ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 25, 1985 № 8

УДК 519.6:533.7

ЛОКАЛЬНАЯ КОНСЕРВАТИВНОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

КУРОПАТЕНКО В. Ф.

(Челябинск)

Разностные уравнения газовой динамики, вообще говоря, не обладают свойством локальной консервативности, вследствие чего с течением времени происходит необратимое изменение величин, которые должны быть неизменными. Предлагается способ исследования диссипативных свойств разностных уравнений газовой динамики, использующий понятия M- и S-консервативности, сильной и слабой диссипативности. Проведено исследование диссипативных свойств многих разностных схем.

Введение

Необходимость исследования свойств схем на конечной сетке привела к введению понятий дивергентности, консервативности [1], [2], [3] и полной консервативности [4]. Получили широкое распространение попытки связать свойства разностных уравнений с их формой. Так, в [3] дивергентность безусловно отождествляется с консервативностью, а в [1] их тождественность обусловлена инвариантностью вспомогательных величин на гранях ячейки сетки относительно пространственного индекса. Анализ работ, посвященных исследованию свойств разностных законов сохранения, указывает на незавершенность теории априорного исследования консервативности схем и противоречивость оценок, ибо большинство авторов для уравнения энергии считает предпочтительной дивергентную форму, а для уравнения сохранения массы — недивергентную (плотность равна массе, деленной на объем).

Рассмотрим метод исследования локальной консервативности разностных схем и применим его для определения диссипативных свойств некоторых известных условно или безусловно устойчивых схем.

§ 1. Дифференциальные и разностные уравнения

При отсутствии вязкости, теплопроводности и источников энергии уравнения сохранения массы, количества движения и энергии для идеальной среды в лагранжевых координатах имеют вид

$$\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial U}{\partial m}=0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial m}=0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(E+0.5U^2)+\frac{\partial}{\partial m}(PU)=0. \tag{1.3}$$

Система уравнений (1.1)—(1.3) содержит четыре искомые функции (V — удельный объем, P — давление, E — удельная внутренняя энергия, U — массовая скорость), зависящие от двух аргументов (t — время, m — лагранжева координата). Из термодинамики известно, что среди множества термодинамических функций, характеризующих состояние вещества, две являются независимыми, а остальные выражаются через них. Поскольку в (1.1)–(1.3) содержатся три термодинамические функции, то для замыкания следует добавить одно уравнение состояния

$$F(P, V, E)=0.$$

Положение каждой частицы в пространстве определяется ее эйлеровой координатой $x=x(m, t)$, для нахождения которой можно использовать одно из уравнений:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_m - U = 0. \tag{1.4}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial m}\right)_t - V = 0. \tag{1.5}$$

Уравнения (1.1), (1.4), (1.5) зависимы: одно из них следует из двух других. Рассмотрим также ряд уравнений, являющихся следствиями системы (1.1)–(1.3) и уравнений термодинамики. Умножив (1.2) на U и отняв результат от (1.3), получим

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P\frac{\partial U}{\partial m} = 0. \tag{1.6}$$

Умножив далее (1.1) на P и сложив произведение с (1.6), получим

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P\frac{\partial V}{\partial t} = 0. \tag{1.7}$$

Уравнения (1.6), (1.7) являются следствиями исходной системы (1.1)–(1.3). Рассмотрение различных термодинамических функций (энтальпия, свободная энергия, температура и т. д.) приводит к ряду новых следствий. Ограничимся, однако, только рассмотрением энтропии S, поскольку хорошо известно, что в адиабатических течениях она остается постоянной вдоль линий тока.

Уравнения (1.1)–(1.7) содержат три термодинамические функции: P, V и E. Пусть V и E независимы. Уравнение скорости изменения энтропии $S(V, E)$ вдоль линии тока имеет вид

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} + P\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{1.8}$$

Из (1.7), (1.8) следует уравнение сохранения энтропии вдоль линии тока:

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{1.9}$$

Уравнение (1.9), как и уравнения (1.6), (1.7), является следствием системы (1.1)–(1.3) и термодинамических уравнений.

Анализ других известных термодинамических функций показывает, что среди них нет таких, значения которых сохранялись бы постоянными вдоль траектории.

Рассмотрим еще два часто встречающихся уравнения, содержащих скорость изменения давления. Продифференцировав $P(V, E)$ по t, получим

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_E\frac{\partial V}{\partial t}+\left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_V\frac{\partial E}{\partial t}.$$

Подставив сюда $\partial E/\partial t$ из (1.6) или (1.7), получим

$$\frac{\partial P}{\partial t}+a^2\frac{\partial U}{\partial m}=0, \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}+a^2\frac{\partial V}{\partial t}=0, \tag{1.11}$$

где

$$a^2=-\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S=-\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_E+P\left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_V.$$

Для численного интегрирования дифференциальные уравнения заменяются разностными. Ниже будут рассматриваться разностные уравнения в дифференциальной форме. Вопросы получения разностных уравнений газовой динамики в дифференциальной форме и исследование их свойств подробно изучены в [5].

