*РФЯЦ-ВНИИТФ*

**В.Ф.Куропатенко**

# *МЕТОДЫ РАСЧЕТА УДАРНЫХ ВОЛН*

***XV Всероссийская конференция***
***“Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики с приложением к многопроцессорным системам”***
***посвященная памяти К.И. Бабенко***

8 – 11 сентября, 2004
п. Абрау-Дюрсо

# 1. Методы

**В идеальной сплошной среде:**

- **на непрерывных решениях энтропия постоянна,**
- **на сильных разрывах энтропия возрастает.**

**Это главное различие.**

**Известно 4 метода расчета ударных волн, основанных на принципиально различных механизмах диссипации энергии в ударном слое, заменяющем сильный разрыв.**

| Год появления первой публикации | Авторы метода расчета ударных волн | Страна |
|---|---|---|
| 1950 | Д. Нейман, Р. Рихтмайер | США |
| 1954 | П. Лакс | США |
| 1959 | С.К. Годунов | СССР |
| 1960 | В.Ф. Куропатенко | СССР |

# 2. Свойства разностных схем (Р.С.)

**Методов расчета ударных волн-четыре.**

**Разностных схем, реализующих эти методы–много.**

Сравниваются следующие свойства Р.С.

- условие устойчивости,
- поведение энтропии на непрерывном решении,
- дистракция (безразмерная ширина слоя, заменяющего сильный или слабый разрыв),
- монотонность,
- наличие эмпирических констант.

Первая и единственная попытка сравнить эти методы сделана Яненко и Рождественским в 1968 году.

# 3. Разностные законы сохранения в дифференциальной форме

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial m} = \omega_1 , \qquad \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial m} = \omega_2 , \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial PU}{\partial m} = \omega_3 ,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_m - U = \omega_4 , \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial m}\right)_t - V = \omega_5 ,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P\frac{\partial U}{\partial m} = \omega_6 , \qquad \frac{\partial E}{\partial t} + P\frac{\partial V}{\partial t} = \omega_7 , \qquad T\frac{\partial S}{\partial t} = \omega_8 ,$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + a^2\frac{\partial V}{\partial t} = \omega_9 , \qquad \frac{\partial P}{\partial t} + a^2\frac{\partial U}{\partial m} = \omega_{10} .$$

**Среди $\omega_k$ (k=1,2,…,10) только четыре независимых. Простейшая форма законов сохранения достаточна для иллюстрации свойств метода.**

# 4. Диссипативность Р.С.

**Каждая Р.С. содержит явно или неявно уравнение производства энтропии**

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \omega_8.$$

**$\omega_8$ определяется через независимые $\omega_k$. Часто встречаются:**

| независимые $\omega_k$ | Уравнение для $\omega_8$ |
|---|---|
| $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4$ | $\omega_8 = \omega_3 - U\omega_2 + P\omega_1$ |
| $\omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5$ | $\omega_8 = \omega_3 - U\omega_2 + P\left(\overline{\omega}_4 - \overline{\omega}_5\right)$ |
| $\omega_2,\ \omega_4,\ \omega_5,\ \omega_7$ | $\omega_8 = \omega_7$ |

**На ударных волнах диссипация энергии определяется входящими в $\omega_8$ членами, реализующими идею метода. На непрерывных решениях должно быть $S = \mathrm{const}$.**

