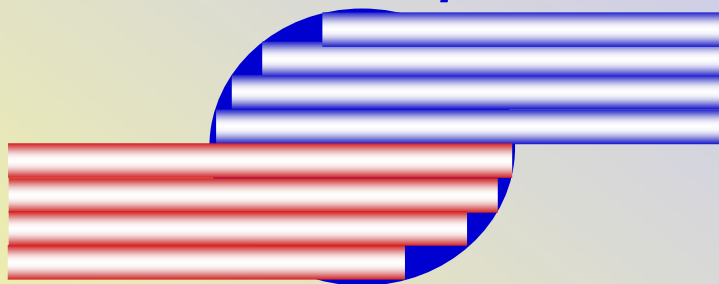


РФЯЦ



ВНИИТФ

В.Ф. Куропатенко

***Модели потенциальных и
вихревых движений
сжимаемых сплошных сред***

XII Забабахинские научные чтения

***2-6 июня 2014 г.
г. Снежинск, Россия***

1. Переход от микрочастиц к сплошной среде

Мир дискретен.

Любой объём заполнен микрочастицами.

Сплошная среда, это математическая абстракция.

При переходе от микрочастиц к сплошной среде с помощью мгновенных законов сохранения находятся ρ - плотность, \bar{U} - скорость, \mathcal{E} - удельная полная энергия, E - удельная внутренняя энергия.

Величайшее достоинство сплошной среды – это непрерывность всех её характеристик в пространстве t, x, y, z .

Среди термодинамических величин две являются независимыми. Это

ρ и E .

По ним определяются все остальные термодинамические характеристики сплошной среды.

2. Основы моделей механики сплошной среды

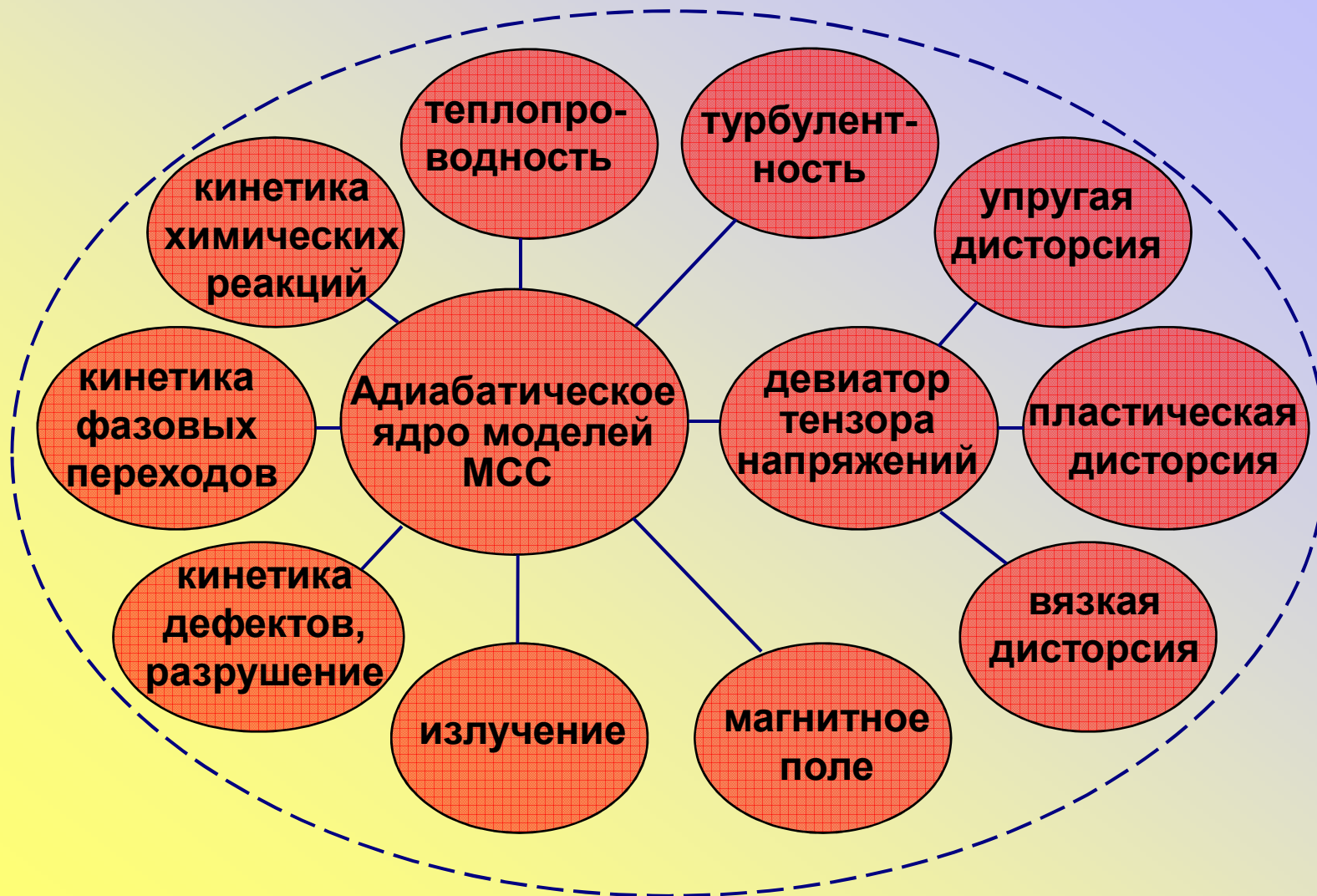
Ядро моделей МСС составляют законы сохранения массы, импульса и энергии в форме уравнений Эйлера-Гельмгольца для идеальной среды

