Вестник Челябинского государственного университета. 2012. № 30 (284).
Физика. Вып. 14. С. 23–25.

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Ю. М. Ковалев, В. Ф. Куропатенко

АНАЛИЗ ИНВАРИАНТНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ «ЗАМОРОЖЕННОЙ» ГАЗОВЗВЕСИ

Проведен анализ инвариантности относительно преобразования Галилея математической модели «замороженной» газовзвеси. Показано, что математическая модель «замороженной» газовзвеси не является инвариантной относительно преобразования Галилея. Это приводит к появлению фиктивного источникового члена в уравнении энергии.

Ключевые слова: *математическая модель, инвариантность, многокомпонентная смесь.*

В связи с развитием современной вычислительной техники резко возросла роль математического моделирования физических процессов, используемого в науке и технике. Более того, есть такие проблемы, когда математическое моделирование является единственным средством предварительного изучения явлений. Поэтому с особой остротой встает вопрос адекватности математических моделей тем физическим процессам, которые они пытаются описывать. В природе практически нет чистых веществ, поэтому активно развиваются математические модели многокомпонентных сред [1–2]. Для верификации расчетов используют известные экспериментальные данные. Очень важно, чтобы условия проведения расчетов и экспериментов совпадали. В настоящей статье на примере анализа математической модели замороженной газовзвеси [3–4] мы покажем, к чему может привести ситуация, когда расчеты и эксперимент проведены в разных системах координат.

При решении поставленной задачи предполагалось, что частицы твердой фазы неподвижны и несжимаемы. Это означает, что вместо газовзвеси фактически рассматривается заполненная газом недеформируемая решетка. Твердые частицы имитируют ее узлы, а связи между узлами решетки не оказывают влияния на газодинамическое течение, т. е. используется модель «замороженной» газовзвеси, представленная в работах [3–4] при изучении ослабления ударных волн. Поскольку частицы неподвижны и несжимаемы, их объемная концентрация и, следовательно, объемная концентрация газа постоянны.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10-01-00032.

С учетом сказанного выше система уравнений из [3–4], описывающая в одномерном случае течение газа через решетку, имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u u)}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} - F, \tag{2}$$

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u E)}{\partial x} + \frac{\partial (P u)}{\partial x} = -Q. \tag{3}$$

Здесь P — давление, ρ — плотность, u — скорость, t — время, F — силы межфазного взаимодействия, E — удельная полная энергия газа; Q — интенсивность теплообмена между газом и частицами. Функция F зависит от разности скоростей газа и частиц, функция Q — от разности температур газа и частиц. Функции F и Q не изменяются при переходе в новую систему координат.

Проведем анализ инвариантности системы уравнений (1)–(3) относительно преобразования Галилея. С этой целью перейдем в новую систему координат, которая движется с постоянной скоростью D относительно старой системы координат. Скорость в новой системе координат будет равна

$$u_H = u + D, \tag{4}$$

координата определяется из уравнения

$$x_H = x + Dt. \tag{5}$$

Производные по координате и времени определяются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_H}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_H}\right) D. \tag{6}$$

После перехода в движущуюся систему координат значок H будем опускать. Следовательно, уравнение неразрывности газовой фазы (1) с учетом (4)–(6) принимает вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x}D+\frac{\partial(\rho(u\ -D)}{\partial x}=0, \qquad (7)$$

который после сокращения членов с противоположными знаками совпадает с (1).

Запишем теперь уравнение сохранения импульса газовой фазы (2) в новой системе координат:

$$\frac{\partial\rho(u-D)}{\partial t}+\frac{\partial\rho(u-D)}{\partial x}D+\frac{\partial\rho(u-D)^2}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial x}+F=0.$$

После несложных преобразований оно принимает вид

$$\frac{\partial\rho u}{\partial t}+\frac{\partial\rho u^2}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial x}+F=\omega_1(D), \qquad (8)$$

где

$$\omega_1(D)=D\left(-\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u}{\partial x}-2\frac{\partial\rho u}{\partial x}\right)+D^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}-\frac{\partial\rho}{\partial x}\right). \qquad (9)$$

Подставив (1) в (9) и сократив подобные члены, получим, что

$$\omega_1(D)=0 \qquad (10)$$

и, следовательно, уравнение (8) совпадает с уравнением (2).

И, наконец, перейдем в новую систему координат в уравнении для удельной энергии газовой фазы (3). Учитывая, что

$$E=\varepsilon+\frac{u^2}{2},$$

где ε — удельная внутренняя энергия, запишем уравнение (3) в новой системе координат:

$$\frac{\partial\rho\left(\varepsilon+\frac{1}{2}(u-D)^2\right)}{\partial t}+\frac{\partial\rho\left(\varepsilon+\frac{1}{2}(u-D)^2\right)}{\partial x}D+$$
$$+\frac{\partial\rho(u-D)\left(\varepsilon+\frac{1}{2}(u-D)^2\right)}{\partial x}+\frac{\partial P(u-D)}{\partial x}+Q=0.$$

Раскрыв скобки и сгруппировав члены, получим уравнение в новой системе координат для удельной полной энергии газовой фазы, распространяющейся с постоянной скоростью D:

$$\frac{\partial\rho\left(\varepsilon+\frac{u^2}{2}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\rho u\left(\varepsilon+\frac{u^2}{2}\right)}{\partial x}+\frac{\partial Pu}{\partial x}+Q=\omega_2, \qquad (11)$$

где $\omega_2=-DF$.

