В.Ф. Куропатенко

Методы расчета ударных волн

VI Забабахинские научные чтения

23 – 28 сентября 2001г.
г. Снежинск

1. Методы

В идеальной сплошной среде:

- на непрерывных решениях энтропия постоянна,
- на сильных разрывах энтропия возрастает.

Это главное различие.

Известно 4 метода расчета ударных волн, не выделяющих разрывов и основанных на принципиально различных механизмах диссипации энергии в ударном слое, заменяющем сильный разрыв.

Год появления первой публикации	Авторы метода расчета ударных волн	Страна
1950 г.	Д. Нейман, Р. Рихтмайер	США
1954 г.	П. Лакс	США
1959 г.	С.К. Годунов	СССР
1960 г.	В.Ф. Куропатенко	СССР

2. Разностные законы сохранения в дифференциальной форме

$$\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial U}{\partial m}=\omega_1, \qquad \frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial m}=\omega_2, \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial PU}{\partial m}=\omega_3,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_m-U=\omega_4, \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial m}\right)_t-V=\omega_5,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}+P\frac{\partial U}{\partial m}=\omega_6, \qquad \frac{\partial E}{\partial t}+P\frac{\partial V}{\partial t}=\omega_7, \qquad T\frac{\partial S}{\partial t}=\omega_8,$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}+a^2\frac{\partial V}{\partial t}=\omega_9, \qquad \frac{\partial P}{\partial t}+a^2\frac{\partial U}{\partial m}=\omega_{10}.$$

Среди ω_k ($k=1,2,\ldots,10$) только четыре независимых. Простейшая форма законов сохранения достаточна для иллюстрации свойств метода.

3. Свойства разностных схем (Р.С.)

Методов расчета ударных волн – **четыре**.

Разностных схем, реализующих эти методы – много.

Каждый метод порождает множество разностных схем.

Сравниваются следующие свойства Р.С.:

- условие устойчивости,
- поведение энтропии на непрерывном решении,
- дистракция (безразмерная ширина слоя, заменяющего сильный или слабый разрыв),
- монотонность,
- наличие эмпирических констант.

Условие устойчивости определяется хорошо известными методами.

4. Диссипативность Р.С.

Каждая Р.С. содержит явно или неявно уравнение производства энтропии $T\frac{\partial S}{\partial t} = \omega_8.$

ω_8 определяется через независимые ω_k. Часто встречаются

Независимые ω_k	Уравнение для ω_8
ω_1, ω_2, ω_3, ω_4	$\omega_8 = \omega_3 - U\omega_2 + P\omega_1$
ω_2, ω_3, ω_4, ω_5	$\omega_8 = \omega_3 - U\omega_2 + P\left(\overline{\omega}_4 - \overline{\omega}_5\right)$
ω_2, ω_4, ω_5, ω_7	$\omega_8 = \omega_7$
ω_1, ω_2, ω_4, ω_8	ω_8

На ударных волнах диссипация энергии определяется входящими в ω_8 членами, реализующими идею метода. На непрерывных решениях должно быть $S = \text{const}$. Но $S \neq \text{const}$, если $\omega_8 \neq 0$.

Критерий диссипативности – поведение энтропии на слабой ударной волне:

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^3 + \ldots$$

5. Дистракция Р.С.

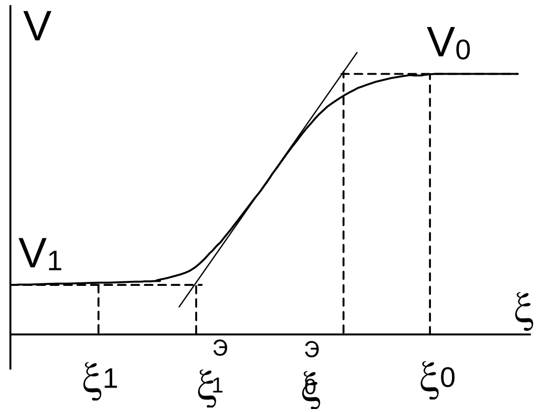
От переменных m, t переходим к автомодельной переменной ξ=m–Wt, где W=const. Полученная система ОДУ имеет решение

$$\xi=\xi(V).$$

Перед разрывом $V=V_0$, $\xi=\xi_0$, за разрывом $V=V_1$, $\xi=\xi_1$. Дистракция равна

$$D=\frac{\xi_0-\xi_1}{h}.$$

Эффективная дистракция. В точке, где $V''=0$, определяется V'_M и проводится касательная к профилю $V(\xi)$. Она пересекает прямые $V=V_0$ и $V=V_1$. Т.о.