Разностные уравнения, аппроксимирующие (1.1)–(1.7), (1.9)–(1.11), будем исследовать в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial U}{\partial m}=\omega_1, \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial m}=\omega_2, \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(E+0.5U^2)+\frac{\partial}{\partial m}(PU)=\omega_3, \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}-U=\omega_4, \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial x}{\partial m}-V=\omega_5, \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}+P\frac{\partial U}{\partial m}=\omega_6, \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}+P\frac{\partial V}{\partial t}=\omega_7, \tag{1.18}$$

$$T\frac{\partial S}{\partial t}=\omega_8, \tag{1.19}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}+a^2\frac{\partial U}{\partial m}=\omega_9, \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}+a^2\frac{\partial V}{\partial t}=\omega_{10}. \tag{1.21}$$

Величины ω_i, $i=1,\ldots,10$, являющиеся погрешностями аппроксимации уравнений (1.1)—(1.7), (1.9)—(1.11), соответственно, уравнениями (1.12)—(1.21), имеют вид

$$(1.22)\qquad \omega_i=\sum_{k=0,l=0}^{\infty} A_{ikl}\tau^k h^l, \qquad k+l\geqslant 1,$$

где A_{ikl} содержат частные производные функций, входящих в соответствующее разностное уравнение, и не зависят от τ — шага сетки по переменной t и от h — шага сетки по переменной m.

§ 2. Преобразуемость форм разностных уравнений

Система уравнений (1.12)—(1.21), содержащая 10 уравнений и 4 независимые функции (x, u и две термодинамические функции), является переопределенной. Для нахождения численного решения необходима лишь часть уравнений. Конструирование разностной схемы заключается в выборе четырех уравнений из системы (1.12)—(1.21), т. е. в выборе четырех конкретных ω_i. Следуя установившейся терминологии [4], будем называть разностные уравнения (1.12)—(1.14) уравнениями в дивергентной форме, уравнения (1.15)—(1.21) — уравнениями в недивергентной форме, или — проще — дивергентными и недивергентными уравнениями.

Теорема 1. *Дивергентные разностные уравнения газовой динамики преобразуются с помощью других уравнений разностной схемы в уравнения недивергентной формы, и наоборот.*

Доказательство. Перейдем от разностных уравнений (1.12)—(1.21) к системе линейных относительно ω_i уравнений, не содержащих производных, стоящих в левых частях (1.12)—(1.21). Умножим (1.12) на P, сложим с (1.17) и из полученного выражения вычтем (1.18):

$$(2.1)\qquad P\omega_1+\omega_6-\omega_7=0.$$

Продифференцируем (1.15) по m, (1.16) по t:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial m\partial t}-\frac{\partial U}{\partial m}=\frac{\partial\omega_4}{\partial m}=\bar{\omega}_4,\qquad \frac{\partial_2 x}{\partial t\partial m}-\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial\omega_5}{\partial t}=\bar{\omega}_5.$$

Выразим из этих уравнений $\partial U/\partial m$ и $\partial V/\partial t$, опустим для удобства черту над $\bar{\omega}_4$ и $\bar{\omega}_5$ и подставим в (1.12):

$$(2.2)\qquad \omega_1-\omega_4+\omega_5=0.$$

Умножим (1.13) на U, вычтем из полученного выражения (1.14) и прибавим (1.17):

$$(2.3)\qquad U\omega_2-\omega_3+\omega_6=0.$$

Далее подставим (1.18), (1.19) в (1.8):

$$(2.4)\qquad \omega_7-\omega_8=0.$$

Умножим (1.12) на a^2, сложим с (1.20) и вычтем (1.21):

$$(2.5)\qquad a^2\omega_1+\omega_9-\omega_{10}=0.$$

Наконец, из (1.18), (1.21) и уравнения для скорости роста давления получим

$$(2.6)\qquad \left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_V \omega_7-\omega_{10}=0.$$

Уравнения (2.1)—(2.6) образуют систему шести линейных относительно ω_i уравнений с 10 неизвестными. Ранг матрицы коэффициентов этой системы равен 6, следовательно, система (2.1)—(2.6) имеет фундаментальные решения, каждое из которых состоит из шести линейно-независимых решений. Количество фундаментальных решений $K \leqslant C_{10}^6 = 210$. Рассмотрим их, начиная с наиболее часто встречающегося в литературе типа разностной схемы с независимыми ω_2, ω_3, ω_4, ω_5. Перенесем члены уравнений, соответствующие элементам 2-го—5-го столбцов, в правые части уравнений. В результате получим систему линейных относительно ω_i неоднородных уравнений. Матрица этой системы

$$A_1 = \begin{Vmatrix} P & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \partial p/\partial E & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