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \rho \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} (\nabla \rho \bar{\mathbf{u}}) + \rho (\bar{\mathbf{u}} \bar{\nabla}) \bar{\mathbf{u}} + \nabla p &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \nabla (\rho \varepsilon \bar{\mathbf{u}} + p \mathbf{u}) &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{1}$$

Все реальные свойства сплошной среды описываются дополнительными уравнениями и дополнительными членами в уравнениях ядра.

3. Структура моделей МСС

Адиабатическое ядро \equiv уравнения Эйлера-Гельмгольца + УРС.



4. Траектории. Скорость

Траектория произвольно выбранной точки t_0, x_0, y_0, z_0 определяется системой уравнений

$$x=x(t, x_0, y_0, z_0), \quad y=y(t, x_0, y_0, z_0), \quad z=z(t, x_0, y_0, z_0). \quad (1)$$

Запишем систему (1) в дифференциалах

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0} dt + \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right)_{t_0 y_0 z_0} dx_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial y_0} \right)_{t_0 x_0 z_0} dy_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial z_0} \right)_{t_0 x_0 y_0} dz_0,$$

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0} dt + \left(\frac{\partial y}{\partial x_0} \right)_{t_0 y_0 z_0} dx_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial y_0} \right)_{t_0 x_0 z_0} dy_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial z_0} \right)_{t_0 x_0 y_0} dz_0,$$

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0} dt + \left(\frac{\partial z}{\partial x_0} \right)_{t_0 y_0 z_0} dx_0 + \left(\frac{\partial z}{\partial y_0} \right)_{t_0 x_0 z_0} dy_0 + \left(\frac{\partial z}{\partial z_0} \right)_{t_0 x_0 y_0} dz_0.$$

Производные при dt определяют компоненты вектора скорости

$$u_x = \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0}, \quad u_y = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0}, \quad u_z = \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0}.$$

Важно: производные x, y, z по t берутся при постоянных x_0, y_0, z_0 т.е. вдоль траектории этой частицы.

5. Тензор скоростей смещений

Компоненты скорости \bar{u} зависят от t, x, y, z

$$u_x = u_x(t, x, y, z), \quad u_y = u_y(t, x, y, z), \quad u_z = u_z(t, x, y, z).$$

Запишем эту систему в дифференциалах

$$du_x = \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right)_{xyz} dt + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)_{tyz} dx + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{txz} dy + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right)_{txy} dz,$$

$$du_y = \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} \right)_{xyz} dt + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)_{tyz} dx + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)_{txz} dy + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)_{txy} dz,$$

$$du_z = \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)_{xyz} dt + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)_{tyz} dx + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)_{txz} dy + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)_{txy} dz.$$

$$\dot{T} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Производные при dx, dy, dz в каждой точке t, x, y, z образуют тензор скоростей смещений \dot{T} .

Ни о каких конечных изменениях объёма или формы речи не идёт.

6. Виды смещений

Их всего три:

изменение объёма,
сдвиги,
повороты.

Все они определяются тензором скоростей смещений \dot{T} .
Каждый вид смещений определяется своим тензором.

Это:

шаровой тензор скоростей деформаций $\dot{T}_{\varepsilon 0}$,
девиатор тензора скоростей деформаций \dot{D}_{ε} ,
тензор скоростей поворотов \dot{T}_{ω} .

$$\dot{T} = \dot{T}_{\varepsilon 0} + \dot{D}_{\varepsilon} + \dot{T}_{\omega} .$$

7. Компоненты трёх тензоров смещений

Компоненты тензоров $\dot{T}_{\varepsilon 0}$, \dot{D}_{ε} и \dot{T}_{ω} обозначаются так

$$\dot{T}_{\varepsilon 0} = \begin{vmatrix} \dot{\varepsilon}_{\text{ср}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dot{\varepsilon}_{\text{ср}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dot{\varepsilon}_{\text{ср}} \end{vmatrix}, \quad \dot{D}_{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \dot{e}_{xx} & \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{yx} & \dot{e}_{yy} & \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} & \dot{\gamma}_{zy} & \dot{e}_{zz} \end{vmatrix}, \quad \dot{T}_{\omega} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \dot{\omega}_{xy} & \dot{\omega}_{xz} \\ \dot{\omega}_{yx} & \mathbf{0} & \dot{\omega}_{yz} \\ \dot{\omega}_{zx} & \dot{\omega}_{zy} & \mathbf{0} \end{vmatrix}.$$