**Критерий диссипативности – поведение энтропии на слабой ударной волне:**

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^3 + \ldots$$

# 5. Дистракция разрыва

D – безразмерная ширина слоя, заменяющего разрыв. Метод исследования дистракции D разрывов предложен в 1950 г. Нейманом и Рихтмайером для бесконечно сильных УВ в идеальном газе. В 1996 метод обобщен Куропатенко и Макеевой для УВ произвольной амплитуды в жидкости. От m, t переходим к автомодельной переменной $\xi = m - Wt$ где $W = const$. На стационарной УВ главные члены разностных уравнений образуют систему ОДУ. Ее решение

$$\xi = \xi(V).$$

Перед разрывом $V = V_0$, $\xi = \xi_0$, за разрывом $V = V_1$, $\xi = \xi_1$. Дистракция равна

$$D = \frac{\xi_0 - \xi_1}{h}$$

Эффективная дистракция определяется в точке, где

$$V'' = 0 \quad \text{и} \quad V' = V'_{М}.$$

$$D^{Э} = \frac{V_0 - V_1}{V'_{М}\, h}.$$

# 6. Монотонность

**В акустическом приближении P and U заменяются инвариантами $\alpha$ и $\beta$:**

$$P = 0{,}5(\alpha + \beta), \qquad U = 0{,}5(\alpha - \beta)/a.$$

**Затем $\alpha_i^{n+1}$ и $\beta_i^{n+1}$ выражаются через $\alpha_{i+k}^{n}$ и $\beta_{i+k}^{n}$. В бегущей волне $\alpha$ полагается $\beta$=0. К выражению**

$$\alpha_i^{n+1} = \sum_{k=-k_1}^{k_2} b_{i+k}\alpha_{i+k}^{n}$$

**применяется теорема Годунова. Если все $b_{i+k} \geq 0$, то Р.С. монотонна. Если есть $b_{i+k} < 0$, то из условия $\alpha_{i+1}^{n+1} - \alpha_i^{n+1} \geq 0$**

**(или $\leq 0$) с помощью разложений в ряд Тэйлора получается условие монотонности**

$$\tau \leq hf\left(\frac{\partial\alpha}{\partial m}, \frac{\partial^2\alpha}{\partial m^2}\right).$$

# 7. Метод Неймана–Рихтмайера. Идея

**Главная идея: в дифференциальные уравнения движения и энергии вводится искуственная вязкость, обеспечивающая диссипацию энергии и дистракцию сильного разрыва.**

**Нейман и Рихтмайер предложили q в виде:**

$$q = -\frac{C^2 \Delta x_0^2}{V} \frac{\partial U}{\partial x_0} \left| \frac{\partial U}{\partial x_0} \right| .$$

**Выражения для q и Р.С. могут быть разными. (Например, явными или неявными.) Но если в уравнения вводится псевдовязкость, то все такие Р.С. являются реализацией метода Неймана–Рихтмайера.**

**В Р.С. Неймана–Рихтмайера P, $\rho$, E и q определяются в серединах интервалов по m, U и x – в узлах сеточных ячеек.**

# 8. Р.С. Неймана–Рихтмайера. Уравнения

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \frac{P_{i+0,5}^n + q_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n - q_{i-0,5}^n}{h} = 0,$$

$$\frac{x_i^{n+1} - x_i^n}{\tau} - U_i^{n+1} = 0, \qquad \frac{x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1}}{h} - V_{i+0,5}^{n+1} = 0,$$

$$q_{i+0,5}^{n+1} = \begin{cases} \dfrac{C^2}{V_{i+0,5}^{n+1}} \left(U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}\right)^2 & \text{при } U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1} < 0, \\ 0 \ \text{ при } U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1} \geq 0, \end{cases}$$

$$E_{i+0,5}^{n+1} - E_{i+0,5}^n + \left( \frac{P_{i+0,5}^{n+1} + P_{i+0,5}^n}{2} + q_{i+0,5}^{n+1} \right) \left( V_{i+0,5}^{n+1} - V_{i+0,5}^n \right) = 0.$$

# 9. Р.С. Неймана–Рихтмайера. Свойства

1. Дистракция разрыва

$$D_{HP} = \frac{\xi_0 - \xi_1}{h} = 2C\pi\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}, \qquad D_{HP}^{Э} = 2C\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}.$$

2. Уравнение производства энтропии при q = 0:

$$T\frac{dS}{dt} = -\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S\left(\frac{dV}{dt}\right)^3 + \frac{\tau^2 h^2 C^2}{24V}\left(\frac{1}{a^2}\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2\frac{\partial^3 V}{\partial t^3} + \ldots$$

3. Условие устойчивости

$$K = \frac{a\tau}{h} \le 0{,}25.$$

4. Р.С. немонотонна.