$$\xi_0^Э-\xi_1^Э=\frac{V_0-V_1}{V'_M},$$

$$D^Э=\frac{\xi_0^Э-\xi_1^Э}{h}.$$

6. Монотонность

В акустическом приближении P и U заменяются инвариантами α и β

$$P = 0{,}5(\alpha + \beta), \qquad U = 0{,}5(\alpha - \beta)/a.$$

Затем α_i^{n+1} и β_i^{n+1} выражаются через α_{i+k}^{n} и β_{i+k}^{n}. В бегущей α волне полагается $\beta = 0$. К выражению

$$\alpha_i^{n+1} = \sum_{k=-k_1}^{k_2} b_{i+k}\alpha_{i+k}^{n}$$

применяется теорема Годунова. Если все $b_{i+k} \geq 0$, то Р.С. монотонна. Если есть $b_{i+k} < 0$, то рассматриваются разности

$$\alpha_{i+1}^{n+1} - \alpha_i^{n+1}$$

и с помощью разложений в ряд Тэйлора устанавливается условие монотонности в виде

$$\tau \leq hf\left(\frac{\partial\alpha}{\partial m}, \frac{\partial^2\alpha}{\partial m^2}\right).$$

7. Метод Неймана – Рихтмайера

Главная идея: в дифференциальные уравнения движения и энергии вводится искусственная вязкость, обеспечивающая диссипацию энергии и дистракцию сильного разрыва.

Нейман и Рихтмайер предложили q в виде

$$q = -\frac{C^2 \Delta x_0^2}{V} \frac{\partial U}{\partial x_0} \left| \frac{\partial U}{\partial x_0} \right| .$$

Идея введения псевдовязкости может быть реализована в виде различных Р.С.. Выражение q также может быть разным. РС могут быть явными или неявными. Но если в уравнения вводится псевдовязкость, то все такие разностные схемы являются реализацией метода Неймана – Рихтмайера.

В Р.С. Неймана и Рихтмайера P, ρ, E, q определяются в серединах интервалов по m, U и x – в узлах сеточных ячеек.

8. Р.С. Неймана – Рихтмайера. Уравнения

$$\frac{U_i^{n+1}-U_i^n}{\tau}+\frac{P_{i+0,5}^n+q_{i+0,5}^n-P_{i-0,5}^n-q_{i-0,5}^n}{h}=0,$$

$$\frac{x_i^{n+1}-x_i^n}{\tau}-U_i^{n+1}=0, \qquad \frac{x_{i+1}^{n+1}-x_i^{n+1}}{h}-V_{i+0,5}^{n+1}=0,$$

$$q_{i+0,5}^{n+1}=\begin{cases}\dfrac{k}{V_{i+0,5}^{n+1}}\left(U_{i+1}^{n+1}-U_i^{n+1}\right)^2 \text{ при } \quad U_{i+1}^{n+1}-U_i^{n+1}<0, \\ 0 \quad \text{при} \quad U_{i+1}^{n+1}-U_i^{n+1}\ge 0,\end{cases},$$

$$E_{i+0,5}^{n+1}-E_{i+0,5}^n+\left(\frac{P_{i+0,5}^{n+1}+P_{i+0,5}^n}{2}+q_{i+0,5}^{n+1}\right)\left(V_{i+0,5}^{n+1}-V_{i+0,5}^n\right)=0,$$

Условие устойчивости: $æ=\dfrac{a\tau}{h}\le 0,25$

Уравнение производства энтропии при q = 0:

$$T\frac{dS}{dt}=-\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S\left(\frac{dV}{dt}\right)^3+\frac{\tau^2h^2k}{24V}\left(\frac{1}{a^2}\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2\frac{\partial^3 V}{\partial t^3}+\dots .$$

9. Р.С. Неймана – Рихтмайера. Дистракция разрыва

На стационарной УВ главные члены разностных уравнений образуют систему ОДУ

$$WV' + U' = 0, \qquad WU' - (P + q)' = 0, \qquad E' + (P + q)V' = 0,$$

где штрих – дифференцирование по ξ = m – Vt. Решение имеет вид

$$\xi = \pm kh\sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}\arcsin\left(\gamma - (\gamma + 1)\frac{V}{V_0}\right).$$