и расширенная матрица

$$B_1 = \begin{Vmatrix} P & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_4 - \omega_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_3 - U\omega_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial P/\partial E & 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

имеют ранг $r=6$. Следовательно, система совместна, фундаментальное решение существует и имеет вид

$$\omega_1 = \omega_4 + \omega_5, \qquad \omega_6 = -U\omega_2 + \omega_3,$$

$$\omega_7 = P(\omega_4 + \omega_5) - U\omega_2 + \omega_3, \qquad \omega_8 = P(\omega_4 + \omega_5) - U\omega_2 + \omega_3,$$

$$\omega_9 = \left(P\frac{\partial P}{\partial E} - a^2\right)(\omega_4 + \omega_5) + \frac{\partial P}{\partial E}(\omega_3 - U\omega_2),$$

$$\omega_{10} = \frac{\partial P}{\partial E}\left[P(\omega_4 + \omega_5) - U\omega_2 + \omega_3\right].$$

Проведя аналогичное рассмотрение для всех 210 систем, получим, что только часть из них совместны и, следовательно, существует меньше чем 210 фундаментальных решений. Ограничимся построением фундаментальных решений наиболее употребительных разностных схем. Номера этих типов схем и соответствующие им наборы независимых и зависимых ω_i приведены в таблице.

Из существования этих фундаментальных решений следует:

1) если в разностной схеме используется уравнение энергии (1.14) в дивергентной форме, то с помощью соответствующего фундаментального решения оно преобразуется к любому из уравнений (1.17), (1.18) в недивергентной форме (схемы типа 1,4);

2) если в разностной схеме используется уравнение энергии (1.17) или (1.18) в недивергентной форме, то с помощью соответствующего фунда-

Тип р. с.	Независимые	Зависимые
1	$\omega_2\,\omega_3\,\omega_4\,\omega_5$	$\omega_1\,\omega_6\,\omega_7\,\omega_8\,\omega_9\,\omega_{10}$
2	$\omega_2\,\omega_4\,\omega_5\,\omega_6$	$\omega_1\,\omega_3\,\omega_7\,\omega_8\,\omega_9\,\omega_{10}$
3	$\omega_2\,\omega_4\,\omega_5\,\omega_7$	$\omega_1\,\omega_3\,\omega_6\,\omega_8\,\omega_9\,\omega_{10}$
4	$\omega_1\,\omega_2\,\omega_3\,\omega_4$	$\omega_5\,\omega_6\,\omega_7\,\omega_8\,\omega_9\,\omega_{10}$
5	$\omega_1\,\omega_2\,\omega_4\,\omega_6$	$\omega_3\,\omega_5\,\omega_7\,\omega_8\,\omega_9\,\omega_{10}$
6	$\omega_1\,\omega_2\,\omega_4\,\omega_7$	$\omega_3\,\omega_5\,\omega_6\,\omega_8\,\omega_9\,\omega_{10}$

ментального решения оно преобразуется к уравнению (1.14) в дивергентной форме (схемы типа 2, 3, 5, 6);

3) если в разностной схеме используется уравнение сохранения массы (1.12) в дивергентной форме, то оно преобразуется к уравнению сохранения массы (1.16) в недивергентной форме (схемы типа 4, 5, 6);

4) если в разностной схеме используется уравнение сохранения массы (1.16) в недивергентной форме, то оно преобразуется к уравнению (1.12) в дивергентной форме (схемы типа 1, 2, 3).

Теорема доказана.

§ 3. Консервативность и диссипативные свойства разностной схемы

Определение 1. Консервативностью называется свойство разностной схемы сохранять без изменения какую-либо функцию или комбинацию функций, входящих в уравнения (1.12)—(1.21), либо интегралы от комбинаций функций по любым областям или контурам.

Среди функций, входящих в (1.1)—(1.7), (1.9)—(1.11), только $S=\text{const}$ и $m=\text{const}$ вдоль линии тока. Поэтому ограничимся рассмотрением свойств схем сохранять точно или приближенно S и m вдоль линии тока (S-консервативность и M-консервативность). Поскольку эти свойства проявляются на каждой линии тока, то они являются локальными свойствами консервативности.