5. Эмпирическая константа С.

# 10. Метод Лакса. Идея

**Диссипация энергии на УВ обеспечивается главными членами $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$. (Метод аппроксимационной вязкости).**

**Величины P, V, E и U определяются в серединах сеточных интервалов по m. Разностные уравнения имеют вид**

$$\frac{V_{i+0,5}^{n+1} - V_{i+0,5}^{n}}{\tau} - \frac{U_{i+1}^{*} - U_{i}^{*}}{h} = 0, \qquad \frac{U_{i+0,5}^{n+1} - U_{i+0,5}^{n}}{\tau} + \frac{P_{i+1}^{*} - P_{i}^{*}}{h} = 0,$$

$$\frac{\varepsilon_{i+0,5}^{n+1} - \varepsilon_{i+0,5}^{n}}{\tau} + \frac{(PU)_{i+1}^{*} - (PU)_{i}^{*}}{h} = 0, \qquad E_{i+0,5}^{n+1} = \varepsilon_{i+0,5}^{n+1} - 0,5\left(U_{i+0,5}^{n+1}\right)^2.$$

**Вспомогательные величины:** $U_i^{*} = U_i^{n} + \frac{h}{2\tau}\left(V_{i+0,5}^{n} - V_{i-0,5}^{n}\right)$,

$$P_i^{*} = P_i^{n} - \frac{h}{2\tau}\left(U_{i+0,5}^{n} - U_{i-0,5}^{n}\right), \qquad (PU)_i^{*} = (PU)_i^{n} - \frac{h}{2\tau}\left(\varepsilon_{i+0,5}^{n} - \varepsilon_{i-0,5}^{n}\right).$$

**Недостатки: 1. Экстенсивные величины V , $\varepsilon$ разрывны на КГ. 2. $\tau$ в знаменателе.**

# 11. Р.С. Лакса. Погрешности аппроксимации

**Главные члены погрешностей аппроксимации $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ имеют вид**

$$\omega_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial m^2}\frac{h^2}{\tau} + O\left(\tau^2, h^2\right),$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial m^2}\frac{h^2}{\tau} + O\left(\tau^2, h^2\right),$$

$$\omega_3 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial m^2}\frac{h^2}{\tau} + O\left(\tau^2, h^2\right).$$

# 12. Р.С. Лакса. Свойства

1. Дистракция разрыва

$$D_л = \infty, \quad D_л^э = \frac{2\left(1-K^2\right)}{(\gamma+1)K}\frac{\left(\sqrt{V_0}+\sqrt{V_1}\right)}{\left(\sqrt{V_0}-\sqrt{V_1}\right)}.$$

Т.о. $D_л^э \to 0$ при $K\to1$ и $D_л^э \to \infty$ при $K\to0$ или $V_1\to V_0$.

2. Уравнение производства энтропии

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \omega_3 - U\omega_2 + P\omega_1 = \frac{h}{2a}\left(\frac{1-K^2}{K}\right)\left(a^2\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2\right) + \ldots$$

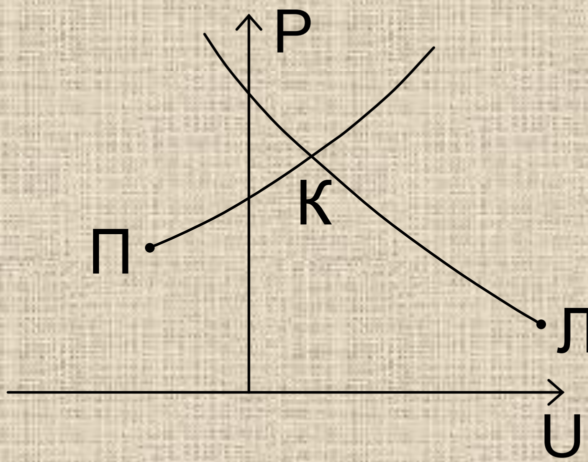
При $K\to0$, $\dfrac{\partial S}{\partial t} \to \infty$.