Они определяются выражениями

$$\dot{\varepsilon}_{\text{ср}} = \frac{1}{3} \frac{\dot{v}}{v} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right),$$

$$\dot{e}_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\dot{v}}{v}, \quad \dot{e}_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{1}{3} \frac{\dot{v}}{v}, \quad \dot{e}_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{1}{3} \frac{\dot{v}}{v},$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad \dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \quad \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right),$$

$$\dot{\omega}_{yx} = -\dot{\omega}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \quad \dot{\omega}_{xz} = -\dot{\omega}_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \quad \dot{\omega}_{yz} = -\dot{\omega}_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right).$$

Точка над величиной означает дифференцирование по t при постоянных x_0, y_0, z_0 .

8. Свойства вещества

Шаровой тензор скоростей смещений $\dot{T}_{\varepsilon 0}$ необходим для построения УРС вещества.

Девiator скоростей смещений \dot{D}_{ε} необходим для построения уравнений описывающих реальные свойства вещества

ВЯЗКОСТЬ,

упругость,

пластичность.

9. Главные оси девиатора \dot{D}_ε

Главные оси тензора \dot{D}_ε определяются косинусами:

$$\begin{aligned}n_{x1} &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_{1e}^2 + B_{1e}^2}}, & n_{y1} &= n_{x1} A_{1e}, & n_{z1} &= n_{x1} B_{1e}, \\n_{x2} &= n_{y2} A_{2e}, & n_{y2} &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_{2e}^2 + B_{2e}^2}}, & n_{z2} &= n_{y2} B_{2e}, \\n_{x3} &= n_{z3} A_{3e}, & n_{y3} &= n_{z3} B_{3e}, & n_{z3} &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_{3e}^2 + B_{3e}^2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Все величины определены в точке t, x, y, z , никаких деформаций нет.

Коэффициенты в выражениях n_{x1}, n_{y1}, n_{z1} .

$$A_{1e} = \frac{\dot{\gamma}_{xz}\dot{\gamma}_{yz} - (\dot{e}_{zz} - \dot{e}_1)\dot{\gamma}_{xy}}{(\dot{e}_{yy} - \dot{e}_1)(\dot{e}_{zz} - \dot{e}_1) - \dot{\gamma}_{yz}^2}, \quad B_{1e} = \frac{\dot{\gamma}_{xy}\dot{\gamma}_{yz} - (\dot{e}_{yy} - \dot{e}_1)\dot{\gamma}_{xz}}{(\dot{e}_{yy} - \dot{e}_1)(\dot{e}_{zz} - \dot{e}_1) - \dot{\gamma}_{yz}^2}.$$

Аналогично выглядят $A_{2e}, B_{2e}, A_{3e}, B_{3e}$.

10. Напряжения

Напряжение - это характеристика состояния вещества. В общем случае поле напряжений в окрестности точки x, y, z , определяется тензором напряжений T_σ

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}.$$

Тензор T_σ симметричен, т.е. $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

В механике давление P определяется выражением

$$P = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}).$$

Разделим тензор T_σ на шаровой тензор $T_{\sigma 0}$ и девиатор D_σ

$$T_{\sigma 0} = \begin{vmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{vmatrix}, \quad D_\sigma = \begin{vmatrix} S_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & S_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & S_{zz} \end{vmatrix},$$

где $S_{xx} = \sigma_{xx} + P$, $S_{yy} = \sigma_{yy} + P$, $S_{zz} = \sigma_{zz} + P$.

Если девиатор напряжений $D_\sigma = 0$, то среда называется идеальной, если $D_\sigma \neq 0$, то неидеальной.

11. Главные оси девиаторов \dot{D}_ε и D_σ

Главные оси тензора D_σ определяются косинусами:

$$\begin{aligned} n_{x1} &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_{1\sigma}^2 + B_{1\sigma}^2}}, & n_{y1} &= n_{x1} A_{1\sigma}, & n_{z1} &= n_{x1} B_{1\sigma}, \\ n_{x2} &= n_{y2} A_{2\sigma}, & n_{y2} &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_{2\sigma}^2 + B_{2\sigma}^2}}, & n_{z2} &= n_{y2} B_{2\sigma}, \\ n_{x3} &= n_{z3} A_{3\sigma}, & n_{y3} &= n_{z3} B_{3\sigma}, & n_{z3} &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_{3\sigma}^2 + B_{3\sigma}^2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

ПОСТУЛАТ 1: ГЛАВНЫЕ ОСИ ДЕВИАТОРОВ НАПРЯЖЕНИЙ И СКОРОСТЕЙ ДЕФОРМАЦИЙ СОВПАДАЮТ.

$$A_{1\sigma} = A_{1e}, \quad B_{1\sigma} = B_{1e}, \quad A_{2\sigma} = A_{2e}, \quad B_{2\sigma} = B_{2e}, \quad A_{3\sigma} = A_{3e}, \quad B_{3\sigma} = B_{3e}.$$