При $V=V_0$ $\qquad \xi_0 = \frac{3kh\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}.$ $\qquad$ При $V=V_1$ $\qquad \xi_1 = -\frac{kh\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}.$

Значит, дистракция

$$D_{HP} = \frac{\xi_0 - \xi_1}{h} = 2k\pi\sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}, \qquad D_{HP}^{Э} = 2k\sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}.$$

10. Метод Лакса

Основная идея: диссипация энергии на УВ обеспечивается главными членами ω_1, ω_2, ω_3. (Метод аппроксимационной вязкости.)

Величины P,V,E,U определяются в серединах сеточных интервалов по m. Разностные уравнения имеют вид

$$\frac{V_{i+0,5}^{n+1}-V_{i+0,5}^{n}}{\tau}-\frac{U_{i+1}^{*}-U_{i}^{*}}{h}=0, \qquad \frac{U_{i+0,5}^{n+1}-U_{i+0,5}^{n}}{\tau}+\frac{P_{i+1}^{*}-P_{i}^{*}}{h}=0,$$

$$\frac{\varepsilon_{i+0,5}^{n+1}-\varepsilon_{i+0,5}^{n}}{\tau}+\frac{(PU)_{i+1}^{*}-(PU)_{i}^{*}}{h}=0, \qquad E_{i+0,5}^{n+1}=\varepsilon_{i+0,5}^{n+1}-0,5\left(U_{i+0,5}^{n+1}\right)^{2}.$$

Вспомогательные величины: $U_i^{*}=U_i^{n}+\frac{h}{2\tau}\left(V_{i+0,5}^{n}-V_{i-0,5}^{n}\right)$,

$$P_i^{*}=P_i^{n}-\frac{h}{2\tau}\left(U_{i+0,5}^{n}-U_{i-0,5}^{n}\right), \qquad (PU)_i^{*}=(PU)_i^{n}-\frac{h}{2\tau}\left(\varepsilon_{i+0,5}^{n}-\varepsilon_{i-0,5}^{n}\right).$$

Экстенсивные величины V, ε разрывны на КГ – недостаток.

11. Р.С. Лакса. Диссипация. Устойчивость

Погрешности аппроксимации имеют вид

$$\omega_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial m^2}\frac{h^2}{\tau} + O\left(\tau^2, h^2\right), \quad \omega_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial m^2}\frac{h^2}{\tau} + O\left(\tau^2, h^2\right),$$

$$\omega_3 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial m^2}\frac{h^2}{\tau} + O\left(\tau^2, h^2\right).$$

Уравнение производства энтропии

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \omega_3 - U\omega_2 + P\omega_1 = \frac{h}{2a}\left(\frac{1-æ^2}{æ}\right)\left(a^2\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2\right) + \ldots$$

При $æ \to 0$ $\qquad \dfrac{\partial S}{\partial t} \to \infty.$

Условие устойчивости Р.С. Лакса

$$æ \le 1.$$

12. Р.С. Лакса. Дистракция УВ

После перехода к ξ=m-wt система ОДУ имеет решение

$$\xi = \frac{2h^2\left(1-æ^2\right)}{\tau W(\gamma+1)(V_0-V_1)}\left(V_1 \ln(V-V_1) - V_0 \ln(V_0-V)\right). \qquad (12.1)$$

Из (12.1) следует $\xi_0 = +\infty$ при $V=V_0$, $\xi_1 = -\infty$ при $V = V_1$.

$$V_M = \sqrt{V_0 V}, \qquad V'_M = \frac{(\gamma+1)æ}{2h\left(1-æ^2\right)}\left(\sqrt{V_0}-\sqrt{V_1}\right)^2, \text{ при } V''=0.$$

Следовательно

$$\boxed{D_Л = \infty \qquad D_Л^Э = \frac{2\left(1-æ^2\right)}{(\gamma+1)æ}\frac{\left(\sqrt{V_0}+\sqrt{V_1}\right)^2}{\left(\sqrt{V_0}-\sqrt{V_1}\right)^2}}$$

Т.о. $D_Л^Э \to 0$ при $æ\to 1$ и $D_Л^Э \to \infty$ при $æ\to 0$ или $V_1 \to V_0$.