3. Условие устойчивости Р.С. Лакса: $K \le 1$.

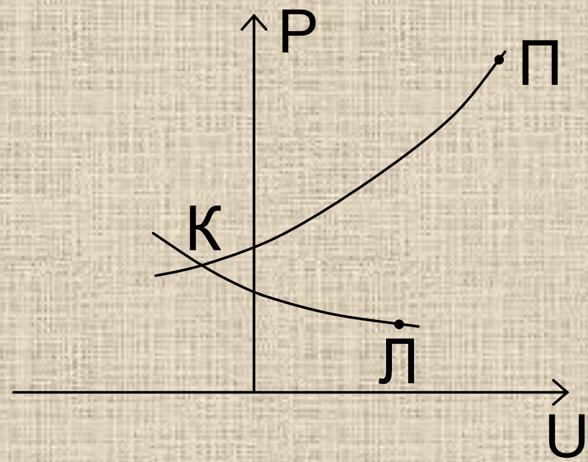
4. Р.С. Лакса монотонна при $K \le 1$.

# 13. Метод Годунова. Идея

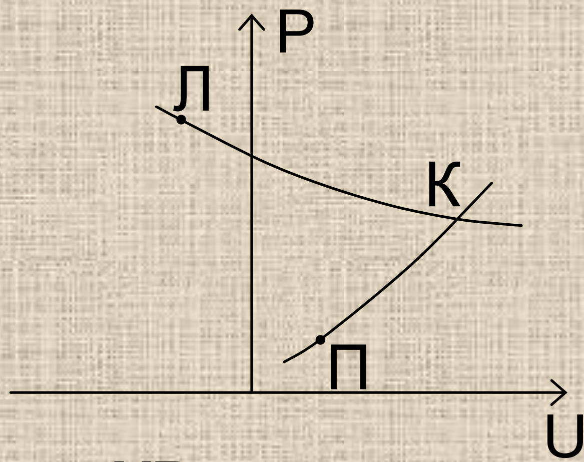
**P, $\rho$, E, U определяемые в серединах интервалов по m, кусочнопостоянны. Т.о. в узлах сетки имеются произвольные разрывы. При $t>t^n$ они распадаются.**




**Две ударных волны**




**УВ влево, ВР вправо**




**УВ вправо, ВР влево**

# 14. Р.С. Годунова. Погрешности аппроксимации.

$$\omega_1 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{h}{2a}\frac{\partial^2 P}{\partial m^2} + O\left(\tau^2, h^2\right),$$

$$\omega_2 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{ah}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial m^2} + O\left(\tau^2, h^2\right),$$

$$\omega_3 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \frac{ah}{2}U\frac{\partial^2 U}{\partial m^2} + \frac{ah}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial m}\right)^2 + \frac{h}{2a}\left(\frac{\partial P}{\partial m}\right)^2 + \frac{h}{2a}P\frac{\partial^2 P}{\partial m^2} + O\left(\tau^2, h^2\right).$$

# 15. Р.С. Годунова. Свойства

1. Дистракция разрыва

$$D_Г=+\infty, \qquad D_Г^Э=\frac{2}{(\gamma+1)}(1-K)\left(\frac{\sqrt{V_0}+\sqrt{V_1}}{\sqrt{V_0}-\sqrt{V_1}}\right).$$

$D_Г^Э \to 0$ при $K \to 1$ и $D_Г^Э \to \infty$ при $V_1 \to V_0$.

