



---

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ**

---

**ВЫСОКОСКОРОСТНОЕ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТЕЛ**

**Ответственный редактор  
член-корреспондент РАН В. М. Фомин**

**НОВОСИБИРСК  
ИЗДАТЕЛЬСТВО СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
1999**

234.4

B 932

УДК 531/534.01:51-72

ББК 22.25

Ф 76

**Высокоскоростное взаимодействие тел/ В. М. Фомин, А. И. Гулидов, Г. А. Сапожников и др. — Новосибирск: Издательство СО РАН, 1999. — 600 с.**

В монографии с единых позиций вычислительной технологии последовательно от математических моделей сред, численных методов и решения конкретных практических задач изложены основные аспекты, позволяющие изучать физические процессы, возникающие при высокоскоростном взаимодействии тел.

Книга предназначена для специалистов в области механики, вычислительной математики и физики пластичности и прочности материалов.

#### **Авторы**

В. М. Фомин, А. И. Гулидов, Г. А. Сапожников, И. И. Шабалин, В. А. Бабаков,  
В. Ф. Куропатенко, А. Б. Киселев, Ю. А. Тришин, А. И. Садырин,  
С. П. Киселев, И. Ф. Головнев

#### **Рецензенты:**

академик В. Е. Панин

академик Ю. И. Шокин

докт. физ.-мат. наук, проф. А. Ф. Ревуженко

Книга издана при финансовой поддержке Сибирского отделения РАН

© Институт теоретической и  
прикладной механики СО РАН, 1999

© Оригинал-макет.  
Издательство СО РАН, 1999

ISBN 5-7692-0237-8

*Светлой памяти академика  
Николая Николаевича Яненко  
посвящается данная работа*

*Учитель не тот, кто тебе читал  
лекции и вел занятия, а тот,  
кто передал свой опыт жизни.*

академик А. П. Александров, 1982 г.



Создание перспективных образцов новой техники в настоящее время невозможно без расчета их реакций на динамические нагрузки. Эти образцы новой техники представляют собой дорогостоящие конструкции, а исследование их экспериментальными методами без глубокого теоретического анализа часто не дает необходимого результата, несмотря на большие материальные и технические затраты. Методы, основанные на инженерных расчетах, также не отвечают в полной мере запросам практики ввиду ограниченности их сферы применения.

Выход из этого положения наметился после создания ЭВМ большой мощности. При этом увеличились возможности численного моделирования сложных физических процессов с учетом многих реальных явлений. Современные методы численного моделирования позволяют сегментировать объект по геометрическим признакам, расчленять процесс на ряд отдельных задач, информативно связанных между собой в определенную цепь, и проводить достаточно полный расчет характеристик системы. Полученные таким образом локальные и интегральные характеристики поведения всей системы в целом в зависимости от воздействия импульсных нагрузок помогают исследователю-конструктору не только глубже понять физику рассматриваемых явлений, но и существенно сократить количество натуральных дорогостоящих экспериментов, чем объясняются тот большой интерес и те усилия, которые предпринимаются для решения этой проблемы как в нашей стране, так и за рубежом.

Работы по математическому моделированию задач высокоскоростного взаимодействия тел в Сибирском отделении РАН начинались под руководством и при непосредственном участии академика Н. Н. Яненко. Важность тематики в то время определялась в первую очередь запросами народного хозяйства страны. Поставленные задачи были очень сложны, и поэтому основными методами их решения могли быть только численные методы. Вычислительные трудности при решении быстро возрастают с увеличением числа независимых переменных, то есть зависят от размерности задач. Они преодолевались тремя путями: упрощением математических моделей, увеличением быстродействия и памяти ЭВМ, а также разработкой эффективных алгоритмов, позволяющих уменьшить время расчетов. Все эти вопросы неоднократно обсуждались на се-

минарах академика Н. Н. Яненко, что позволяло находить нужные пути решения рассматриваемых задач.

В нашей работе под математическим моделированием высокоскоростного взаимодействия тел мы будем понимать решение задач, которые возникают при соударении деформируемых тел с большими скоростями и при действии продуктов детонации конденсированных взрывчатых веществ (ВВ) на тела различной конфигурации. Математическое моделирование данного класса задач включает в себя ряд проблем, на которые еще не получено полностью удовлетворительных ответов. К таким проблемам в первую очередь относятся следующие:

разработка физико-математических моделей сред, описывающих поведение материалов при экстремальных скоростях нагружения и больших давлениях;

создание эффективных численных методов, позволяющих успешно решать поставленные задачи в областях с большим количеством свободных и контактных границ с сильной деформацией их в процессе счета;

воплощение этих моделей и численных методов в конструктивные алгоритмы и программы, чтобы вести успешно численные эксперименты для выявления фундаментальных закономерностей изучаемых явлений и решения практических задач.

Явления, возникающие при высокоскоростном взаимодействии тел, служат предметом теоретических и экспериментальных исследований в настоящее время и в России, и за рубежом. Тематика эта актуальна всегда, так как решенные задачи удара тел, разлета и схлопывания оболочек порождают новые проблемы при защите объектов современной техники и наоборот. Начало исследований связано с распространением сильных ударных волн в твердых телах и вызвано в первую очередь нуждами военной техники, но при этом следует заметить, что они также представляют фундаментальный интерес для многих отраслей науки и техники — в первую очередь для получения термодинамического описания состояний сред при высоких давлениях и температурах, что существенно в задачах геофизики.

В современной литературе по многим указанным выше проблемам уже имеются установившиеся взгляды и позиции по их решению. Эти методы обладают определенными преимуществами и недостатками и соответствуют развитию данной области знаний на настоящее время. В последнее время в иностранной литературе появилась серия публикаций, обобщающих известные



результаты в этой области. Однако следует заметить, что достижения ученых России в этой области знаний не только находятся на мировом уровне, но по некоторым проблемам имеют передовой характер. Поэтому данная монография позволит читателям составить представление о современном уровне познаний в этой области исследований, в первую очередь в России. Приведенный литературный обзор по главам книги опирается на работы авторов монографии и позволяет не только подвести итог исследований в области высокоскоростного взаимодействия тел, но и дать инженерам научный задел на многие годы вперед.

*Член-корреспондент РАН В. М. Фомин*

Процесс высокоскоростного взаимодействия твердых тел сопровождается разнообразными физическими явлениями, возникновение и относительная роль которых зависят от геометрии взаимодействующих тел, их прочностных характеристик, скорости удара и многих других факторов. Остановимся кратко на качественном анализе этих явлений. Процесс имеет ярко выраженный волновой характер со сложным взаимодействием ударных волн и волн разгрузки. Материал, подвергнутый импульсному нагружению, сначала сжимается в ударных волнах, затем разгружается в волнах разрежения до давления окружающей среды. Процесс ударного сжатия неизоэнтропичен, в то время как разгрузка протекает при постоянной энтропии, т.е. энтропия материальных частиц в результате прохождения ударной волны и волны разгрузки возрастает или, иными словами, материал оказывается нагретым. Ударные волны слабой интенсивности нагревают материал, но оставляют его в твердом состоянии. При высоких интенсивностях ударных волн может произойти плавление или испарение материала. Известна также область на фазовой диаграмме, когда после прохождения ударной волны материал остается в твердом состоянии, но плавится или испаряется в волнах разгрузки. При сверхвысоких давлениях необходимо учитывать излучение и ионизацию. Многие вещества при определенной интенсивности ударных волн претерпевают фазовые превращения первого рода, сопровождающиеся изменением внутренней структуры, что проявляется на макроуровне как расщепление ударных волн в многоволновую структуру и появление ударных волн разгрузки. Может также произойти механическое разрушение и фрагментация материала на отдельные осколки под действием растягивающих напряжений. Процессы разрушения твердых тел сложны и многообразны, они зависят от многих факторов, недостаточно изученных к настоящему времени даже качественно. Разрушение — это комплексная проблема, стоящая на стыке физики твердого тела, механики сплошных сред и материаловедения.

Из сказанного выше ясно, что для полного описания таких сложных процессов, как ударное и взрывное нагружение твердых тел, необходимо привлекать практически все разделы механики сплошных сред, а также некоторые разделы физики твердого тела, так как полная теория должна учитывать упру-



гое деформирование и пластическое течение, плавление и затвердевание, испарение и конденсацию, ионизацию и излучение, кинетику фазовых переходов и процессов накопления различных макродефектов, приводящих к макроразрушению, а также обратное влияние указанных явлений на структуру материала и его физические свойства. В результате задача количественного описания процессов высокоскоростного деформирования резко осложняется, поскольку необходимы, с одной стороны, знание реальных свойств конструкционных материалов в широком диапазоне изменения параметров, охватывающем различные агрегатные состояния вещества, а с другой, — модельные представления для их адекватной математической формулировки.

Столь общие математические модели в настоящее время отсутствуют, во-первых, ввиду того, что несмотря на интенсивно ведущиеся экспериментальные исследования, современных знаний о термодинамических, прочностных и реологических свойствах конструкционных материалов недостаточно для разработки математических теорий, в равной степени учитывающих все описанные выше эффекты. Основная трудность состоит в построении определяющих уравнений среды, работоспособных в широком диапазоне изменения таких параметров, как давление, температура, скорости деформаций, поврежденность среды макродефектами и др. Получение динамических определяющих уравнений непосредственно из опыта невозможно без предварительного сложного теоретического анализа, основанного на ряде априорных предположений, даже в простейших случаях одноосного напряженного состояния, например, при соударении пластин или стержней. Поэтому численное моделирование здесь неизбежно уже на первой стадии.

Во-вторых, численная реализация достаточно сложных математических моделей чрезвычайно затруднительна ввиду ограниченных возможностей современных ЭВМ. Отметим также следующий принципиально важный момент. Очевидно, что какой бы реальный процесс мы ни рассматривали, физическая и математическая модели исследуемого процесса не определяются однозначно. И какой бы сложной ни была математическая модель, она лишь приближенно описывает изучаемое явление. Численные результаты, полученные на основе той или иной модели, носят для изучаемого процесса в известной степени условный характер: они справедливы настолько, насколько правильны исходные положения. Критерием оценки в данной стадии должен выступать реальный (натурный или лабораторный) эксперимент. Сопоставление данных реального и вычислительного эксперимента позволяет отбраковать заведомо непригод-



ные модели, а среди моделей, адекватно передающих интересующее нас явление, выбрать наиболее простую. Придерживаясь этой точки зрения, авторы настоящей работы считают наиболее целесообразным разработку и углубленное изучение относительно простых математических моделей, определяя в то же время границы применимости каждой из них. Несмотря на то что при их построении принят ряд упрощающих физических предположений, математически они довольно сложны, а получить с их помощью количественную и качественную информацию можно лишь с использованием быстродействующих ЭВМ.

Предлагаемая коллективная монография содержит девять глав. В первой главе дан анализ основных физических явлений, сопровождающих высокоскоростное взаимодействие тел, и математических моделей, описывающих эти явления. В результате сравнения расчетов с данными экспериментов удастся провести классификацию основных процессов и выделить наиболее простые математические модели. Разобраны особенности численного счета на границах сред с существенно разными физико-математическими параметрами. В качестве иллюстрации приведены примеры решения практических задач.

Математические модели сред, описывающие поведение материалов при широком диапазоне давлений и температур, должны замыкаться термодинамическими уравнениями состояния. От правильного выбора этих уравнений, позволяющих получать количественные оценки свойств веществ на отдельных не пересекающихся участках фазовой диаграммы, существенно зависит и конечный результат расчетов. Именно вопросам построения широкодиапазонных уравнений состояния, где при конструировании полуэмпирических моделей используется из теоретических соображений общий вид функциональной зависимости термодинамического потенциала, а по данным экспериментов определяются численные значения коэффициентов в этих зависимостях, и посвящена вторая глава. Такой подход позволил построить уравнение состояния в компактной форме, удобной для проведения численных расчетов.

В третьей главе рассмотрены численные методы решения задач соударения в рамках механики деформируемых твердых тел. Поведение материалов описывается моделью идеальной упругопластической среды Прандтля—Рейсса, условия применимости которой к решению данного класса задач показаны в первой главе. В приложениях к третьей главе приведены алгоритмы расчета контактных поверхностей, численных моделей разрушения и организация структуры данных при программной реализации алгоритма. Даны примеры численного решения с использованием описанного подхода ряда конкретных

задач соударения в диапазоне скоростей до  $2 \div 3$  км/с, имеющие самостоятельное значение.

Четвертая глава посвящена методу решения задач проникания абсолютно твердого ударника в деформируемую преграду. Полученные новые аналитические решения задач о проникании заостренного штампа, тупого и острого цилиндров позволяют эффективно решать задачи пробития преград конечной толщины в двумерной и трехмерной постановках. Изложенные алгоритмы в виде программы для ПЭВМ позволяют рассчитывать траекторию движения ударника в преграде, скорость выхода и др., сравнение с данными экспериментов доказывает допустимость предлагаемых подходов.

В пятой главе изучены процессы динамического деформирования и разрушения тонкостенных вязкоупругих двухкомпонентных композитных оболочек слоистой структуры, заполненных жидкостью. Выявлено определяющее влияние кавитационных парожидкостных зон в воде на динамику деформирования и разрушения оболочек.

Шестая глава посвящена изучению процессов метания пластин и оболочек под действием продуктов детонации взрывчатых веществ. Из всего многообразия возможных способов метания в данном случае рассмотрены процессы динамического нагружения взрывом цилиндрических оболочек, многослойных систем в режиме неограниченной кумуляции, а также кумулятивных облицовок.

Описанию общих случаев разрушения, когда необходимо учитывать наличие в общем объеме среды микротрещин и микропор, посвящена седьмая глава. В формальной схеме представления моделей механики повреждаемой сплошной среды принципиально используются два момента. Во-первых, это выбор конкретной физико-механической величины в качестве меры повреждения и формулировка адекватных ей кинетических уравнений, и, во-вторых, формулировка согласованных с выбранной мерой повреждения уравнений, описывающих процесс деформирования поврежденной сплошной среды. Показано использование предложенного математического аппарата в решении задач соударения.

В восьмой главе рассмотрены процессы деформирования материалов, когда в них имеется большое число сферических пор. Предложена математическая модель, в которой на локальной ячейке учитываются сдвиговые напряжения и возможность образования пластических зон. Построенная математическая модель использовалась при изучении распространения упругопластиче-

ских волн в пористых материалах. Отмечена возможность образования четырех- и трехволновой структур ударной волны. Теоретически предсказана ударная волна разрежения в пористом железе без фазовых переходов.

Для целого ряда задач механики, связанных с соударением твердых тел, требуется детальный анализ явлений с учетом микропроцессов, которые формируются на субатомном уровне и, начиная с определенных нагрузок, влияют на макроуровень. К таким задачам в первую очередь относятся процессы разрушения твердых тел, механоактивация поверхностей, приводящая к сварке, упрочнению или напылению, и многие другие явления. В данном классе задач определяющие процессы имеют характерные масштабы в пространстве  $10 \div 100$  атомных слоев с временем действия от  $10^{-9} + 10^{-12}$  с и при этом характеризуются сильной неравновесностью. Все перечисленное делает невозможным использование методов механики сплошных сред для анализа этих процессов, что и обусловило необходимость проведения численного моделирования методами молекулярной динамики, чему и посвящена девятая глава.

Авторам в течение ряда лет приходилось отвечать на запросы практики, формируя уровень математического моделирования данного класса задач в отраслях, связанных с оборонными министерствами СССР. В данной монографии с единых позиций изложены основы методологии компьютерного моделирования процессов высокоскоростного взаимодействия тел и подведен итог работы целого коллектива за многие годы.

Авторы выражают искреннюю признательность за ряд критических замечаний и предложений академику В. Е. Панину, академику Ю. И. Шокину и профессору А. Ф. Ревуженко. Большую помощь в оформлении и издании рукописи оказали Е. И. Головнева и А. А. Конев, которым авторы также признательны.



# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕЛ

## 1.1. Основные физические явления, сопровождающие высокоскоростное взаимодействие тел

Данный класс задач связан с совокупностью сложных явлений, включающих в себя разнообразные физические процессы, как, например, детонация ВВ, распространение сильных ударных волн, разрушение материалов и другие, связанные в первую очередь с большим выделением энергии, высокими давлениями и температурами.

Взаимодействие продуктов детонации (ПД) с различными средами или соударение деформируемых твердых тел сопровождается распространением ударных волн и волн разгрузки, а это приводит к сильному сжатию и затем — разрежению конденсированных сред.

При сильном сжатии конденсированных сред в них развиваются большие давления, даже практически в отсутствие нагревания, так как природа сжатия их ударными волнами принципиально отличается от газообразных сред.

Для примера рассмотрим качественную картину процесса высокоскоростного взаимодействия тела с полубесконечной преградой в один из моментов времени (рис. 1.1).

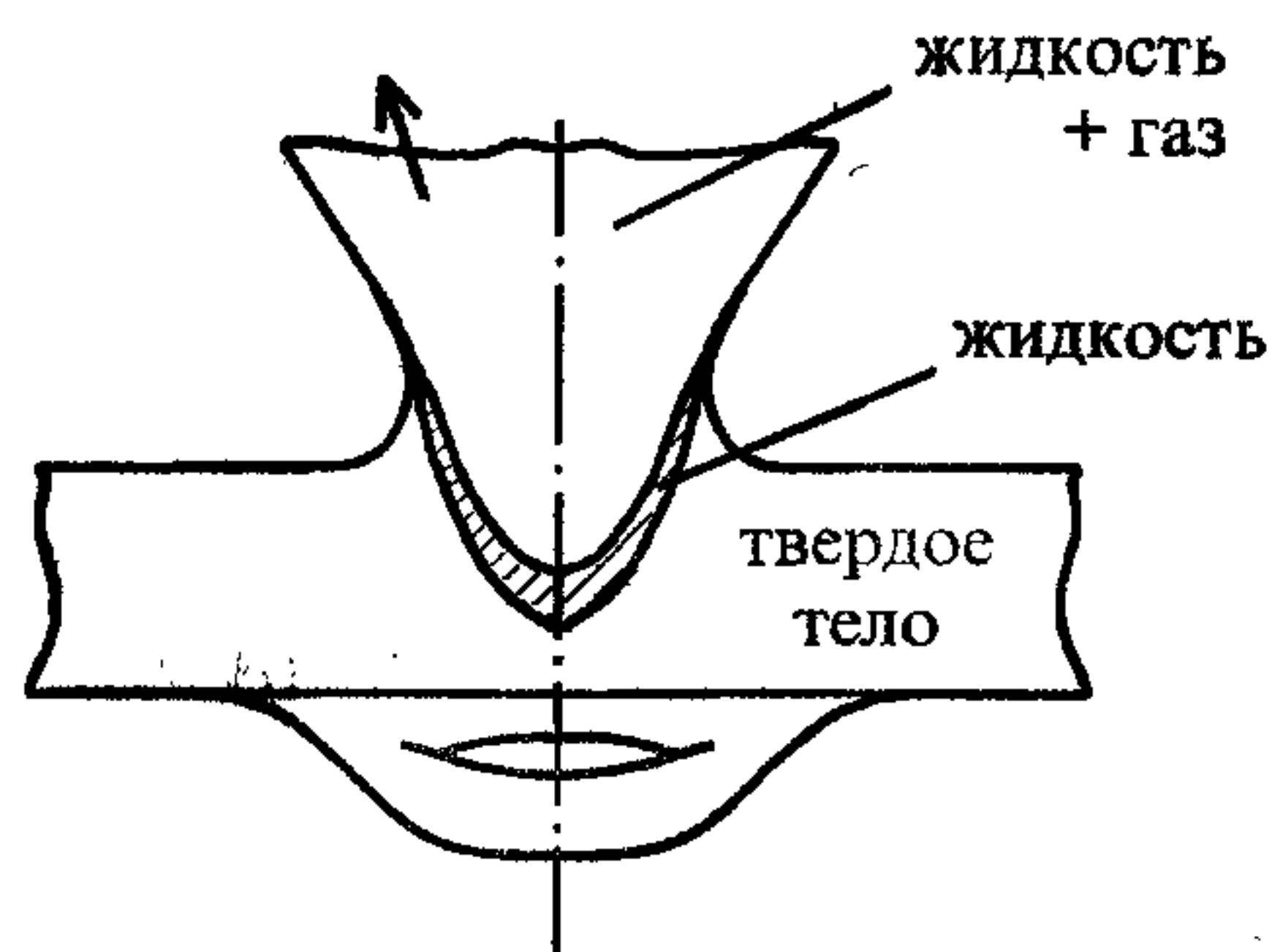


Рис. 1.1. Качественная картина процесса высокоскоростного взаимодействия тел.

Известно, что при больших скоростях соударения в преграду и ударник будут распространяться сильные ударные волны. Процесс ударного сжатия, в отличие от разгрузки, — неизоэнтропический, следовательно, энтропия возрастает, и поэтому в конечном состоянии среда оказывается нагретой. Приращение энтропии может оказаться достаточным для изменения структуры вещества, т.е. нарушения симметрии кристаллической решетки,

плавления, испарения, а также эффекта переноса энергии излучением.

Для оценки скоростей соударения, при которых в зоне течения материала проявляются эффекты излучения, следуя [1], воспользуемся определением минимальной скорости столкновения двух изолированных атомов, обеспечивающих электромагнитное излучение микроволнового, инфракрасного, видимого и ультрафиолетового спектров. Результаты этих расчетов представлены в табл. 1.1—1.4, где в числителе приводятся наименьшие величины  $v$ , а в знаменателе — наибольшие. Из анализа этих данных видимому и ультрафиолетово-

Таблица 1.1

Минимальные скорости соударения изолированных атомов (км/с), обеспечивающие излучение в микроволновом спектре  $\nu = 1 \cdot 10^9 \div 3 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$

АТОМЫ	Al	Fe	Co	W	Ag	Au	Ti	Mo	Pb	Cu
Al	0,0077	0,0066	0,0066	0,0058	0,0061	0,0058	0,0066	0,0061	0,0058	0,0065
	0,1332	0,1147	0,1137	0,1008	0,1052	0,1004	0,1177	0,1064	0,1001	0,1126
Fe	0,0066	0,0053	0,0053	0,0043	0,0046	0,0043	0,0056	0,0047	0,0043	0,0052
	0,1147	0,0925	0,0913	0,0747	0,0805	0,0741	0,0963	0,0820	0,0737	0,0899
Co	0,0066	0,0053	0,0052	0,0042	0,0046	0,0042	0,0055	0,0047	0,0042	0,0051
	0,1137	0,0913	0,0901	0,0732	0,0791	0,0726	0,0951	0,0806	0,0722	0,0887
W	0,0058	0,0043	0,0042	0,0029	0,0034	0,0029	0,0046	0,0035	0,0029	0,0041
	0,1008	0,0747	0,0732	0,0510	0,0591	0,0502	0,0793	0,0612	0,0435	0,0714
Ag	0,0061	0,0046	0,0046	0,0034	0,0038	0,0034	0,0049	0,0039	0,0033	0,0045
	0,1052	0,0805	0,0791	0,0591	0,0663	0,0584	0,0848	0,0681	0,0579	0,0774
Au	0,0058	0,0043	0,0042	0,0029	0,0034	0,0028	0,0045	0,0035	0,0028	0,0041
	0,1004	0,0741	0,0726	0,0502	0,0584	0,0493	0,0788	0,0605	0,0487	0,0708
Ti	0,0068	0,0056	0,0055	0,0046	0,0049	0,0045	0,0058	0,0050	0,0045	0,0054
	0,1177	0,0963	0,0951	0,0793	0,0848	0,0788	0,0999	0,0862	0,0784	0,0938
Mo	0,0061	0,0047	0,0047	0,0035	0,0039	0,0035	0,0050	0,0040	0,0035	0,0046
	0,1064	0,0820	0,0806	0,0612	0,0681	0,0605	0,0862	0,0699	0,0600	0,0790
Pb	0,0058	0,0043	0,0042	0,0029	0,0033	0,0028	0,0045	0,0035	0,0028	0,0041
	0,1001	0,0737	0,0722	0,0495	0,0579	0,0487	0,0784	0,0600	0,0480	0,0704
Cu	0,0065	0,0052	0,0051	0,0041	0,0045	0,0041	0,0054	0,0046	0,0041	0,0050
	0,1126	0,0899	0,0887	0,0714	0,0774	0,0708	0,0938	0,0790	0,0704	0,0872



Минимальные скорости соударения изолированных атомов (км/с),  
обеспечивающие излучение в инфракрасном спектре  $\nu = 1 \cdot 10^{13} \div 3 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$

АТОМЫ	Al	Fe	Co	W	Ag	Au	Ti	Mo	Pb	Cu
Al	0,7689	0,6619	0,6565	0,5823	0,6073	0,5798	0,6797	0,6141	0,5779	0,6499
	4,2117	3,6256	3,5955	3,1891	3,3266	3,1756	3,7226	3,3634	3,1655	3,5595
Fe	0,6619	0,5339	0,5271	0,4312	0,4645	0,4279	0,5557	0,4733	0,4253	0,5169
	3,6256	2,9244	2,8870	2,3617	2,5442	2,3434	3,0438	2,5922	2,3297	2,8920
Co	0,6556	0,5271	0,5202	0,4227	0,4566	0,4193	0,5492	0,4656	0,4167	0,5119
	3,5955	2,8870	2,8491	2,3152	2,5011	2,2966	3,0079	2,5500	2,2825	2,8035
W	0,5823	0,4312	0,4227	0,2946	0,3415	0,2897	0,4579	0,3533	0,2859	0,4124
	3,1891	2,3617	2,3152	1,6133	1,8704	1,5865	2,5080	1,9352	1,5661	2,2589
Ag	0,6073	0,4645	0,4566	0,3415	0,3827	0,3373	0,4894	0,3933	0,3341	0,4471
	3,3266	2,5442	2,5011	1,8704	2,0962	1,8473	2,6806	2,1542	1,8298	2,4491
Au	0,5798	0,4279	0,4193	0,2897	0,3373	0,2847	0,4548	0,3492	0,2809	0,4089
	3,1756	2,3434	2,2966	1,5865	1,8473	1,5592	2,4909	1,9129	1,5385	2,2398
Ti	0,6797	0,5557	0,5492	0,4579	0,4894	0,4548	0,5767	0,4977	0,4524	0,5413
	3,7226	3,0438	3,0079	2,5080	2,6806	2,4909	3,1588	2,7266	2,4779	2,9648
Mo	0,6141	0,4733	0,4656	0,3533	0,3933	0,3492	0,4977	0,4036	0,3462	0,4562
	3,3634	2,5922	2,5500	2,5500	1,9352	2,1542	1,9129	2,7262	1,8960	2,4989
Pb	0,6779	0,4253	0,4167	0,2859	0,3341	0,2809	0,4524	0,3462	0,2770	0,4063
	3,1655	2,3297	2,2825	1,5661	1,8298	1,5385	2,4779	1,8960	1,5174	2,2254
Cu	0,6499	0,5189	0,5119	0,4124	0,4471	0,4089	0,5413	0,4562	0,4063	0,5034
	3,5595	2,8420	2,8035	2,2589	2,4491	2,2398	2,9648	2,4989	2,2254	2,7572

му спектрам излучения соответствует условие  $M_0 \sim 1,5$ , где  $M_0 = U_0/c_0$ ,  $U_0$  — скорость соударения,  $c_0$  — скорость звука в материале. В табл. 1.5 приведены минимальные скорости столкновения изолированных атомов, при которых выделяется энергия, равная энергии ионизации. Данные этой таблицы показывают, что скорости соударения тел, при которых возможны ионизация и электронные переходы, удовлетворяют условию  $M_0 > 1,5$ .