Вдоль первого главного направления:

$$\begin{aligned} A_{1\sigma} &= \frac{\tau_{xz}\tau_{yz} - (s_{zz} - s_1)\tau_{xy}}{(s_{yy} - s_1)(s_{zz} - s_1) - \tau_{yz}^2}, & A_{1e} &= \frac{\dot{\gamma}_{xz}\dot{\gamma}_{yz} - (\dot{e}_{zz} - \dot{e}_1)\dot{\gamma}_{xy}}{(\dot{e}_{yy} - \dot{e}_1)(\dot{e}_{zz} - \dot{e}_1) - \dot{\gamma}_{yz}^2}, \\ B_{1\sigma} &= \frac{\tau_{xy}\tau_{yz} - (s_{yy} - s_1)\tau_{xz}}{(s_{yy} - s_1)(s_{zz} - s_1) - \tau_{yz}^2}, & B_{1e} &= \frac{\dot{\gamma}_{xy}\dot{\gamma}_{yz} - (\dot{e}_{yy} - \dot{e}_1)\dot{\gamma}_{xz}}{(\dot{e}_{yy} - \dot{e}_1)(\dot{e}_{zz} - \dot{e}_1) - \dot{\gamma}_{yz}^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Аналогично выглядят $A_{2s}, B_{2s}, A_{2e}, B_{2e}, A_{3s}, B_{3s}, A_{3e}, B_{3e}$ для 2й и 3й главных осей.

12. Вязкость

Из условий совпадения главных осей девиаторов D_σ и \dot{D}_ε (9.1) и (11.1) следует **основное уравнение вязкости – зависимость девиатора напряжений от девиатора скоростей деформаций**

$$D_\sigma = 2\mu\dot{D}_\varepsilon,$$

где μ - коэффициент вязкости. Компоненты девиаторов \dot{D}_ε и D_σ связаны уравнениями

$$s_{ii} = 2\mu\dot{e}_{ii}, \quad \tau_{ij} = 2\mu\dot{\gamma}_{ij}.$$

где

$$\dot{e}_{xx} = \frac{2}{3} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\dot{e}_{yy} = -\frac{1}{3} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\dot{e}_{zz} = -\frac{1}{3} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{2}{3} \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right),$$

$$\dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right),$$

$$\dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right).$$

13. Тензоры скоростей напряжений

Поле напряжений в окрестности точки x, y, z , определяется **не только** тензором напряжений T_σ , **но также** и тензором скоростей напряжений \dot{T}_σ

$$\dot{T}_\sigma = \begin{vmatrix} \dot{\sigma}_{xx} & \dot{\tau}_{xy} & \dot{\tau}_{xz} \\ \dot{\tau}_{yx} & \dot{\sigma}_{yy} & \dot{\tau}_{yz} \\ \dot{\tau}_{zx} & \dot{\tau}_{zy} & \dot{\sigma}_{zz} \end{vmatrix}.$$

Тензор \dot{T}_σ симметричен, т.е. $\dot{\tau}_{xy} = \dot{\tau}_{yx}$, $\dot{\tau}_{xz} = \dot{\tau}_{zx}$, $\dot{\tau}_{yz} = \dot{\tau}_{zy}$.

Разделим тензор \dot{T}_σ на шаровой тензор $\dot{T}_{\sigma 0}$ и девиатор \dot{D}_σ

$$\dot{T}_{\sigma 0} = \begin{vmatrix} -\dot{P} & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{P} & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{P} \end{vmatrix}, \quad \dot{D}_\sigma = \begin{vmatrix} \dot{S}_{xx} & \dot{\tau}_{xy} & \dot{\tau}_{xz} \\ \dot{\tau}_{yx} & \dot{S}_{yy} & \dot{\tau}_{yz} \\ \dot{\tau}_{zx} & \dot{\tau}_{zy} & \dot{S}_{zz} \end{vmatrix},$$

где $\dot{S}_{xx} = \dot{\sigma}_{xx} + \dot{P}$, $\dot{S}_{yy} = \dot{\sigma}_{yy} + \dot{P}$, $\dot{S}_{zz} = \dot{\sigma}_{zz} + \dot{P}$.

14. Главные оси девиатора \dot{D}_σ

Главные оси тензора \dot{D}_σ определяются косинусами:

$$\begin{aligned} n_{x1} &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_{1s}^2 + B_{1s}^2}}, & n_{y1} &= n_{x1} A_{1s}, & n_{z1} &= n_{x1} B_{1s}, \\ n_{x2} &= n_{y2} A_{2s}, & n_{y2} &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_{2s}^2 + B_{2s}^2}}, & n_{z2} &= n_{y2} B_{2s}, \\ n_{x3} &= n_{z3} A_{3s}, & n_{y3} &= n_{z3} B_{3s}, & n_{z3} &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_{3s}^2 + B_{3s}^2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