Теорема 2. *Необходимое и достаточное условие M-консервативности разностной схемы имеет вид*

$$\bar{\omega}_5=\omega_M, \tag{3.1}$$

где

$$\omega_M=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta m^{2k}}{2^{2k}(2k+1)!}\frac{\partial^{2(k+1)}x}{\partial t\,\partial m^{2k+1}}.$$

Доказательство. Рассмотрим разностное уравнение сохранения массы в недивергентной форме:

$$\Delta x/\Delta m=V, \tag{3.2}$$

где $\Delta x=x_1-x_{-1}$ — объем, занимаемый в момент времени t_0 произвольно выбранной малой массой $\Delta m=m_1-m_{-1}$. Разложим $x_1=x(t_0,\ m_1)$ и $x_{-1}=x(t_0, m_{-1})$ в ряды Тейлора в точке $(t_0,\ m_0=0.5(m_1+m_{-1}))$ и подставим в (3.2):

$$\frac{\Delta x}{\Delta m}-V=\frac{\partial x}{\partial m}-V+\sum_{k=1}^{\infty}a_k,$$

где

$$a_k=\frac{\Delta m^{2k}}{2^{2k}(2k+1)!}\frac{\partial^{2k+1}x}{\partial m^{2k+1}}.$$

Вычтем из этого уравнения (1.16):

$$(3.3)\qquad \omega_5+\sum_{k=1}^{\infty}a_k=0.$$

Продифференцировав (3.3) по t, получим уравнение производства массы в виде

$$(3.4)\qquad L\frac{\partial\Delta m}{\partial t}=\omega_M-\overline{\omega}_5,\qquad L=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{\Delta m}a_k.$$

Рассмотрим вначале случай, когда $\omega_M=\overline{\omega}_5$ из-за $L=0$. Это возможно при $x=a_1(t)+a_2(t)m+a_3(t)m^2$ и при любых ограниченных a_1, a_2, a_3, ибо в этом случае $\overline{\omega}_5\equiv0$ и уравнение (3.2) становится точным уравнением, обладающим свойством M-консервативности $(\partial\Delta m/\partial t=0)$ без всяких условий. Дальше будем считать что $L\neq0$.

Необходимость. Предположим, что (3.1) не имеет места, т. е. $\overline{\omega}_5\neq\omega_M$. Тогда из (3.4) следует, что вдоль линии тока $\partial\Delta m/\partial t\neq0$ и масса сеточного промежутка не сохраняется.

Достаточность. Пусть $\partial\Delta m/\partial t=0$. Тогда из (3.4) следует (3.1). Теорема доказана.

Следствие 1. Разностная схема, содержащая уравнение сохранения массы (1.16) в недивергентном виде, всегда M-консервативна.

Следствие 2. Разностная схема, содержащая уравнение сохранения массы (1.12) в дивергентном виде, M-консервативна при условии $\overline{\omega}_4-\omega_1=\omega_M$, которое следует из (3.1) и (2.2).

Поскольку ω_M и $\overline{\omega}_5$ — погрешности аппроксимации вида (1.22), то уравнение производства массы (3.4) в M-неконсервативных схемах имеет вид

$$(3.5)\qquad \frac{\partial\Delta m}{\partial t}=\sum_{k=0,\,l=0}^{\infty}B_{Mkl}\tau^kh^l,\qquad k+l\geqslant1.$$

Определение 2. n-е дифференциальное приближение разностной схемы (д.п.n) является M-консервативным, если в уравнении производства массы (3.5) будет $B_{Mkl}=0$ для всех $k+l\leqslant n$.

Теорема 3. *Необходимое и достаточное условие S-консервативности разностной схемы имеет вид*

$$(3.6)\qquad \omega_8=0.$$

Необходимость. Предположим, что $\omega_8\neq0$. Подставив это в (1.19), получим $\partial S/\partial t\neq0$. Энтропия изменяется.

Достаточность. Пусть $\partial S/\partial t=0$. Подставив это в (1.19), получим (3.6). Теорема доказана.

Среди типов схем, приведенных в таблице, нет схем с независимой ω_8. Для каждого типа разностных схем ω_8 должно быть выражено через независимые ω_i. Эти уравнения, соответственно, для типов 1—6 имеют вид

$$(3.7\text{a})\qquad \omega_8=P(\overline{\omega}_4-\overline{\omega}_5)+\omega_3-U\omega_2,$$

(3.7б) $\omega_8 = P(\overline{\omega}_4 - \overline{\omega}_5) + \omega_6$,

(3.7в) $\omega_8 = \omega_7$,

(3.7г) $\omega_8 = P\omega_1 + \omega_3 - U\omega_2$,

(3.7д) $\omega_8 = P\omega_1 + \omega_6$,

(3.7е) $\omega_8 = \omega_7$.