Качественному анализу физических процессов, которые происходят при соударении твердых тел с большими скоростями, уделено большое внимание в

Минимальные скорости соударения изолированных атомов (км/с),  
обеспечивающие излучение в видимом спектре  $\nu = 4 \cdot 10^{14} + 1 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$

АТОМЫ	Al	Fe	Co	W	Ag	Au	Ti	Mo	Pb	Cu
Al	4,8632	4,1865	4,1518	3,6825	3,8412	3,6669	4,2985	3,8837	3,6552	4,1102
	7,6894	6,6195	6,5645	5,8225	6,0734	5,7979	6,7966	0,1407	5,7794	6,4987
Fe	4,1865	3,3768	3,3336	2,7271	2,9378	2,7060	3,5147	2,9933	2,6901	3,2817
	6,6195	5,3393	5,2710	4,3118	4,6451	4,2785	5,5573	4,7328	4,2534	5,1888
Co	4,1518	3,3336	3,2899	2,6734	2,8881	2,6519	3,4732	2,9444	2,6357	3,2372
	6,5645	5,2710	5,2017	4,2270	4,5664	4,1930	5,4917	4,6556	4,1673	5,1185
W	3,6825	2,7271	2,6734	1,8629	2,1597	1,8319	2,8960	2,2346	1,8084	2,6083
	5,8225	4,3118	4,2270	2,9456	3,4149	2,8965	4,5790	3,5332	2,8593	4,1241
Ag	3,8412	2,9378	2,8881	2,1597	2,4204	2,1331	3,0953	2,4874	2,1129	2,8279
	6,0734	4,6451	4,5664	3,4149	3,8270	3,3727	4,8941	3,9330	3,3408	4,4714
Au	3,6669	2,7060	2,6519	1,8319	2,1331	1,8004	2,8762	2,2088	1,7765	2,5863
	5,7979	4,2785	4,1930	2,8965	3,3727	2,8467	4,5477	3,4924	2,8088	4,0893
Ti	4,2985	3,5147	3,4732	2,8960	3,0953	2,8762	3,6474	3,1480	2,8613	3,4234
	6,7966	5,5573	5,4917	4,5790	4,8941	4,5477	5,7671	4,9774	4,5241	5,4129
Mo	3,8837	2,9933	2,9444	2,2346	2,4874	2,2088	3,1480	2,5527	2,1893	2,8855
	6,1407	4,7328	4,6556	3,5332	3,9330	3,4924	4,9774	4,0361	3,4616	4,5624
Pb	3,6552	2,6901	2,6357	1,8084	2,1129	1,7765	2,8613	2,1893	1,7522	2,5696
	5,7794	4,2534	4,1673	2,8593	3,3408	2,8008	4,5241	3,4616	2,7704	4,0630
Cu	4,1102	3,2817	3,2372	2,6083	2,8279	2,5863	3,4234	2,8855	5,5696	3,1837
	6,4987	5,1888	5,1185	4,1241	4,4714	4,0899	5,4129	4,5624	4,0630	5,0339

работе К. П. Станюковича [2]. Им было введено понятие минимальных величин скоростей удара, при которых происходит плавление, испарение или простое “взрывное” разрушение среды, т.е.:

$$U_0^p \geq \sqrt{2E_k^p},$$

где  $E_k^p$  — энергия, идущая на дробление одного грамма среды, когда еще не происходит превращения твердой фазы в жидкую или газообразную;



Таблица 1.4

Минимальные скорости соударения изолированных атомов (км/с),  
обеспечивающие излучение в ультрафиолетовом спектре  $\nu = 1 \cdot 10^{15} + 3 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$

АТОМЫ	Al	Fe	Co	W	Ag	Au	Ti	Mo	Pb	Cu
Al	7,6894	6,6195	6,5645	5,8225	6,0734	5,7979	6,7966	6,1407	5,7794	6,4987
	13,319	11,465	11,370	10,085	10,520	10,042	11,772	10,636	10,010	11,256
Fe	6,6195	5,3393	5,2710	4,3118	4,6451	4,2785	5,5573	4,7328	4,2534	5,1888
	11,465	9,248	9,130	7,4683	8,0456	7,4106	9,6255	8,1974	7,3671	8,9873
Co	6,5645	5,2710	5,2017	4,2270	4,5664	4,1930	5,4917	4,6556	4,1673	5,1185
	11,370	9,1296	9,0097	7,3113	7,9093	7,2624	9,0637	8,0637	7,2180	8,8655
W	5,8225	4,3118	4,2270	2,9456	3,4149	2,8965	4,5790	3,5332	2,8593	4,1241
	10,085	7,4683	7,3213	5,1018	5,9147	5,0170	7,9311	6,1196	4,9525	7,1432
Ag	6,0734	4,6451	4,5664	3,4149	3,8270	3,3727	4,8941	3,9330	3,3408	4,4714
	10,042	7,4106	7,2624	5,0170	5,8416	4,9306	7,8768	6,0490	4,8650	7,0828
Au	5,7979	4,2785	4,1930	2,8965	3,3727	2,8467	4,5477	3,4924	2,8088	4,0893
	10,042	7,4106	7,2624	5,0170	5,8416	4,9306	7,8768	6,0490	4,8650	7,0828
Ti	6,7966	5,5573	5,4917	4,5790	4,8941	4,5477	5,7671	4,9774	4,5241	5,4129
	11,772	9,6255	9,5119	7,9311	8,4769	7,8768	9,9888	8,6211	7,8359	9,3754
Mo	6,1407	4,7328	4,6556	3,5332	3,9330	3,4924	4,9774	4,0361	4,4616	4,5624
	10,636	8,1974	8,0637	6,1196	6,8121	6,0490	8,6211	6,9907	5,9957	7,9022
Pb	5,7794	4,2534	4,1673	2,8593	3,3408	2,8088	4,5241	3,4641	2,7704	4,0630
	10,010	7,3671	7,2180	4,9525	5,7864	4,8650	7,8359	5,9957	4,7985	7,0373
Cu	6,4987	5,1888	5,1185	4,1241	4,4714	4,0893	5,4129	4,5624	4,0630	5,0339
	11,256	8,9873	8,8655	7,1432	7,7446	7,0828	9,3754	7,9022	7,0373	8,7190

$$U_0^* \geq \sqrt{2E_k^*},$$

где  $E_k^*$  — энергия, необходимая для превращения одного грамма среды в жидкость, включая скрытую теплоту фазового перехода;

$$U_0^r \geq \sqrt{2E_k^r},$$

где  $E_k^r$  — энергия, потребляемая на испарение одного грамма среды с учетом скрытой теплоты испарения.

Таблица 1.5

Минимальная скорость соударения изолированных атомов, при которой выделяется энергия, равная энергии ионизации

Характеристика	Элемент							
	Al	Fe	Co	Ag	Au	Ti	Pb	Cu
$E$ иониз., эВ	5,98	7,9	7,86	7,57	9,22	6,83	7,42	7,72
$V_{\min}$ , км/с	9,25	7,38	7,17	5,18	4,25	7,41	3,71	6,88
$M_0 = U_0/a_0$	1,81	1,45	1,52	1,9	2,1	1,8	2,95	1,93

Для вычисления  $E_k^p$ ,  $E_k^j$  и  $E_k^r$  можно воспользоваться известным аналитическим решением задачи о распаде разрыва, которая возникает при соударении двух твердых тел. Результаты расчетов приведены в табл. 1.6.

Таким образом, при соударении твердых тел со скоростями  $M_0 \sim 0,75$  наблюдаются явления, близкие к явлениям взрыва. При этом кристаллическая структура соударяющихся тел в зоне взаимодействия разрушается и осуществляется либо переход вещества в другое фазовое состояние (плавление, испарение и др.), либо механическое дробление вещества с последующим разлетом.

Величину скорости, при которой соударяющиеся тела в зоне удара нагреваются до температуры плавления, будем называть “пороговой”. Знание этой величины существенно, так как она разграничивает два принципиально различных механических явления, что в дальнейшем позволит упростить математическое моделирование этих процессов.

В настоящее время совершенно произвольно употребляются термины “высокоскоростное” взаимодействие и “высокие” или “сверхвысокие” давления и температуры. Чтобы ввести классификацию по скоростям соударения и

Таблица 1.6

Пороговые энергетические параметры, эрг/г

Среда	$E_k^p$	$E_k^j$	$E_k^r$
Песок	$5 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^9$	$1 \cdot 10^{11}$
Глина	$1 \cdot 10^8$	$5 \cdot 10^9$	$1 \cdot 10^{11}$
Гранит	$1 \cdot 10^9$	$7 \cdot 10^9$	$2 \cdot 10^{11}$
Алюминий	$1 \cdot 10^9$	$4 \cdot 10^9$	$1 \cdot 10^{11}$
Железо	$1 \cdot 10^9$	$3 \cdot 10^9$	$7 \cdot 10^{10}$



связать ее с изменением температуры и давления, воспользуемся известной формулой Бриджмена [3]

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -A\tilde{P} + B\tilde{P}^2,$$

где  $\tilde{P} = \frac{P}{P_0}$ ,  $V_0, P_0$  — начальные объем и давление;  $\Delta V$  — изменение объема, вызванное гидростатическим давлением  $P$ ;  $A$  и  $B$  — коэффициенты, зависящие от температуры, и в общем случае  $A/B \sim 10^{-5} + 10^{-6}$ .

Учитывая данные таблиц 1.1—1.5 и формулу Бриджмена, по характеру явлений, сопровождающих взаимодействие тел, скорости соударения разделим качественно на три интервала:

1) “низкие” скорости  $M_0 \ll 0,1$ , при которых  $A\tilde{P} \gg B\tilde{P}^2$  и деформация среды происходит в пределах упругости, т.е.  $\sigma_{ij} \sim k\varepsilon_{ij}$ . Здесь  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжения, а  $\varepsilon_{ij}$  — тензор деформации,  $k$  — размерные коэффициенты;

2) “средние” скорости,  $A \sim B\tilde{P}^2$  и  $M_0 \leq 0,75$ , а  $\sigma_{ij} = \varphi(\varepsilon_{ij})$ , т.е. связь между тензором напряжения и деформации нелинейна;

3) “высокие” скорости, где  $M_0 > 0,75$ ,  $P = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_i$ ,  $P \gg S_{ij}$ , где  $S_{ij}$  — сдвиговые компоненты тензора напряжений и  $A\tilde{P} \ll B\tilde{P}^2$ . Здесь существенно отклонение от линейного закона сжимаемости и начинается область фазовых переходов с частичной или полной потерей атомами своих индивидуальных свойств.

В дальнейшем для задач высокоскоростного взаимодействия тел нас будут интересовать в основном второй и третий диапазоны скоростей. При этом следует заметить, что предложенная классификация носит качественный характер, и каждый из указанных интервалов может быть еще разбит на подынтервалы, которые характеризуются своими основными физическими явлениями [4—7].

Так, например, по данным экспериментов по динамическому деформированию конденсированных сред при  $M_0 \leq 0,75$  необходимо учитывать:

повышение предела упругости и прочности материала с увеличением скорости нагружения;

запаздывание текучести материала, т.е. кратковременное приложение напряжения, превышающего предел текучести, не вызывает пластического течения материала;



движение фронта догрузки всегда начинается со скоростью упругих волн, даже если материал находится в пластическом состоянии; наличие “плато” при ударном нагружении стержней; многоволновые конфигурации, возникающие при прохождении ударных импульсов по конденсированной среде, и другие.

Эти свойства непосредственно связаны с атомной и кристаллической структурами, т.е. существенно зависят от микроструктуры материалов.

Как известно, в диапазоне “низких” и “средних” скоростей нагружения влияние скорости деформации на физические характеристики материалов значительно сильнее, чем при относительно больших скоростях нагружения. С повышением скорости нагружения увеличивается влияние инерционных сил, и начиная с некоторых критических значений  $U_0$  становятся преобладающими. Это позволило ввести понятие гидродинамической концепции высокоскоростного взаимодействия тел [8]. Поэтому, когда построено решение конкретной физической задачи на основании выбранной математической модели, встает естественный вопрос о границах применимости найденного решения и их зависимости от физико-механических параметров. В общем виде однозначно ответить на вопрос о границах применимости той или иной модели достаточно трудно, но такая попытка для моделей высокоскоростного проникания тел была сделана в работе [9]. В рамках модели идеальной жидкости М.А. Лаврентьевым [8] в случае стационарности процесса проникания кумулятивной струи в преграду была получена простейшая формула

$$L_k = \lambda_0 l,$$

где  $L_k$  — глубина каверны,  $l$  — длина струи и  $\lambda_0 = \sqrt{\rho_{02}/\rho_{01}}$ ,  $\rho_{01}$  и  $\rho_{02}$  — соответственно плотности преграды и струи.

Ясно, что полученное решение справедливо для каждой пары соударяющихся тел в таком диапазоне скоростей удара, в котором прочность материалов и сжимаемость не оказывают влияние на результат соударения. Чтобы получить верхнюю или нижнюю границу скорости удара, когда неприменима гидродинамическая теория, необходимо уже иметь решение данной задачи с учетом процессов прочности. Для качественного анализа ограничимся только учетом прочности в материале мишени, а поведение материала стержня считаем по идеальной жидкости. Следуя [9, 10], давление в мишени представим в форме

$$P_k = H_1 + \rho_{01} U^2 / 2,$$

где  $H_1$  — динамическая твердость мишени,  $U$  — скорость движения точки контакта в лабораторной системе координат при симметричном взаимодействии струй. Приравнивая давление в точке разветвления потоков по обе стороны контакта тел и используя уравнение Бернулли, имеем

$$H_1 + \rho_{01} \frac{U^2}{2} = \rho_{02} \frac{(U_0 - U)^2}{2}, \quad (1.1.1)$$

$$U = \alpha \lambda (U_0 - U), \quad \Delta L = \alpha \lambda \Delta l,$$

где  $\alpha = 1 / \sqrt{1 + 2H_1 / (\rho_{01} U^2)}$ ,  $\Delta L$  — прирост глубины каверны за время  $\Delta t = \frac{\Delta l}{U_0 - U}$  и  $\Delta l$  — расходование элемента струи за фиксированный промежуток времени.

В случае, если  $H_1 \rightarrow 0$  или  $U \rightarrow \infty$ , то  $\alpha \rightarrow 1$  и (1.1.1) переходят в соотношения для идеальной жидкости. Используя данные экспериментов [11] и задавая допустимую погрешность меньше  $\pm 10\%$  от среднего экспериментального, имеем  $\alpha > 0,9$  и следовательно

$$U > U_H \approx 3 \sqrt{\frac{H_1}{\rho_{01}}}.$$

Таким образом, зависимость от прочностных характеристик материала преграды и ударника можно не учитывать при скоростях соударения

$$U_0 > \lambda \left( \frac{\alpha + 1}{\alpha} \right) U_H.$$

Так, например, для мягкой стали  $H_1 = 200$  кг/мм<sup>2</sup>,  $\rho_{01} = 7,85$  г/см<sup>3</sup>,  $U_H \sim 1,5$  км/с,  $U_0 = v_0 \sim 3,1$  км/с; дюралюминия  $H_1 = 140$  кг/мм<sup>2</sup>,  $\rho_{01} = 2,8$  г/см<sup>3</sup>,  $U_H \sim 2,1$  км/с,  $U_0 = v_0 \sim 4,2$  км/с.

Следует заметить, что более подробное исследование о границах применимости гидродинамической модели к теории кумулятивных струй можно найти в работах [11—14].

Таким образом, уже простейшее рассмотрение поведения сред при больших импульсных нагрузках показывает наличие большого разнообразия физических явлений в процессах деформирования. Это существенно усложняет возможность математического моделирования задач высокоскоростного взаи-



модействия тел и в настоящее время представляет не решенную в полном объеме проблему. Поэтому при решении практических задач необходимо четко представлять, какие явления происходят при данных параметрах нагружения, и при математическом моделировании требовать от модели, чтобы она адекватно описывала эти явления. Такой подход, по нашему мнению, позволит иметь математическую модель наиболее простую, но правильно учитывающую основные запросы практических задач.

## **1.2. Математические модели, описывающие распространение и затухание сильных ударных волн в конденсированных средах**

Попытки математически моделировать закономерности деформирования материалов при высоких скоростях нагружения относятся еще к началу XX века. Как следует даже из результатов п. 1.1, при динамическом нагружении значения таких характеристик, как пределы текучести и прочности, остаточные деформации образцов и другие, существенно отличаются от их значений, полученных при статических условиях, что должно учитываться при построении математических моделей. Поэтому, в зависимости от целей и задач, которые выдвигает практика, необходимо иметь и соответствующий уровень математических моделей, в первую очередь зависящий от вида уравнений состояния, замыкающих основные законы сохранения. Следует заметить, что записать уравнения состояния в общем случае не представляет большого труда, а вот найти неизвестные функции и константы, входящие в эти уравнения из экспериментальных данных, часто бывает невозможно без теоретического решения конкретных краевых задач и сравнения их результатов с данными экспериментов как по интегральным, так и по локальным параметрам.

Проведем верификацию наиболее известных и используемых математических моделей на решении простейших задач одноосного нагруженно-деформированного состояния.

### **1.2.1. Основные уравнения и соотношения**

Среду, по которой распространяются волны сжатия и разрежения, принимаем изотропной. Состояние этой среды характеризуем распределением тензо-

ра деформаций  $\epsilon_i$  и напряжения  $\sigma_i$ , вектором скорости  $\bar{U}$  и внутренней энергией  $E$ . Здесь при  $i = 1, 2, 3$  тензоры напряжения и деформаций записываются в главных осях. Тензор приращения деформаций представим в виде суммы  $\dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_i^l + \dot{\epsilon}_i^p$ , где  $\dot{\epsilon}_i^l$  — упругие, а  $\dot{\epsilon}_i^p$  — пластические тензоры деформаций. Упругое деформирование характеризуется зависимостью  $\dot{\sigma}_i = \lambda \dot{\delta} + 2\mu \dot{\epsilon}_i^l$  ( $i = 1, 2,$

3), где  $\dot{\delta} = \sum_{i=1}^3 \dot{\epsilon}_i$ ,  $\lambda$  и  $\mu$  — параметры Ламе, и пластические составляющие

удовлетворяют условию  $\sum_{i=1}^3 \dot{\epsilon}_i^p = 0$ . Здесь точка означает производную по времени вдоль траектории элемента среды. Для наглядности будем рассматривать одномерное приближение.

Соотношения для приращения гидростатического давления, максимального значения касательных напряжений и главного значения тензора пластической деформации имеют вид

$$\dot{p} = \frac{\dot{\sigma}_1 + 2\dot{\sigma}_2}{3}; \quad \dot{\tau} = \frac{\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2}{2}; \quad \dot{\epsilon}^p = \frac{\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_2^p}{2} = \frac{3}{4} \dot{\epsilon}_1^p.$$

Выделяя одноосное напряженное состояние, где

$$\dot{\sigma}_2 = \dot{\sigma}_3 = 0; \quad \dot{\sigma}_1 \neq 0; \quad \dot{\epsilon}_1 \neq 0; \quad \dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3 \neq 0,$$

находим

$$\dot{\epsilon}_2^l = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \dot{\epsilon}_1^l;$$

$$\dot{\sigma}_1 = E_0 (\dot{\epsilon}_1 - 4) / 3\dot{\epsilon}^p; \quad E_0 = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}; \quad (1.2.1)$$

$$\dot{\tau} = \frac{\dot{\sigma}_1}{2}; \quad \dot{p} = \frac{\dot{\sigma}_1}{3}.$$

Аналогично, для одноосного деформированного состояния

$$\dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3 = 0; \quad \dot{\epsilon}_1 \neq 0; \quad \dot{\sigma}_2 = \dot{\sigma}_3 = 0; \quad \dot{\sigma}_1 \neq 0$$

получим

$$\dot{\sigma}_1 = (\lambda + 2\mu)\dot{\epsilon}_1 - 8/3\mu\dot{\epsilon}^p; \quad \dot{\sigma}_2 = \lambda\dot{\epsilon}_1 + 4/3\mu\dot{\epsilon}^p;$$

$$\tau = \mu(\dot{\epsilon}_1 - 2\dot{\epsilon}^p); \dot{P} = k\dot{\epsilon}_1; k = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (1.2.2)$$

В процессе движения сплошной среды должны выполняться законы сохранения массы, количества движения и энергии, которые в координатах Лагранжа ( $h$ ) имеют вид

$$\frac{\partial \epsilon_1}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial h}; \rho_0 \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma_1}{\partial h}; \rho_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \sigma_1 \frac{\partial \epsilon_1}{\partial t}, \quad (1.2.3)$$

где  $t$  — время,  $\rho_0$  — начальная плотность среды,  $\epsilon_1 = 1 - \rho_0/\rho$ . Деформация и напряжения определены положительными для сжатого состояния.

Система уравнений (1.2.3) с выбранным одноосным состоянием (1.2.1) или (1.2.2) в зависимости от рассматриваемой задачи будет незамкнута. Для замыкания необходимо использовать калорическое уравнение состояния и соответствующее уравнение процесса, которые и будут полностью характеризовать математическую модель среды.

Так, в дальнейшем будем использовать для одноосного деформированного состояния:

1) гидродинамическую модель, где  $\tau = 0$  и  $\dot{\epsilon}^p = \dot{\epsilon}_1/2$ ;

2) упругую модель —  $\dot{\epsilon}^p \equiv 0$ ;

3) упругопластическую модель —

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{1}{2} \left( \dot{\epsilon}_1 - \frac{\dot{Y}_0}{\mu} \right) \text{ для } \tau \geq Y_0,$$

$$\dot{\epsilon}^p = 0 \text{ для } \tau < Y_0,$$

где  $Y_0$  — предел текучести, который в общем случае может быть функцией от  $\rho$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $\epsilon^p$  и других параметров среды. Так, для  $Y_0 = \text{const}$  имеем модель идеальной пластичности

$$\tau = \begin{cases} \mu(\epsilon_1 - 2\epsilon^p), & \tau < Y_0, \\ Y_0, & \tau \geq Y_0; \end{cases}$$

4) дислокационную модель —

$\dot{\epsilon}^p = b_0 \cdot N_g \cdot v_g$ , где  $b_0$  — вектор Бюргерса,  $N_g = \varphi(\epsilon^p)$  — плотность подвижных дислокаций и  $v_g$  — скорость перемещения дислокаций, конкретный вид которых будет дан ниже.



### 1.2.2. Затухание фронта ударной волны при соударении двух пластин конечной ширины

Задача о соударении пластин является той классической модельной задачей, решение которой позволяет получить информацию о динамической сжимаемости материала и взаимодействии ударных волн с волнами разгрузки. С другой стороны, процессы, возникающие при соударении двух пластин, легко реализуемы в экспериментах.

Пластина толщины  $l_0$  со скоростью  $U_0$  ударяется о поверхность другой пластины толщиной  $L \gg l_0$ . Удар нормальный. Длины пластин выбираем много больше толщин, что позволяет изучать физический процесс в одномерном приближении. В общем случае материалы пластин различны.

Таким образом, данная задача математически формулируется следующим образом:

Найти функции  $U, \sigma_1, \varepsilon_1, \dot{\varepsilon}^p, \sigma_2, \tau, P, E, T \in C(D_2)$ , удовлетворяющие в  $D_2 = \{-l_0 \leq h \leq L, 0 \leq t < \infty\}$  системе дифференциальных уравнений (1.2.3), (1.2.1) или (1.2.2) и одной из зависимостей для  $\dot{\varepsilon}^p(\tau, P, E)$ , приведенных в п. 1.2.1 и с начальными

$$U = \begin{cases} U_0 > 0, & -l_0 \leq h < 0, \\ 0, & 0 \leq h \leq L \end{cases}$$

и граничными  $\sigma_1(t, -l_0) = 0, \sigma_1(t, L) = 0, t \geq 0$  условиями.

Аналитическое рассмотрение процесса в общем случае затруднительно. Поэтому решать данную задачу будем численно с использованием разностной схемы сквозного счета типа М. Уилкинса. Процесс распространения и взаимодействия ударных волн разгрузки, как показали результаты расчетов, не только количественно, но и качественно зависит от выбранной математической модели. Это связано в первую очередь со сложной структурой волн.

Следует заметить, что данная задача решалась многими исследователями, и в настоящее время можно считать практически все физические особенности распространения волн уже выясненными. Поэтому дадим ссылки только на основные работы обзорного характера [6, 7, 15—25].

Проведенные расчеты данной задачи в упругопластическом приближении по вышеописанному алгоритму при  $\nu = \text{const}$  (коэффициент Пуассона),  $k =$

$=P(\rho, T)/\epsilon_1$  и а)  $Y_0 = Y_0(P)$ , б)  $Y_0 = Y_0(\epsilon^p)$  для алюминия и железа качественно полностью совпадают по волновым картинам явлений с результатами работ [15—17]. Скорости соударения варьировались в диапазоне от 0,1 до 0,5 км/с, и поэтому их здесь детально не будем рассматривать.

Остановимся более подробно на результатах, которые получаются при описании среды по дислокационной модели. Конкретные зависимости  $\phi(\epsilon^p)$  и  $\phi(\tau, P, E)$  были взяты в виде

$$\frac{dN_g}{dt} = M \cdot |\dot{\epsilon}^p|, \quad N_g|_{t=0} = N_0,$$

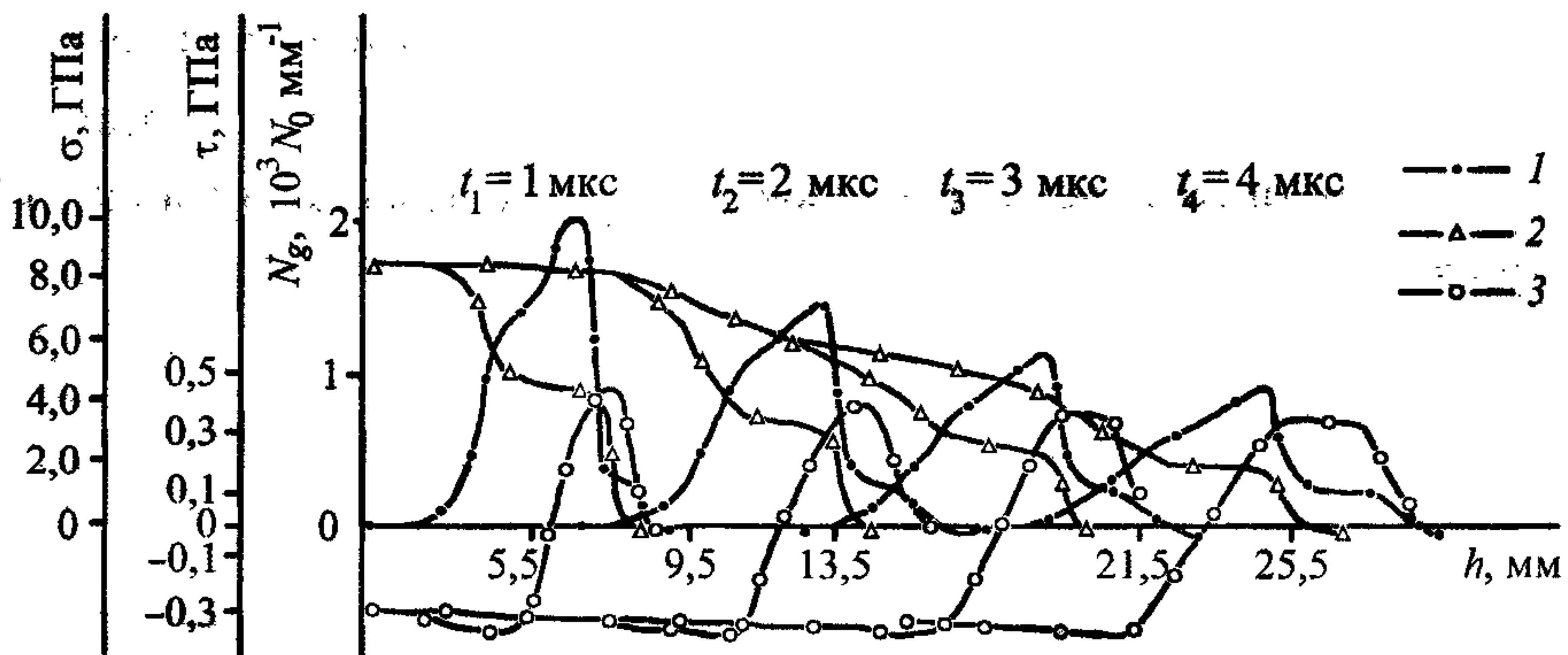
$$U_g = \begin{cases} C_1 \cdot \exp\left(\frac{\tau_1}{|\tau| - \tau^*}\right), & |\tau| > \tau^*, \\ 0, & |\tau| \leq \tau^*, \end{cases} \quad (1.2.4)$$

где  $M$  — коэффициент размножения дислокаций (постоянная),  $C_1$  — сдвиговая скорость звука,  $\tau_1$  — коэффициент скольжения,  $\tau^* = \tau_2$  — величина порогового значения сдвигового напряжения, ниже которого все дислокации в среде неподвижны. Обобщение формул (1.2.4) по сравнению с известными [26, 27] состоит в том, что они будут справедливы для нагрузки и для разгрузки. При этом следует заметить, что плотность дислокаций будет увеличиваться не только на волне сжатия, но и на волне разрежения.