ПОСТУЛАТ 2: ГЛАВНЫЕ ОСИ ДЕВИАТОРОВ СКОРОСТЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ И СКОРОСТЕЙ ДЕФОРМАЦИЙ СОВПАДАЮТ.

$$A_{1s} = A_{1e}, \quad B_{1s} = B_{1e}, \quad A_{2s} = A_{2e}, \quad B_{2s} = B_{2e}, \quad A_{3s} = A_{3e}, \quad B_{3s} = B_{3e}.$$

Вдоль первого главного направления:

$$\begin{aligned} A_{1s} &= \frac{\dot{\tau}_{xz} \dot{\tau}_{yz} - (\dot{s}_{zz} - \dot{s}_1) \dot{\tau}_{xy}}{(\dot{s}_{yy} - \dot{s}_1)(\dot{s}_{zz} - \dot{s}_1) - \dot{\tau}_{yz}^2}, & A_{1e} &= \frac{\dot{\gamma}_{xz} \dot{\gamma}_{yz} - (\dot{e}_{zz} - \dot{e}_1) \dot{\gamma}_{xy}}{(\dot{e}_{yy} - \dot{e}_1)(\dot{e}_{zz} - \dot{e}_1) - \dot{\gamma}_{yz}^2}, \\ B_{1s} &= \frac{\dot{\tau}_{xy} \dot{\tau}_{yz} - (\dot{s}_{yy} - \dot{s}_1) \dot{\tau}_{xz}}{(\dot{s}_{yy} - \dot{s}_1)(\dot{s}_{zz} - \dot{s}_1) - \dot{\tau}_{yz}^2}, & B_{1e} &= \frac{\dot{\gamma}_{xy} \dot{\gamma}_{yz} - (\dot{e}_{yy} - \dot{e}_1) \dot{\gamma}_{xz}}{(\dot{e}_{yy} - \dot{e}_1)(\dot{e}_{zz} - \dot{e}_1) - \dot{\gamma}_{yz}^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Аналогично выглядят $A_{2s}, B_{2s}, A_{2e}, B_{2e}, A_{3s}, B_{3s}, A_{3e}, B_{3e}$ для 2й и 3й главных осей.

15. Уравнение упругости

Из условий совпадения главных осей девиаторов \dot{D}_σ и \dot{D}_ε (9.1) и (14.1) следует **основное уравнение упругости – зависимость девиатора скоростей напряжений от девиатора скоростей деформаций (закон Гука)**

$$\dot{D}_\sigma = 2G\dot{D}_\varepsilon,$$

где G - модуль сдвига. Компоненты девиаторов \dot{D}_ε и \dot{D}_σ связаны уравнениями

$$\dot{s}_{ii} = 2G\dot{e}_{ii}, \quad \dot{\tau}_{ij} = 2G\dot{\gamma}_{ij}.$$

Связь компонентов шаровых тензоров скорости напряжений $\dot{T}_{\sigma 0}$ и скорости деформаций $\dot{T}_{\varepsilon 0}$ определяется уравнением состояния

$$\dot{P} = \left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{v}} \right)_s \dot{\mathbf{v}} + \left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{E}} \right)_v T \dot{\mathbf{s}}.$$

16. Упругость и пластичность

Компоненты девиатора скоростей деформаций, следуя Рейсу, разделим на упругие (с индексом e) и пластические (с индексом p)

$$\dot{e}_{ii} = \dot{e}_{ii}^e + \dot{e}_{ii}^p, \quad \dot{\gamma}_{ij} = \dot{\gamma}_{ij}^e + \dot{\gamma}_{ij}^p.$$

Введём меру пластичности φ - безразмерную величину.

Значение $\varphi = 0$ соответствует идеальной упругости, значение

$\varphi=1$ – идеальной пластичности. При $0 \leq \varphi \leq 1$ свойства упругости и пластичности проявляются одновременно.

$$\dot{e}_{ii}^e = (1-\varphi)\dot{e}_{ii}, \quad \dot{e}_{ii}^p = \varphi\dot{e}_{ii}, \quad \dot{\gamma}_{ij}^e = (1-\varphi)\dot{\gamma}_{ij}, \quad \dot{\gamma}_{ij}^p = \varphi\dot{\gamma}_{ij}.$$

Т.о. \dot{S}_{ii} и $\dot{\tau}_{ij}$ определяются уравнениями

$$\dot{S}_{ii} = (1-\varphi)2G\dot{e}_{ii}, \quad \dot{\tau}_{ij} = (1-\varphi)2G\dot{\gamma}_{ij},$$

где

$$\begin{aligned} \dot{e}_{xx} &= \frac{2}{3} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \dot{\gamma}_{xy} &= \dot{\gamma}_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \\ \dot{e}_{yy} &= -\frac{1}{3} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \dot{\gamma}_{xz} &= \dot{\gamma}_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \\ \dot{e}_{zz} &= -\frac{1}{3} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{2}{3} \frac{\partial u_z}{\partial z}. & \dot{\gamma}_{yz} &= \dot{\gamma}_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