Оценка изменения энтропии вдоль линии тока с течением времени является эффективным средством локального контроля точности вычисления термодинамических величин. Поскольку все ω_i имеют вид (1.22), то из (3.7) и (1.19) следует уравнение производства энтропии в общем виде:

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \sum_{k=0,\, l=0}^{\infty} B_{Skl}\tau^k h^l, \qquad k+l \geqslant 1. \tag{3.8}$$

Определение 3. n-е дифференциальное приближение разностной схемы является S-консервативным, если в уравнении производства энтропии (3.8) будет $B_{Skl}=0$ для всех $k+l \leqslant n$.

Рассмотрим схемы типов 1, 4 с дивергентным уравнением энергии (1.14). Из (3.7) следует, что правая часть уравнения производства энтропии (3.8) может содержать значения массовой скорости U и производные $\partial^\nu U/\partial t^\nu$. Это означает, что в классе схем с дивергентным уравнением энергии есть схемы, не инвариантные относительно преобразования Галилея, в которых при поступательном движении недеформируемого вещества энтропия будет меняться, что противоречит термодинамике.

Определение 4. Разностную схему назовем термодинамически нормальной, если в ней скорость производства энтропии не зависит от массовой скорости вещества и его ускорений. Если же $\partial S/\partial t$ зависит от U или от $\partial^\nu U/\partial t^\nu$, то схему назовем термодинамически аномальной.

Определение 5. n-е дифференциальное приближение разностной схемы назовем термодинамически нормальным, если функции B_{Skl} в (3.8), для которых $k+l \leqslant n$, не содержат массовой скорости вещества и его ускорений $\partial^\nu U/\partial t^\nu$, и термодинамически аномальным, если содержат.

Чтобы определить, является ли дивергентная схема термодинамически нормальной, нужно исследовать правую часть (3.8) и показать, что она не зависит от U и $\partial^\nu U/\partial t^\nu$.

Очевидно, что изменение энтропии из-за погрешностей аппроксимации не должно превосходить ее изменений в характерных физических процессах. В качестве такого процесса рассмотрим слабую ударную волну, на фронте которой справедливо [6] уравнение

$$T_0\Delta S = -\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S \Delta V^3 + O(\Delta V^4, \Delta S^2), \tag{3.9}$$

где $\Delta S = S - S_0$, $\Delta V = V - V_0$; V_0, T_0, S_0 — значения перед разрывом. Считая, что S и V зависят от времени t, представим их в виде рядов Тейлора в точке (V_0, T_0, S_0). Подставив эти ряды в (3.9), получим

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \omega_S,$$

где

$$\omega_S=-\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^3+\ldots \tag{3.10}$$

Уравнение (3.10) дает возможность разделить все разностные схемы на сильно диссипативные и слабо диссипативные.

Определение 6. Разностную схему назовем сильно диссипативной, если первое дифференциальное приближение (д.п. 1) ее уравнения производства энтропии S-неконсервативно.

Определение 7. Разностную схему назовем слабо диссипативной, если д.п. 1 ее уравнения производства энтропии S-консервативно.

§ 4. Анализ S-консервативности некоторых разностных схем для уравнения газовой динамики

Рассмотрим, с какой точностью выполняется закон сохранения энтропии в схемах с дивергентным и недивергентным уравнением энергии. Подробный анализ изменения энтропии в некоторых схемах проведен в [7]. Ниже приводится анализ в иной форме и для более широкого класса уравнений.

Исследуем вначале свойства S-консервативности схем типа 4. Пусть искомые величины P, V, E, U, S, T определены в точках сетки с полуцелыми индексами (отнесены к серединам сеточных интервалов). Запишем, следуя [7], разностные уравнения в общем виде:

$$\frac{V_{i+0.5}^{n+1}-V_{i+0.5}^{n}}{\tau}-\frac{U_{i+1}^{*}-U_{i}^{*}}{h}=0, \tag{4.1а}$$

$$\frac{U_{i+0.5}^{n+1}-U_{i+0.5}^{n}}{\tau}+\frac{P_{i+1}^{*}-P_{i}^{*}}{h}=0, \tag{4.1б}$$

$$\frac{E_{i+0.5}^{n+1}-E_{i+0.5}^{n}}{\tau}+\frac{(U_{i+0.5}^{n+1})^2-(U_{i+0.5}^{n})^2}{2\tau}+\frac{P_{i+1}^{*}U_{i+1}^{*}-P_{i}^{*}U_{i}^{*}}{h}=0; \tag{4.1в}$$

здесь звездочка означает вспомогательную величину.