2. Уравнение производства энтропии при $\omega_8 = \omega_3 - U\omega_2 + P\omega_1$.

$$T\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{h}{2a}(1-K)\left(\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+a^2\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right)+O\left(\tau^2,h^2\right).$$

Т.о. Р.С. Годунова в акустическом приближении сильно диссипативна и на ударных волнах, и на волнах разрежения. Скорость роста S максимальна при K=0.

3. Условие устойчивости $K \le 1$.

4. Р.С. Годунова, согласно теореме Годунова, монотонна при $K \le 1$.

# 16. Метод Куропатенко

**Основная идея: На непрерывных решениях (волнах разрежения) вспомогательные величины U* и P* определяются из вспомогательных разностных уравнений. На ударных волнах U* и P* находятся как решение системы законов сохранения на сильном разрыве.**

$$P_1 - P_0 - W(U_1 - U_0) = 0, \qquad (16.1)$$

$$U_1 - U_0 - W(V_1 - V_0) = 0, \qquad (16.2)$$

$$P_1U_1 - P_0U_0 - W(E_1 - E_0) - \frac{W}{2}(U_1^2 - U_0^2) = 0. \qquad (16.3)$$

**Состояние перед разрывом ($P_0$, $V_0$, $E_0$, $U_0$) отождествляется с величинами в сеточном интервале. Одна из $U_1$, $P_1$, $V_1$ и $E_1$ задается. Остальные вспомогательные величины находятся из (16.1) – (16.3) и УРС.**

# 17. Недивергентная Р.С. Куропатенко (1960)

Значения P, V, E определяются в серединах интервалов по m, U, x–в узлах сетки. Разностные уравнения имеют вид

$$\frac{U_i^{n+1}-U_i^n}{\tau}+\frac{\bar{P}_{i+0,5}^n-\bar{P}_{i-0,5}^n}{h}=0,$$

$$x_i^{n+1}=x_i^n+\tau U_i^{n+1}, \qquad V_{i+0,5}^{n+1}=\frac{x_{i+1}^{n+1}-x_i^{n+1}}{h},$$

Независимые погрешности аппроксимации

$$\omega_2=-\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}-\frac{h^2}{24}\frac{\partial^3 P}{\partial m^3}+O\left(\tau^3,h^3\right),$$

$$\omega_4=\frac{\tau}{2}\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+O\left(\tau^3\right), \qquad \omega_5=-\frac{h^2}{24}\frac{\partial^3 x}{\partial m^3}+O\left(h^3\right).$$

На ударной волне

$$E_{i+0,5}^{n+1}-E_{i+0,5}^n+0.5(\bar{P}_{i+0,5}^{n+1}+\bar{P}_{i+0,5}^n)(V_{i+0,5}^{n+1}-V_{i+0,5}^n)=0.$$

На волне разрежения S = const, и $\bar{P}=P$.

# 18. Недивергентная Р.С. Куропатенко. Расчет У.В.

В качестве величин перед сильным разрывом берутся

$$V_0 = V^n_{i+0,5}, \quad P_0 = P^n_{i+0,5}, \quad E_0 = E^n_{i+0,5},$$

а в качестве скачка скорости – разность сеточных значений U в момент $t^{n+1}$

$$\Delta U = \left|\overline{U} - U_0\right| = \left|U^{n+1}_{i+1} - U^{n+1}_i\right|.$$

Подставив эти значения в уравнения на сильном разрыве, получим

$$\overline{P}^{n+1}_{i+0.5} = P^n_{i+0.5} - W\left(U^{n+1}_{i+1} - U^{n+1}_i\right).$$

Для УРС конденсированного вещества $P = (\gamma\text{-}1)\rho E + C_0^2(\rho - \rho_0)$

$$\overline{P}^{n+1}_{i+0.5} = P^n_{i+0.5} + \frac{\gamma+1}{4}\rho^n_{i+0.5}\Delta U^2 + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\rho^n_{i+0.5}\Delta U^2\right)^2 + \left(a^n_{i+0.5}\right)^2 \Delta U^2}.$$

Ассимптотики: $\rho_0 \Delta U_2 << a_0^2$, $\rho_0 \Delta U_2 >> a_0^2$.