17. Законы сохранения неидеальной среды

Законы сохранения массы, импульса и энергии неидеальной среды без теплопроводности имеют вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \bar{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\rho \bar{u}}{dt} + \bar{u}(\rho \nabla \bar{u}) + \nabla p - \frac{\partial \bar{s}_x}{\partial x} - \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial y} - \frac{\partial \bar{s}_z}{\partial z} = \bar{F},$$

$$\frac{d\rho \varepsilon}{dt} + \rho \varepsilon \nabla \bar{u} + \nabla p \bar{u} - \frac{\partial \bar{s}_x \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{s}_y \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{s}_z \bar{u}}{\partial z} = \bar{F} \bar{u},$$

где

$$\bar{s}_x = s_{xx} \bar{i} + \tau_{xy} \bar{j} + \tau_{xz} \bar{k}, \quad \bar{s}_y = \tau_{yx} \bar{i} + s_{yy} \bar{j} + \tau_{yz} \bar{k}, \quad \bar{s}_z = \tau_{zx} \bar{i} + \tau_{zy} \bar{j} + s_{zz} \bar{k}.$$

Следствиями этих уравнений являются уравнения движения

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} + \bar{\nabla} p - \frac{\partial \bar{s}_x}{\partial x} - \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial y} - \frac{\partial \bar{s}_z}{\partial z} = \bar{F} \quad (2)$$

и уравнение для внутренней энергии E

$$\rho \frac{dE}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - \bar{s}_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{s}_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{s}_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

18. Преобразование уравнения внутренней энергии

В уравнение для внутренней энергии (17.3) подставим вектора

$$\bar{s}_x = s_{xx} \bar{i} + \tau_{xy} \bar{j} + \tau_{xz} \bar{k}, \quad \bar{s}_y = \tau_{yx} \bar{i} + s_{yy} \bar{j} + \tau_{yz} \bar{k}, \quad \bar{s}_z = \tau_{zx} \bar{i} + \tau_{zy} \bar{j} + s_{zz} \bar{k},$$

$$\bar{u} = u_x \bar{i} + u_y \bar{j} + u_z \bar{k}.$$

Получим

$$\dot{E} + p\dot{v} = v\dot{A}, \quad (1)$$

где

$$\dot{A} = s_{xx} \dot{e}_{xx} + s_{yy} \dot{e}_{yy} + s_{zz} \dot{e}_{zz} + 2(\tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy} + \tau_{xz} \dot{\gamma}_{xz} + \tau_{yz} \dot{\gamma}_{yz}).$$

Поскольку

$$\dot{e}_{ii} = (1 - \varphi) \dot{e}_{ii} + \varphi \dot{e}_{ii}, \quad \dot{\gamma}_{ij} = (1 - \varphi) \dot{\gamma}_{ij} + \varphi \dot{\gamma}_{ij},$$

то уравнение (1) запишем в виде

$$\dot{E} + p\dot{v} = (1 - \varphi) v\dot{A} + \varphi v\dot{A}. \quad (2)$$

В идеальной среде $E = E_x + E_T(v, T)$. Разделим холодную энергию на холодную энергию дилатации $E_x(v)$ и холодную энергию дисторсии.

Поскольку упругие деформации обратимы, а пластические не обратимы, то холодной может быть только энергия упругой дисторсии. Т.о. уравнение (2) расщепляется на два

$$\dot{E} + p\dot{v} = \varphi v\dot{A}, \quad \dot{E}_e = (1 - \varphi) v\dot{A}.$$

19. Упругость

Компоненты девиатора скоростей напряжений определяются уравнениями

$$\dot{s}_{ii} = 2G(1-\varphi)\dot{e}_{ii}, \quad \dot{\tau}_{ij} = 2G(1-\varphi)\dot{\gamma}_{ij}. \quad (1)$$

Уравнение для упругой энергии имеет вид

$$\dot{E}_e = (1-\varphi)v \left[s_{xx}\dot{e}_{xx} + s_{yy}\dot{e}_{yy} + s_{zz}\dot{e}_{zz} + 2(\tau_{xy}\dot{\gamma}_{xy} + \tau_{xz}\dot{\gamma}_{xz} + \tau_{yz}\dot{\gamma}_{yz}) \right]. \quad (2)$$

Выразив \dot{e}_{ii} и $\dot{\gamma}_{ij}$ из (1) и подставив в (2), получим

$$\dot{E}_e = \frac{v}{4G} \dot{B},$$

где $B = s_{xx}^2 + s_{yy}^2 + s_{zz}^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$. Введём безразмерную величину

$$\psi = \frac{3B}{2Y},$$

где Y предел текучести Мизеса (1913 г.). Упругие деформации возможны при $\psi < 1$. Введём ещё безразмерную величину

$$R = \begin{cases} \psi, & \text{если } \psi \leq 1, \\ 1, & \text{если } \psi > 1. \end{cases}$$