Исследуем характер изменения энтропии в разностных схемах из двухпараметрического семейства схем III А (см. [7]), в которых вспомогательные величины определяются по формулам

$$U_i^{*}=0.5[(1-l_1)(U_{i+0.5}^{n}+U_{i-0.5}^{n})+l_1(U_{i+0.5}^{n+1}+U_{i-0.5}^{n+1})], \tag{4.2а}$$

$$P_i^{*}=0.5[(1-l_2)(P_{i+0.5}^{n}+P_{i-0.5}^{n})+l_2(P_{i+0.5}^{n+1}+P_{i-0.5}^{n+1})]. \tag{4.2б}$$

В общем случае для рассматриваемого семейства схем независимыми являются ω_1, ω_2, ω_3. Подставив их в (3.7г) и выражение ω_8 — в (1.19), получим уравнение производства энтропии

$$T\frac{\partial S}{\partial t}=\tau\left[(l_1-0.5)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-(l_2-0.5)\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial t}\right]-\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right)+O(\tau^3,h^2). \tag{4.3}$$

Из (4.3) следует, что среди схем типа III А схемы с $l_1\neq 0.5$ термодинамически аномальны и сильно диссипативны, схемы с $l_1=0.5$, $l_2\neq0.5$ сильно диссипативны. У единственной схемы этого семейства с $l_1=l_2=0.5$ уравнение производства энтропии имеет вид

$$T\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_s\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^3+O(\tau^3,h^2). \tag{4.4}$$

Главный член в (4.4) совпадает с (3.10), значит, д.п.2 разностной схемы с $l_1=l_2=0.5$ слабо диссипативно и термодинамически нормально.

Рассмотрим далее второе двухпараметрическое семейство схем III Б из [7], в которых вспомогательные величины определяются уравнениями

$$U_i^*=0.5(U_{i+0.5}^n+U_{i-0.5}^n)-\frac{\tau l_3}{h}(P_{i+0.5}^n-P_{i-0.5}^n), \tag{4.5a}$$

$$P_i^*=0.5(P_{i+0.5}^n+P_{i-0.5}^n)-\frac{\tau l_4}{2h}[(a_{i+0.5}^n)^2+(a_{i-0.5}^n)^2](U_{i+0.5}^n-U_{i-0.5}^n). \tag{4.5б}$$

В дифференциальной форме уравнения (4.1) вместе с (4.5) принимают вид (1.12)–(1.14). Подставив независимые ω_1, ω_2, ω_3 в (3.7) и ω_8 – в (1.19), получим уравнение производства энтропии

$$T\frac{\partial S}{\partial t}=\tau\left[(l_3-0.5)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2-(l_4-0.5)\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial t}\right]+O(\tau^2,h^2).$$

Следовательно, у всех схем этого семейства с $l_3\neq0.5$ д.п.1 термодинамически аномальны, у всех схем с $l_3=0.5$ и $l_4\neq0.5$ д.п.1 термодинамически нормальны и сильно диссипативны и лишь у единственной схемы с $l_3=l_4=0.5$ д.п.1 равно нулю и она слабо диссипативна.

Схема в [8] получается из семейства III Б при $l_3=l_4=h/2\tau a$. Таким образом, в этой схеме $l_3=l_4=0.5$ лишь при соотношении шагов $\tau a/h=1$. Аналогичным свойством обладает схема в [9], которая получается из семейства III Б при $l_3=l_4=0.5(h/\tau a)^2$.

Рассмотрим диссипативные свойства разностной схемы типа 4 из [10], в которой вспомогательные величины определяются через функции, терпящие разрыв на контактных границах. В уравнениях сохранения массы и количества движения в (4.1) вспомогательные значения скорости и давления взяты в виде

$$U_i^*=0.25\Big[U_{i+0.5}^n+U_{i-0.5}^n+U_{i+0.5}^{n+1}+U_{i-0.5}^{n+1}-$$
$$-\frac{h}{\tau}(V_{i+0.5}^{n+1}-V_{i+0.5}^n-V_{i-0.5}^{n+1}+V_{i-0.5}^n)\Big],$$

$$P_i^*=0.25\Big[P_{i+0.5}^n+P_{i-0.5}^n+P_{i+0.5}^{n+1}+P_{i-0.5}^{n+1}+$$
$$+\frac{h}{\tau}(U_{i+0.5}^{n+1}-U_{i+0.5}^n-U_{i-0.5}^{n+1}+U_{i-0.5}^n)\Big].$$

В уравнении энергии (4.1) вспомогательное значение $(PU)_i^*$ выбирается по формуле

$$(PU)_i^*=0.5[(PU)_{i+0.5}^{n+1}+(PU)_{i-0.5}^{n+1}]+\frac{h}{4\tau}(\mathscr{E}_{i+0.5}^{n+1}-\mathscr{E}_{i+0.5}^n-\mathscr{E}_{i-0.5}^{n+1}+\mathscr{E}_{i-0.5}^n),$$

где $\mathscr{E}=E+0.5U^2$. Подставив независимые ω_1, ω_2, ω_3 в (3.7) и ω_8 – в (1.19), получим уравнение производства энтропии

$$T\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{\tau}{2}\left[\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}+U\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2\right]+O(\tau^2,h^2).$$

Следовательно, рассматриваемая схема из [10] на адиабатических решениях термодинамически аномальна и сильно диссипативна.