Линейно-квадратичная псевдовязкость.

# 19. Недивергентная Р.С. Куропатенко. Свойства

1. Дистракция стационарной УВ такая же, как в Р.С. Годунова.

2. На непрерывном решении для определения P(V), E(V) используется интегрирование вдоль изэнтропы

$$E^{n+1} - E + \int_{V^n}^{V^{n+1}} P\left(V,E\right) dV = 0, \qquad P = P(V,E).$$

Такой расчет E и P обеспечивает любую необходимую точность определения энтропии, уравнение производства энтропии принимает вид

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_m = 0.$$

3. Условие устойчивости: $K \leq 1$.

4. Р.С. Не монотонна, амплитуда осцилляции зависит от K.

# 20. Метод Куропатенко. Дивергентная Р.С. Макеевой

Разностная схема построена в 1996 г. Макеевой. Величины P, V, E, U определены в серединах интервалов m.

Разностные уравнения

$$\frac{V_{i+0.5}^{n+1}-V_{i+0.5}^{n}}{\tau}-\frac{U_{i+1}^{*}-U_{i}^{*}}{h}=0,\qquad \frac{U_{i+0.5}^{n+1}-U_{i+0.5}^{n}}{\tau}-\frac{P_{i+1}^{*}-P_{i}^{*}}{h}=0.$$

На волне разрежения $P_i^*, U_i^*$ рассчитываются в 2 этапа

$$\bar{U}_i=U_i^n-\frac{\tau}{2h}\left(P_{i+0.5}^n-P_{i-0.5}^n\right),\qquad \bar{P}_i=P_i^n-\frac{\tau a^2}{2h}\left(U_{i+0.5}^n-U_{i-0.5}^n\right).$$

$$U_i^*=\bar{U}_i-\frac{1-K^2}{6}\left(\bar{U}_{i+1}-2\bar{U}_i+\bar{U}_{i-1}\right)-\frac{1-K}{6a}\left(P_{i+0.5}^n-P_{i-0.5}^n\right),$$

$$P_i^*=\bar{P}_i-\frac{1-K^2}{6}\left(\bar{P}_{i+1}-2\bar{P}_i+\bar{P}_{i-1}\right)-\frac{1-K}{6}a\left(U_{i+0.5}^n-U_{i-0.5}^n\right).$$

$P_{i+0.5}^{n+1}, E_{i+0.5}^{n+1}$ находятся интегрированием вдоль изэнтропы. На ВР схема монотонна при $K \le 1$. Условие устойчивости $K \le 1$.

# 21. Метод Куропатенко. Дивергентная Р.С. Макеевой

На УВ вспомогательные величины вычисляются из уравнений на поверхности сильного разрыва (0–величины перед разрывом, 1–за разрывом). Если $U^n_{i+0.5} - U^n_{i-0.5} < 0$, то

$$1.\ U_1 = U^n_{i-0.5}, \quad (P,V,E,U)_0 = (P,V,E,U)^n_{i+0.5} \text{ при } \quad P^n_{i-0.5} > P^n_{i+0.5},$$

$$2.\ U_1 = U^n_{i+0.5}, \quad (P,V,E,U)_0 = (P,V,E,U)^n_{i-0.5} \text{ при } \quad P^n_{i-0.5} < P^n_{i+0.5}.$$

Остальные величины за разрывом находятся из уравнений на разрыве. При W>0

$$U^*_i = U^n_{i-0.5}, \qquad P^*_i = P^n_{i+0.5} - W\left(U^n_{i+0.5} - U^n_{i-0.5}\right).$$

Уравнение энергии на УВ

$$\frac{\varepsilon^{n+1}_{i+0.5} - \varepsilon^n_{i+0.5}}{\tau} + \frac{P^*_{i+1}U^*_{i+1} - P^*_i U^*_i}{h} = 0.$$

Р.С. монотонна при $K \le 1$. Дистракция совпадает с дистракцией в Р.С. Годунова.