13. Р.С. Лакса. Монотонность

От P и U перейдем к инвариантам α и β. Для простейшего УРС

$$P = a^2(V_0 - V).$$

запишем уравнение неразрывности в виде

$$P_{i+0.5}^{n+1} - P_{i+0.5}^{n} = -\frac{\tau a^2}{h}\left(U_{i+1}^{*} - U_{i}^{*}\right). \qquad (13.1)$$

Подставив P и U в уравнение движения и (13.1), и решив систему относительно $\alpha_{i+0.5}^{n+1}$ и $\beta_{i+0.5}^{n+1}$, получим

$$\alpha_{i+0.5}^{n+1} = 0.5(1-æ)\alpha_{i+1.5}^{n} + 0.5(1+æ)\alpha_{i-0.5}^{n},$$

$$\beta_{i+0.5}^{n+1} = 0.5(1+æ)\beta_{i+1.5}^{n} + 0.5(1-æ)\beta_{i-0.5}^{n}.$$

Т.о. Р.С. Лакса, согласно теореме С.К.Годунова, монотонна, при $0 \le æ \le 1$.

14. Метод Годунова

Основная идея: P, ρ, E, U, определяемые в серединах интервалов по m, кусочнопостоянны. Т.о. в узлах сетки имеются произвольные разрывы. При $t>t^n$ они распадаются.

Пусть $P^n_{i+0.5} < P^n_{i-0.5}$, $U^n_{i+0.5} < U^n_{i-0.5}$. Тогда

$$P_i^* + a^n_{i-0.5}U_i^* = P^n_{i-0.5} + a^n_{i-0.5}U^n_{i-0.5},$$

$$P_i^* - W_{i+0.5}U_i^* = P^n_{i+0.5} - W_{i+0.5}U^n_{i+0.5}.$$

Здесь P_i^*, U_i^* – значения на КГ. В случае слабой УВ $W_{i+0.5}= a + O(h)$, $a_{i-0.5}= a + O(h)$. Вспомогательные величины

$$P_i^* = P_i^n - 0.5a\left(U^n_{i+0.5} - U^n_{i-0.5}\right),$$

$$U_i^* = U_i^n - \frac{1}{2a}\left(P^n_{i+0.5} - P^n_{i-0.5}\right).$$

15. Р.С. Годунова. Погрешности аппроксимации

$$\omega_1 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{h}{2a}\frac{\partial^2 P}{\partial m^2} + O\left(\tau^2, h^2\right), \qquad \omega_2 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{ah}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial m^2} + O\left(\tau^2, h^2\right),$$

$$\omega_3 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \frac{ah}{2}U\frac{\partial^2 U}{\partial m^2} + \frac{ah}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial m}\right)^2 + \frac{h}{2a}\left(\frac{\partial P}{\partial m}\right)^2 + \frac{h}{2a}P\frac{\partial^2 P}{\partial m^2} + O\left(\tau^2, h^2\right).$$

$\omega_8 = \omega_3 - U\omega_2 + P\omega_1$. Уравнение производства энтропии

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{h}{2W}(1 - æ)\left(\left(\frac{\partial P}{\partial m}\right)^2 + W^2\left(\frac{\partial U}{\partial m}\right)^2\right) + O\left(\tau^2, h^2\right).$$

Т.о. Р.С. Годунова в акустическом приближении сильно диссипативна и на ударных волнах и волнах разрежения. Скорость роста S максимальна при æ=0.

Условие устойчивости

$$æ = \frac{\tau a}{h} < 1\,.$$

16. Р.С. Годунова. Дистракция. Монотонность

Профиль $V(\xi)$, где $\xi=m-wt$, определяется уравнением

$$\xi = \frac{2h(1-æ)}{(\gamma+1)(V_0 - V_1)}\left(V_1 \ln(V - V_1) - V_0 \ln(V - V_0)\right).$$

При $æ<1$ $\xi\to+\infty$ при $V\to V_0$ и $\xi\to-\infty$ при $V\to V_1$.

$D_Г$ и $D_Г^Э$ имеют вид

$$D_Г=+\infty, \qquad D_Г^Э = \frac{2}{(\gamma+1)}(1-æ)\left(\frac{\sqrt{V_0}+\sqrt{V_1}}{\sqrt{V_0}-\sqrt{V_1}}\right).$$

$D_Г^Э\to 0$ при $æ\to 1$ и $D_Г^Э \to \infty$ при $V_1\to V_0$.