Рассмотрим семейство схем типа 1 с уравнениями

$$\frac{U_{i+0.5}^{n+1}-U_{i+0.5}^{n}}{\tau}+\frac{P_{i+1}^{*}-P_i^{*}}{h}=0,$$

$$\frac{E_{i+0.5}^{n+1}-E_{i+0.5}^{n}}{\tau}+\frac{(U_{i+0.5}^{n+1})^2-(U_{i+0.5}^{n})^2}{2\tau}+\frac{P_{i+1}^{*}U_{i+1}^{*}-P_i^{*}U_i^{*}}{h}=0,$$

$$\frac{x_i^{n+1}-x_i^{n}}{\tau}-U_i^{*}=0,\qquad \frac{x_{i+1}^{n+1}-x_i^{n+1}}{h}-V_{i+0.5}^{n+1}=0.$$

Если вспомогательные величины определить уравнениями (4.2) и подставить независимые ω_2, ω_3, ω_4, ω_5 в (3.7) и ω_8 – в (1.19), то получится уравнение производства энтропии (4.3) со всеми ранее сделанными выводами относительно l_1 и l_2.

Рассмотрим схему с недивергентным уравнением энергии (1.18). Следуя [7], аппроксимируем (1.7) однопараметрическим семейством разностных схем

$$\frac{E^{n+1}-E^{n}}{\tau}+[(1-\beta)P^{n+1}+\beta P^{n}]\frac{V^{n+1}-V^{n}}{\tau}=0. \tag{4.6}$$

Преобразуя (4.6) к дифференциальной форме (1.18), получаем

$$\omega_7=\tau\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2(\beta-0.5)-\tau^2\left[\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_s\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^3\left(\beta^2-\beta+\frac{1}{3}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}2(\beta-0.5)^2\right]+O(\tau^3). \tag{4.7}$$

Поскольку схема с этим уравнением энергии в соответствии с таблицей относится к типу 3 или к типу 6, для которых $\omega_8=\omega_7$, то из (4.7) и (1.19) следует, что независимо от значения β все схемы этого семейства термодинамически нормальны, при $\beta\neq0.5$ – сильно диссипативны и лишь единственная схема семейства с $\beta=0.5$ слабо диссипативна.

Разностное уравнение энергии (4.6) впервые при $\beta=0.5$ использовалось в [11]. К этому же классу относятся разностные схемы из [12], [13].

Рассмотрим семейство схем типа 2 с недивергентным уравнением энергии (1.17):

$$\frac{U_i^{n+1}-U_i^{n}}{\tau}+\frac{P_{i+0.5}^{*}-P_{i-0.5}^{*}}{h}=0,\qquad \frac{x_i^{n+1}-x_i^{n}}{\tau}-U_i^{*}=0, \tag{4.8а}$$

$$\frac{x_{i+1}^{n+1}-x_i^{n+1}}{h}-V_{i+0.5}^{n+1}=0,\qquad \frac{E_{i+0.5}^{n+1}-E_{i+0.5}^{n}}{\tau}+P_{i+0.5}^{*}\frac{U_{i+1}^{*}-U_i^{*}}{h}=0. \tag{4.8б}$$

Вспомогательные величины определим уравнениями

$$P_{i+0.5}^{*}=0.5(P_{i+0.5}^{n+1}+P_{i+0.5}^{n}),\qquad U_i^{*}=U_i^{n}-\frac{\tau}{2h}(P_{i+0.5}^{n}-P_{i-0.5}^{n}).$$

Независимые погрешности аппроксимации таковы:

$$\omega_2=\frac{\tau^2}{12}\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}-\frac{h^2}{24}\frac{\partial^3 P}{\partial m^3}+O(\tau^3,h^3),$$

$$\omega_4=-\frac{\tau_2}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}+O(\tau^3),\qquad \omega_5=-\frac{h^2}{24}\frac{\partial^2 V}{\partial m^2}+O(h^3),$$

$$\omega_6=-\frac{\tau^2}{24}\left(\frac{\partial^3 E}{\partial t^3}+3\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\frac{\partial U}{\partial m}+3P\frac{\partial^3 V}{\partial t^3}\right)-\frac{h^2}{24}P\frac{\partial^3 U}{\partial m^3}+O(\tau^3,h^3).$$

Подставив их в соответствующее уравнение (3.7) и в (1.19), получим уравнение производства энтропии

$$T\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_s\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^3+O(\tau^3,h^3).$$

Следовательно, разностная схема (4.8) термодинамически нормальна и слабо диссипативна.

