

12. Кутателадзе С.С., Кузнецов Л.И., Завьялов В.И. // Тез. 6-й Всесоюз. конф. по динамике разреженных газов. Новосибирск, 1982. С.147.
13. Кузнецов Л.И. // ЖПМТФ. 1991. № 6, 20.
14. Бункин Ф.В., Прохоров А.М. // УФН. 1976. № 3, 119, 425.
15. Минько Л.Я. // Физика и применение плазменных ускорителей. Минск: Наука и техника, 1974. С.142.
16. Метцгер Дж.Д., Леклер Р.Дж., Хоув С.Д., Бургин К.К. // Аэрокосмическая техника. 1990. № 4, 50.
17. Очистка околоземного пространства от мусора // Аэрокосмическая техника. 1987. № 6, 179.

## **МЕТОДИКА РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ НЕРАВНОВЕСНЫХ СМЕСЯХ ВЕЩЕСТВ**

В.Ф. Куропатенко, В.К. Мустафин

Методика расчета движений смесей создана для расчета одномерных плоских, цилиндрически- и сферически-симметричных неустановившихся движений многокомпонентных смесей в лагранжевой системе координат в адиабатическом гидродинамическом приближении. Движение многокомпонентной смеси веществ описывается в рамках уравнений механики гетерогенных сред с учетом скоростной и температурной неравновесности компонентов, нестационарности внутренней структуры гетерогенной среды, пористости, прочности равновесных фазовых переходов. Термодинамические свойства компонентов в смесях веществ описываются собственными уравнениями состояния. Знания уравнения состояния смеси веществ не требуется. Фазовые переходы в компонентах смеси рассчитываются и учитываются на уровне уравнения состояния.

Основой для описания течений в двухкомпонентных средах является гипотеза взаимопроникающих континуумов, предложенная Рахматулиным [1]: двухкомпонентная гетерогенная среда представляется совокупностью двух сплошных сред, каждая из которых описывается своей скоростью, плотностью, удельной внутренней энергией, давлением, температурой и т. д.

Одномерные непрерывные плоские, цилиндрически- и сферически-симметричные движения  $n$ -компонентной смеси описываются следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial (\alpha_i \rho_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_i \rho_i u_i)}{\partial r} + \frac{(v-1) \alpha_i \rho_i u_i}{r} = 0; \quad (1)$$

$$\alpha_i \rho_i \frac{d_i u_i}{dt} + \frac{\partial (\alpha_i P_i)}{\partial r} = R_i; \quad (2)$$

$$\alpha_i \rho_i \frac{d_i \varepsilon_i}{dt} + \frac{\partial (\alpha_i u_i P_i)}{\partial r} + \frac{(\nu-1) \alpha_i P_i u_i}{r} = \Phi_i; \quad (3)$$

$$P_i = P_i(\rho_i, E_i); \quad T_i = T_i(\rho_i, E_i) \quad (i=1, \dots, n), \quad (4)$$

где

$$\sum_{i=1}^n R_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \Phi_i = 0,$$

$$\varepsilon_i = E_i + 0.5 u_i^2; \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1,$$

$$\frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial r}.$$

$\nu$  – показатель симметрии задачи,  $r$  – эйлера координата,  $t$  – время,  $\rho_i$  – физическая (истинная) плотность,  $\alpha_i$  – объемная концентрация,  $u_i$  – скорость,  $P_i$  – давление,  $T_i$  – температура,  $E_i$  – удельная внутренняя энергия, индекс  $i$  означает номер компонента. Величины  $R_i$  и  $\Phi_i$ , представляющие собой интенсивности обмена импульсом и энергией между компонентами, имеют следующий вид:

$$R_i = \sum_j \varphi_{ij} \frac{u_j - u_i}{\tau_{ij}^u}, \quad (5)$$

$$\Phi_i = R_i u_i + \sum_j \left( b_i R_i (u_j - u_i) + \frac{P_j - P_i}{\tau_{ij}^P} + \psi_i \frac{T_j - T_i}{\tau_{ij}^T} \right), \quad (6)$$