В акустическом приближении после перехода к инвариантам получаем

$$\alpha_{i+0.5}^{n+1} = \alpha_{i+0.5}^{n}(1-æ) + \alpha_{i-0.5}^{n}æ, \qquad \beta_{i+0.5}^{n+1} = \beta_{i+0.5}^{n}(1-æ) + \beta_{i-0.5}^{n}æ.$$

Р.С. Годунова, согласно теореме Годунова, монотонна при $æ \le 1$.

17. Метод Куропатенко. Основная идея

На непрерывных решениях (волнах разрежения) вспомогательные величины U^*, P^* определяются из вспомогательных разностных уравнений.

На ударных волнах (волнах сжатия) U^*, P^* находятся как решение системы законов сохранения на сильном разрыве

$$P_1 - P_0 - W(U_1 - U_0) = 0, \tag{17.1}$$

$$U_1 - U_0 - W(V_1 - V_0) = 0, \tag{17.2}$$

$$P_1U_1 - P_0U_0 - W(E_1 - E_0) - \frac{W}{2}(U_1^2 - U_0^2) = 0. \tag{17.3}$$

Состояние перед разрывом (P_0, V_0, E_0, U_0) отождествляется с решением в сеточном интервале. Одна из U_1, P_1, V_1, E_1 задается. Остальные вспомогательные величины находятся из (17.1) – (17.3) и УРС. Так, например, если задать U_1, то находятся P_1, V_1, E_1, W, если же задать P_1, то находятся V_1, E_1, U_1, W.

Метод допускает реализацию на разных сетках. Рассмотрим две разностные схемы, реализующие этот метод.

18. Недивергентная Р.С. Куропатенко

Значения P, V, E определяются в серединах интервалов по m, U, x – в узлах сетки. Разностные уравнения имеют вид

$$\frac{U_i^{n+1}-U_i^n}{\tau}+\frac{\overline{P}_{i+0,5}^n-\overline{P}_{i-0,5}^n}{h}=0,$$

$$x_i^{n+1}=x_i^n+\tau U_i^{n+1}, \qquad V_{i+0,5}^{n+1}=\frac{x_{i+1}^{n+1}-x_i^{n+1}}{h},$$

$$E_{i+0,5}^{n+1}-E_{i+0,5}^n+0.5(\overline{P}_{i+0,5}^{n+1}+\overline{P}_{i+0,5}^n)(V_{i+0,5}^{n+1}-V_{i+0,5}^n)=0. \qquad (18.1)$$

На волне разрежения $\overline{P}=P$. Независимые погрешности аппроксимации

$$\omega_2=-\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}-\frac{h^2}{24}\frac{\partial^3 P}{\partial m^3}+O\left(\tau^3,h^3\right),$$

$$\omega_4=\frac{\tau}{2}\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+O\left(\tau^3\right), \qquad \omega_5=-\frac{h^2}{24}\frac{\partial^3 x}{\partial m^3}+O\left(h^3\right),$$

$$\omega_7=-\frac{\tau^2}{24}\frac{\partial^3 E}{\partial t^3}-\frac{\tau^2}{24}P\frac{\partial^3 V}{\partial t^3}+\frac{\tau^2}{8}\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}+O\left(\tau^3\right).$$

19. Недивергентная Р.С. Куропатенко. Диссипативность

На непрерывном решении уравнение производства энтропии

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^3 + O(\tau^4).$$

Т.о. Р.С. слабо диссипативна.

С 1979 г. вместо (18.1) на В.Р. используется интегрирование вдоль изэнтропы

$$E^{n+1} - E + \int\limits_{V^n}^{V^{n+1}} P(V,E)dV = 0, \quad P = P(V,E).$$

Такой расчет E и P обеспечивает любую необходимую точность определения энтропии, а уравнение производства энтропии принимает вид

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_m = 0.$$

Условие устойчивости на В.Р. æ ≤ 1.

20. Недивергентная Р.С. Куропатенко. Расчет У.В.