Как следует из уравнений (8), (10) и (11), для модели замороженной газовзвеси из [3–4] уравнение неразрывности газовой фазы и уравнение сохранения импульса газовой фазы являются инвариантными относительно преобразования Галилея, а уравнение энергии (3) не является инвариантным.

Оценим последствия неинвариантности уравнения энергии. В уравнении (11) исключим кинетическую энергию с помощью уравнения (2). Для этого умножим (2) на u и вычтем из (11), затем умножим (1) на ε и вычтем из полученного уравнения. Следствием этих преобразований является уравнение для внутренней энергии

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+u\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}-\frac{P}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)+\frac{Q}{\rho}=\left(\frac{u-D}{\rho}\right)F. \qquad (12)$$

Перейдем к субстанциональным производным, заменим плотность удельным объемом $V=\left(\frac{1}{\rho}\right)$ и сравним полученное уравнение с уравнением для удельной внутренней энергии как функции энтропии и удельного объема

$$\frac{d\varepsilon}{dt}+P\frac{dV}{dt}=T\frac{dS}{dt}. \qquad (13)$$

В результате из (12) и (13) получим уравнение производства энтропии газа:

$$T\frac{dS}{dt}=\frac{1}{\rho}(F(u-D)-Q).$$

Если разделить энтропию на две части

$$S=S_{PH}+S_G,$$

где S_{PH} определяется «физикой» модели, а S_G — Галилеевой неинвариантностью, то мы получим уравнение производства энтропии S_G

$$T\frac{dS_G}{dt}=\frac{F}{\rho}(u-D), \qquad (14)$$

возникшее исключительно вследствие того, что авторы модели [3–4] пренебрегли фундаментальным принципом механики.

Рассмотрим возможность получения уравнения полной удельной энергии газовой фазы, инвариантного относительно преобразования Галилея. С этой целью из правой части уравнения полной удельной энергии газовой фазы (3) вычитаем работу сил межфазного взаимодействия Fu, получаем

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uE)}{\partial x}+\frac{\partial(Pu)}{\partial x}=-Q-Fu. \quad (15)$$

Переходя к новой системе координат, которая движется с постоянной скоростью D, по формулам (4)–(6) получим уравнение полной удельной энергии газовой фазы в новой системе координат

$$\frac{\partial(\rho(\varepsilon+u^2/2))}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u(\varepsilon+u^2/2))}{\partial x}+ \\ +\frac{\partial Pu}{\partial x}=-Q-Fu. \quad (16)$$

Из сравнения (15) и (16) видно, что уравнение полной удельной энергии газовой фазы (15) является инвариантным относительно преобразования Галилея.

Получим выражение для удельной внутренней энергии газовой фазы. С этой целью, как и ранее, исключим кинетическую энергию с помощью уравнения (2). Для этого умножим (2) на u и вычтем из уравнения (16). Далее, умножим (1) на ε и вычтем из (16). В результате получаем уравнение для удельной внутренней энергии газовой фазы в виде

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+u\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}-\frac{p}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)=-Q/\rho. \quad (17)$$

Как и ранее, переходя к субстанциональным производным и заменяя плотность удельным объемом $V=(1/\rho)$, получим уравнение для удельной внутренней энергии газовой фазы как функции энтропии и удельного объема (13). Вычитая из равенства (17) равенство (13), получим уравнение производства энтропии газовой фазы

$$T\frac{ds}{dt}=-Q/\rho. \quad (18)$$

Уравнение (18) согласуется со вторым законом термодинамики. Видим, что производство энтропии газовой фазы определяется только межфазным теплообменом.

К сожалению, принцип инвариантности к преобразованию Галилея не выполняется в ряде моделей многокомпонентных сред, публикуемых в журналах. Такие модели не способны прогнозировать результаты тех физических процессов, для моделирования которых предназначены.

Список литературы

1. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М. : Наука, 1978. 336 с.

2. Куропатенко В. Ф. Новые модели механики сплошных сред // Инж.-физ. журн. 2011. Т. 84, № 1. С. 74–92.

3. Кругликов Б. С., Кутушев А. Г. Ослабление воздушных ударных волн экранирующими решетками // Физика горения и взрыва. 1988. № 1. С. 115–117.

4. Кругликов Б. С., Кутушев А. Г. Ослабление воздушных ударных волн слоями запыленного газа и решетками // Приклад. механика и техн. физика. 1988. № 1. С. 51–57.