20. Пластичность

Меру пластичности φ определим так

$$\varphi = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - R^m} & \text{при } \dot{V} > 0, \quad (\dot{E}_e > 0), \\ 1 & \text{при } \dot{V} = 0, \quad (\dot{E}_e = 0), \\ 1 - \sqrt{1 - (1 - R)^m} & \text{при } \dot{V} < 0, \quad (\dot{E}_e < 0), \end{cases}$$

R и φ изменяются в пределах $0 \leq R \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 1$. При $\dot{V} = 0$, $\varphi = 1$. Это чисто пластическое течение. В нём

$$s_{ii} = \text{const}, \quad \tau_{ij} = \text{const}, \quad E_e = \text{const}.$$

Удельная внутренняя энергия в пластическом течении растёт

$$\dot{E} + p\dot{v} = v\varphi \left[s_{xx}\dot{e}_{xx} + s_{yy}\dot{e}_{yy} + s_{zz}\dot{e}_{zz} + 2(\tau_{xy}\dot{\gamma}_{xy} + \tau_{xz}\dot{\gamma}_{xz} + \tau_{yz}\dot{\gamma}_{yz}) \right].$$

Правая часть этого уравнения определяет диссипацию энергии – следствие необратимости пластических деформаций.

21. Модели МСС без вихрей не полны

1. А.С. Монин, А.М. Яглом. Статистическая гидромеханика. Ч.1, Наука. М: 1965 г.

"Подавляющее большинство течений является турбулентными. Ламинарные течения, подробно изучаемые в гидродинамике, представляют собою редкие исключения".

2. Л.Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа. М. Наука. 1987.
"Турбулентный поток обладает сложной вихревой структурой, содержащей вихри разных размеров".

3. С.В. Алексеенко, П.А. Куйбин, В.Л. Окулов. Введение в теорию концентрированных вихрей. Новосибирск. Институт теплофизики СО РАН. 2003 г.

"Вихревое движение – одно из основных состояний движущейся сплошной среды".

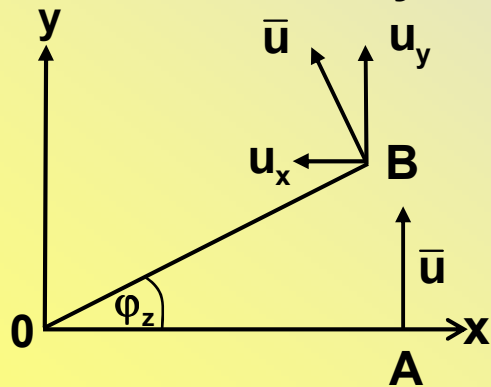
22. Третий уровень моделей. Повороты

Если объём и форма тела не изменяются, то компоненты тензора скоростей деформаций равны нулю

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{yy} = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{zz} = 0, \quad \dot{\gamma}_{xy} = 0, \quad \dot{\gamma}_{xz} = 0, \quad \dot{\gamma}_{yx} = 0, \quad \dot{\gamma}_{yz} = 0, \quad \dot{\gamma}_{zx} = 0, \quad \dot{\gamma}_{zy} = 0,$$

а компоненты тензора скоростей поворотов имеют вид

$$\dot{\omega}_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad \dot{\omega}_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad \dot{\omega}_{yx} = \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \dot{\omega}_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad \dot{\omega}_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \dot{\omega}_{zy} = \frac{\partial u_z}{\partial y}. \quad (1)$$



При повороте тела на угол φ_z вокруг оси Oz точка A переместится в точку B . При этом компоненты скорости \bar{u} и координаты точки изменятся на величины

$$\begin{aligned} \Delta u_x &= -u \sin \varphi_z, & \Delta u_y &= u (\cos \varphi_z - 1), \\ \Delta x &= R (\cos \varphi_z - 1), & \Delta y &= R \sin \varphi_z. \end{aligned} \quad (2)$$

Исключив в (2) $\sin \varphi_z$ и $\cos \varphi_z - 1$ и перейдя к пределу при $\varphi \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, получим

$$-\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{u}{R}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{u}{R}.$$

Сложим эти выражения и разделим на два

$$\frac{u}{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \quad (3)$$

23. Потенциальные или вихревые течения

Из (22.1), (22.3) и из теории круговых движений ($\mathbf{u} = R\dot{\phi}$) следует

$$\dot{\phi}_z = \dot{\omega}_{yx} = -\dot{\omega}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \quad (1)$$

Аналогично получаются

$$\dot{\phi}_y = \dot{\omega}_{xz} = -\dot{\omega}_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \quad \dot{\phi}_x = \dot{\omega}_{yz} = -\dot{\omega}_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right). \quad (2)$$

Если поворотов нет, то все $\dot{\omega}_{ij} = 0$ и из (1) и (2) следуют

условия отсутствия поворотов

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

При их выполнении течение называют **потенциальным** (ламинарным). Если одно из условий (3) нарушено, течение **является вихревым**.

Внимание:

1. Все уравнения получены при $t = \text{const}$.
2. Все уравнения справедливы для сплошной среды независимо от агрегатного состояния вещества.
3. Подавляющее большинство двумерных и трёхмерных движений сплошных сред являются вихревыми.