где  $\tau_{ij}^U$ ,  $\tau_{ij}^T$ ,  $\tau_{ij}^P$  – времена релаксации соответственно скоростей, температур и давлений,  $\varphi_i$ ,  $\psi_i$  – функции параметров компонентов. Первый член в правой части (6) – мощность сил взаимодействия на перемещении, связанном с полем скоростей  $i$ -го компонента. Существование сил взаимодействия приводит к диссипации кинетической энергии гетерогенной среды в единицу времени на величину  $(u_j - u_i) R_i$ . Диссипированная кинетическая энергия полностью переходит в тепло. Распределение этого тепла по компонентам регулирует коэффициент  $b_i$ .

Для замыкания математической модели гетерогенной среды необходимо указать условия совместного деформирования компонентов, т. е. условия для определения объемных концентраций компонентов в элементарном объеме гетерогенной среды в процессе его деформации. В качестве такого условия в методике РДСМ используется предположение о локальном равенстве давлений компонентов

$$P_1 = P_2 = \dots = P_n. \quad (7)$$

В настоящее время модель многокомпонентной среды реализована для случая двухкомпонентной смеси.

В численном методе интегрирования системы уравнений математической модели гетерогенной среды используется следующее разбиение по физическим процессам.

Этап 1. В лагранжевой системе координат компонента рассчитывается его движение и деформация с учетом силового воздействия со стороны другого компонента. В результате получаются индивидуальные (несогласованные с условием совместного деформирования) значения параметров компонентов.

Этап 2. В эйлеровой системе координат определяется пространственное соответствие компонентов, после чего локально осуществляется перевод их индивидуальных термодинамических состояний в состояние, удовлетворяющее условию совместного деформирования.

Для каждого компонента вводится в рассмотрение индивидуальная лагранжева система координат, связанная с полем скорости этой компоненты.

Каждый компонент рассматривается как пространственная область, а двухкомпонентная смесь – как совокупность таких областей, как бы наложенных друг на друга.

Для каждого компонента строится его индивидуальная разностная сетка. На сетке помимо величин этого компонента определены величины другого компонента, которые получаются в результате интерполяции их на сетку другого компонента.

Разностный метод расчета гетерогенного интервала обобщает схему [2] на случай двухкомпонентной среды. Суть разностной схемы состоит в следующем.

По известным значениям параметров на момент времени  $t^n$  определяются скорости компонента в узлах сетки  $i$ -го компонента на момент времени  $t^{n+1} = t^n + \tau$ :

$$u_{ki}^{n+1} = u_{ki}^n - \tau f_{ki}^n - \tau k_{kji}^n \frac{u_{ki}^n - u_{kj}^n - \tau (f_{ki}^n - f_{kj}^n)}{1 + \tau (k_{kij}^n + k_{kji}^n)}, \quad (8)$$

$$u_{kj}^{n+1} = u_{kj}^n - \tau f_{kj}^n + \tau k_{kij}^n \frac{u_{ki}^n - u_{kj}^n - \tau (f_{ki}^n - f_{kj}^n)}{1 + \tau (k_{kij}^n + k_{kji}^n)}, \quad (9)$$

где

$$f_{ki}^n = \bar{\alpha}_{ki}^n \frac{\bar{P}_{(k+0.5)i}^n - \bar{P}_{(k-0.5)i}^n}{0.5 (m_{(k+0.5)i}^n + m_{(k-0.5)i}^n)},$$

$$f_{kj}^n = \left( u_{kj}^n - u_{ki}^n \right) \xi_{kj}^n k_{kji}^n \rho_{kci}^n + \bar{\alpha}_{kj}^n \frac{\rho_{kci}^n \left( \bar{P}_{(k+0.5)j}^n - \bar{P}_{(k-0.5)j}^n \right)}{0.5 \rho_{kci}^n \left( m_{(k+0.5)i}^n + m_{(k-0.5)i}^n \right)},$$

$$m_{(k+0.5)i}^n = (\alpha \rho)_{(k+0.5)i}^n \left( r_{(k+1)i}^n - r_{ki}^n \right),$$

