $H_i = 0.5(\bar{U}_i\bar{U}_i - \bar{U}\bar{U}),$

9. $\bar{\bar{F}}_{ksi} = 0{,}5\rho_i U_{ki}(\bar{U} - \bar{U}_i),$

10. $\bar{Q}_{si} = 0{,}5(P_i + \rho_i\varepsilon_i)(\bar{U} - \bar{U}_i),$

11. $\bar{R}_{0i} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(\bar{U}_j - U_i),$

12. $\Phi_{0i} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(\varphi_{ij}(P_j - P_i) + \psi_{ij}(T_j - T_i),$

13. $\bar{U} = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i\rho_i\bar{U}_i \Big/ \sum_{i=1}^{N}\alpha_i\rho_i\,.$

Полная система содержит 12N+1 уравнений для 12N+1 функций: (α_i, ρ_i, P_i, ε_i, E_i, H_i, T_i, $\bar{U}_i, \bar{\bar{F}}_{kSi}, \bar{Q}_{Si}, \bar{R}_{0i}, \Phi_{0i}$)$\times$N+ $\bar{U}$