На рис. 1.2 приведены профили напряжения  $\sigma_1 = \sigma_1(h)$  в различные моменты времени (кривая 1) при  $U_0 = 1,2$  км/с,  $l_0 = 1,5$  мм и параметрах материала:  $b_0 = 2,86 \cdot 10^{-8}$  см,  $N_0 = 3,75 \cdot 10^6$  см<sup>-2</sup>,  $M = 7,8 \cdot 10^{10}$  см<sup>-2</sup>,  $C_1 = 3,2$  км/с,  $\tau^* = 2,5$  кбар,  $\tau_1 = 5$  кбар,  $\rho_0 = 2,787$  г/см<sup>3</sup>. В начальный момент времени от границы контакта  $h = 0$  в разные стороны распространяются ударные волны двухволновой структуры, передние фронты которых перемещаются со скоростью упругих волн, а за ними с меньшей скоростью распространяются пластические волны сжатия, переводящие параметры среды в конечное состояние, соответствующее скорости соударения. Амплитуда и скорость пластической волны существенно зависят от скорости соударения. Вследствие эффекта задержки текучести переход в пластическое состояние среды осложняется тем, что напряжение за упругим предвестником превышает  $Y_0$  и изменяется во времени.

От свободной поверхности ударника ( $h = -l_0$ ) волны сжатия отражаются соответственно упругой и пластической волнами разгрузки. Так как упругая волна разгрузки распространяется по предварительно нагруженному материа-





**Рис. 1.2.** Распределение напряжения,  $\sigma_1(n)$ ,  $\tau(n)$  и плотности подвижных дислокаций на три различных момента времени.

Поясн. см. в тексте.

лу, то через некоторый промежуток времени она догонит фронт пластической волны сжатия. В результате их взаимодействия амплитуда пластической волны сжатия уменьшается, а упругая волна разгрузки отразится от пластического фронта в виде упругой волны сжатия, которая будет перемещаться от точки взаимодействия в сторону пластической волны разгрузки. В результате этого распада разрыва возникает отраженная волна разгрузки, которая вновь догоняет пластическую волну нагрузки и уменьшает ее интенсивность. В последующие моменты весь процесс повторяется аналогично вышеописанному.

В дислокационной модели пластического деформирования, вследствие задержки текучести, интенсивность волны упругой разгрузки будет больше, чем интенсивность упругой волны разгрузки, вычисленной в упругопластическом приближении. Это приводит к более быстрому затуханию фронта пластической волны разгрузки.

Важное значение имеют простейшие экспериментальные исследования, позволяющие не только понять качественную картину явления, но и, в результате сравнения с данными численных экспериментов, выяснить влияние определяющих параметров математических моделей. Для этой цели были проведены серии расчетов поставленной задачи по четырем математическим моделям. Результаты по затуханию максимума скорости свободной поверхности преграды в зависимости от ее толщины приведены на рис. 1.3—1.5. Во всех рассмотренных математических моделях пренебрегалось вкладом электронных составляющих в уравнениях состояния. Материалом преграды и ударника выбирался



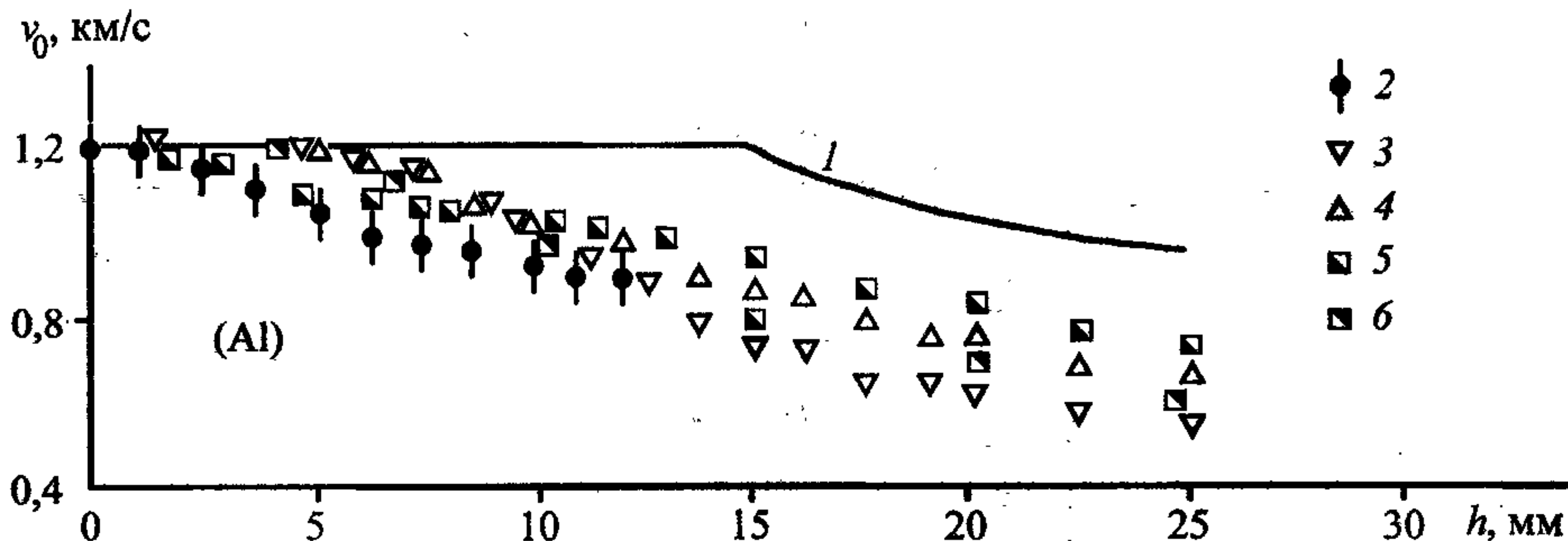


Рис. 1.3. Затухание максимума скорости свободной поверхности преграды при скорости соударения  $v_0 = 1,2$  км/с.

Поясн. см. в тексте.

алюминий, хотя та же качественная картина имеет место для меди и железа. В модели идеальной пластичности считается

$$v = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \text{const}, \quad k = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}, \quad Y = Y_0 = \text{const},$$

а в упругопластической модели с упрочнением принимается  $Y = Y_0 + \alpha_1 \cdot P - \alpha_2 \cdot P^2$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — постоянные.

Численные значения констант моделей материала ударника и преграды приведены в табл. 1.7.

По гидродинамической теории (кривая 1, см. рис. 1.3—1.5) процесс затухания имеет монотонный характер и начинается позднее. Это связано с тем, что

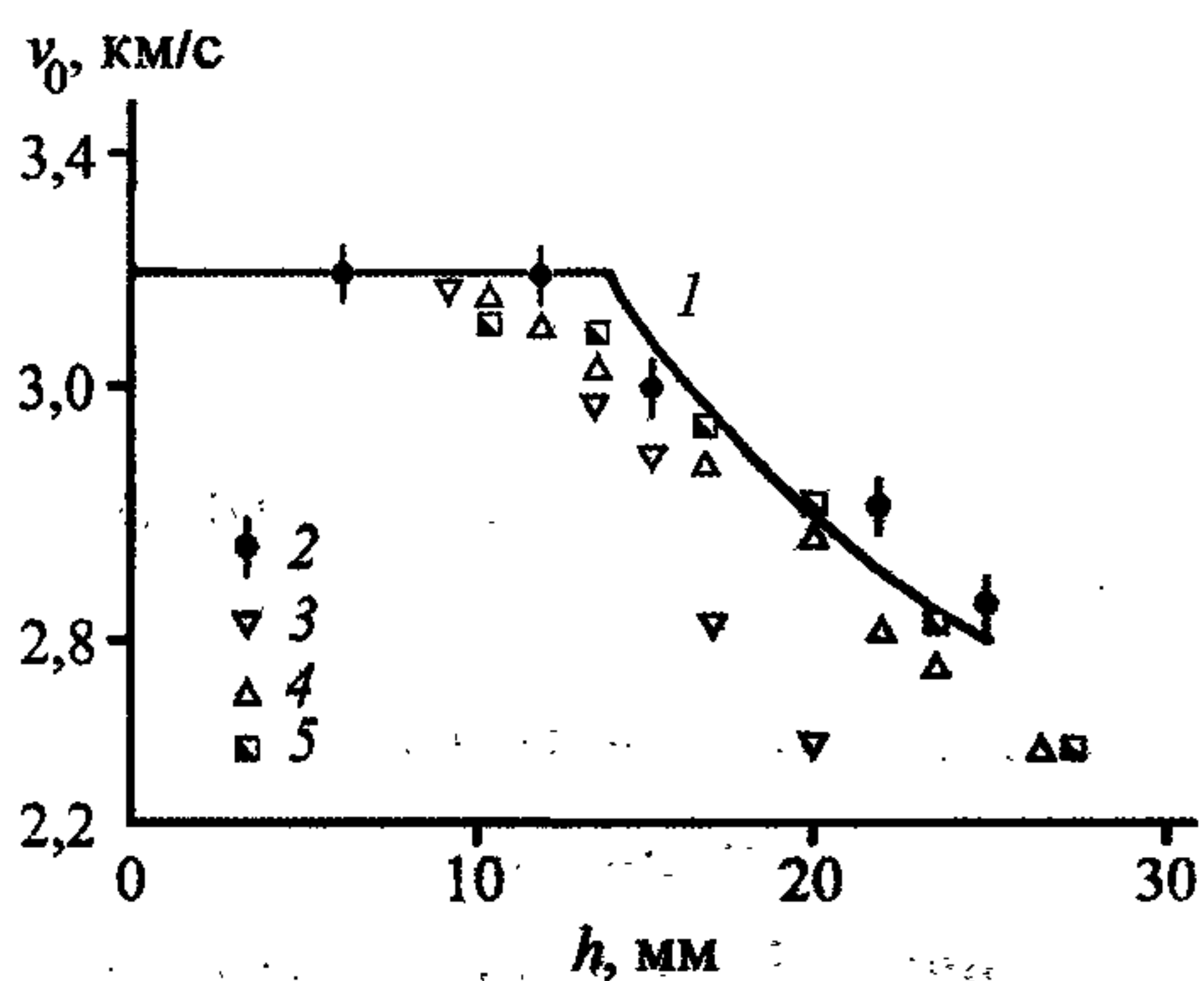


Рис. 1.4. Затухание максимума скорости свободной поверхности преграды при скорости удара  $v_0 = 3,2$  км/с.

Поясн. см. в тексте.

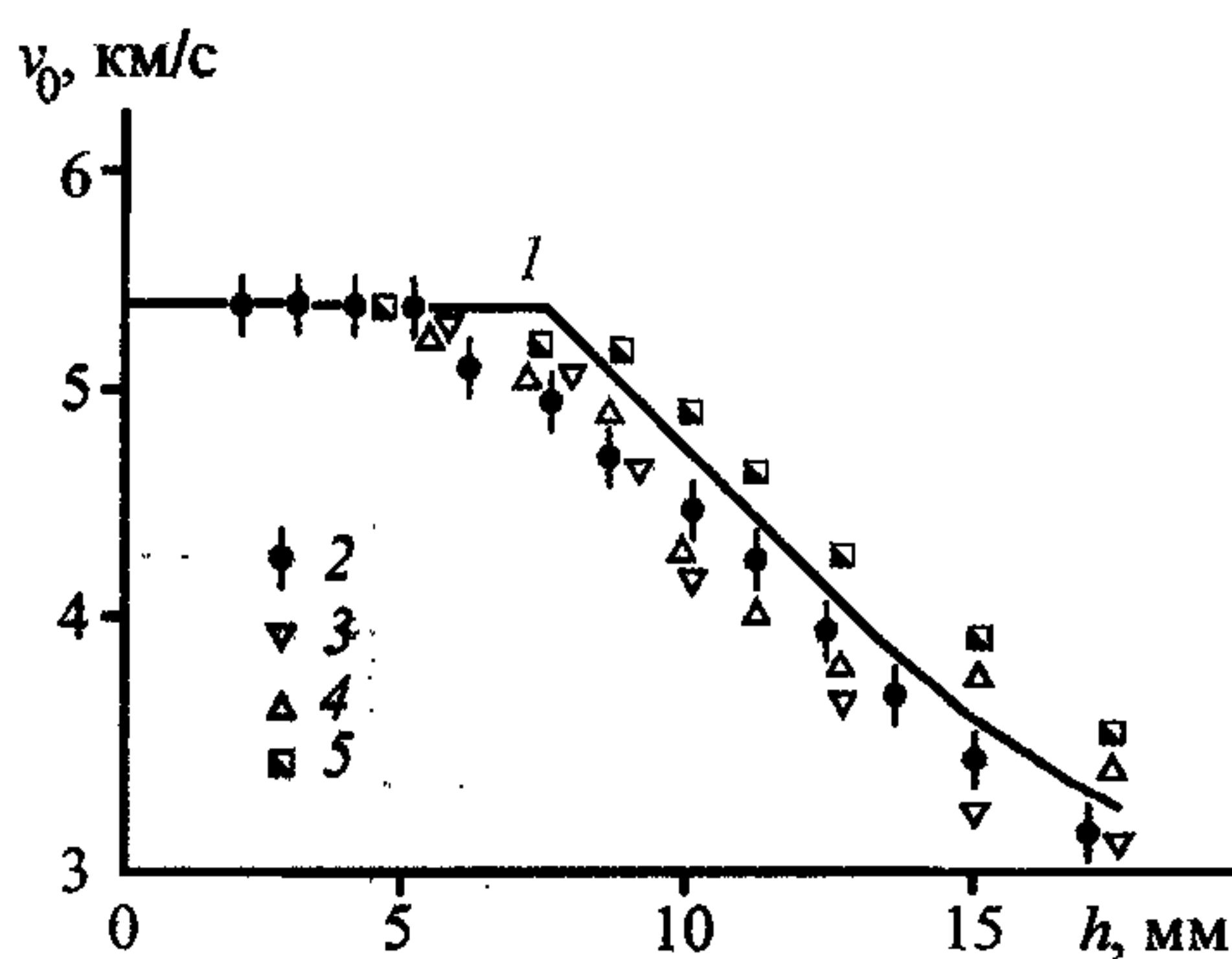


Рис. 1.5. Затухание максимума скорости свободной поверхности преграды при скорости удара  $v_0 = 5,4$  км/с.

Поясн. см. в тексте.

## Константы моделей материала ударника и преграды

Но- мер рисун- ка	Пара- метры ударни- ка		Модель														
	$U_0$ , км/с	$l_0$ , мм	гидродинамическая					упругопластическая					дислокационная				
			$\rho_0$ , г/см <sup>3</sup>	$K$ , кбар	$\gamma$	$E_0$ , Дж/г	$C_v$ , Дж/ (г·град)	$\Gamma_R$	$\nu$	$Y_0$ , кбар	$\alpha_1$	$\alpha_2$ , 1/кбар	$\beta$ , см	$N_{0,2}$ , см <sup>-2</sup>	$M_{,2}$ , см <sup>-2</sup>	$\tau_1$ , кбар	$\tau_2$ , кбар
1.3	1,2	1,5			5,1	161	0,896	2,088	0,33	2,5	0,056	0,002	$2,86 \cdot 10^{-8}$	$3,75 \cdot 10^6$	$7,8 \cdot 10^{10}$		
1.4	3,2	3,0		764												5,0	
1.5	5,4	2,0															

диссипация энергии в этом случае меньше, чем в остальных. Результаты экспериментов, отмеченные на рис. 1.3—1.5 (2), взяты из работ [25, 28, 29]. Наибольшее количественно расхождение имеет место в диапазоне относительно малых скоростей удара, т.е. в том диапазоне скоростей нагружения, где эффекты, возникающие от наличия сдвиговых напряжений, наиболее существенны. Так, уже при  $U_0 = 5,4$  км/с все математические модели дают близкие результаты, т.е. в пределах погрешности эксперимента.

Сравнение экспериментальных данных [28, 29] с результатами расчетов показывает, что начало затухания существенно определяется скоростью движения фронтов упругой разгрузки и пластической нагрузки, а величина затухания зависит от амплитуды волн упругой разгрузки. Введение дополнительных параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  упругопластической модели с упрочнением (см. 3 на рис. 1.3—1.5) позволяет учесть зависимость механических свойств среды от давления. Поэтому картина затухания удар-

ной волны при взаимодействии ее с волной разгрузки находится в лучшем соответствии с экспериментальными результатами, чем расчеты по гидродинамической модели или по модели идеальной пластичности (см. 4 на рис. 1.3—1.5). Из данных, приведенных на рис. 1.3 — 1.5, видно, что процесс затухания в рассмотренном диапазоне скоростей соударения лучше описывается по моделям, учитывающим физическую теорию пластичности, т.е. дислокационным, выраженным формулами (1.2.1) (см. 5 на указанных рисунках).

Необходимо отметить, что общепринятая дислокационная модель не является полной с физической точки зрения. Скольжение дислокаций с определенной скоростью  $v_g$  приводит не только к пластическому течению в рассматриваемой точке, но и к перемещению дислокации. В результате переход среды из упругого состояния в пластическое может осуществляться не только за счет размножения дислокаций, но и вследствие наличия потока дислокаций (диффузии пластичности). Для математического описания кинетики дислокаций необходимо учитывать распределение их по скоростям скольжения и векторам Бюргерса. В простейшем случае плотность дислокаций можно представить в виде суммы плотностей положительных и отрицательных дислокаций, имеющих одинаковые по величине, но противоположно направленные скорости  $N_g = N_+ + N_-$ . Далее предположим, что размножение дислокаций разного знака происходит одинаково, и скольжение их имеет место только в плоскости максимального касательного напряжения. Это дает следующие кинетические уравнения:

$$\frac{dN_+}{dt} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial h} (N_+ \cdot v_g) = \frac{M}{2} \left| \frac{d\varepsilon^p}{dt} \right|,$$

$$\frac{dN_-}{dt} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial h} (N_- \cdot v_g) = \frac{M}{2} \left| \frac{d\varepsilon^p}{dt} \right|,$$

$$\frac{d\varepsilon_p}{dt} = b_0 (N_- + N_+) v_g,$$

$$v_g = \begin{cases} C_1 \cdot \exp(-\tau_1 / (|\tau| - \tau^*)), & |\tau| > \tau^*, \\ 0, & |\tau| \leq \tau^*. \end{cases}$$

Расчеты по этой модели с учетом кинетики дислокаций, которые обозначе-



ны на рис. 1.3—1.5 знаками б, хорошо соответствуют экспериментальным результатам.

Детальная картина поведения основных параметров в дислокационной модели, описываемой формулами (1.2.4), приведена на рис. 1.2, где распределения  $N_g(h)$ ,  $\tau(h)$  обозначены соответственно кривыми 2 и 3 при четырех различных моментах времени. Видно, что фронт волны плотности подвижных дислокаций имеет двухступенчатую конфигурацию и, как было заложено в теории, расчет четко коррелируется с волной нагрузки и разгрузки. Причем начало увеличения  $N_g$  совпадает с максимумом в упругом предвестнике.

Для исследования влияния скорости соударения на эффекты запаздывания текучести алюминия была численно решена задача о распространении в среде волны сжатия в следующей постановке:

Найти функции  $U, \sigma_1, \sigma_2, \epsilon_1, \epsilon^p, \tau, P, E, T, \in C(D_2)$ , удовлетворяющие в  $D_2 = \{0 \leq h \leq \infty, 0 \leq t \leq \infty\}$  системе уравнений (1.2.1), (1.2.2), (1.2.3) и (1.2.4) с начальными  $U = \sigma_1 = \sigma_2 = \epsilon_1 = \epsilon^p = 0, \forall h$  и граничными условиями  $U = U_0 > 0$  при  $h = 0, t \geq 0$ .

Решение находится численным методом, аналогичным использованному выше. Основные параметры среды, которые были приняты в модели, приведены в табл. 1.7. На рис. 1.6 представлены полученные расчеты.

Затухание упругого предвестника в данной модели объясняется взаимодействием упругой волны сжатия с волной разгрузки, возникающей сразу за упругим предвестником за счет релаксации напряжений. В результате этого взаимодействия следует, что через некоторый промежуток времени амплитуда волны упругого предвестника не будет зависеть от скорости  $U_0$  и все параметры выйдут на асимптотики, соответствующие модели идеальной пластичности, т.е.

$$U = \sqrt{\frac{\sigma_1}{\rho} \left( \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right)}, \quad \rho = \rho_0 \left( 1 + \frac{4/3 Y_0}{(\gamma - 1) P_0} \right)^{1/\gamma},$$

$$\sigma_1 = 3 \frac{1 - \nu}{1 + \nu} P_0 [(\rho/\rho_0)^\gamma - 1],$$

где  $\rho_0 = 2,785 \text{ г/см}^3$ ,  $P_0 = 149,8 \text{ кбар}$ ,  $\gamma = 5,1$ ,  $Y_0 = 2,5 \text{ кбар}$ .

Для каждой точки пространства может быть построена зависимость  $\sigma(\epsilon)$ . Такая зависимость, вообще говоря, неоднозначная и на рассматриваемом ин-

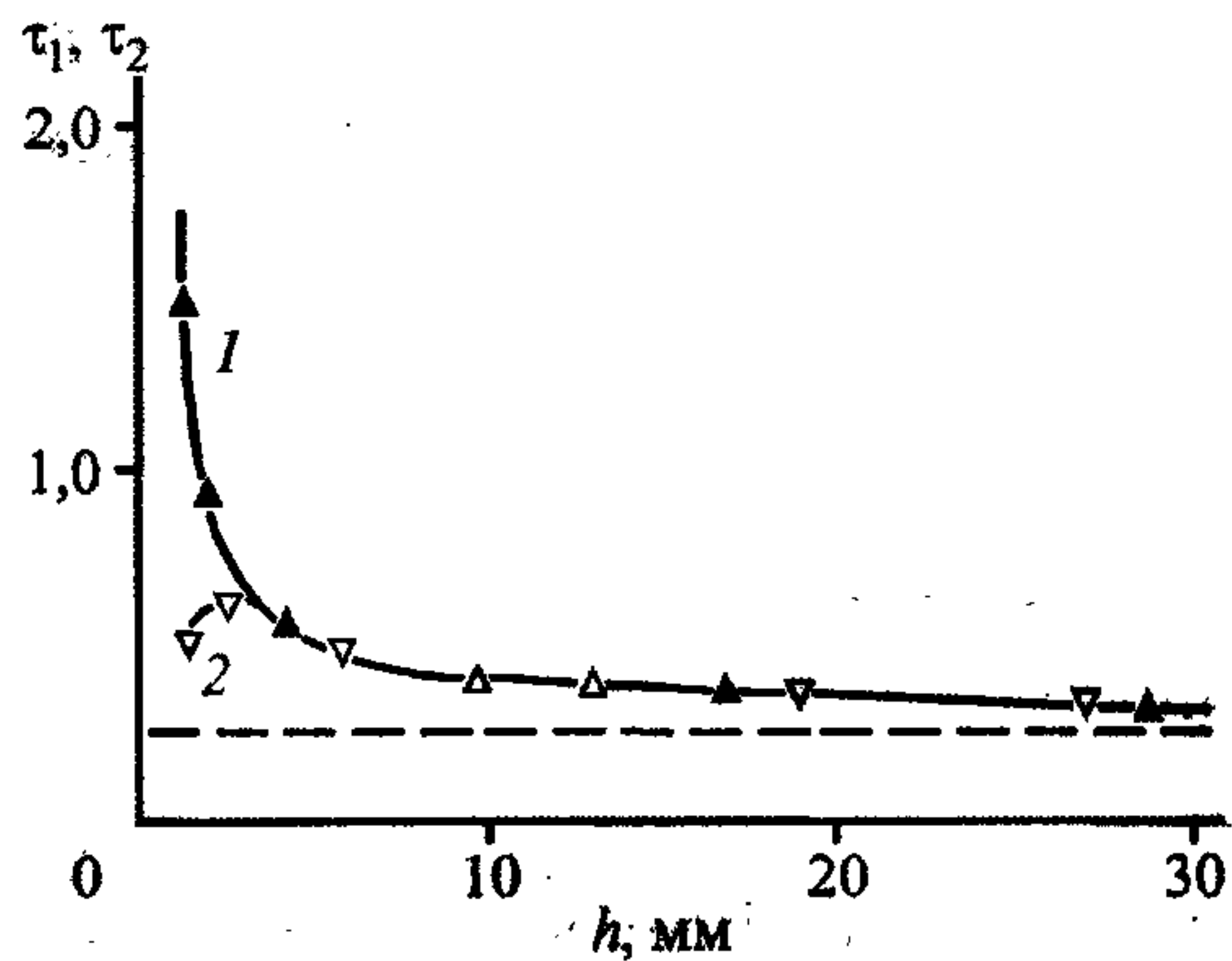
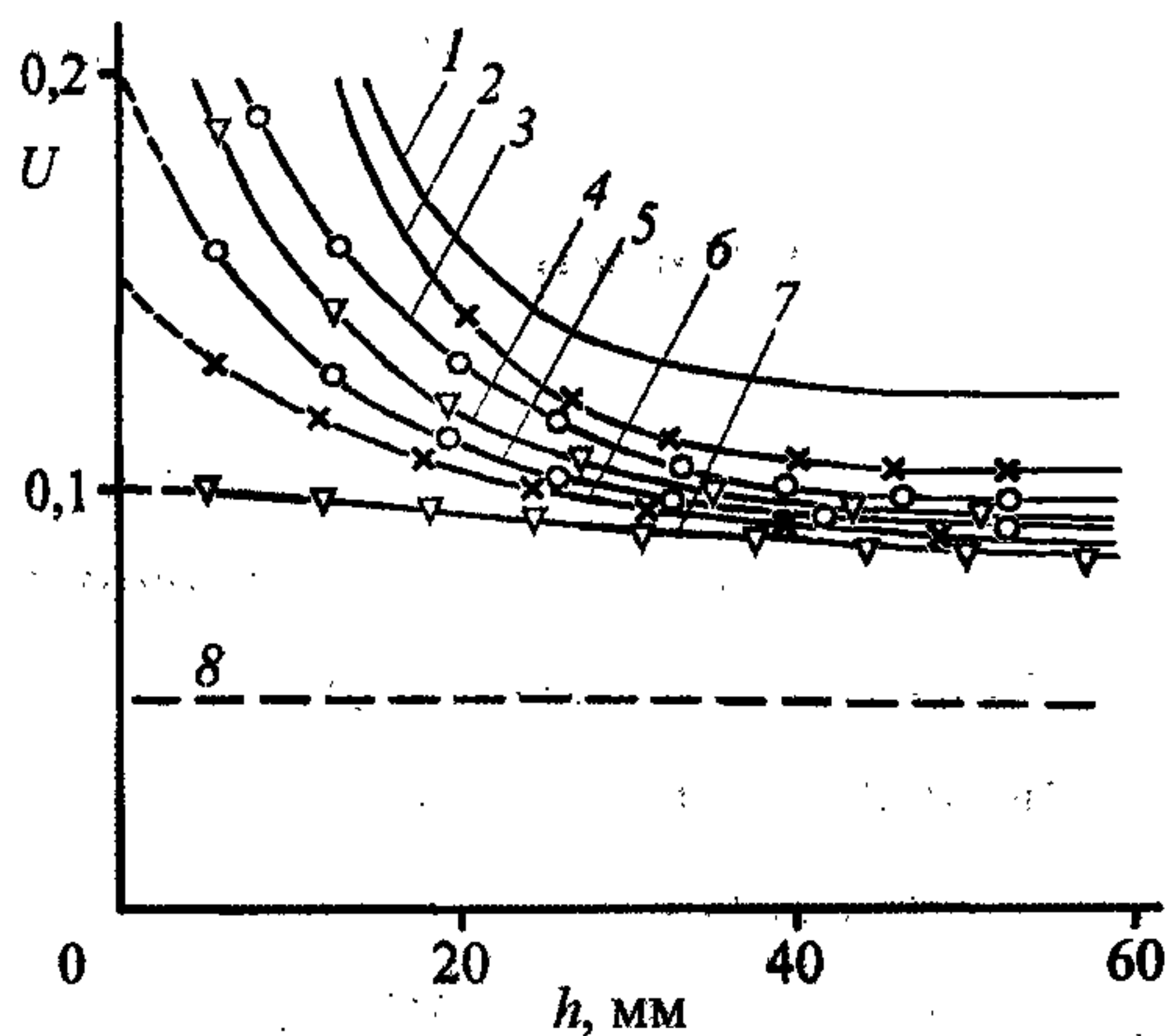


Рис. 1.6. Затухание массовой скорости за упругим предвестником при его распространении в алюминии для разных скоростей нагружения.