$$\rho_{kci}^n = \frac{M_{(k+0.5)i} + M_{(k-0.5)i}}{\left(\Gamma_{(k+0.5)i}^n\right)^v - \left(\Gamma_{(k-0.5)i}^n\right)^v},$$

$$M_{(k+0.5)i} = L_v (\alpha\rho)_{(k+0.5)i}^n \left[ \left(\Gamma_{(k+1)i}^n\right)^v - \left(\Gamma_{ki}^n\right)^v \right],$$

$$L_v = \begin{cases} 1, & \text{при } v = 1 \\ \pi, & \text{при } v = 2, \\ \frac{4\pi}{3}, & \text{при } v = 3 \end{cases}$$

$$\sigma_{kj}^n = \begin{cases} \frac{u_{(k+1)j}^n - u_{kj}^n}{m_{(k+0.5)i}^n}, & \text{если } u_{kj}^n - u_{ki}^n < 0 \\ \frac{u_{kj}^n - u_{(k-1)j}^n}{m_{(k-0.5)i}^n}, & \text{если } u_{kj}^n - u_{ki}^n \geq 0 \end{cases}$$

$$\bar{\alpha}_{ki}^n = \frac{Q_{(k-0.5)i}^n \bar{\alpha}_{(k-0.5)i}^n + Q_{(k+0.5)i}^n \bar{\alpha}_{(k+0.5)i}^n}{Q_{(k-0.5)i}^n + Q_{(k+0.5)i}^n},$$

$$\bar{\alpha}_{kj}^n = 1 - \bar{\alpha}_{ki}^n, \quad Q_{(k\pm 0.5)i}^n = \frac{M_{(k\pm 0.5)i}}{(\alpha\rho)_{(k\pm 0.5)i}^n}, \quad k_{kji}^n = \frac{(\varphi_i)_k^n}{(\tau_{ji}^n \alpha_j \rho_j)_k^n}.$$

После определения скоростей рассчитываются новые координаты узлов и диссипация кинетической энергии на шаге  $\tau$ :

$$r_{ki}^{n+1} = r_{ki}^n + \tau u_{ki}^{n+1}, \quad (10)$$

$$\Delta Q_{kji}^{n+1} = k_{kji}^n (u_{ki}^{n+1} - u_{kj}^{n+1})^2 \tau. \quad (11)$$

После этого производится расчет индивидуальных термодинамических параметров компонентов. При этом предполагается

$$b_i = 0, \quad \frac{\partial_i \alpha_i}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

т.е. учитывается только силовое взаимодействие компонентов. В разностной схеме различаются ячейки, содержащие ударную волну, и ячейки, содержащие волну разрежения.

Если  $\Delta u = u_{(k+1)i}^{n+1} - u_{ki}^{n+1} \geq 0$ , то считается, что в ячейке находится волна разрежения. В этом случае величины  $P_{(k+0.5)i}^{n+1}$  и  $E_{(k+0.5)i}^{n+1}$  получаются в результате интегрирования уравнения изэнтропы  $i$ -го компонента с необходимой точностью.

Если  $\Delta u = u_{(k+1)i}^{n+1} - u_{ki}^{n+1} < 0$ , то считается, что в интервале находится ударная волна. В этом случае для определения  $\bar{P}_{(k+0.5)i}^{n+1}$  численно решается система уравнений, являющихся следствием соотношений на поверхности сильного разрыва:

$$\begin{aligned} \left[ \left( \bar{P}^{n+1} - P^n \right) \left( \bar{V}^{n+1} - V^n \right) \right]_{(k+0.5)i} &= - (\Delta u)^2, \\ \bar{E}_{(k+0.5)i}^{n+1} &= E_{(k+0.5)i}^n + 0.5 (\Delta u)^2 - P_{(k+0.5)i}^n \left[ \bar{V}^{n+1} - V^n \right]_{(k+0.5)i}, \\ \bar{P}_{(k+0.5)i}^{n+1} &= f \left( \bar{P}_{(k+0.5)i}^{n+1}; \bar{E}_{(k+0.5)i}^{n+1} \right), \\ \bar{V}_{(k+0.5)i}^{n+1} &= \frac{1}{\bar{\rho}_{(k+0.5)i}^{n+1}}. \end{aligned} \quad (13)$$