В качестве величин перед сильным разрывом берутся

$$V_0 = V^n_{i+0,5},\; P_0 = P^n_{i+0,5},\; E_0 = E^n_{i+0,5},$$

а в качестве скачка скорости – разность сеточных значений U в момент t^{n+1}

$$\Delta U = \left|\overline{U} - U_0\right| = \left|U^{n+1}_{i+1} - U^{n+1}_i\right|.$$

Подставив эти значения в уравнения на сильном разрыве, получим

$$\overline{P}^{n+1}_{i+0.5} = P^n_{i+0.5} - W\left(U^{n+1}_{i+1} - U^{n+1}_i\right). \qquad (20.1)$$

Для УРС конденсированного вещества $P = (\gamma\text{-}1)\rho E + C_0^2(\rho - \rho_0)$

$$\overline{P}^{n+1}_{i+0.5} = P^n_{i+0.5} + \frac{\gamma+1}{4}\rho^n_{i+0.5}\Delta U^2 + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\rho^n_{i+0.5}\Delta U^2\right)^2 + \left(a^n_{i+0.5}\right)^2\Delta U^2}\,.$$

Асимптотики: $\Delta U^2 \ll a^2$, $\Delta U^2 \gg a^2$. Линейно - квадратичная псевдо-вязкость.

21. Недивергентная Р.С. Куропатенко. Дистракция. Монотонность

Дистракция стационарной У.В. такая же, как в Р.С. Годунова.

В случае бегущей волны при β=const для $\alpha_{i+0,5}^{n+1}$ получается уравнение.

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} = \alpha_{i+0,5}^{n} - æ(\alpha_{i+1}^{n} - \alpha_{i}^{n}) + 0.5æ(\alpha_{i+1.5}^{n} - 2\alpha_{i+0.5}^{n} + \alpha_{i-1.5}^{n}) -$$

$$-0.5æ(1-æ)(\alpha_{i+2}^{n} - 3\alpha_{i+1}^{n} + 3\alpha_{i}^{n} - \alpha_{i-1}^{n}).$$

Разложим все значения α, входящие в правую часть разности $\alpha_{i+0.5}^{n+1} - \alpha_{i-0.5}^{n+1}$, в ряды Тейлора. В результате для α волны при β=const получим условие монотонности

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial m}\right)_i - \tau a\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial m^2}\right)_i \le 0.$$

Рассматриваемая Р.С. является условно монотонной.

Условие устойчивости $\qquad æ \le 1.$

22. Дивергентная Р.С. Куропатенко

Величины P, V, E, U определены в серединах интервалов по m.
Разностные уравнения

$$\frac{V_{i+0.5}^{n+1}-V_{i+0.5}^{n}}{\tau}-\frac{U_{i+1}^{*}-U_{i}^{*}}{h}=0, \qquad \frac{U_{i+0.5}^{n+1}-U_{i+0.5}^{n}}{\tau}-\frac{P_{i+1}^{*}-P_{i}^{*}}{h}=0.$$

На волне разрежения разностные уравнения для P_i^*, U_i^*

$$U_i^{*}=U_i^{n}-\frac{\tau}{2h}(P_{i+0.5}^{n}-P_{i-0.5}^{n}), \qquad P_i^{*}=P_i^{n}-\frac{\tau a^2}{2h}(U_{i+0.5}^{n}-U_{i-0.5}^{n}).$$

$E_{i+0.5}^{n+1}$ и $P_{i+0.5}^{n+1}$ находятся интегрированием вдоль изэнтропы.

На В.Р. схема условно монотонна

$$\frac{\partial\alpha}{\partial m}-\tau a\frac{\partial^2\alpha}{\partial m^2}\le 0.$$

Условие устойчивости

$$\frac{\tau a}{h}\le 1.$$

23. Дивергентная Р.С. Куропатенко

На У.В. вспомогательные величины вычисляются из уравнений на поверхности сильного разрыва (0 – величины перед разрывом, 1 – за разрывом). Если $U^n_{i+0.5} - U^n_{i-0.5} < 0$, то:

1. $U_1 = U^n_{i-0.5}, \quad (P,V,E,U)_0 = (P,V,E,U)^n_{i+0.5}$ при $P^n_{i-0.5} > P^n_{i+0.5}$,
2. $U_1 = U^n_{i+0.5}, \quad (P,V,E,U)_0 = (P,V,E,U)^n_{i-0.5}$ при $P^n_{i-0.5} < P^n_{i+0.5}$.