# 22. Другие разностные схемы. Р.С. Лакса-Вендрофа. Идея

В законы сохранения вводится три псевдовязкости $q_U$, $q_P$, $q_{PU}$.

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial (U + q_U)}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial (P + q_P)}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial (PU + q_{PU})}{\partial m} = 0,$$

где

$$q_p = -\frac{B}{4} h^2 \left|\frac{\partial a}{\partial m}\right| \frac{\partial U}{\partial m}, \qquad q_u = -\frac{B}{4}\frac{h^2}{a^2} \left|\frac{\partial a}{\partial m}\right| \frac{\partial P}{\partial m},$$

$$q_{pu} = -\frac{B}{4}\frac{h^2}{a^2} \left|\frac{\partial a}{\partial m}\right| \left( P\frac{\partial P}{\partial m} + a^2 U \frac{\partial U}{\partial m} \right).$$

Эта Р.С. содержит эмпирическую константу $B \approx 1 \div 2$. Условие устойчивости имеет вид

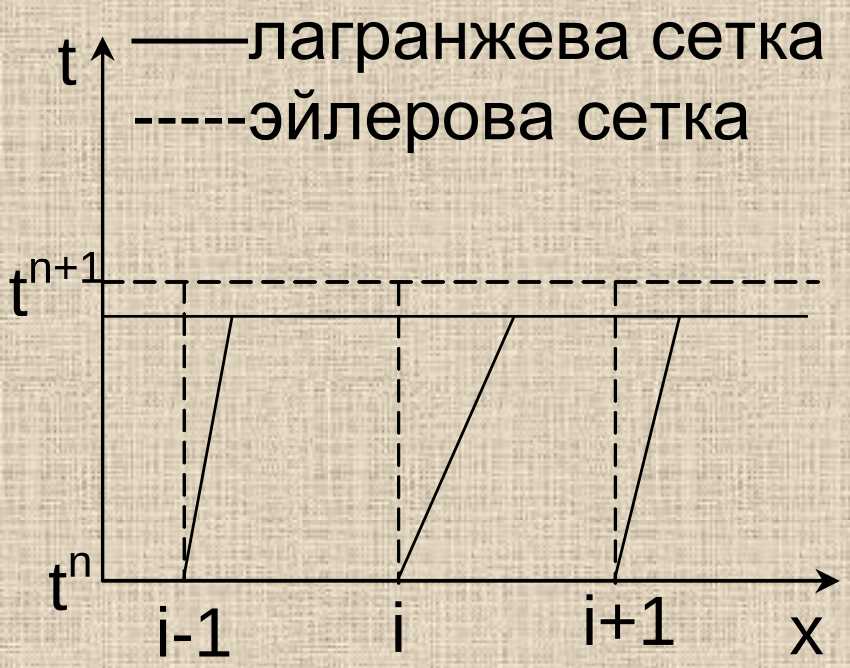
$$K(K + \frac{1}{2}B) \le 1.$$

Схема немонотонна. Псевдовязкости $q_U$, $q_P$, $q_{PU}$ не аппроксимационные. Они введены искусственно.

Р.С. Лакса-Вендрофа является, т.о. реализацией метода Неймана-Рихтмайера.