После этого находят  $E_{(k+0.5)i}^{n+1}$  по формуле

$$E_{(k+0.5)i}^{n+1} = E_{(k+0.5)i}^n - 0.5 \left[ \bar{P}_{(k+0.5)i}^n - \bar{P}_{(k+0.5)i}^{n+1} \right] \left[ V_{(k+0.5)i}^{n+1} - V_{(k+0.5)i}^n \right] \quad (14)$$

После этого осуществляется 2-й этап расчета. Суть его состоит в том, чтобы по индивидуальным значениям параметров компонентов в данной точке определить параметры гетерогенной среды и компонентов, удовлетворяющие условиям их совместного деформирования. После осуществления 2-го этапа все термодинамические параметры приобретают новые значения

$$\alpha_i^{n+1}, P_i^{n+1} = P_j^{n+1}, E_i^{n+1}, E_j^{n+1}, \bar{\alpha}_i^{n+1}, \bar{P}_i^{n+1} = \bar{P}_j^{n+1}, \bar{E}_i^{n+1}, \bar{E}_j^{n+1}.$$

На этом вычислительный цикл заканчивается.

При определении шага  $\tau$  учитываются соображения устойчивости (условие Куранта) и точности (ограничение на деформацию интервала, ограничение на изменение объемной концентрации в интервале).

Точность и возможности численного метода обоснованы путем сравнения численных решений с известными аналитическими решениями задач механики двухкомпонентных смесей [3;4].

Программа РДСМ на ПЭВМ, реализующая методику РДСМ, написана на языке ФОРТРАН.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Проект № 95-01-01558а.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // ПММ. 1956. Т.20, вып.2. С.184-195.

2. Куропатенко В.Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики // Тр. Мат. и-та им. В.А.Стеклова. 1966. XXIV. С.107-137.
3. Буряков О.В., Мустафин В.К. Решение задачи о движении поршня в гетерогенной смеси двух изотермических газов с учетом эффекта "присоединения масс" // Вопр. атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1988. Вып.2. С.57-64.
4. Буряков О.В., Куропатенко В.Ф., Мустафин В.К. Распад произвольного разрыва на границе изотермического газа и гетерогенной смеси двух изотермических газов // Вопр. атомной науки и техники. Сер. Мат. моделирование физ. процессов. 1990. Вып.2. С.39-42.

### **ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО СОСТОЯНИЯ ПАРОВОЙ ОБОЛОЧКИ ВОКРУГ КАПЛИ РАСПЛАВЛЕННОГО МЕТАЛЛА, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ЖИДКОСТИ**

В.Н.Лукерченко, Н.Н.Лукерченко, Г.Н.Шикин

Задача имеет широкий круг практических применений - это и исследование гидрогазодинамических процессов при работе в воде реактивного двигателя с металлизированным топливом, когда продукты сгорания содержат большую долю расплавленного металла, и изучение возможности возникновения парового взрыва при аварийной ситуации с повреждением активной зоны реактора и попаданием расплавленного топлива в теплоноситель и др. Во всех этих задачах положительный или отрицательный ответ на вопрос об устойчивости паровой оболочки предсказывает то или иное поведение такой среды и, в конечном итоге, определяет нагрузки на элементы конструкций.

Задача решается в предположении, что в каждый момент времени сохраняется сферическая симметрия. При этом рассмотрена устойчивость относительно малых радикальных смещений паровой оболочки, первоначально находящейся в квазистационарном состоянии [3;4].

Для паровой фазы применяется модель идеального газа. Жидкость, окружающая паровую оболочку, рассматривается как вязкая и несжимаемая. Предполагается также, что при возмущении паровой оболочки выполняется условие однородности давления в паровой фазе - свойство гомобаричности, которое означает, что в паровой фазе малы силы инерции, и которое выполняется во многих практически важных случаях [6]. Считается, что теплопроводностью жидкости можно пренебречь и ее температура изменяется только за счет движения.