Остальные величины за разрывом находятся из уравнений на разрыве. При W>0

$$U^*_i = U^n_{i-0.5}, \quad P^*_i = P^n_{i+0.5} - W\left(U^n_{i+0.5} - U^n_{i-0.5}\right).$$

Уравнение энергии на У.В.

$$\frac{\varepsilon^{n+1}_{i+0.5} - \varepsilon^n_{i+0.5}}{\tau} + \frac{P^*_{i+1}U^*_{i+1} - P^*_i U^*_i}{h} = 0.$$

Монотонность. При β=const уравнение для α имеет вид:

$$\alpha^{n+1}_{i+0.5} = \alpha^n_{i+0.5}(1 - æ) + \alpha^n_{i-0.5}æ.$$

При $0 \le æ \le 1$ дивергентная Р.С. на волне сжатия монотонна.

Дистракция в дивергентной Р.С. Куропатенко совпадает с дистракцией в Р.С. Годунова.

24. Другие разностные схемы. Р.С. Лакса–Вендрофа

Основная идея: в законы сохранения вводится три псевдовязкости q_U, q_P, q_{PU}.

$$\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial(U+q_U)}{\partial m}=0,\qquad \frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial(P+q_P)}{\partial m}=0,\qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial(PU+q_{PU})}{\partial m}=0,\qquad (24.1)$$

где

$$q_p=-\frac{B}{4}h^2\left|\frac{\partial a}{\partial m}\right|\frac{\partial U}{\partial m},\qquad q_u=-\frac{B}{4}\frac{h^2}{a^2}\left|\frac{\partial a}{\partial m}\right|\frac{\partial P}{\partial m},$$

$$q_{pu}=-\frac{B}{4}\frac{h^2}{a^2}\left|\frac{\partial a}{\partial m}\right|\left(P\frac{\partial P}{\partial m}+a^2U\frac{\partial U}{\partial m}\right).$$

Эта Р.С. содержит эмпирическую константу $B\approx 1\div 2$. Условие устойчивости имеет вид

$$æ(æ+\frac{1}{2}B)\le 1\,.$$

Схема немонотонна.

25. Р.С. Лакса–Вендрофа. Псевдовязкости

После интегрирования (24.1) по контуру ячейки получаются

$$U_i^* = \overline{U}_i + q_{Ui}^n, \qquad P_i^* = \overline{P}_i + q_{Pi}^n, \qquad (PU)_i^* = \left(\overline{P}\,\overline{U}\right)_i + q_{PUi}^n,$$

где

$$\overline{U}_i = U_i^n - \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial m}\right)_i^n, \quad \overline{P}_i = P_i^n - \frac{\tau a_i^2}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial m}\right)_i^n,$$

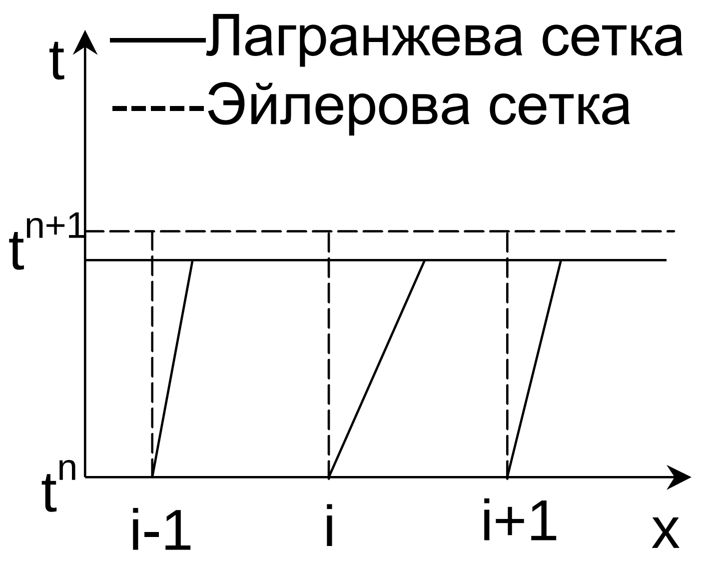
$$\left(\overline{P}\,\overline{U}\right)_i = (PU)_i^n - \frac{\tau}{2}\left(P_i^n\left(\frac{\partial P}{\partial m}\right)_i^n + a_i^2 U_i^n\left(\frac{\partial U}{\partial m}\right)_i^n\right).$$

Псевдовязкости q_U, q_P, q_{PU} не аппроксимационные. Они введены искусственно.