$U$ , км/с: 2,0 (1), 1,5 (2), 1,0 (3), 0,5 (4), 0,4 (5), 0,3 (6), 0,2 (7).

Рис. 1.7. Затухание сдвиговых напряжений  $\tau_1$  и  $\tau_2$  в зависимости от расстояния  $h$ .

Поясн. см. в тексте.

тервале изменения параметров будет иметь точки локального максимума и минимума, численные значения которых зависят от скорости нагружения. Соответствующие этим точкам сдвиговые напряжения  $\tau_1$  (кривая 1) и  $\tau_2$  (кривая 2) в зависимости от расстояния  $h$  для  $U_0 = 1$  км/с приведены на рис. 1.7. Видно, что разница между этими величинами быстро уменьшается и затем  $\tau_1$  и  $\tau_2$  асимптотически стремятся к величине статического предела текучести, обозначенной на рис. 1.7 штриховой линией.

### 1.2.3. Затухание ударных волн в металлах при нагружении контактными взрывом

Для большого класса задач [31—34] представляет интерес характер изменения давления на фронте ударной волны в металле от детонации заряда ВВ, находящегося в контакте с металлом. В первых расчетах затухания давления на фронте плоской ударной волны при ее движении по металлу по мере удаления от поверхности использовалась газодинамическая модель. Полученные в [30] кривые для максимального давления в ударной волне в меди и никеле от контактных зарядов литого тротила с гексогеном 50/50 толщиной 15 мм позволяют

сделать вывод, что давление убывает с глубиной быстрее, чем это предсказывает газодинамический расчет. Для выяснения особенностей деформирования металлов при нагружении ВВ в зависимости от выбранной математической модели решим и проанализируем результаты на примере следующей задачи в одномерном приближении [83]:

Твердое тело в виде пластины металла нагружается продуктами детонации конденсированного ВВ. Пусть в точке с координатой  $r = R_1$  возбуждается детонационная волна. Продукты детонации (ПД) истекают в пространство  $r < R_1$  с текущей координатой свободной поверхности  $R_2$ . В направлении  $r > R_1$  распространяется детонационная волна, которая за время  $t_0 = (R_0 - R_1)/D$  дойдет до границы контакта ( $r = R_0$ ) с твердым телом и сообщит ему динамическую нагрузку. Здесь  $D$  — скорость детонационной волны.

Поведение твердого тела при динамическом нагружении описывается системой уравнений, которые в координатах Лагранжа имеют вид:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{r^{\nu-1}} \frac{\partial (r^{\nu-1} U)}{\partial r},$$

$$\frac{1}{V} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial r} + (\nu - 1) \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r},$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -P \frac{\partial V}{\partial t} + V \left[ S_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + (\nu - 1) \cdot S_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} \right], \quad (1.2.5)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = U \quad (\nu = 1, 2, 3),$$

где  $V = 1/\rho$  — удельный объем;  $\sigma_i = -P + S_i$ ;  $\sum_{i=1}^3 S_i = 0$ ;  $U$  — скорость среды.

Система уравнений (1.2.5) замыкается уравнением состояния для металла

$$P = a_0^2 (\rho - \rho_0) + (n - 1) \rho \cdot E, \quad (1.2.6)$$

где  $a_0, n$  — постоянные [30], а для продуктов детонации —

$$P = (k - 1) \rho \cdot E, \quad (1.2.7)$$

где  $k$  — постоянная.

Уравнение для описания упругопластического течения представим в форме



$$\frac{\partial S_i}{\partial t} = 2\mu \left( \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} - \frac{1}{3} \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t} \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.2.8)$$

т.е. в упругой области используется закон Гука, а в пластической области материал пластины подчиняется закону текучести Мизеса

$$\frac{3}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \leq Y_0^2, \quad (1.2.9)$$

где  $\mu$  — модуль сдвига, а  $Y_0$  — предел упругости материала. Компоненты тензора “упругих” напряжений корректируются, чтобы неравенство (1.2.9) выполнялось, умножением каждой на множитель

$$S_i^n = S_i^e \cdot \frac{\sqrt{2/3} Y_0}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}.$$

Следует заметить, что как показал С. С. Григорян [35], предложенная выше М. Уилкинсом [31] процедура эквивалентна применению в области пластических деформаций модели Прандтля—Рейсса.

Скорости деформаций определяются соотношениями

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t} = \frac{U}{r} \quad \text{при } \nu = 3,$$

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t} = 0 \quad \text{при } \nu = 2$$

$$\text{и } \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t} = 0 \quad \text{при } \nu = 1.$$

Предел упругости  $Y_0$  в общем случае может зависеть от давления, внутренней энергии, скорости деформаций и других параметров, учитывающих историю нагружения. Следует заметить, что если в этих уравнениях положить  $\mu = 0$  и  $Y_0 = 0$ , то система полученных уравнений будет описывать движение сжимаемого, невязкого, нетеплопроводного газа, что особенно удобно при проведении численного интегрирования.

Таким образом, данная физическая задача математически формулируется следующим образом. Найти функции  $U, P, V, E, \sigma_r, \varepsilon_i$  в областях  $R_2 < r < \infty$  и

$0 < t < \infty$ , удовлетворяющие при  $R_0 < r < \infty$  системе уравнений (1.2.5), (1.2.6), (1.2.8) и (1.2.9), а в области  $R_2 < r < R_0$  — системе (1.2.5), (1.2.7)—(1.2.9) для  $\mu = 0$ ,  $Y_0 = 0$  при следующих начальных и граничных условиях:

**Начальные условия.** При  $t = t_0$  в момент выхода детонационной волны на контактную поверхность ВВ — металл ( $r = R_0$ ) в пластине ( $r > R_0$ ) полагаем

$$\rho_0 = \rho, P = 0, U = 0, S_i = 0.$$

Распределение параметров состояния (ПД) за фронтом детонационной волны  $R_2 < r < R_0$  определяется из автомодельного решения, описывающего детонационную волну Чепмена—Жуге.

**Граничные условия.** На свободной поверхности ( $r = R_2$ ) давление равно нулю, на контактной поверхности ( $r = R_0$ ) требуется выполнение условий непрерывности нормальных напряжений и скорости.

Численное решение задачи определяется конечно-разностным методом Неймана—Рихтмайера, в котором для устойчивого счета волн сжатия используется искусственная вязкость, добавляемая аддитивно к давлению. В представленных расчетах применялась линейная искусственная вязкость

$$q = C_q C \rho \Delta r \partial U / \partial r,$$

где  $C_q$  — постоянная;  $C$  — местная скорость звука;  $\Delta r = h$  — шаг разностной сетки.

Рассмотрим некоторые методические вопросы используемого конечно-разностного метода на примере решения задачи о затухании ударной волны, вызванной действием ВВ, в полубесконечной преграде. В расчетах для простоты принято  $t_0 = 0$ ;  $R_0 = 0$ . В качестве ВВ выбран ТГ 50/50 с  $D = 0,76$  см/мкс,  $\rho = 1,6$  г/см<sup>3</sup>,  $k = 3$ , пластина — железо с  $\rho_m = 7,85$  г/см<sup>3</sup>,  $n = 5,5$ ,  $Y_0 = 0,0093$  Мбар,  $a_0 = 0,385$ ,  $\mu = 0,814$  Мбар, толщина слоя ВВ равна 1,68 см.

Разностная схема выбрана такой, что  $P, V, E, S_i$  отнесены к центрам ячеек, а массовая скорость  $U$  — к узлам. Контактная поверхность раздела ПД — металл совпадает с некоторым узлом  $i = k$ . Скорость контактной границы в начальный момент времени  $t = 0$  либо задается равной массовой скорости ПД в точке Чепмена—Жуге  $U_k = U_j = 0,19$  см/мкс, либо определяется из решения задачи о распаде разрыва в газодинамической постановке:  $U_k = U_p = 0,0876$  см/мкс (на контактной границе в этом случае  $P_k = 0,3799$  Мбар). Влияние  $U_k$  исследуется для



различных  $h$ . В расчетах варьировались шаг по пространственной переменной и коэффициент вязкости при прочих равных условиях.

Зависимости максимального давления  $P_{\max}$  на фронте ударной волны от текущей пространственной координаты  $r$  и распределение давления в пластине на момент времени  $t = 3$  мкс показаны на рис. 1.8 и 1.9 соответственно. Результаты расчетов наиболее чувствительны к изменению  $U_k$  при счете на грубой сетке. Это

связано с тем, что процедура задания  $U_k$  ( $U_k \leq U_j$ ) равносильно сглаживанию профиля скорости на фронте волны при  $t = 0$ . И чем больше  $h$ , тем шире сглаживаемый участок волны и больше величина аппроксимационной вязкости (см. рис. 1.8 и 1.9 соответственно). Из рис. 1.8 и 1.9 видно, что на начальной стадии в районе контактной границы решения заметно различаются. Для больших  $h$  характерно более быстрое затухание ударной волны и более сильное ее размазывание, поскольку искусственная и аппроксимационная вязкости имеют большие значения. При больших же временах амплитуда волны менее чувствительна к  $h$ , поэтому при проведении серийных расчетов по затуханию ударной волны на больших расстояниях можно использовать достаточно грубую сетку, что дает значи-

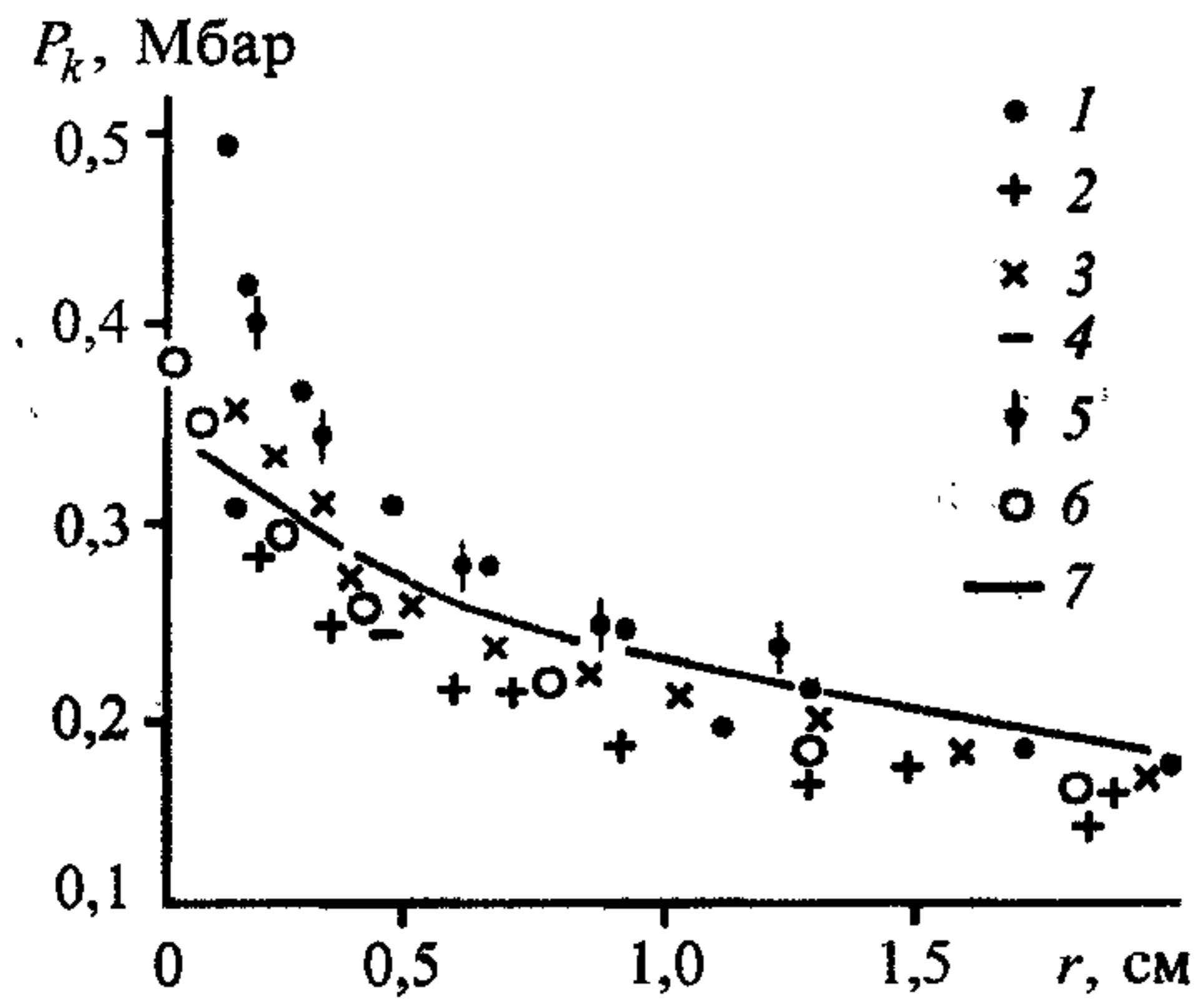


Рис. 1.8. Зависимость максимального давления на фронте ударной волны от текущей координаты.

1 —  $h = 0,1875$ ,  $C_q = 0,5$ ,  $U_k = U_j$ ; 2 —  $h = 0,1875$ ,  $C_q = 0,5$ ,  $U_k = U_p$ ; 3 —  $h = 0,075$ ,  $C_q = 0,5$ ,  $U_k = U_j$ ; 4 —  $h = 0,075$ ,  $C_q = 0,5$ ,  $U_k = U_p$ ; 5 —  $h = 0,075$ ,  $C_q = 0,3$ ,  $U_k = U_j$ ; 6 —  $h = 0,075$ ,  $C_q = 0,7$ ,  $U_k = U_j$ ; 7 —  $h = 0,02$ ,  $C_q = 0,5$ ,  $U_k = U_j$ .

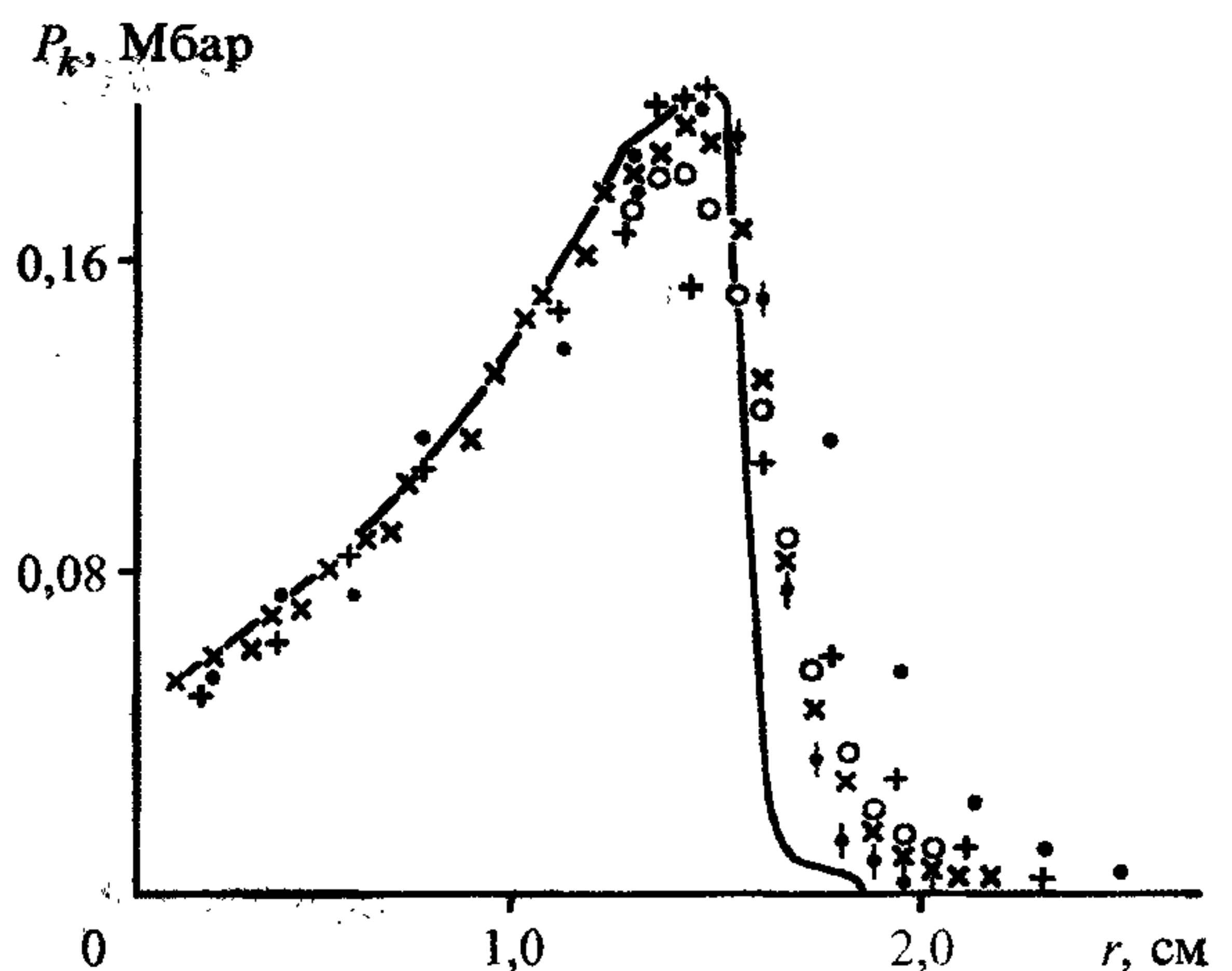


Рис. 1.9. Распределение давления в пластине на момент времени  $t = 3$  мкс.

Усл. обозн. см. рис. 1.8.



тельную экономию машинного времени. Для получения же детальной картины течения требуется мелкая сетка. Например, на рис. 1.9 при счете с  $h = 0,02$  отчетливо видны несколько размазанный упругий предвестник и упругая волна разгрузки.

Уменьшение значений  $C_q$  (или  $q$ ) приводит к меньшему размазыванию ударной волны. Для малых  $C_q$  в области больших градиентов появляется немотонность решения за фронтом ударной волны, в частности, завышения максимального давления.

Для нахождения  $P$  в каждой точке образца определялась скорость свободной поверхности материала, разгруженного от  $P$  до нулевого давления. Затем с использованием правила удвоения, которое с хорошей точностью выполняется до 500 кбар, находилась массовая скорость вещества за фронтом ударной волны и по известной ударной адиабате меди — давление за фронтом. Поскольку давление достаточно сильно зависит от массовой скорости, то при базе измерения скорости 3—5 мм этот метод обеспечивает точность определения давления не хуже 3—5%. Схема измерения скорости свободной поверхности представлена на рис. 1.10. Экспериментальные исследования проводились сотрудниками Института гидродинамики СО РАН под руководством проф. А. А. Дерибаса. От величины магнитного поля (в настоящем случае  $H = 400$  Э) зависит только амплитуда сигналов, которая может быть прокалибрована по скорости пластины. В описываемых экспериментах измерялся лишь временной интервал  $t_1 - t$ , массовая скорость за фронтом находилась по формуле

$$U = L/2 (t_1 - t),$$

где  $L$  — база измерения скорости свободной поверхности;  $t$  — момент начала ее движения;  $t_1$  — момент торможения.

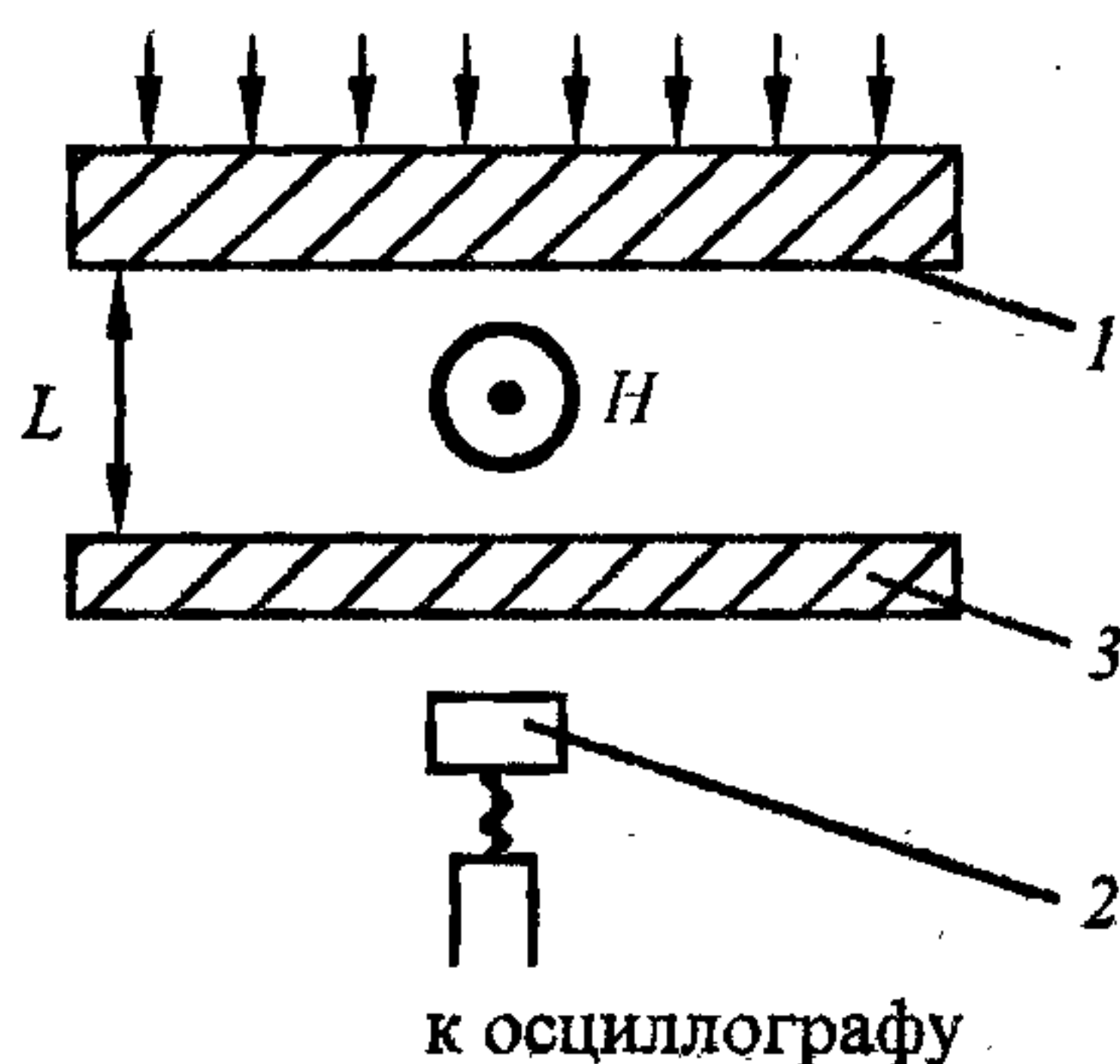
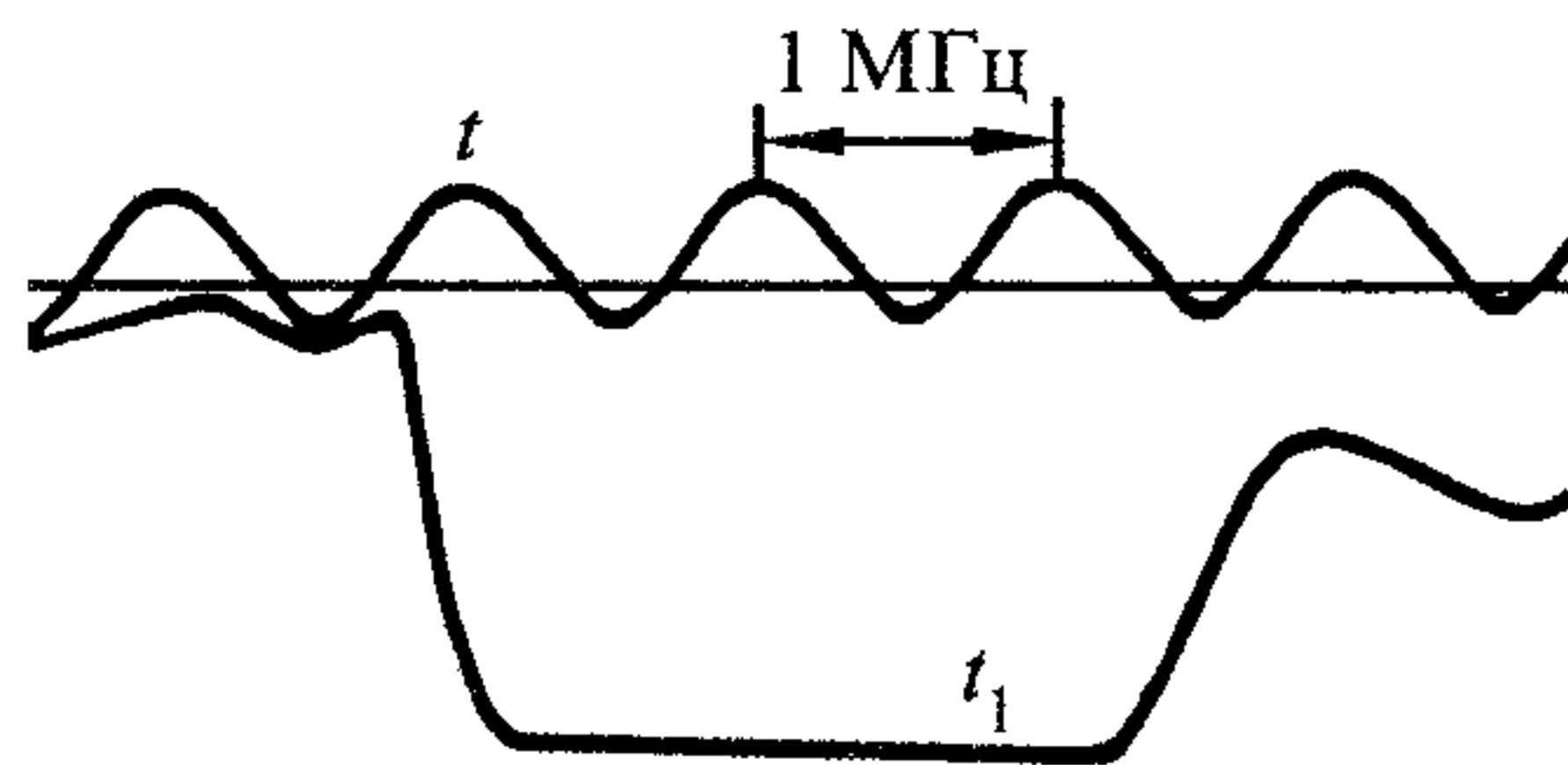


Рис. 1.10. Схема измерения скорости свободной поверхности медного образца.