24. Центробежная сила

В двумерном течении в каждой точке плоскости x, y заданы:

$$\bar{u} = u_x \bar{i} + u_y \bar{j}, \quad u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2},$$

$$\dot{\phi}_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \neq 0.$$

Из теории движений с криволинейными траекториями известно выражение для модуля центробежной силы

$$F = \dot{\phi}_z u.$$

Направление F ортогонально направлению u , т.е

$$F_x = -\dot{\phi}_z \cdot u_y, \quad F_y = \dot{\phi}_z \cdot u_x.$$

В общем (трёхмерном) случае в каждой точке действуют силы

$$F_x = \dot{\omega}_{zx} u_z - \dot{\omega}_{yx} u_y, \quad F_y = \dot{\omega}_{yx} u_x - \dot{\omega}_{zy} u_x, \quad F_z = \dot{\omega}_{zy} u_y - \dot{\omega}_{zx} u_x.$$

Центробежная сила в отличие от $\text{grad } \sigma_{ij}$ является объёмной.

Центробежные силы всегда существуют в вихревых течениях жидкостей, газов, плазмы и твёрдых тел.

25. Упругость, пластичность, связи тензоров

Тензор скоростей смещений есть сумма трёх тензоров

$$\dot{T} = \dot{T}_{\varepsilon 0} + \dot{D}_{\varepsilon} + \dot{T}_{\omega},$$

где $\dot{T}_{\varepsilon 0}$ – шаровой тензор скоростей деформаций, \dot{D}_{ε} – девиатор скоростей деформаций, \dot{T}_{ω} – тензор скоростей поворотов.

Тензор скоростей напряжений есть сумма трёх тензоров

$$\dot{T}_{\sigma} = \dot{T}_{\sigma 0} + \dot{D}_{\sigma} + \dot{T}_{\sigma \omega},$$

где $\dot{T}_{\sigma 0}$ – шаровой тензор скоростей напряжений, \dot{D}_{σ} – девиатор скоростей напряжений. $\dot{T}_{\sigma \omega}$ – тензор центробежных сил.



Связь $\dot{T}_{\sigma 0} = F_1(\dot{T}_{\varepsilon 0})$ – определяется уравнением состояния, связь $\dot{D}_{\sigma} = F_2(\dot{D}_{\varepsilon})$ – это уравнения упругости и пластичности, связь $\dot{T}_{\sigma \omega} = F_3(\dot{T}_{\omega})$ – это уравнения вихрей.

26. Вязкость, экзотика

Основное уравнение вязкости имеет вид

$$D_{\sigma} = 2\mu\dot{D}_{\varepsilon}. \quad (1)$$

Это уравнение не вписывается в приведённую выше цепочку тензоров. Для вязкости цепочка такова



Особая форма уравнения вязкости делает систему законов сохранения параболической. Это противостоит природе.

Попытки заменить уравнение (1) уравнением

$$\dot{D}_{\sigma} = 2\mu\dot{D}_{\varepsilon}$$

объясняются стремлением уйти от модели Стокса к гиперболической модели вязкой жидкости.

27. Модели и моделирование

Любая модель является приближённой. Об этом чаще всего забывают при интерпретации результатов расчётов. Выдавая поток цифр, ЭВМ отрывает их от модели, как бы экранирует модель от пользователя и избавляет его от необходимости понимания её достоинств и недостатков.

Доступность ЭВМ сделала мат. моделирование массовым занятием. В ЭВМ легко ввести любую "новую" модель. Подобрал значения эмпирических параметров, можно даже описать несколько экспериментов. Сегодня этого мало.

Движением вперёд является не столько создание новой модели, сколько обоснование её преимуществ. Иначе это топтание на месте – деградация. Такие результаты взаимодействия ЭВМ и пользователя вызывали и продолжают вызывать тревогу. К сожалению, они появляются в литературе.

28. Тревога о моделях

1976 г. Л.И. Седов: (ПМТФ, т. 40).

"Теория моделирования деформируемых сред у нас и за границей заполнена мутными потоками дилетантской путаницы, которые сбивают с толку многих специалистов и учащихся".

1983 г. В.В. Новожилов: (Препринт № 125 ЛГУ).

"Продолжают появляться без связи с потребностями практики всевозможные "мыслимые" модели сплошной среды, для упрощённых уравнений решаются краевые задачи, доказываются теоремы существования и единственности. Торжествует "механикоподобная математика".

Ситуация сегодня не улучшилась!

29. Заключение

Модель сплошной среды верно служит людям больше 200 лет.

Многие модели МСС содержат эмпирические параметры, которые калибруются с помощью экспериментов.

К 2014 г. резко возросли возможности математического моделирования.

Созрели условия для создания моделей нового поколения с минимальным количеством эмпирических параметров.

Создание и применение таких моделей позволит не воспроизводить, а прогнозировать результаты любого физического процесса.

Только так можно ответить на вызов, который нам бросила вычислительная техника.

***Благодарю
за
внимание***