Р.С. Лакса-Вендрофа является, т.о. реализацией метода Неймана-Рихтмайера.

26. Р.С. в Эйлеровых координатах

Разностные схемы в Эйлеровых координатах широко применяются для решения задач аэродинамики. (См. работы О.М. Белоцерковского.) Любую из таких Р.С. можно рассматривать, как состоящую из двух этапов.



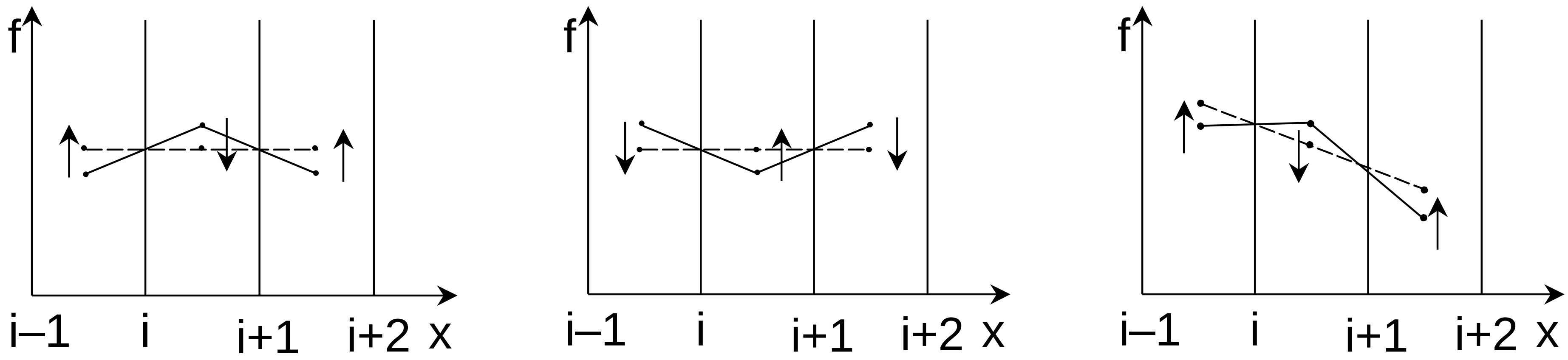
$1^{й}$ этап. Сетка рассматривается как Лагранжева и применяется один из методов расчета ударных волн в Лагранжевых координатах.

$2^{й}$ этап. Пересчет величин с Лагранжевой сетки на Эйлерову. При пересчете определяются потоки массы, количества движения и энергии через поверхности Эйлеровых ячеек.

Пересчет может быть сделан на любую сетку. В этом случае получаются Р.С. в подвижных сетках.

27. Подавление немонотонности

Для подавления немонотонности численного решения разработаны **приемы сглаживания уже полученного решения без нарушения законов сохранения**. Эти приемы могут применяться в связке с любым из вышеперечисленных методов расчета ударных волн.



Как правило, при разработке таких приемов вопросы диссипации энергии и сохранения энтропии на непрерывных решениях **не обсуждаются.**

28. Заключение. Сравнение характеристик Р.С.

Характеристика разностной схемы	Разностные схемы				
	Неймана-Рихт-майера	Лакса	Годуно-ва	Куропатенко	
				недивер-гентная	дивергент-ная
Дистракция, D	$2k\pi\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$	∞	∞	∞	∞
Эффективное значение дистракции, Dэ	$2k\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$	$\frac{2(1-\text{æ}^2)}{\text{æ}(\gamma+1)}\left(\frac{\sqrt{V_0}+\sqrt{V_1}}{\sqrt{V_0}-\sqrt{V_1}}\right)^2$	$\frac{2(1-\text{æ})}{(\gamma+1)}\left(\frac{\sqrt{V_0}+\sqrt{V_1}}{\sqrt{V_0}-\sqrt{V_1}}\right)$		
Монотонность на ударной волне	нет	есть	есть	условная	есть
Наличие эмпирических констант	есть, k	нет	нет	нет	нет
Условие устойчивости	$\text{æ} \le \frac{\sqrt{\gamma}}{2k}$	$\text{æ} \le 1$	$\text{æ} \le 1$	$\text{æ} \le 1$	$\text{æ} \le 1$
Поведение S на непрерывных решениях	по критерию слабой УВ	сильно растет или уменьшается	сильно растет	постоянна	