1 — образец; 2 — измерительный контур; 3 — пластина для торможения образца;  $L$  — база измерения;  $H = 400$  Э; стрелками показано направление распространения фронта ударной волны.

Рис. 1.11. Осциллограмма, полученная по схеме рис. 1.10.

Частота меток времени 1 МГц,  $t$  — начало движения свободной поверхности образца,  $t_1$  — момент торможения.



Типичная осциллограмма приведена на рис. 1.11. Применяемый метод измерения массовой скорости обеспечивает контроль однократности нагружения образца на базе измерения  $L$ , так как исключается взаимодействие волн разрежения от свободной поверхности с границей образца, нагруженной продуктами детонации. Этот контроль необходим при работе с образцами малой толщины (3—5 мм).

В опытах фактически измерялась скорость откольного элемента толщиной 1—3 мм, зависящая от толщины образца. Использовались заряды двух конфигураций. Малый заряд состоял из таблетки ТГ 50/50 диаметром 40 и толщиной 15 мм с генератором плоской волны (вес  $\approx 20$  г). Большой заряд брался диаметром 60 мм, той же высоты с генератором плоской волны весом  $\approx 90$  г. Профиль импульса детонационной волны имел форму криволинейного треугольника с длительностью полуспада  $\approx 1$  мкс для малого заряда и  $\approx 2$  мкс — для большого.

Представляло интерес сравнить остаточные свойства образцов, сжатых ударной волной, а затем разгруженных в волне разрежения, параметры которой определяются размером заряда и расстоянием от контактной границы (5 + + 10 мкс), и образцов, сжатых ударной волной с такими же параметрами, но разгруженных в волне разрежения со свободной поверхности. При этом существенно меняются длительность ударно-сжатого состояния и скорость спада давления в волне разрежения (0,15 мкс вместо 5), которые могут влиять на остаточные свойства образцов. Исследовался образец из двух прижатых друг к другу пластин толщиной 35 и 3 мм, последняя служила откольным элементом. Остаточные свойства в ней сравнивались с аналогичными характеристиками в сплошном образце на такой же глубине при нагружении тем же зарядом.

На рис. 1.12 приведены рассчитанные кривые затухания максимального давления в ударной волне в меди, никеле и железе (без учета фазового превращения) от зарядов ТГ толщиной 33 и 16,8 мм. Кривые для меди удовлетворительно совпадают с замеренными экспериментально величинами давления от зарядов ТГ двух конфигураций, по крайней мере до глубины 25—33 мм, где,



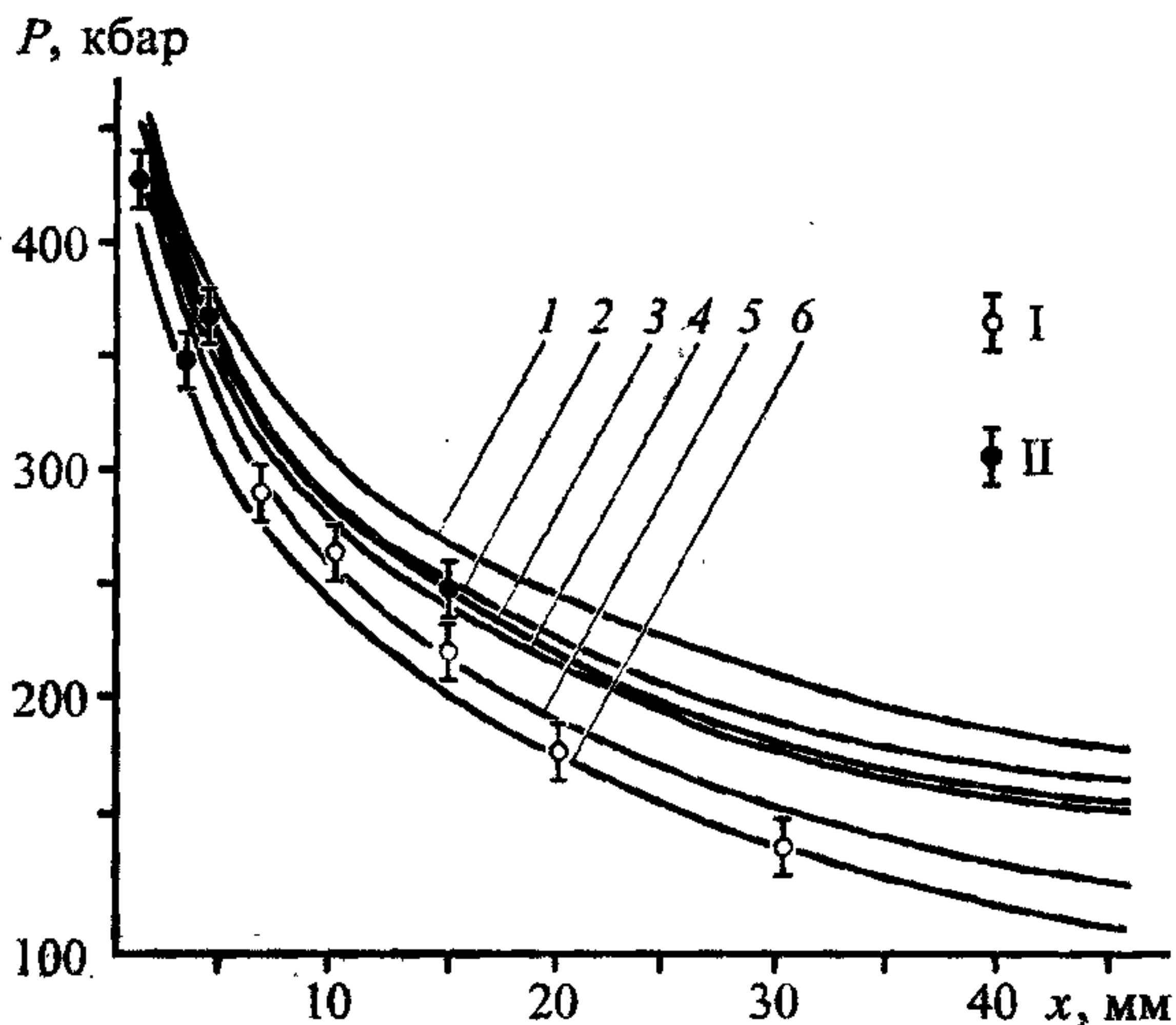


Рис. 1.12. Изменение с глубиной давления на фронте ударной волны.

1 — никель, заряд 33 мм ТГ; 2 — медь, заряд 33 мм ТГ; 3 — медь, заряд 16,8 мм ТГ (счет по газодинамической модели); 4 — никель, заряд 16,8 мм ТГ; 5 — медь, заряд 16,8 мм ТГ; 6 — железо, заряд 16,8 мм ТГ; I — медь, малый заряд ТГ (точки к кривой 5); II — медь, большой заряд ТГ (точки к кривой 2).

по-видимому, начинает ощущаться влияние боковой разгрузки, т.е. процесс нагружения становится существенно неоднородным.

Из остаточных свойств металлов, нагруженных ударными волнами, рассматриваются микротвердость и величина остаточных микроискажений кристаллической решетки, определенные из уширения рентгеновских дифракционных линий. Подробное описание методик измерения этих характеристик изложено в работе [32]. Определялись измерения этих величин в меди, никеле и железе от зарядов ТГ двух описанных конфигураций. Сопоставляя значения микротвердостей и микроискажений на каждой глубине с величиной максимального давления в ударной волне, существовавшего в металле на этой же глубине, можно построить кривые зависимости остаточных характеристик ма-

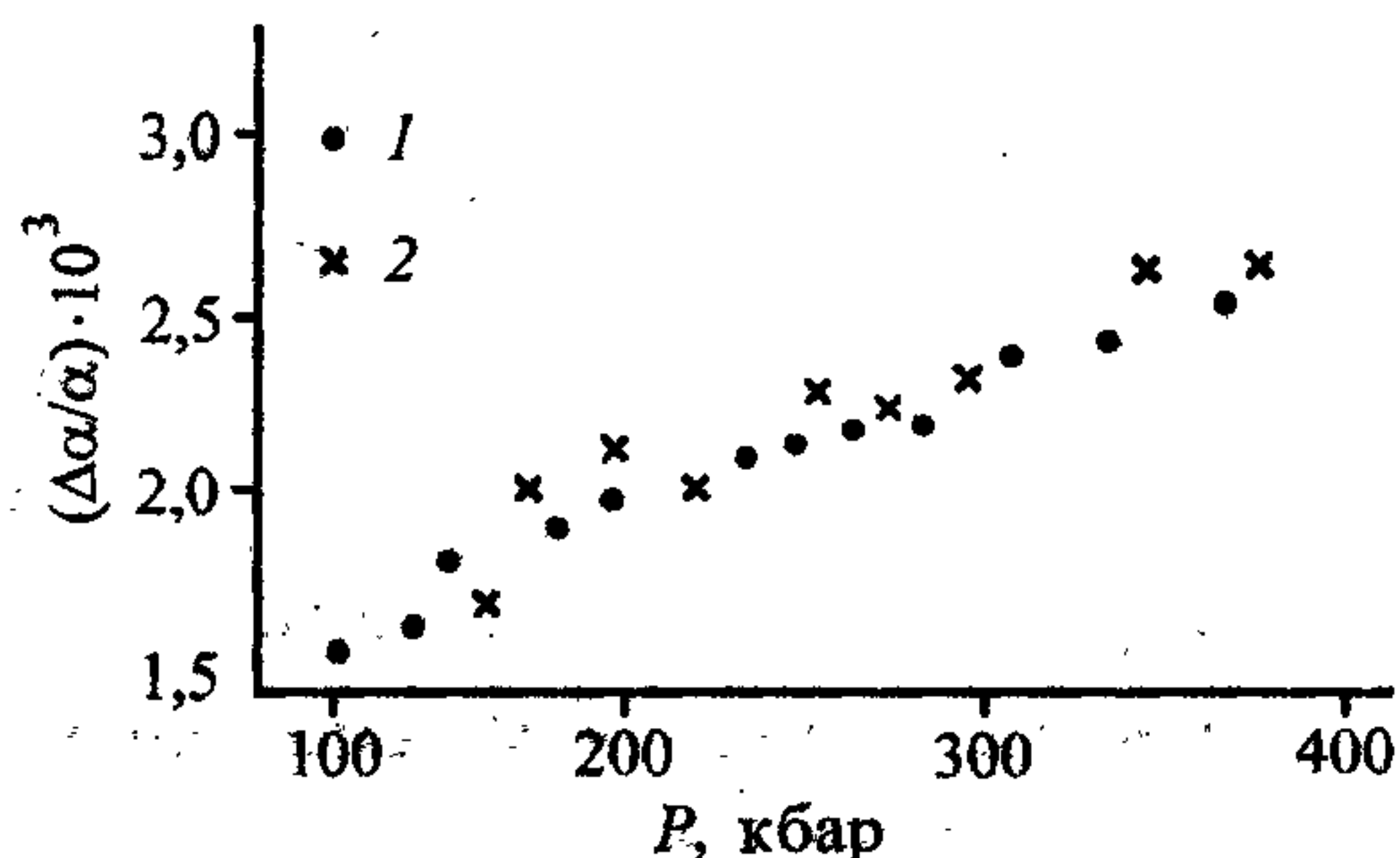


Рис. 1.13. Зависимость величины микроискажений кристаллической решетки  $\Delta\alpha/\alpha$  от давления в ударной волне.

1 — опыты с медью; 2 — опыты с никелем.

териала от амплитуды давления ударной волны. Для меди и никеля получилась единая зависимость микроискажений от давления (рис. 1.13).

Затухание давления в железе (см. рис. 1.12, 1.13) показывает, что при использовании заряда ТГ толщиной 16 мм давление фазового перехода (130—150 кбар) достигается на глубине 28—32 мм. В опыте получено, что



глубина, до которой имел место фазовый переход, определенная по излому кривых твердости и всех характеристик тонкой структуры, составляет 14—16 мм. Следовательно, обратимый фазовый переход в железе вызывает дополнительные потери, которые не учитывает упругопластическая модель, и приводит к более быстрому затуханию давления с глубиной.

Влияние ширины профиля импульса давления на остаточные свойства материала анализировалось как с помощью нагружения зарядами различной толщины, так и в описанных выше опытах с отколами. Получено, что микротвердость и величина рентгеновских характеристик структуры не зависят от ширины импульса давления, от скорости спада давления за ударным фронтом, а определяются только максимальной амплитудой давления в ударной волне.

Таким образом, анализ уже только этих простых примеров позволяет установить границы применимости наиболее простых математических моделей для широкого диапазона деформирования:

1) при  $0 < M_0 \leq 0,75$  удовлетворительно описывает процессы математическая модель упругопластического течения типа Прандтля—Рейсса;

2) при  $1,5 > M_0 > 0,75$  хорошо описывает основные процессы течения газодинамическая модель, но с более сложным уравнением состояния среды.

Здесь  $M_0 = U_0/C_0$ , где  $U_0$  — скорость соударения, а  $C_0$  — скорость звука в среде. Следует заметить, что эти выводы относятся только к таким нагрузкам, когда отсутствуют фазовые переходы в среде или они уже прошли.

В том случае, когда необходимо учитывать влияние фазовых переходов, обобщение вышеприведенных моделей будут состоять в замене уравнения состояния на более сложное. Этот вопрос будет рассмотрен более подробно в главе 2.

В настоящее время разработано много различных теорий, описывающих упругопластическое поведение тел. Эти теории можно условно разделить на три подхода:

*Первый* основан на известной гипотезе Х. А. Рахматулина о существовании динамической диаграммы  $\sigma_{ij} = f(\epsilon_{ij})$ , устанавливающей связь между тензорами напряжения и деформации, которая в общем случае не совпадает со статической диаграммой деформирования, а зависит от скорости удара. Это направление активно развивалось в работах Т. Кармана, Дж. Тэйлора, Н. Кристеску, и их обзор дан в [34].

Применение этого подхода к решению одномерных и многомерных задач о распространении упругопластических волн можно найти в работах С. С. Григо-

ряна [35, 36], Н. В. Зволинского [37, 38], Г. Кольского [39], Г. М. Ляхова [40], В. К. Кабулова [41], Б. М. Мальшева, Г. А. Домбровского, Г. В. Литвинова [42], М. И. Рейтман, Г. С. Шапиро [43], Е. И. Шемякина, В. С. Никифоровского [44, 45] и Г. И. Канеля, С. В. Разоренова, А. В. Уткина, В. Е. Фортова [46].

*Второй* подход основан на том, что если существует в пространстве напряжений поверхность текучести  $F_T(\sigma_{ij}) = 0$ , то на основании принципа максимума скорости диссипации механической энергии устанавливается зависимость скорости пластической деформации  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  в виде

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda_p \frac{\partial F_T}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \dot{\epsilon}_{ii}^p = 0,$$

а упругая часть деформации  $\epsilon_{ij}^p$  определяется по закону Гука. Здесь  $\lambda_p$  — неопределенные множители, постоянные для данных значений компонент скорости деформации.

Теории, основанные на данной гипотезе, принято называть теориями пластического течения. При таком описании материал среды “не помнит” всю историю деформирования, так как мгновенные значения напряжений связываются с приращением пластических деформаций или со скоростями деформаций. Основы этого подхода были заложены еще Б. Сен-Венаном, М. Леви, В. Прагером, изложены в общедоступных работах [47, 48], где указаны и соответствующие ссылки на оригинальные работы авторов.

Обобщение такого подхода, как обоснование гипотезы полной пластичности Хаара—Кармана, дано А. Ю. Ишлинским, а формулировки двух основных теорий пластичности (теории Сен-Венана—Леви—Мизеса), устанавливающих зависимости между напряжениями и скоростями для малых упругопластических деформаций однородной изотропной среды, даны в работах А. А. Ильюшина и приведены в его монографии [49]. Одним из первых, кто применил теорию пластического течения Прандтля—Рейсса к решению как одномерных, так и многомерных динамических задач высокоскоростного взаимодействия, был М. Уилкинс [31]. Здесь уместно заметить, что М. Уилкинс представил исходную систему уравнений таким образом, чтобы она описывала с единых позиций упругую, упругопластическую и гидродинамическую стадии движения. Такой подход оказался очень перспективным при численном моделировании задач высокоскоростного взаимодействия тел и, как следует из результатов работ, приведенных в последующих главах настоящей монографии, нашел своих последователей [50]. Термодинамические аспекты этой модели как для малых,



так и для конечных деформаций были рассмотрены Г. В. Ивановым [51], а математические особенности достаточно подробно представлены в [52].

Дальнейшее обобщение этих моделей, где учитываются в той или иной форме упрочнение, вязкость и другие эффекты, дано в ряде монографий (см. [43]). К этому подходу следует отнести и модели, в которых неравномерность пластических деформаций объясняется неравномерностью структуры поликристаллов и распределений дефектов в атомных решетках. В этом случае каждому тензору пластических деформаций соответствует своя поверхность текучести и как следствие имеет место система внутренних микроупругих сил [53—55] и другие.

*Третий* подход предполагает, что при динамическом нагружении существуют соотношения между приращениями деформаций и напряжений. В случае одноосного растяжения или сжатия такая связь представима в виде:

$$A(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial \sigma}{\partial t} = B(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + C(\sigma, \varepsilon). \quad (1.2.10)$$

Функции  $A(\sigma, \varepsilon)$ ,  $B(\sigma, \varepsilon)$  и  $C(\sigma, \varepsilon)$  обычно определяют, используя данные динамических экспериментов с помощью мерного стержня Гопкинса. Такое описание среды активно использовалось для анализа распространения волн в одномерном приближении, и его можно найти в работах В. В. Соколовского [56, 57], Л. Малверна [58, 59], Н. Кристеску [60], Дж. Люблинера [61], В. Н. Кукджанова [62, 63] и многих других [64—70]. Можно легко показать, что к зависимости (1.2.10) приводятся и дислокационные модели упругопластического течения, которые в настоящее время активно развиваются [71—75].

Дальнейшее обобщение на случай сложного многомерного напряженного состояния данный подход получил в работах Д. Д. Ивлева и Г. И. Быковцева [76], В. К. Новацкого [77], П. П. Пэжины [78], Н. Кристеску [60]. Однако примеры решения задач высокоскоростного взаимодействия тел в многомерном приближении по данным моделям нам не известны.

В последнее время в результате экспериментальных исследований по сложному динамическому нагружению [38, 79—82, 84] было показано, что на диаграмму  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  влияет вся история нагружения. Для описания наследственно временных эффектов наиболее общими являются математические модели, основанные на нелинейных зависимостях интегродифференциального вида. Развитие этого направления в квазистатических задачах дано в работах А. А. Ильюшина, Б. Е. Победри [79], Ю. Н. Работнова [80] и других [81, 82].



Такой подход особенно активно использовался для анализа процессов распространения волн в одномерном приближении и ползучести различных материалов с обобщением на композиты. В настоящее время использование уравнений наследственного типа пока слишком сложно для численного решения неоднородных задач высокоскоростного взаимодействия, так как имеющиеся в литературе экспериментальные результаты еще недостаточны для надежного определения неизвестных функций, входящих в определяющие уравнения при больших скоростях деформации.

Следует отметить еще модель [85, 86], предложенную С. А. Христиановичем и Е. И. Шемякиным. Здесь используется гипотеза малых деформаций, но учитывается то, что в разных направлениях существуют частичные зоны разгрузки и нагрузки материала и при пластических деформациях среда становится существенно анизотропной. Применение этой модели к статическим как одномерным, так и многомерным задачам горной механики осуществлялось А. Ф. Ревуженко и Е. И. Шемякиным и др. [87—90].

Есть еще подход к построению теории упругопластической среды, данный в работах С. К. Годунова [50, 91]. Здесь соотношение Максвелла для вязкоупругости обобщается на случай конечных деформаций, а учет пластических явлений осуществляется за счет введения зависимости времени релаксации от интенсивности касательных напряжений. Полученная система уравнений описывает с единых позиций упругую, вязкоупругую и гидродинамическую стадии течения материала в зависимости от нагружения. Конкретные задачи высокоскоростного соударения тел с использованием этой модели даны в работах Л. А. Мержиевского. Следует заметить, что достаточно хороший обзор работ советских авторов по численному моделированию неустановившихся процессов, происходящих в упругопластических телах при интенсивных импульсных воздействиях, был сделан В. Н. Кукуджановым [97], а результаты западных ученых за последнее время можно найти в трудах международного симпозиума по гиперзвуковому удару [20, 98].

### **1.3. Разностная схема типа М. Уипкинса и особенности счета на границах контактов**

Для рассматриваемого класса задач высокоскоростного взаимодействия тел является характерным наличие в расчетной области различных особенностей:

ударных волн,  
 волн разгрузки,  
 детонационных волн,  
 свободных поверхностей,

границ раздела сред с различными физико-механическими свойствами.

При этом в процессе решения задач возникают новые особенности, например, при ударе оболочки в слое ВВ вместо двух свободных поверхностей образуются контактная граница, детонационная и ударные волны, а при разрушении оболочки — новые свободные поверхности. Следует заметить, что кроме физических особенностей при решении данного класса задач конечно-разностными методами возникают неоднородности численного характера. Так, например, счет в граничных точках разностной сетки часто приходится вести, изменяя алгоритм, что приводит к дополнительным трудностям. Поэтому при выборе численного метода преимущество было отдано однородным схемам, которые позволяют проводить счет по единому алгоритму, независимо от наличия и характера особенностей в окрестностях расчетной точки.

При решении данного класса одномерных задач использовались лагранжевы координаты, что особенно удобно, когда в области большое количество свободных и контактных границ.

В качестве примера рассмотрим применение метода М. Уилкинса [31] или типа “крест” к интегрированию системы дифференциальных уравнений, описывающих упругопластическое деформирование. Исходную систему уравнений (1.2.3) в лагранжевых переменных представим в виде:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{r^{v-1}} \cdot \frac{\partial (r^{v-1} U)}{\partial r},$$

$$\frac{1}{V} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial r} + (v-1) \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r}, \quad (1.3.1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -P \frac{\partial V}{\partial t} + V \left[ S_1 \frac{\partial \epsilon_1}{\partial t} + (v-1) S_2 \frac{\partial \epsilon_2}{\partial t} \right],$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = U \quad (v=1, 2, 3),$$



где  $V = 1/\rho$  — удельный объем,  $\sigma_i = -P + S_p \sum_{i=1}^3 S_i = 0$ . Система уравнений (1.3.1) замыкается уравнением состояния и в области упругих деформаций законом Гука

$$\frac{\partial S_i}{\partial t} = 2\mu \left( \frac{\partial \epsilon_i}{\partial t} - \frac{1}{3V} \frac{\partial V}{\partial t} \right) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.3.2)$$

где  $\mu$  — модуль сдвига, а в пластической области — условием текучести Мизеса:

$$3/2(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \leq Y_0^2. \quad (1.3.3)$$

Компоненты тензора “упругих” напряжений  $S_j^e$  корректируются, чтобы неравенство (1.3.3) выполнялось, умножением каждой на множитель:

$$S_j^n = S_j^e \frac{\sqrt{2/3} Y_0}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}.$$

Как было показано С. С. Григоряном в примечании редактора к [31], подобная процедура эквивалентна применению в области пластических деформаций модели Прандтля—Рейсса. Скорости деформаций определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_1}{\partial t} &= \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \frac{\partial \epsilon_2}{\partial t} = \frac{U}{r}, \\ \frac{\partial \epsilon_3}{\partial t} &= \frac{\partial \epsilon_2}{\partial t} \quad \text{при } \nu = 3, \\ \frac{\partial \epsilon_3}{\partial t} &= 0 \quad \text{при } \nu = 2, \\ \frac{\partial \epsilon_3}{\partial t} &= \frac{\partial \epsilon_2}{\partial t} \quad \text{при } \nu = 1. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Предел упругости  $Y_0$  в общем случае может зависеть от давления, внутренней энергии, деформации и других параметров, учитывающих историю нагружения. Следует заметить, что если в приведенных уравнениях (1.3.1)—(1.3.4) положить  $\mu = 0$ ,  $Y_0 = 0$ , то система полученных уравнений будет описывать движение сжимаемого, невязкого, нетеплопроводного газа.



Исходную систему (1.3.1) представим с диссипативными членами в виде

$$\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{r^{v-1}} \frac{\partial (r^{v-1} U)}{\partial r},$$

$$\frac{1}{V} \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial (P+q-S_1)}{\partial r} + (v-1) \frac{S_1 - S_2}{r}, \quad (1.3.5)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial E}{\partial t} = -(P+q) \frac{\partial V}{\partial t} + V \left[ S_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + (v-1) S_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} \right],$$

где  $q$  — искусственная вязкость, которая вводится только на фронте волны сжатия. В данном случае применялись следующие виды вязкости:

1) линейная  $q = -C_1 C_0 \rho \frac{\partial U}{\partial r}$ ;

2) квадратичная  $q = C_2 \rho \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)^2$ ; (1.3.6)

3) комбинированная  $q = C_3 \rho \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 - C_4 \rho \frac{\partial U}{\partial r}$ ;

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — постоянные, а  $C_0$  — скорость звука.

Расчетную область  $r_0 \leq r \leq z_j$  делим на конечное число ячеек и строим равномерную по  $r$  сетку с ячейкой  $\Delta r_j$ . Масса ячеек равна  $m_{j+1/2} = \rho^k \frac{r_{j+1}^v - r_j^v}{v}$ , где  $k$  — номер материала среды в области,  $r$  — координаты узлов лагранжевой сетки,  $j = 1, 2, \dots$

Величины  $P, V, E, S_i$  отнесены к центрам ячеек на целых временных слоях, а массовая скорость  $U$  — к узлам на дробных временных слоях. Таким образом удастся достигнуть второго порядка аппроксимации на равномерной сетке и избежать интерполяции.