# 23. Р.С. в эйлеровых координатах

**Разностные схемы в эйлеровых координатах широко применяются для решения задач аэродинамики (см. работы О.М. Белоцерковского). Любую из таких Р.С. Можно рассматривать, как состоящую из двух этапов.**



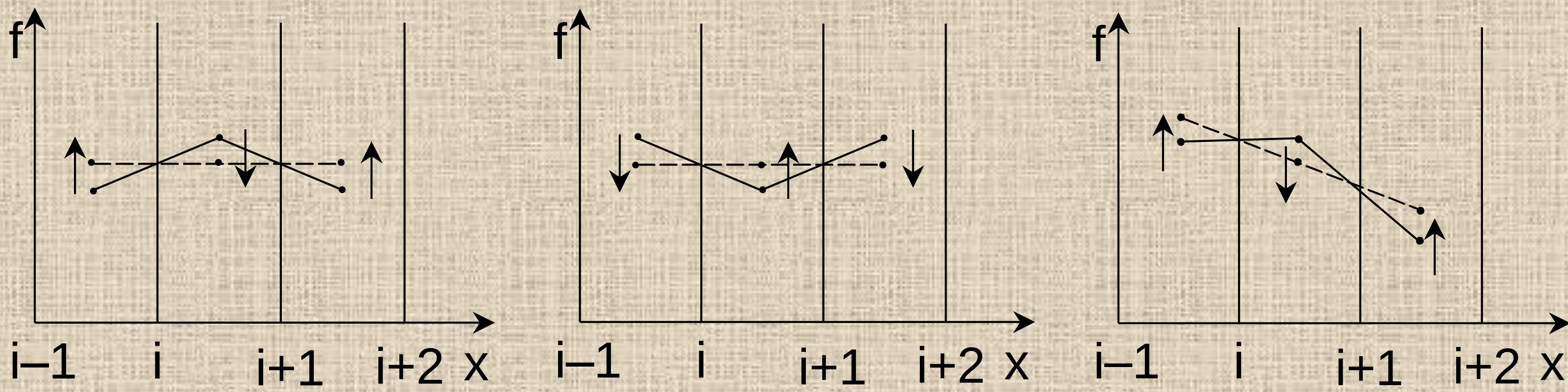

**1й этап:** Сетка рассматривается как лагранжева и применяется один из методов расчета ударных волн в лагранжевых координатах.

**2й этап:** Пересчет величин с лагранжевой сетки на эйлерову. При пересчете определяются потоки массы, количества движения и энергии через поверхности эйлеровых ячеек.

**Пересчет может быть сделан на любую сетку. В этом случае получаются Р.С. в подвижных сетках.**

# 24. Подавление немонотонности

**Для подавления немонотонности численного решения разработаны приемы сглаживания уже полученного решения без нарушения законов сохранения. Эти приемы могут применяться в связке с любым из выше перечисленных методов расчета ударных волн.**




**Как правило, при разработке приемов TVD вопросы диссипации энергии и сохранения энтропии на непрерывных решений не обсуждаются.**

# 25. Заключение. Сравнение характеристик Р.С.

| Автор / Свойства | Нейман-Рихтмайер | Лакс | Годунов | Куропатенко | Макеева |
|---|---|---|---|---|---|
| Дистракция, D | $2C\pi\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| Эффективное значение дистракции, $D^Э$ | $2C\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$ | $\frac{2(1-K^2)}{K(\gamma+1)}\left(\frac{\sqrt{V_0}+\sqrt{V_1}}{\sqrt{V_0}-\sqrt{V_1}}\right)$ | $\frac{2(1-K)}{(\gamma+1)}\left(\frac{\sqrt{V_0}+\sqrt{V_1}}{\sqrt{V_0}-\sqrt{V_1}}\right)$ | | |
| Монотонность на ударной волне | Нет | Есть | Есть | Условная | Есть |
| Монотонность на волне разрежения | Нет | Есть | Есть | Нет | Есть |
| Эмпирические константы | C | Нет | Нет | Нет | Нет |
| Условие устойчивости | $K \le \frac{\sqrt{\gamma}}{2C}$ | $K \le 1$ | $K \le 1$ | $K \le 1$ | $K \le 1$ |
| Поведение S на непрерыв-ных решениях | По критерию слабой УВ | Растет | Растет | Постоянна | |