Рассмотрим однопараметрическое семейство «полностью консервативных» разностных схем из [14]:

(4.9а) $$\frac{V^{n+1}_{i+0.5}-V^{n}_{i+0.5}}{\tau}-\frac{U^{n}_{i+1}+U^{n+1}_{i+1}-U^{n}_{i}-U^{n+1}_{i}}{2h}=0,$$

(4.9б) $$\frac{U^{n+1}_{i}-U^{n}_{i}}{\tau}+\frac{\sigma(P^{n+1}_{i+0.5}-P^{n+1}_{i-0.5})+(1-\sigma)(P^{n}_{i+0.5}-P_{i-0.5})}{2h}=0,$$

(4.9в) $$\frac{E^{n+1}_{i+0.5}-E^{n}_{i+0.5}}{\tau}+[\sigma P^{n+1}_{i+0.5}+(1-\sigma)P^{n}_{i+0.5}]\frac{U^{n}_{i+1}+U^{n+1}_{i+1}-U^{n}_{i}-U^{n+1}_{i}}{2h}=0.$$

Уравнение производства энтропии этого семейства разностных схем имеет вид

$$T\frac{\partial S}{\partial t}=(0.5-\sigma)\tau\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2-\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_s\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^3+O(\tau^3,h^3).$$

Отсюда следует, что все схемы этого семейства термодинамически нормальны. Однако схемы с $\sigma\neq0.5$ сильно диссипативны. Требование слабой диссипативности приводит к дальнейшему сужению множества схем с уравнениями (4.9). В семействе полностью консервативных схем (4.9) слабо диссипативной является схема с $\sigma=0.5$. Эта же схема получена в [15] из других соображений.

Заключение

Проведенное рассмотрение, а также ряд других примеров, изложенных в [16], позволяют утверждать, что свойства M- и S-консервативности не связаны с дивергентной или недивергентной формой разностных уравнений. Чтобы определить диссипативные свойства разностной схемы, нужно построить для нее уравнение производства энтропии и уравнение производства массы. Анализ диссипативных свойств схем показывает, что среди схем с дивергентным уравнением энергии (1.14) есть термодинамически аномальные; большинство схем с недивергентным уравнением энергии (1.17) или (1.18) термодинамически нормальны, и среди них есть слабо диссипативные; среди полностью консервативных (в соответствии с [14]) разностных схем есть сильно диссипативные.

Литература

1. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Самарский А. А.* О консервативных разностных схемах.— В кн.: Пробл. прикл. матем. и механ. М.: Наука, 1971.
3. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
4. *Попов Ю. П., Самарский А. А.* Полностью консервативные разностные схемы.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, т. 9, № 4, с. 953—958.
5. *Яненко Н. Н., Шокин Ю. И.* О первом дифференциальном приближении разностных схем для гиперболических систем уравнений.— Сибирск. матем. ж., 1969, т. 10, № 5, с. 1173—1202.
6. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн. М.: Физматгиз, 1963.
7. *Куропатенко В. Ф.* О разностных методах для уравнений гидродинамики.— Тр. Матем. ин-та АН СССР. М., 1966, т. 74, с. 107—137.
8. *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики.— Матем. сб., 1959, т. 47, вып. 3, с. 271—306.
9. *Lax P. D.* Weak solution of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computations.— Communs Pure and Appl. Math., 1954, v. 7, p. 159—193.
10. *Гаджиев А. Д., Писарев В. Н.* Неявный конечно-разностный метод «РОМБ» для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, т. 19, № 5, с. 1288—1303.
11. *Von Neumann J., Richtmyer R. D.* A method for the numerical calculations of hydrodynamical shocks.— J. Appl. Phys., 1950, v. 21, p. 232—249.
12. *Самарский А. А., Арсенин В. Я.* О численном решении уравнений газодинамики с различными типами вязкости.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 2, с. 357—360.
13. *Куропатенко В. Ф.* Метод расчета ударных волн.— Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 4, с. 771—773.
14. *Самарский А. А., Попов Ю. П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980.
15. *Гольдин В. Я., Ионкин Н. И., Калиткин Н. Н.* Об энтропийной схеме расчета газодинамики.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, т. 9, № 6, с. 1411—1413.
16. *Куропатенко В. Ф.* О точности вычисления энтропии в разностных схемах для уравнений газовой динамики.— В кн.: Числ. методы механ. сплошной среды. Т. 9. № 7. Новосибирск: СО АН СССР, 1978, с. 49—59.

Поступила в редакцию 20.VII.1983
Переработанный вариант 6.VIII.1984