Разностная схема для (1.3.5) и (1.3.6) будет иметь вид

$$\frac{V_{j+1/2}^{n+1} - V_{j+1/2}^n}{\tau} = \frac{\left[ U_{j+1}^{n+1/2} (r_{j+1}^{n+1/2})^{v-1} - U_j^{n+1/2} (r_j^{n+1/2})^{v-1} + (\xi_{j+1/2}^{n+1/2}) \right]}{m_{j+1/2}},$$

$$\begin{aligned}
\frac{U_j^{n+1/2} - U_j^{n-1/2}}{\tau} &= \frac{[(-P^n - q^{n-1/2} + S_1^n)_{j+1/2} - (-P^n - q^{n-1/2} + S_2^n)_{j-1/2}]}{\frac{1}{2} \left[ \frac{r_{j+1}^n - r_j^n}{V_{j+1/2}^n} + \frac{r_j^n - r_{j-1}^n}{V_{j-1/2}^n} \right]} + \\
&+ \frac{\nu - 1}{2} \left[ \frac{(S_1)_{j+1/2}^n - (S_2)_{j+1/2}^n}{0,5 (r_{j+1}^n + r_j^n)} V_{j+1/2}^n + \frac{(S_1)_{j-1/2}^n - (S_2)_{j-1/2}^n}{0,5 (r_j^n + r_{j-1}^n)} V_{j-1/2}^n \right], \\
\frac{E_{j+1/2}^{n+1} - E_{j+1/2}^n}{\tau} &= - \left[ \frac{P^{n+1} + q^{n+1/2} + P^n + q^{n-1/2}}{2} \right]_{j+1/2} \cdot \frac{V_{j+1/2}^{n+1} - V_{j+1/2}^n}{\tau} + \\
&+ V_{j+1/2}^{n+1} \left[ (S_1)_{j+1/2}^{n+1/2} (\dot{\epsilon}_1)_{j+1/2}^{n+1/2} + (\nu - 1) \cdot (S_2)_{j+1/2}^{n+1/2} (\dot{\epsilon}_2)_{j+1/2}^{n+1/2} \right],
\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

$$P^{n+1} = P^{n+1}(V^{n+1}, E^{n+1}), \quad \frac{r_j^{n+1} - r_j^n}{\tau} = U_j^{n+1/2},$$

$$(\dot{\epsilon}_1)_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{U_{j+1}^{n+1/2} - U_j^{n+1/2}}{r_{j+1}^{n+1/2} - r_j^{n+1/2}}, \quad (\dot{\epsilon}_2)_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{U_{j+1}^{n+1/2} + U_j^{n+1/2}}{r_{j+1}^{n+1/2} + r_j^{n+1/2}}$$

$$(\dot{\epsilon}_2 = 0 \text{ при } \nu = 1),$$

$$\frac{(S_i)_{j+1/2}^{n+1} - (S_i)_{j+1/2}^n}{\tau} = 2\mu \left[ (\dot{\epsilon}_i)_{j+1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{3\tau} \left( \frac{V^{n+1} - V^n}{V^{n+1/2}} \right)_{j+1/2} \right] \quad (i = 1, 2),$$

$$(S_3)_{j+1/2}^{n+1} = - \left[ (S_1)_{j+1/2}^{n+1} + (S_2)_{j+1/2}^{n+1} \right],$$

где  $(\xi_{j+1/2}^{n+1/2})^*$  в первой формуле учитывается только при  $\nu = 3$  и имеет вид

$$\xi_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{\tau^2}{12} \left[ (U_{j+1}^{n+1/2})^3 - (U_j^{n+1/2})^3 \right],$$

$$r_{j+1}^{n+1/2} = 0,5 (r_{j+1}^n + r_{j+1}^{n+1}).$$

Как следует из полученных формул, удельная внутренняя энергия  $E_{j+1}^{n+1}$  определяется неявно, а если уравнение термодинамического состояния среды не

является линейной функцией от  $E^{n+1}$ , то величины  $P^{n+1}$  и  $E^{n+1}$  находим методом итераций.

Искусственная вязкость, так же как и давление, отнесены к центрам различных ячеек, т.е.

$$q_{j+1/2}^{n+1/2} = C_1 (C_0)_{j+1/2}^{n+1/2} \rho_{j+1/2}^{n+1/2} (U_{j+1}^{n+1/2} - U_j^{n+1/2}),$$

$$q_{j+1/2}^{n+1/2} = C_2 \rho_{j+1/2}^{n+1/2} (U_{j+1}^{n+1/2} - U_j^{n+1/2})^2,$$

$$q_{j+1/2}^{n+1/2} = C_3 \rho_{j+1/2}^{n+1/2} (U_{j+1}^{n+1/2} - U_j^{n+1/2}) + C_4 \rho_{j+1/2}^{n+1/2} (U_{j+1}^{n+1/2} - U_j^{n+1/2}).$$

В областях волн разряжения  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ . Расчет проводится по времени, начиная с момента  $t = t^n$  в следующем порядке:

1. Вычисляем  $U_j^{n+1/2}$ ,  $r_j^{n+1}$ ,  $V_{j+1/2}^{n+1}$ .
2. Определяем  $E_{j+1/2}^{n+1}$  и проверяем условие текучести Мизеса

$$(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)_{j+1/2}^{n+1} - \frac{2}{3} Y_0^2 = k^{n+1},$$

и если  $k^{n+1} \leq 0$ , то среда находится в упругой области, а если  $k^{n+1} > 0$ , то главное напряжение девиатора  $S_i$  корректируется по формулам

$$(S_1)_{\text{новые}}^{n+1} = S_1^{n+1} \sqrt{2/3} Y_0 / \sqrt{\sum_{i=1}^3 (S_i^2)^{n+1}},$$

$$(S_2)_{\text{новые}}^{n+1} = S_2^{n+1} \sqrt{2/3} Y_0 / \sqrt{\sum_{i=1}^3 (S_i^2)^{n+1}}.$$

3. Вычисляем  $P_{j+1/2}^{n+1}$  и проверяем выполнение законов сохранения.
4. Определяем новый шаг по времени  $\tau$  из условия устойчивости

$$\tau = C_\tau \cdot \min \left\{ \frac{\Delta r_{j+1/2}^{n+1}}{\sqrt{(C_0)_{j+1/2}^{n+1/2} + [\beta_\tau \Delta r_{j+1/2}^{n+1} (\dot{V}/V)^{n+1/2}]^*}} \right\},$$

где  $C_\tau$  и  $\beta_\tau$  — постоянные, вводимые для обеспечения устойчивости счета и



уменьшения шага по времени, чтобы выявить локальные физические особенности. Выражение в квадратных скобках в знаменателе равно нулю при  $\dot{V} \geq 0$ ,

$$C_0^2 = \frac{dP}{d\rho} + \frac{4\mu}{3\rho},$$

и в областях растяжения величина  $(\rho < \rho_0)C_0$  принимается

постоянной, равной начальной скорости звука.

В дальнейшем этот цикл повторяется до достижения заданного момента времени или других физических параметров, в зависимости от целей решаемой задачи.

Перед началом счета по этому алгоритму определяется положение узлов сетки  $r_k^{n+1}$ , и если для узлов сетки, лежащих на свободных поверхностях, выполняется условие  $r_{k-1}^{n+1} \leq r_k^{n+1}$ , то дальнейший счет осуществляется с предыдущим шагом  $\tau$ .

Если  $r_{k-1}^{n+1} > r_k^{n+1}$ , то происходит перехлест разностной сетки. Тогда итерационным методом подбирается  $\tau_n$ , такое, что узлы, двигающиеся со скоростями  $U_{k-1}^{n+1/2}$ ,  $U_k^{n+1/2}$ , сблизятся на заданную точность, после чего полагаем  $r_{k-1}^{n+1} = r_k^{n+1}$ , и новая скорость этой точки контакта поверхностей уточняется, исходя из выполнения закона сохранения импульса при ударе тел массой  $m_{j+1/2}$  и  $m_{j-1/2}$ , т.е.

$$\bar{U}_{k-1}^{n+1/2} = \bar{U}_k^{n+1/2} = \frac{m_{j+1/2} U_k^{n+1/2} + m_{j-1/2} U_{k-1}^{n+1/2}}{m_{j+1/2} + m_{j-1/2}},$$

где  $k = 2j$  — номер левого узла  $j$ -й ячейки. Для описания образования или уменьшения в расчетной области новых свободных поверхностей используется двойная нумерация узлов разностной сетки.

Остановимся подробнее на анализе особенностей расчета, когда в области взаимодействия имеются границы раздела сред с различными акустическими импедансами ( $R_i = \rho_i C_i$ ). При переходе ударной волны через такие границы происходит распад разрыва, при котором в зависимости от жесткости сред может образовываться новая ударная волна или волна разрежения. Так, известно [92], что от более жесткой среды ударная волна отражается в виде ударной волны, а от менее жесткой — в виде волны разрежения.

Для исследования этих методических вопросов расчета была рассмотрена задача о распространении ударных волн в системе плотноупакованных пла-

стин, вызванных ударом, решение которой в газодинамическом приближении дано в работах [93—95]. Таким образом, данная физическая задача математически формулируется следующим образом:

Найти функции  $U, P, V, E, \sigma_r, \varepsilon_r \in C$  в области  $D_2$  ( $A_j < r < F_N, 0 \leq t < \infty$ ), удовлетворяющие системе уравнений (1.3.1)—(1.3.4) при следующих условиях:

начальные —  $t = t_0$  в пластине-ударнике ( $A_1 < r < A_2$ ) полагаем  $\rho = \rho_y, P = P_0 = 0, U = U_y, S_i = 0$ ; в пластинах преграды ( $B_j < r < F_j$ ) —  $\rho = \rho_p, P = P_0 = 0, U = 0, S_i = 0, j = 1, \dots, N$ ;

граничные — на свободных поверхностях  $r = A_1, r = F_N, \sigma_1 = \sigma_2 = 0$ , а на контактных поверхностях  $r = A_2 = B_1, r = B_k = F_k$  ( $k = 2, \dots, N - 1$ ) выполняется условие непрерывности нормальных напряжений и скоростей. В качестве уравнения состояния использовалось соотношение

$$P = a_0^2 (\rho - \rho_0) + (n - 1) \rho \cdot E,$$

где  $a_0$  и  $n$  — постоянные материала.

Данная задача решалась численным методом, описанным выше, в следующих случаях:

**Пример 1.** Рассмотрим соударение железной пластины толщиной 0,5 с одноименной преградой толщиной 0,9 со скоростью  $U_y = 0,5263$ . При этом преграду условно разделим на три части  $A, B, C$  толщиной по 0,3 и возьмем сетку в ударнике в частях  $A$  и  $C$  с шагом  $\Delta r = 0,01$ , а в области  $B - \Delta r_B = 0,03$ , т.е. возникшая при ударе ударная волна пройдет через поверхности, где нарушается регулярность сетки. На рис. 1.17 показан профиль давления при счете с линей-

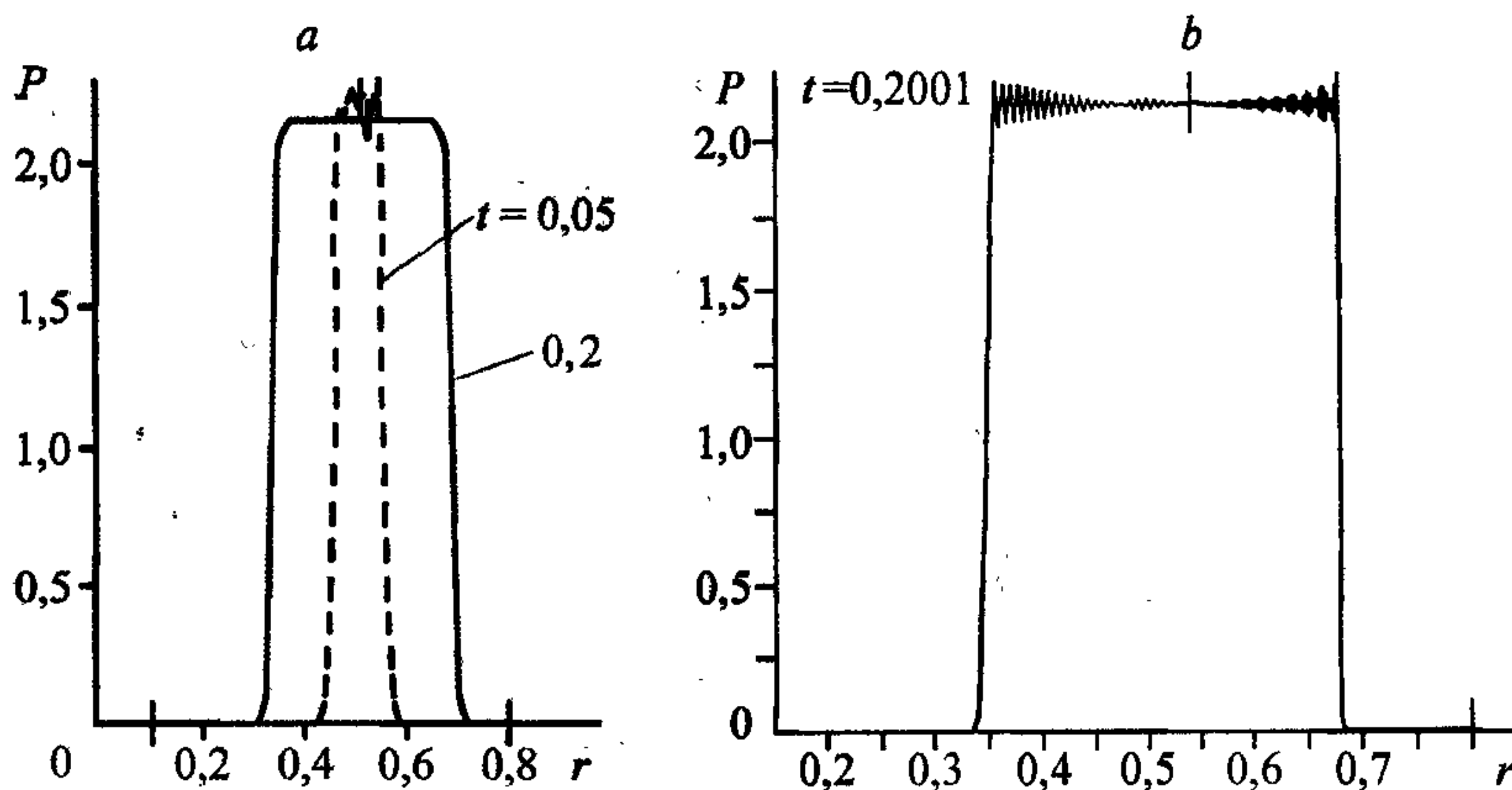


Рис. 1.14. Зависимость давления от расстояния на два момента времени на различных сетках.



ной вязкостью до и после перехода ударной волны через контакт  $AB$  (см. рис. 1.17), где изменяется шаг  $\Delta r$ . На решении возникает возмущение, которое напоминает волну сжатия, отраженную от границы  $AB$ . При этом значение давления (массовой скорости) за волной увеличивается (уменьшается). Переход же ударной волны через границу  $BC$  (см. рис. 1.18) сопровождается возникновением возмущения типа волны разрежения. При переходе ударной волны через границу, где изменяется регулярность лагранжевой сетки, происходит явление типа распада разрыва, что не соответствует реальному процессу. Образование этих возмущений легко показать на примере уравнения движения, аналогично работе [93].

Приведенный пример показывает, что от выбора счетных параметров и реализации внутренних краевых условий не только зависит точность расчета, но и может искажаться качественная картина движения. Так, если в однородной преграде через некоторый интервал увеличивать шаг сетки, можно получить "счетную неограниченную кумуляцию" (НК) [95].

**Пример 2.** Рассмотрим решение одного из примеров НК ударной волны в слоистой системе пластин [96]. Стальной ударник толщиной  $A_1A_2 = 0,5$  ударяется со скоростью  $U_y = 0,5263$  по плотно упакованным пластинам: 1 — платина толщиной  $B_1F_1 = 0,21445$ ; 2 — сталь,  $B_2F_2 = 0,388$ ; 3 — алюминий,  $B_3F_3 = 0,4079$ ; 4 — магний,  $B_4F_4 = 0,32235$ ; 5 — плексиглас,  $B_5F_5 = 0,1763$  (рис. 1.15). На рисунке представлены зависимости массовой скорости и давления в среде на ряд моментов времени, поперечными штрихами отмечены границы пластин. Из расчета отчетливо виден переход головной ударной волны из пластин с большей акустической жесткостью  $R_j$  в пластины с меньшей  $R_{j+1}$ . При этом от контактных границ распространяется ударная волна в  $(j+1)$ -ю пластину и волна разрежения — в  $j$ -ю, массовые скорости за фронтом ударной волны растут, а давление падает. Вновь образованные первичные волны разрежения в свою очередь отражаются от контактных границ волнами сжатия и т.д. Заметим, что расчет проведен при условии, запрещающем разрушение пластин, но с учетом их разъединения в случае возникновения критического напряжения на границе двух пластин. В рассмотренной задаче скорость последней пластины достигала значений 0,85, расчет задачи в акустическом приближении дает скорость 0,9 [96].

Представляет определенный интерес рассмотреть задачу удара с теми же параметрами, но пластины в преграде размещены в обратном порядке при сохранении размеров. На рис. 1.16 приведены  $P$  и  $U$  на несколько моментов вре-



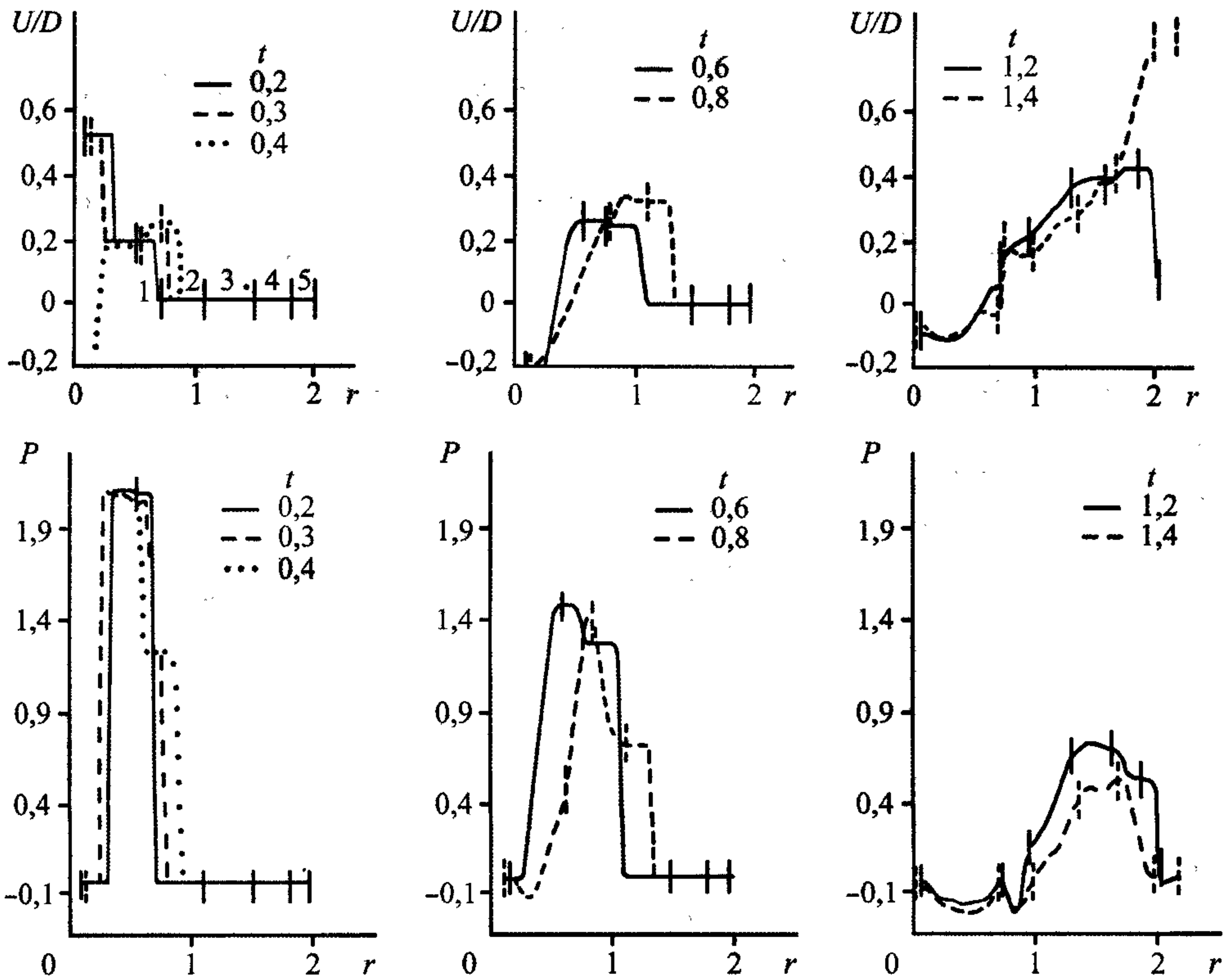


Рис. 1.15. Зависимость массовой скорости  $v$  и давления  $P$  в среде на разные моменты времени, когда  $R_i < R_{i+1}$ .

Поясн. см. в тексте.

мени для данной задачи. В этом случае наблюдаются увеличение амплитуды давления и уменьшение массовой скорости при распространении ударной волны в многослойной преграде с увеличивающимися  $R_j$  в пластинах. Причем возрастание амплитуды давления головной ударной волны наблюдается не только при переходе из пластины с меньшим  $R_j$  в пластину с большим  $R_{j+1}$ , но и за счет возникновения новых волн сжатия (см., например,  $t = 0,2 + 0,6$ , рис. 1.16), которые догоняют головную волну.

**Пример 3.** Рассмотрим случай, когда акустические жесткости пластин существенно различны: пластина-ударник железная с  $\rho_y = 7,86 \text{ г/см}^3$ , преграда платиновая с  $\rho_1 = 21,37 \text{ г/см}^3$ . Начальная скорость удара  $U_y = 0,4 \text{ см/мкс}$ . Расчеты проводились в безразмерных переменных, при этом за характерную плотность и скорость приняты:  $\rho_{\text{ВВ}} = 1,62 \text{ г/см}^3$ ,  $D = 0,76 \text{ см/мкс}$ , где  $\rho_{\text{ВВ}}$  и  $D$  соответственно плотность взрывчатого вещества ТТ50/50 и скорость детонации.

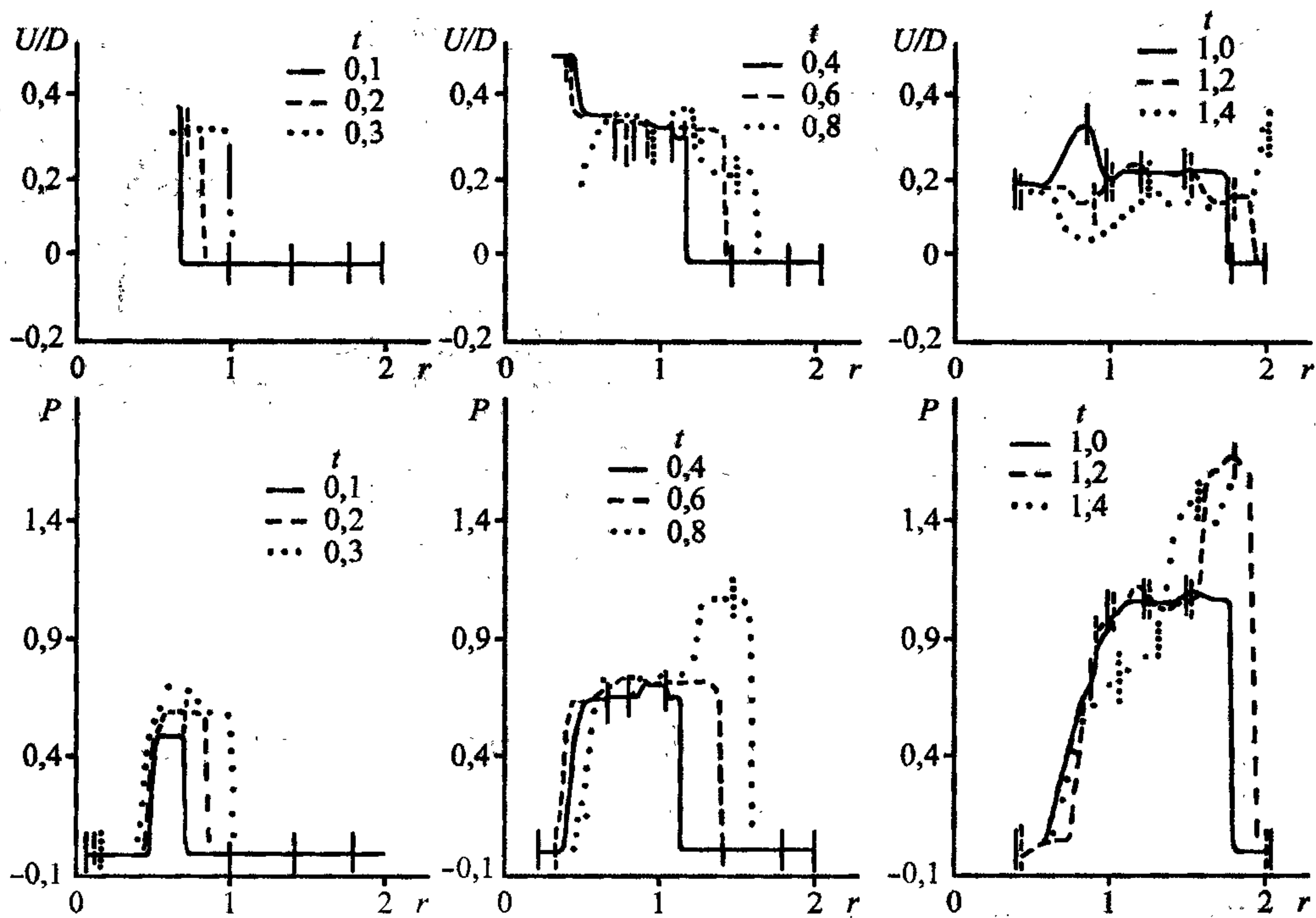


Рис. 1.16. Зависимость массовой скорости и давления в среде на разные моменты времени, когда  $R_i > R_{i+1}$ .

Выбор этих параметров в качестве характерных обусловлен рассмотрением задачи, в которой начальные ударные волны возбуждаются не ударом, а взрывом слоя ВВ. В безразмерном виде начальные параметры задачи следующие:  $\rho_y = 4,8395$ ,  $\rho_1 = 13,1914$ ,  $U_y = 0,5263$ ,  $A_1 A_2 = 0,5$ ,  $B_1 F_1 = 0,3$ ,  $N = 1$ . Для простоты принято  $t_0 = 0$ ,  $A_1 A_2 = 0,5$ ,  $A_1 = 0$ . Расчет проведен на сетке: 50 ячеек в пластине-ударнике, 30 — в преграде, коэффициент линейной искусственной вязкости равен 0,5.

Из рис. 1.14, где приведены зависимости давления от  $r$  на два момента времени, видно, что на начальной стадии решение не монотонно вблизи поверхности соударения, а затем осцилляции затухают. Амплитуда этих осцилляций существенно уменьшается, если в начальные моменты времени несколько изменить  $U$  или искусственно “размазать” начальный профиль скорости с привлечением решения задачи о распаде разрыва. В расчете выбрана равномерная по  $r$  сетка в пластине-ударнике и преграде, но в силу большого различия их плотностей счет в районе поверхности раздела проводится неточно. Это в основном определяется тем, что несмотря на непрерывность изменения  $d\sigma_1/dr$



при переходе через контактную поверхность, производная  $\partial\sigma_1/\partial r$  терпит разрыв, а это приводит к понижению локальной аппроксимации (аппроксимации в точке) члена  $\partial\sigma_1/\partial r$ . Расчет на сетке, в которой равны массы всех ячеек, приводит к некоторому уменьшению осцилляций, но их не ликвидирует, так как в этом случае на границах сред нарушается центрирование конечно-разностных уравнений.

В работе [94] приведен один из способов аппроксимации конечно-разностных газодинамических уравнений на поверхности раздела сред с различными шагами  $\Delta r$ , при этом используется факт непрерывности  $\partial P/\partial r$  при переходе через границу. Применим эту процедуру для упругопластических течений при аппроксимации  $\partial\sigma_1/\partial r$ .

Пусть  $\Delta r_1$  и  $\Delta r_2$  — шаги по  $r$  слева и справа от границы с индексом  $j$ , а напряжения на момент времени  $t = t^n$  в центрах соседних ячеек

$$(\sigma_1)_{j-3/2}, (\sigma_1)_{j-1/2}, (\sigma_1)_{j+1/2}, (\sigma_1)_{j+3/2}.$$

Производную  $\partial\sigma_1/\partial r$  в точках  $r_{j-1}$  и  $r_{j-1/4}$  можно аппроксимировать:

$$\frac{(\sigma_1)_{j-1/2} - (\sigma_1)_{j-3/2}}{\Delta r_1} \text{ и } \frac{2[(\sigma_1)_j - (\sigma_1)_{j-1/2}]}{\Delta r_1}.$$

Отсюда, экстраполируя, получим  $\partial\sigma_1/\partial r$  в точке  $r_j$ :

$$\frac{8}{3} \left( \frac{(\sigma_1)_j - (\sigma_1)_{j-1/2}}{\Delta r_1} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{(\sigma_1)_{j-1/2} - (\sigma_1)_{j-3/2}}{\Delta r_1} \right) \approx \frac{\partial\sigma_1}{\partial r}.$$

Аналогично, имеем

$$\frac{8}{3} \left( \frac{(\sigma_1)_{j+1/2} - (\sigma_1)_j}{\Delta r_2} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{(\sigma_1)_{j+3/2} - (\sigma_1)_{j+1/2}}{\Delta r_2} \right) \approx \frac{\partial\sigma_1}{\partial r}.$$

Исключая  $(\sigma_1)_j$ , находим

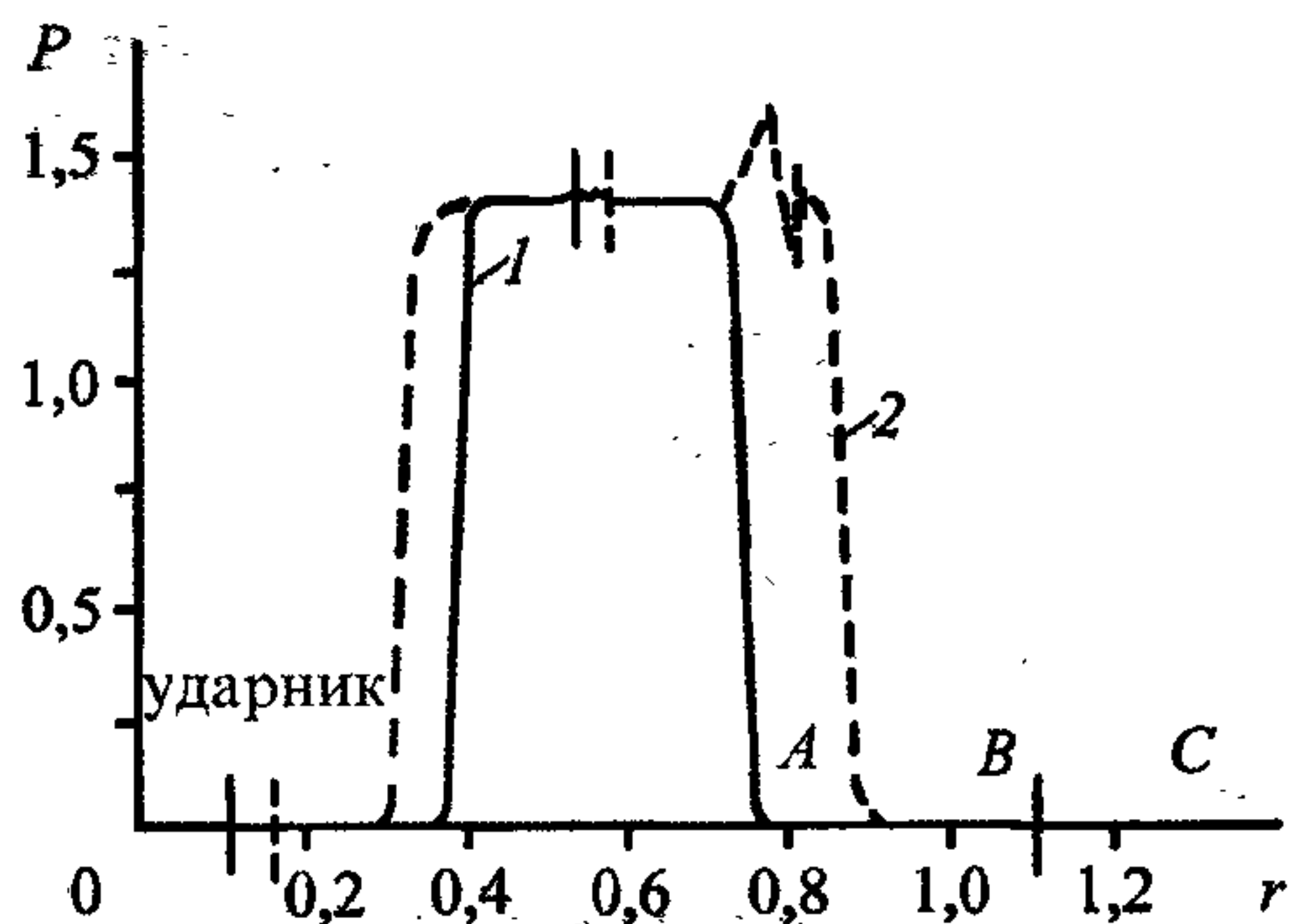


Рис. 1.17. Профиль давления при счете с линейной вязкостью до и после перехода ударной волны через контакт  $AB$  на моменты времени  $t = 0,2$  мкс (1) и  $t = 0,3$  мкс (2).

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial r}\right)_j = \frac{3[(\sigma_1)_{j+1/2} - (\sigma_1)_{j-1/2}] - 1/3[(\sigma_1)_{j+3/2} - (\sigma_1)_{j-3/2}]}{\Delta r_1 + \Delta r_2}.$$

Такая аппроксимация в сочетании с вышеуказанным размазыванием начальных градиентов течения практически полностью ликвидирует немонотонность решения.

На рис. 1.14, б приведена зависимость  $P$  от  $r$  при счете на сетке: 100 ячеек в пластине-ударнике, 164 — в преграде, с применением квадратичной искусственной вязкости [31] с коэффициентом  $q_1 = 2$ . Из расчета видно, что решение за фронтами ударных волн имеет периодически осцилляционный затухающий вид, причем по мере распространения волн амплитуда возмущений увеличивается.

Заметим, что при отражении таких ударных волн от свободной поверхности появляются осцилляции решения и за волной разрежения. Кроме того, если в преграде и ударнике выбрать свое  $q$  в зависимости от соотношения их плотностей, получаются более монотонные профили.

Рассмотренную процедуру аппроксимации  $\partial \sigma_1 / \partial r$  на контактных границах следует применять и в примерах 1 и 2 для уменьшения и ликвидации нефизических осцилляций.

Подробный анализ и использование разностной схемы типа М. Уилкинса для решения многомерных задач будут приведены в главах 3 и 6.

Как было показано в п. 1.1 и 1.2 при больших скоростях соударения, ана-

лиз процессов взаимодействия с большой степенью точности можно проводить на основе газодинамической модели с более сложным уравнением состояния. В такого класса задачах имеются большое количество контактных границ и сильное деформирование расчетной сетки, что накладывает существенные ограничения на разностные методы. Одним из методов, который комбинирует свойства эйлера и лагранжева подходов и позволяет исключить недостатки

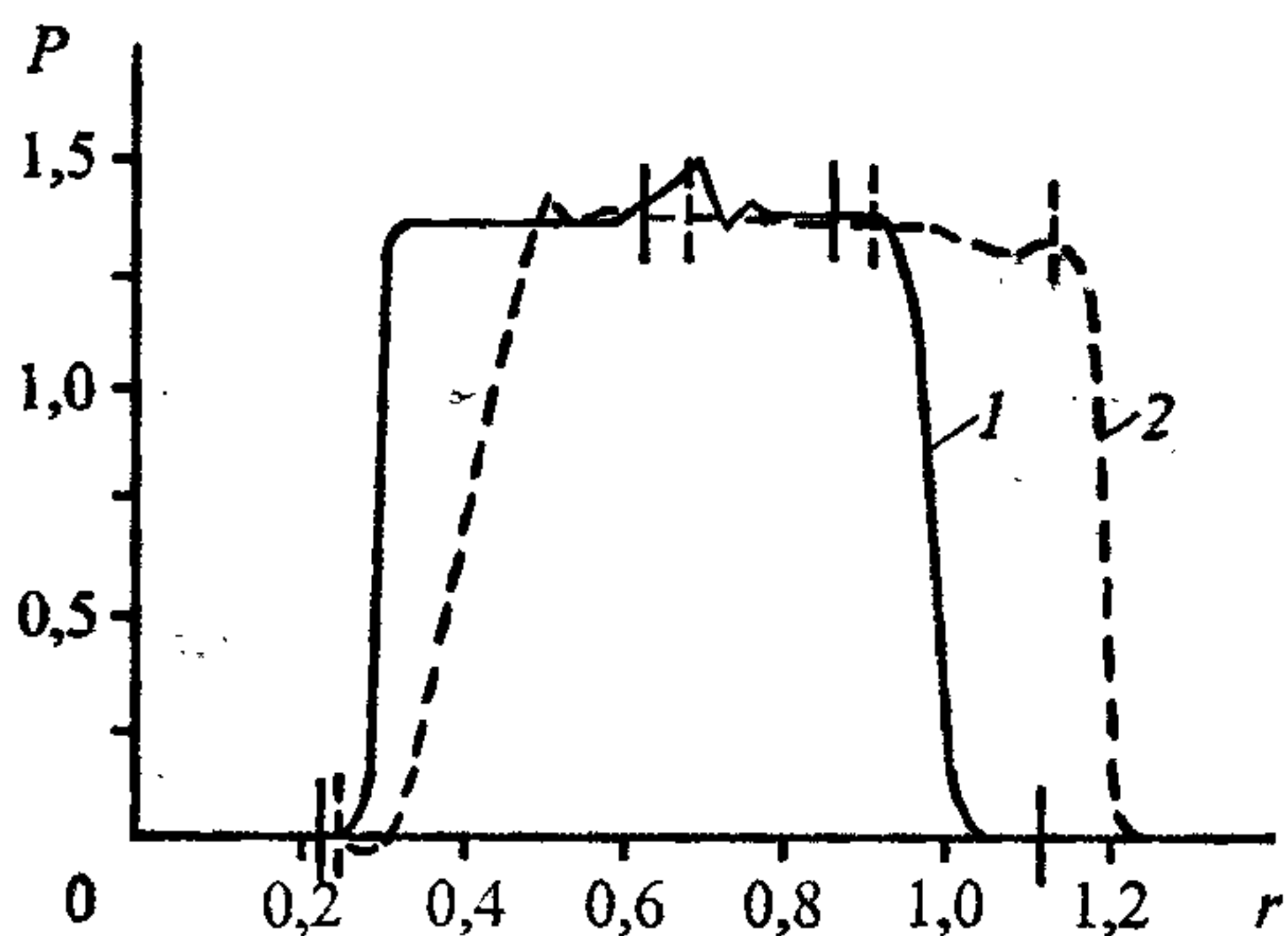


Рис. 1.18. Профиль давления при счете с линейной вязкостью до и после перехода ударной волны через контакт АВ на моменты времени  $t = 0,4$  мкс (1) и  $t = 0,6$  мкс (2).



каждого, является метод частиц в ячейках, предложенный Харлоу [99] и активно применявшийся для решения задач с большими деформациями Н. Н. Анучиной [100], В. Е. Петренко [101] и Н. Н. Яненко с сотрудниками [102, 103]. Следует заметить, что данный метод предъявляет высокие требования к ЭВМ, так как представление среды в виде дискретных частиц-точек требует их наличия до десятков тысяч в расчетной области и условие устойчивости схемы при  $N \rightarrow \infty$  имеет вид

$$\frac{\tau}{h} \leq \frac{|V|}{(|V|+C)^2},$$

где  $N$  — число частиц,  $h$  и  $\tau$  — шаги по пространственной и временной координатам,  $C$  — скорость звука, а  $V$  — скорость движения среды. При  $V \ll C$ , согласно условию устойчивости, имеют место сильные колебания расчетных параметров, связанные с дискретным характером представленной среды. Чтобы избежать этого нежелательного явления, в [101, 103, 104] было предложено модифицировать метод и ввести вместо частиц-точек частицы конечного размера сферической формы. Это усложняет вычислительный алгоритм, но смягчает паразитные колебания, вызываемые переходом частиц из одной ячейки в другую при малом числе частиц. Если же считать, что в ячейке находится всего одна частица, которая занимает весь объем, то данный подход переходит к известному методу “крупных частиц”, предложенному О. М. Белоцерковским и Ю. М. Давыдовым [105], и автоматически позволяет предложить вычислительную процедуру, когда в области больших деформаций границ используется модифицированный метод частиц, а в остальной области — метод крупных частиц. Подробный анализ и использование этого подхода для решения задач высокоскоростного взаимодействия тел приведены в главе 6.

#### 1.4. Примеры решения практических задач

В течение ряда лет авторам данной коллективной монографии приходилось отвечать на запросы практики, формируя уровень математического моделирования данного класса задач в отраслях оборонных министерств, решая задачи в

газодинамическом и упругопластическом приближениях. Для этой цели ими разработаны или существенно модернизированы численные алгоритмы и созданы комплексы программ. Примеры расчетов с использованием этих комплексов приведены в этом параграфе.

### 1.4.1. Пробитие тонких преград при $M_0 > 0,75$

Анализ отражения и взаимодействия ударных волн в ударниках и полубесконечных преградах со скоростями встречи  $M_0 > 0,75$  исследован достаточно хорошо в [106]. Установлены связи между геометрическими и физическими параметрами на конечной стадии явления, т.е. глубины и ширины кратеров в зависимости от формы ударников, асимптотики эквивалентности полей течения и др. Более сложным волновым процессом характеризуются явления взаимодействия с тонкими однородными и многослойными преградами.

Под тонкими преградами в данном случае будем понимать такие, у которых толщины меньше диаметра ударника. Рассеяние энергии при ударе в тонких преградах происходит более сложным образом, чем в полубесконечных, так как происходит совмещение сдвига и радиального сжатия среды.

Рассмотрим задачу о соударении компактного элемента с тонкой однослойной преградой при таких скоростях удара, когда возникающие в зоне взаимодействия давления превышают предел прочности материалов ударника и преграды. Начальная геометрия представлена на рис. 1.19, где  $M_1M_2M_3M_4M_1$  — преграда,  $C_1C_2C_3C_4C_1$  — ударник, а  $C_2C_3$  — граница контакта.

Математическая постановка данной задачи сводится к следующей:

Найти функции  $\rho, U, V, E, P \in C$ , удовлетворяющие системе уравнений Эйлера в области

$$\Omega = \{[0 \leq t \leq T] \leq \bar{D}(r, z, t)\},$$

и условиям:

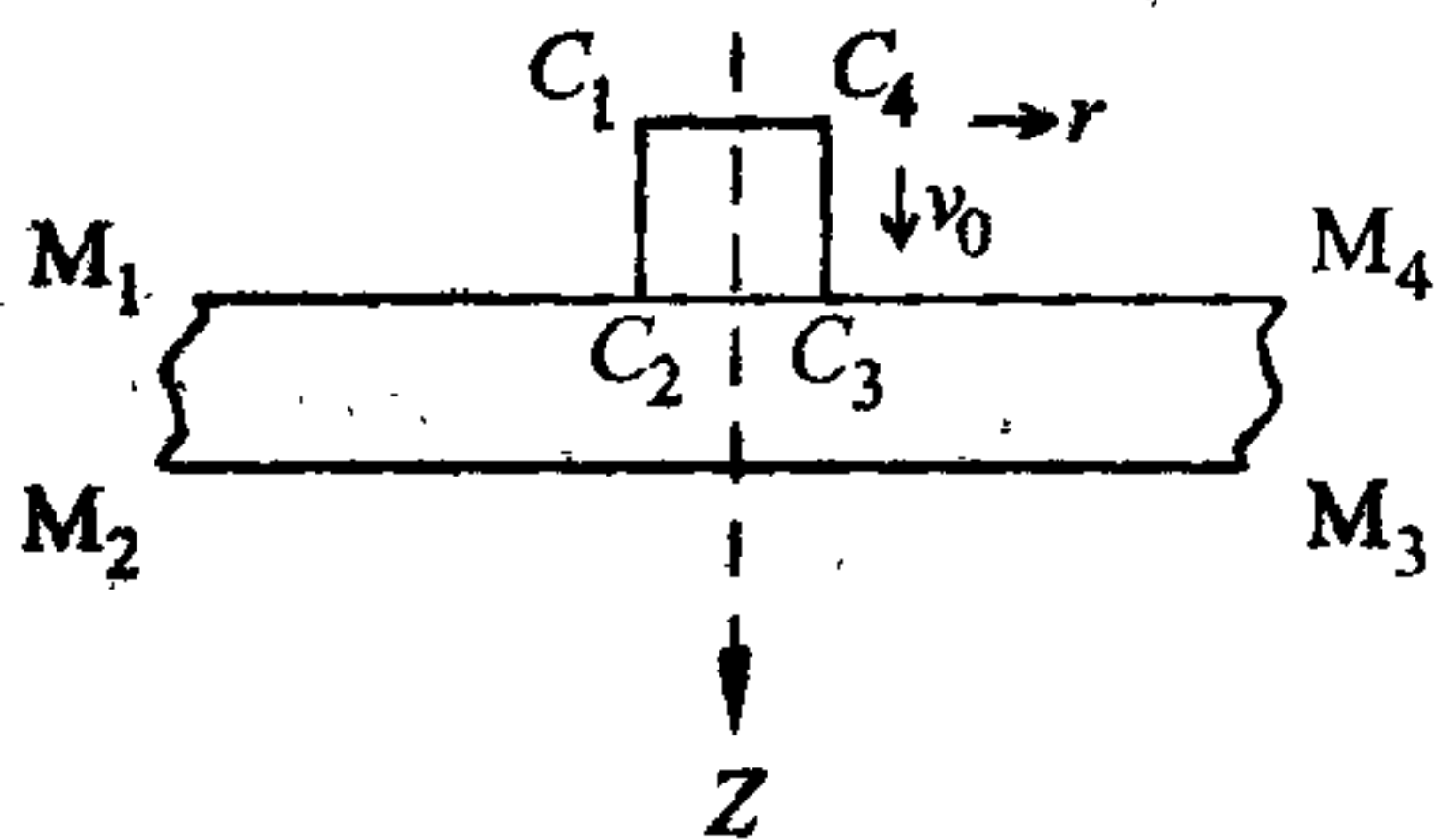


Рис. 1.19. Геометрия ударника и преграды на начальный момент соударения.



граничным —

$$P = 0 \text{ на } C_2 C_1 C_4 C_3,$$

$$P = 0 \text{ на } C_2 M_1 M_2 M_3 M_4 C_3$$

(т.е. на свободных поверхностях), на  $C_2 C_3$  выполняется непрерывность нормальных скоростей и давления в ударнике и преграде  $v_n^+(k, t) = v_n^-(k, t)$ ,  $P^+(k, t) = P^-(k, t)$ , где  $k(r, z, t) = 0$  — уравнение границы контакта  $C_2 C_3$ ;

начальным —

$U(r, z, 0) = 0$ ,  $v(r, z, 0) = v_0 = \text{const}$ ,  $P(r, z, 0) = P_0$ ,  $\rho(r, z, 0) = \rho_0 = \text{const}$  в ударнике  $C_1 C_2 C_3 C_4 C_1$  и  $U(r, z, 0) = v(r, z, 0) = 0$ ,  $P(r, z, 0) = P_1$ ,  $\rho(r, z, 0) = \rho_1$  в преграде  $M_1 M_2 M_3 M_4 M_1$ .

В том случае, когда задача симметрична относительно оси  $OZ$ , то достаточно решение находить в половине области  $D(r, z, t)$ , выполняя на оси  $OZ$  условия:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{r=0} = 0, \quad (r^{\nu} U) \Big|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \text{ для всех } 0 < t \leq T_0.$$

В конкретных расчетах использовалась зависимость давления от плотности внутренней энергии, определяемая формулой  $P = (\gamma - 1)\rho E$ , где  $\gamma$  — постоянная величина.

Решение поставленной задачи осуществляется модифицированным методом Харлоу, описание которого приведено в [102—104]. Положение ударных волн в различные моменты времени при  $t > 0$  определялось с помощью дифференциального анализатора [107].

После соударения ( $t > 0$ ) от контактной границы в противоположные стороны будут распространяться ударные волны. Одна —  $Y_0$  — влево в ударник со скоростью  $D_0$ , другая —  $Y_1$  — в преграду со скоростью  $D_1$  (рис. 1.20). Ударная волна  $Y_0$  распространяется против движения ударника практически со скоростью удара, в результате чего  $Y_0$  остается почти неподвижной относительно прег-

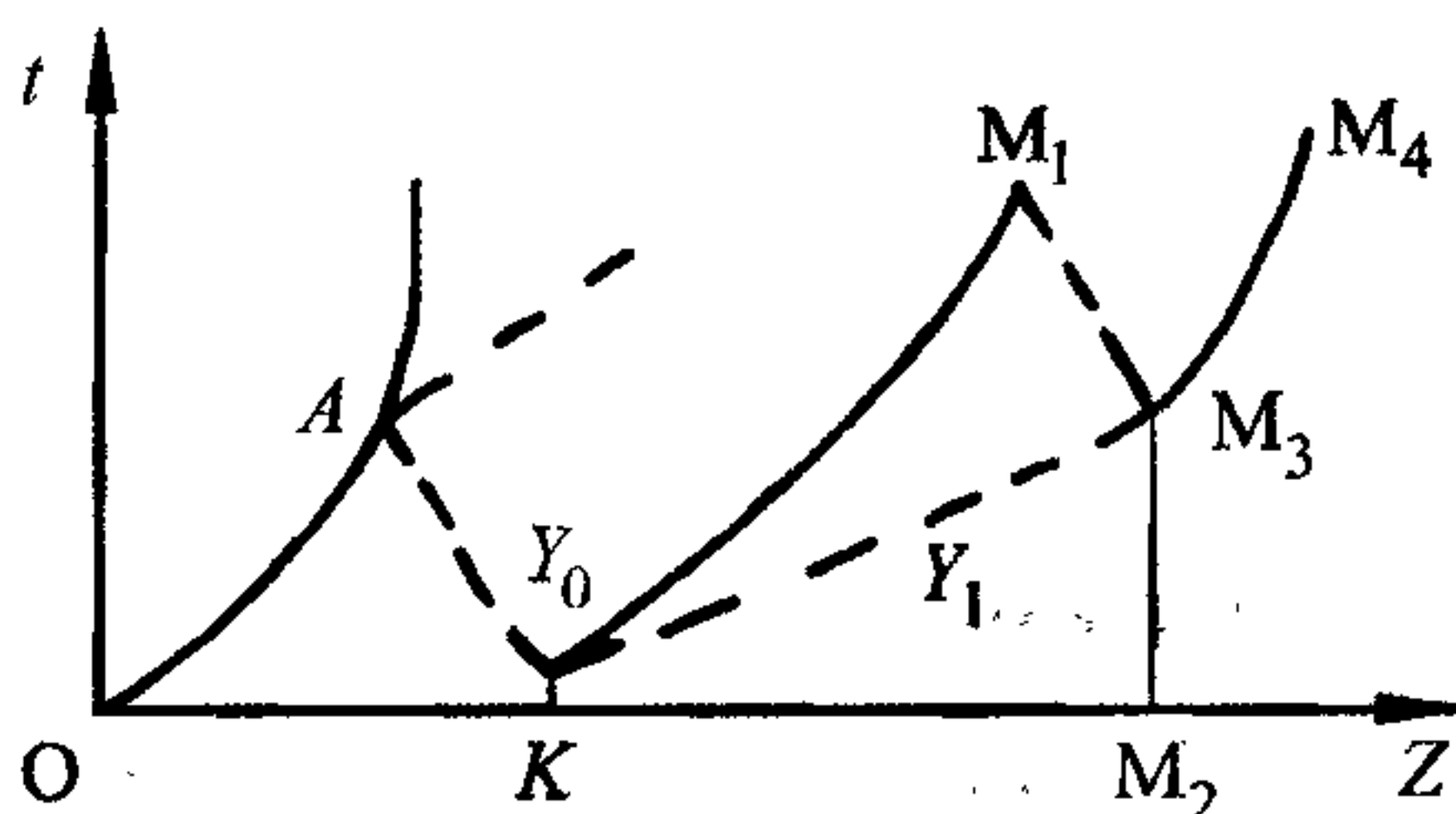


Рис. 1.20. Качественная картина распространения ударных волн в ударнике и преграде по оси симметрии ( $r = 0$ ).

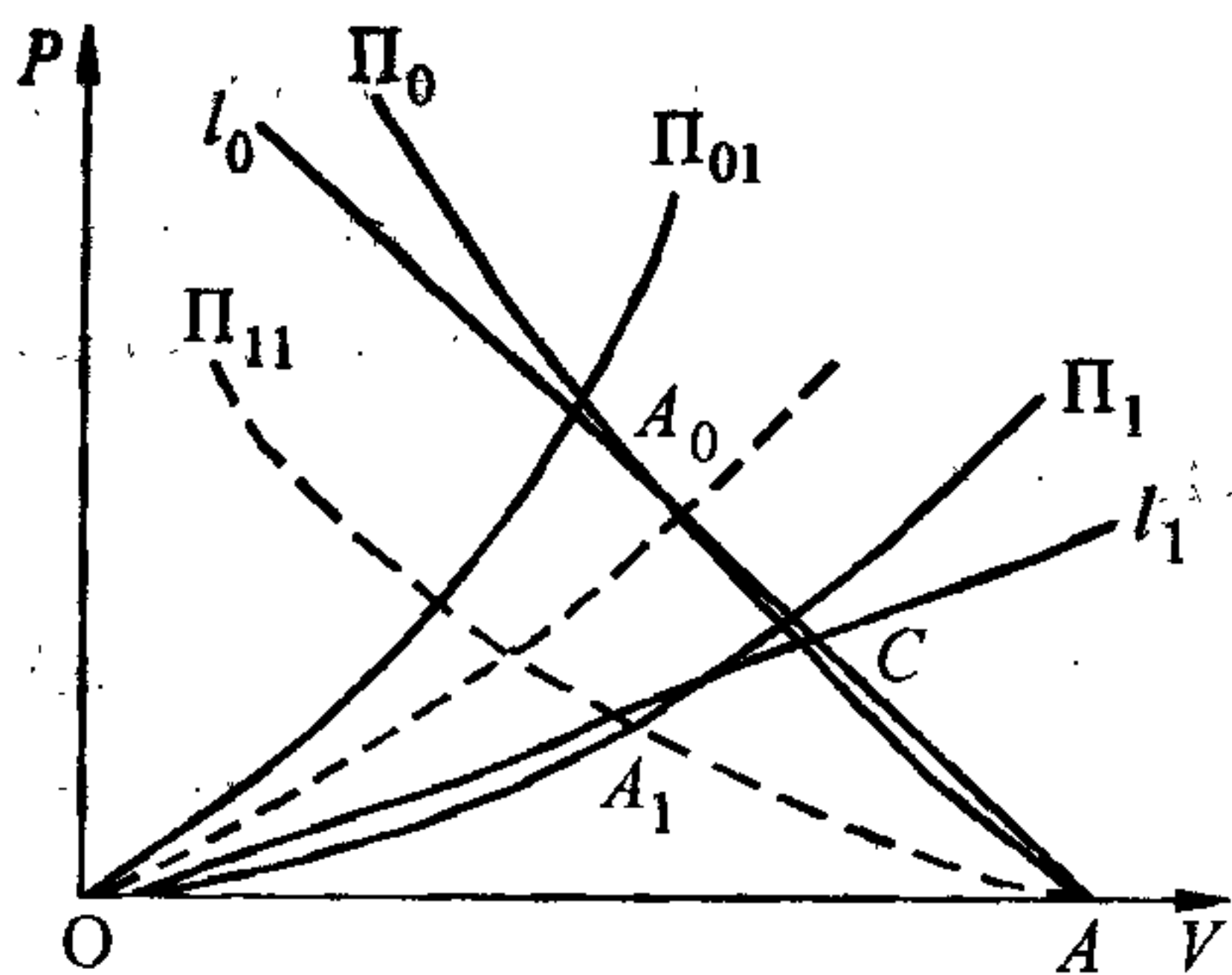


Рис. 1.21. Приближенный способ вычисления давления от удельного объема по оси симметрии.

рады пока не происходит встреча его с тыльной поверхностью ударника ОА (см. рис. 1.20).

Ударные поляры для этих волн схематично приведены на рис. 1.21 и обозначены соответственно через  $\Pi_0$  и  $\Pi_1$ . Точка  $A$  с координатами  $(v_0, 0)$ , где  $v_0$  — скорость соударения, соответствует начальному состоянию для ударника, а точка  $O(0, 0)$  — для преграды.

Поскольку при соударении однородных материалов частицы приобретают массовую скорость  $v_0/2$ , а давление  $P = R v_0/2$ , где  $R = \rho_0 D$  — акустическое сопротивление, то точка  $A_0$  имеет координаты

динаты  $\left[ \frac{v_0}{2}, R_0 \left( \frac{v_0}{2} \right) \cdot \frac{v_0}{2} \right]$ , а  $A_1$  —  $\left[ \frac{v_0}{2}, R_1 \left( \frac{v_0}{2} \right) \cdot \frac{v_0}{2} \right]$ . Аппроксимируем

ударные поляры  $\Pi_0$  и  $\Pi_1$  прямыми линиями  $l_0$  и  $l_1$ , первая из которых проходит через точки  $A$  и  $A_0$ , а вторая через  $O$  и  $A_1$ . Точка пересечения этих прямых  $C$  определяет начальные значения давления и массовой скорости, возникающие при соударении ударника с преградой, где

$$\begin{cases} P = R_1 \left( \frac{v_0}{2} \right) \cdot v, \\ P = R_0 \left( \frac{v_0}{2} \right) \cdot (v_0 - v). \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Необходимо заметить, что здесь существенной является зависимость акустического сопротивления материала  $R$  от  $v_0/2$ , т.е. если взять ударную адиабату в форме  $D = a + \lambda v_0$ , где  $a$  и  $\lambda$  — константы, характеризующие данный материал, то  $R = \rho(a + \lambda v_0/2)$ .

В дальнейшем для удобства обозначения не будем отмечать в формулах эту зависимость от  $v_0/2$ , тогда, разрешая систему уравнений (1.4.1), имеем

$$P = \frac{R_1}{1 + \frac{R_1}{R_0}} v_0, \quad v = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_0}} v_0. \quad (1.4.2)$$



Выделим три предельных частных случая:

пусть  $D \approx C_0$ , где  $C_0$  — скорость распространения слабой ударной волны (звука). Тогда акустическое сопротивление материала равно  $R = \rho_0 C_0$  и

$$P = \frac{\rho_0 C_0}{1 + \frac{\rho_1 C_1}{\rho_0 C_0}} v_0, \quad v = \frac{1}{1 + \frac{\rho_1 C_1}{\rho_0 C_0}} v_0; \quad (1.4.3)$$

пусть  $D \approx v_0$ . Тогда в формулах (1.4.2) акустические сопротивления заменяем плотностями соответствующих слоев и следовательно

$$P = \frac{\rho_1}{1 + \frac{\rho_1}{\rho_0}} v_0^2, \quad v = \frac{1}{1 + \frac{\rho_1}{\rho_0}} v_0. \quad (1.4.4)$$

Этот случай применим только в диапазоне больших скоростей, т.е.  $2C_0 < v_0 < 3C_0$ ;

пусть  $D \approx a + \lambda(v_0/2)$ , тогда

$$P = \frac{\rho_0 (a_0 + \lambda v_0/2)}{1 + \frac{a_1 + \lambda_1 v_0/2}{a_0 + \lambda_0 v_0/2}} v_0, \quad v = \frac{v_0}{1 + \frac{a_1 + \lambda_1 v_0/2}{a_0 - \lambda_0 v_0/2}}. \quad (1.4.5)$$

Для сравнения были проведены расчеты по формулам (1.4.3)—(1.4.5) и данным экспериментов. Результаты приведены в табл. 1.8, из них следует, что формула (1.4.5) применима в диапазонах как малых, так и больших скоростей. Ошибка не превышает 6%, что позволяет проводить простые оценки величин давления и скоростей на контактных границах, а также проверять достоверность численного метода.

Ударная волна  $Y_1$ , распространяющаяся в мишени, через некоторое время выходит на ее тыльную поверхность  $M_2M_3$  (см. рис. 1.20) и отражается при этом в противоположном направлении волной разрежения. Материал тыльной поверхности мишени ускоряется, а в волне разрежения давление и плотность плавно понижаются, и при определенных условиях могут возникать плавление и испарение материала мишени.

В процессе, описанном выше, необходимо еще учесть волны разрежения, которые генерируются от свободных поверхностей мишени  $C_2M_1$  и  $C_3M_4$  (см. рис. 1.19), что приводит к движению среды в осевом и радиальном направлениях.

Результаты расчета для различных

Материал		Скорость удара $v_0$ , км/с	Давление,			
ударника	преграды		$P_{n0}$ [108]	$P_{n0}$ [106]	$P_{n0}$ [119]	$\bar{P}_{n0}$ [43]
Cu	Fl	0,2	0,0035	0		0,00368
Cu	Fl	0,6	0,0115			0,0111
Cu	Fl	1	0,21			0,0184
Al	Al					
Cu	Cu	7,5				0,048
Al	Pb	7,5			0,106	0,118
Al	Be	15		0,50	0,324	0,150
Al	Pl	15		0,27		0,147
Al	Al	15		0,185		0,039
Cu	Cu	15		0,31		0,127
Cu	Cu	15			1,045	0,472
Fe	Al	15				
Fe	Al	20				

**Эффект ударного нагрева и критерий разрушения**

При ударном нагружении материалов каждый элемент преграды и ударника

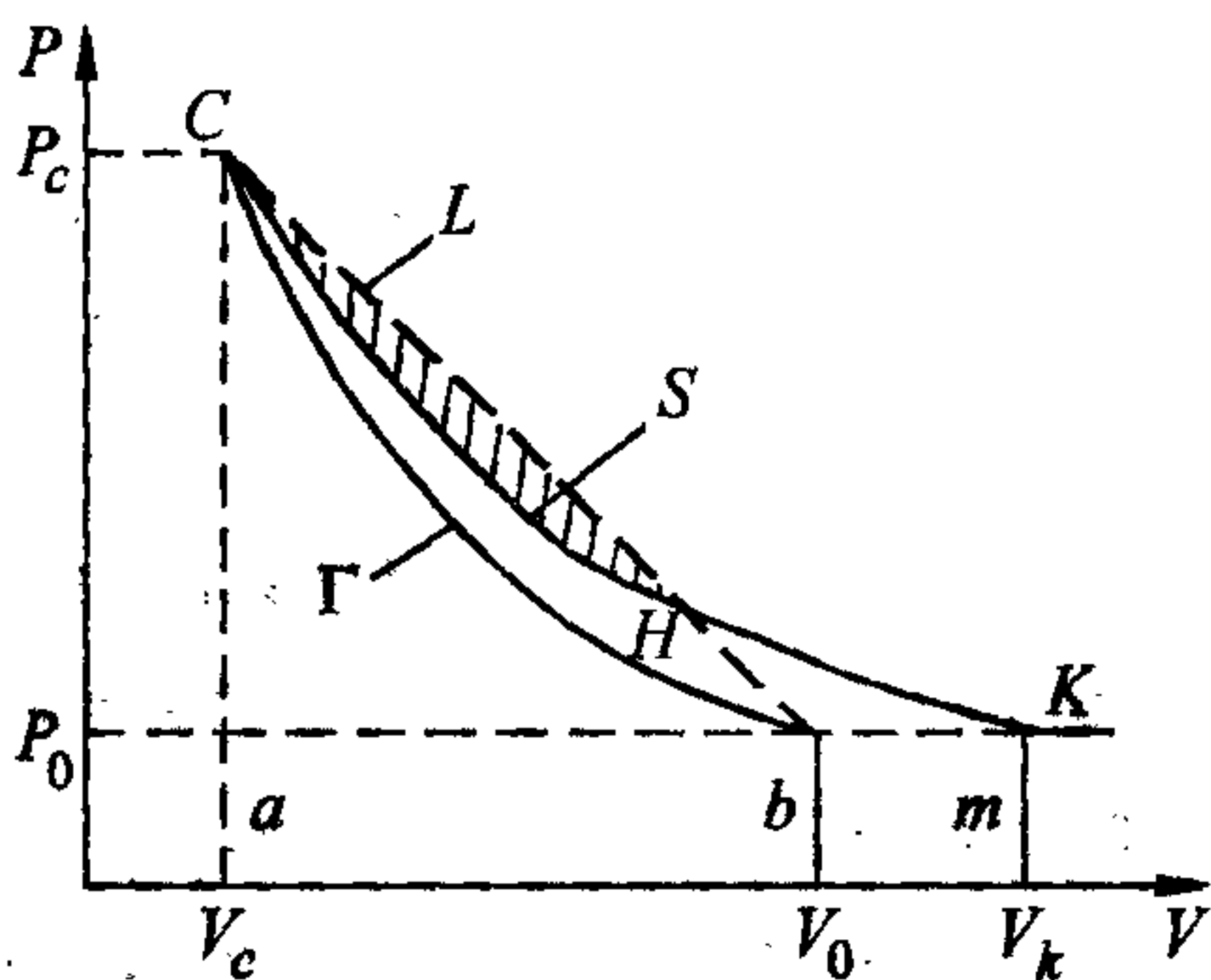


Рис. 1.22. Ударное нагружение материала.

Г — ударная адиабата Гюгонио;  
S — изоэнтропа разгрузки.

ка трансформируется до некоторых значений удельного объема  $V_c$  и давления  $P_c$  (рис. 1.22). Начальное состояние среды соответствует точке  $(V_0, P_0)$ . Во фронте ударной волны происходит возрастание энтропии, а так как в зоне взаимодействия происходит затем разгрузка вещества по изоэнтропе  $S$ , с величиной энтропии  $S_c$ , до давления  $P = P_0$ , то среда нагревается. Удель-



веществ по формулам (1.4.3)—(1.4.5)

ГПа

$\frac{ \bar{P} - P }{P} \times 100\%$	$\bar{P}_{n0}$ [44]	$\frac{ \bar{\bar{P}} - P }{P} \times 100\%$	$\bar{\bar{P}}_{n0}$ [45]	$\frac{ \bar{\bar{\bar{P}}} - P }{P} \times 100\%$	$P_{cr}$	$\frac{ P_{cr} - \bar{\bar{\bar{P}}} }{\bar{\bar{\bar{P}}}} \times 100\%$
5,1			0,00336	3,88		
3,5			0,0108	5,47		
12,4			0,0194	7,6		
54,7	0,076	28,3	0,106	0	0,111	4,7
63,6	0,251	22,5	0,3205	1,08	0,341	6,2
70	0,491	1,8	0,497	0,6		
45,5	0,247	8,5	0,262	2,96		
78,5	0,1848	0,1				
59	0,304	1,9	0,317	2,26	0,301	5,04
54,8	1,005	3,8	1,017	2,68	1,06	4,23
	0,452		0,472		0,464	1,69
	0,807		0,774		0,80	3,36

ная внутренняя энергия вещества при ударном нагружении равна

$$E - E_0 = \frac{P + P_0}{2} (V_0 - V),$$

что соответствует величине площади четырехуголь-

ника  $aCLHb$ . Энергия вещества, переходящая в работу расширения, при изоэн-

тропической разгрузке равна  $E - E_k = \int_V^{V_k} (PdV)_S$  и соответствует площади

$aCSKM$ . Разность этих двух величин (площадей) равна величине удельных потерь энергии, которые идут на нагрев вещества мишени и ударника. Этот нагрев для больших скоростей соударения тел может оказаться достаточным, чтобы прошло плавление или даже испарение вещества.

Рассмотрим схему разрушения (рис. 1.23) тонких преград. Когда снаряд с высокой скоростью ударяется по достаточно тонкой преграде и пробивает ее, то при этом часть преграды массой  $M$  вырывается из нее с некоторой средней скоростью  $\bar{v}$ . Ударные волны, возникающие при ударе, дробят как снаряд, так

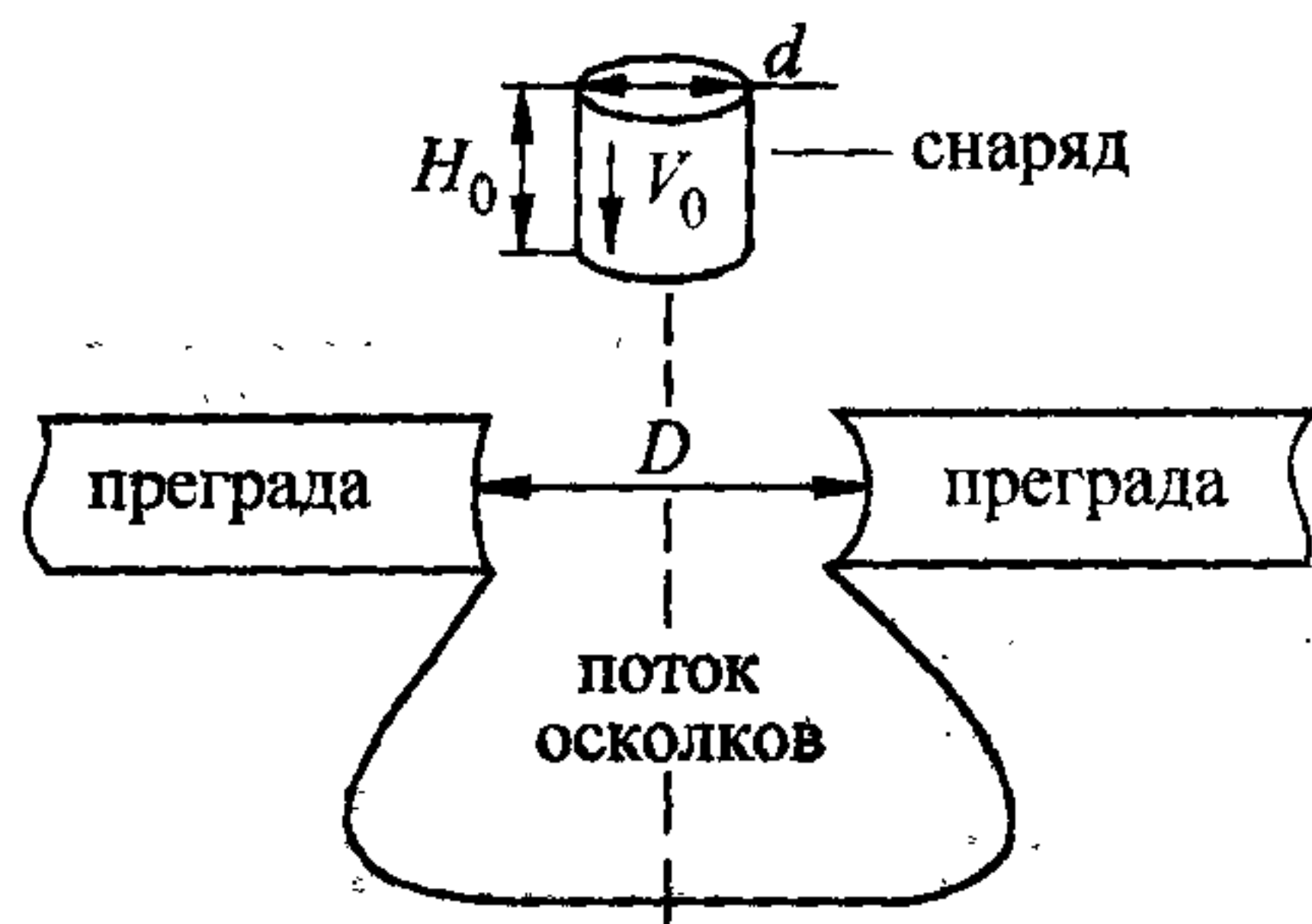


Рис. 1.23. Качественная картина разрушения тонкой преграды.

и уносимую массу  $M$ , которая в виде осколков разлетается дальше по форме, близкой к полуконусу. Если бы эта часть преграды не была бы связана силами прочности с остальной преградой, то она приобрела бы кинетическую энергию  $E_k$ . Если учесть прочность преграды, то часть этой энергии  $E_p$  затрачивается на отрыв массы  $M$  от остальной преграды и ее частичное разрушение, а другая часть нахо-

дится в виде кинетической энергии, равной

$$E'_k = \frac{1}{2}(M + M_y)v^2, \text{ т.е. } E_k = E_p + E'_k.$$

Поскольку процесс соударения снаряда с тонкими преградами изучается с помощью численного решения двумерных и осесимметричных задач в газодинамической постановке, которая не учитывает прочностные эффекты и явление разрушения материала, то для определения диаметра пробойны тонких преград необходимо иметь достаточно простой критерий разрушения.

### Определение 1.

Под импульсным механизмом разрушения будем понимать состояние среды, которое возникает при соударении тел с такой скоростью, что в зоне взаимодействия температура среды выше температуры плавления.

Тогда в качестве критерия разрушения логично выбрать температуру плавления, а соответствующую ей удельную внутреннюю энергию считать “пороговой” удельной энергией разрушения.

### Определение 2.

Под “пороговой” удельной внутренней энергией разрушения понимаем такую энергию, которую необходимо сообщить единице объема данного материала среды, чтобы каждая частица этого объема была деформирована до предельной разрушающей деформации. Величина полной энергии разрушения определяется формулой

$$E_p = \int_V e_p dV,$$

где  $e_p$  — удельная энергия разрушения, а  $V$  — объем.

Величины удельной энергии разрушения разных металлов

Материал	$T$ плавления, °C	$E_p$ exper., г/(мкс·см)	$T$ по $E_p$ плавления, г/(мкс·см)
Медь	1083	0,001471	0,001653
Алюминий	660	0,000666	0,001987
Железо	1535	0,00269	0,002757
Титан	1668	0,001922	0,002903

Для того чтобы сравнить, насколько удельная энергия разрушения, определенная по температуре плавления, соответствует удельной энергии разрушения, определенной экспериментально, рассмотрим данные табл. 1.9. Здесь приведены динамические величины удельной энергии разрушения для некоторых материалов, полученные при взрывном разрушении пластин.

Согласие для меди и железа надо признать довольно хорошим, а для алюминия существует значительное отличие. Но при этом необходимо учесть, что экспериментальные данные о разрушающих удельных энергиях найдены в условиях одноосного деформированного состояния, когда  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ ,  $\epsilon_3 = -2\epsilon_1$ . Данные этой таблицы не учитывают также влияния среднего давления на величину удельной энергии разрушения. Таким образом, считаем, что материал среды под действием нагрузки должен разрушиться и полное пробивание преграды возможно в том случае, когда разрушение по всей ее толщине выполняется одновременно.

### Определение 3.

Геометрическое место точек среды, начало и конец которого лежат соответственно на лицевой и тыльной сторонах преграды, с температурой, равной температуре плавления, будем называть пробойной при импульсном механизме разрушения.

### Определение 4.

Кратчайшее расстояние между геометрическими местами точек, определяющих пробойную, проходящее через ось симметрии, будем называть диаметром пробойной.

Таким образом, математическая постановка задачи с учетом образования отверстия в преграде  $M_1M_2M_3M_4M_1$  формулируется следующим образом:



Найти функции  $\rho, U, V, E, P, L(z, r, t) = 0 \in C$ , удовлетворяющие системе уравнений Эйлера в области  $\bar{\Omega} = \{(0 \leq t \leq T) \times \bar{D}(r, z, t)\}$  (рис. 1.24),

граничным  $0 < t \leq t^* P = 0$  на  $\left. \begin{array}{l} v_n^+ = v_n^- \\ P^+ = P^- \end{array} \right\}$  на  $C_2 O'$ ,

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial r} = (r^v U) = 0 \text{ на } r = 0$$

и начальным

$$\left. \begin{array}{l} U(r, z, 0) = 0; \quad v(r, z, 0) = v_0 \\ P(r, z, 0) = P_0; \quad \rho(r, z, 0) = \rho_0 \end{array} \right\} \text{ в } OC_1 C_2 O',$$

$$\left. \begin{array}{l} U(r, z, 0) = v(r, z, 0) = 0 \\ P(r, z, 0) = P_1, \quad \rho(r, z, 0) = \rho_1 \end{array} \right\} \text{ в } M_1 M_2 L_1 O'' O' G_2 K_1 M_1$$

условиям.

Для всех  $E \geq E_p^*, t \leq t^*$  на  $L(z, r, t^*) = 0$ , а для  $E < E_p^*, t > t^*$  имеем задачу:

Найти функции  $\rho, U, W, \sigma_{ij}, E \in C$ , удовлетворяющие системе уравнений [31] в области  $\bar{\Omega}_1(M_1 K_1 L_1 M_2)$ ,

начальным

$$U(r, z, t^*) = 0, \quad W(r, z, t^*) = 0,$$

$$\rho(r, z, t^*) = \rho_1 \text{ в } M_1 M_2 L_1 K_1 M_1$$

и граничным

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0 \text{ на } M_1 K_1 \text{ и } M_2 L_1,$$

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0 \text{ на } M_1 M_2,$$

$$P = P_p^* \delta(t - t^*) \text{ на } K_1 L_1$$

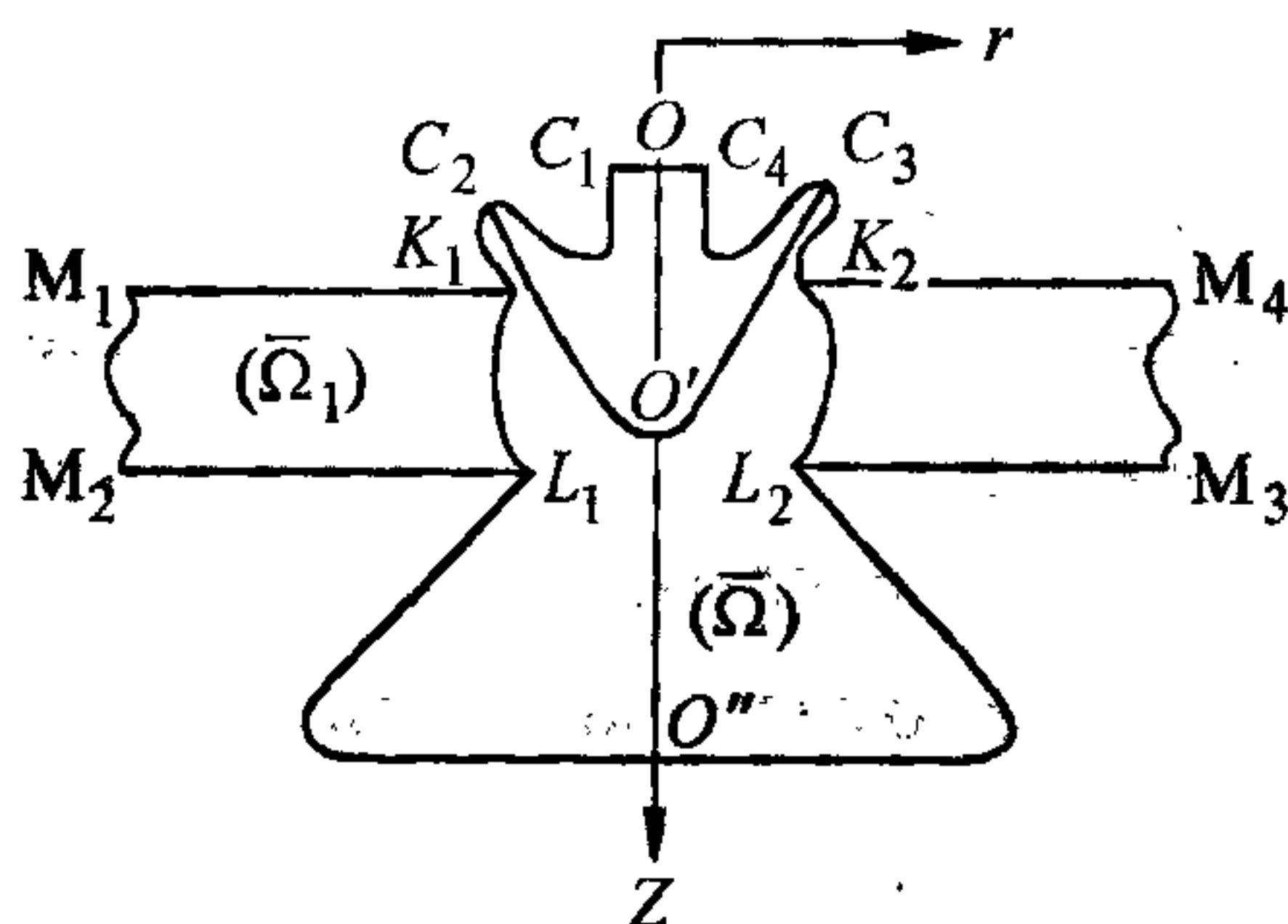


Рис. 1.24. Геометрия расчетной области.

условиям. Здесь  $L(z, r, t) = 0$  — уравнение границы отверстия,  $\delta(t - t^*)$  — функция, которая при  $t = t^*$  равна 1, а при  $t > t^*$  равна нулю, а  $P_p^*$  — давление, которое будет иметь место на границе  $L(z, r, t) = 0$  при  $E = E_p^*$  из решения

предыдущей задачи. Значения  $P_0$  и  $P_1$ , не ограничивая общности, можно принять равными нулю.

Для проверки точности результатов вычислений диаметра пробойны были проведены численные расчеты, исходные данные которых подобраны таким образом, чтобы можно было сопоставить результаты с экспериментами и с существующим эмпирическим соотношением, предложенным Мейде-ном и Макмилланом [106]:

$$D/d = 0,45v_0(t_n/d)^{2/3} + 0,9, \quad (1.4.6)$$

где  $v_0$  — скорость соударения (км/с),  $D$  — диаметр пробойны,  $d$  — диаметр ударника и  $t_n$  — толщина преграды.

Расчетная картина взаимодействия на два момента времени  $t_1 = 0,42$  мкс и  $t_2 = 1,05$  мкс приведена на рис. 1.25. Скорость соударения  $U = 5$  км/с, материал преграды — алюминий 2024-Т3,  $d = 3,24$  мм,  $H_0 = 1,86$  мм,  $t_n = 1,65$  мм. Диаметр отверстия  $D = 7,5$  мм, а конфигурация расчетной области на момент пробития  $t = t_2 = 1,05$  мкс дана на рис. 1.25. Результаты расчета по диаметру отверстия согласуются с данными эксперимента и значениями, вычисленными по формуле (1.4.6), с точностью до 2%. Это подтверждает, что выбранный механизм разрушения правильно описывает физический процесс.

Как показали расчеты, пластические деформации в области  $\bar{\Omega}_1$  быстро затухают и переходят в упругие, а граница  $L(z, r, t^*) = 0$  для тонких преград практически не меняет своего первоначального положения. Поэтому при проведении простых расчетов задачу можно решать только до момента времени  $t = t^*$ , т.е. до образования отверстий в преграде.

### Анализ пробития тонких преград

**Эквивалентность материалов.** Чтобы исследовать влияние материала соударяющихся тел на диаметр пробойны, были проведены расчеты для пяти случаев соударений снаряда (алюминий) с преградами, изготовленными из

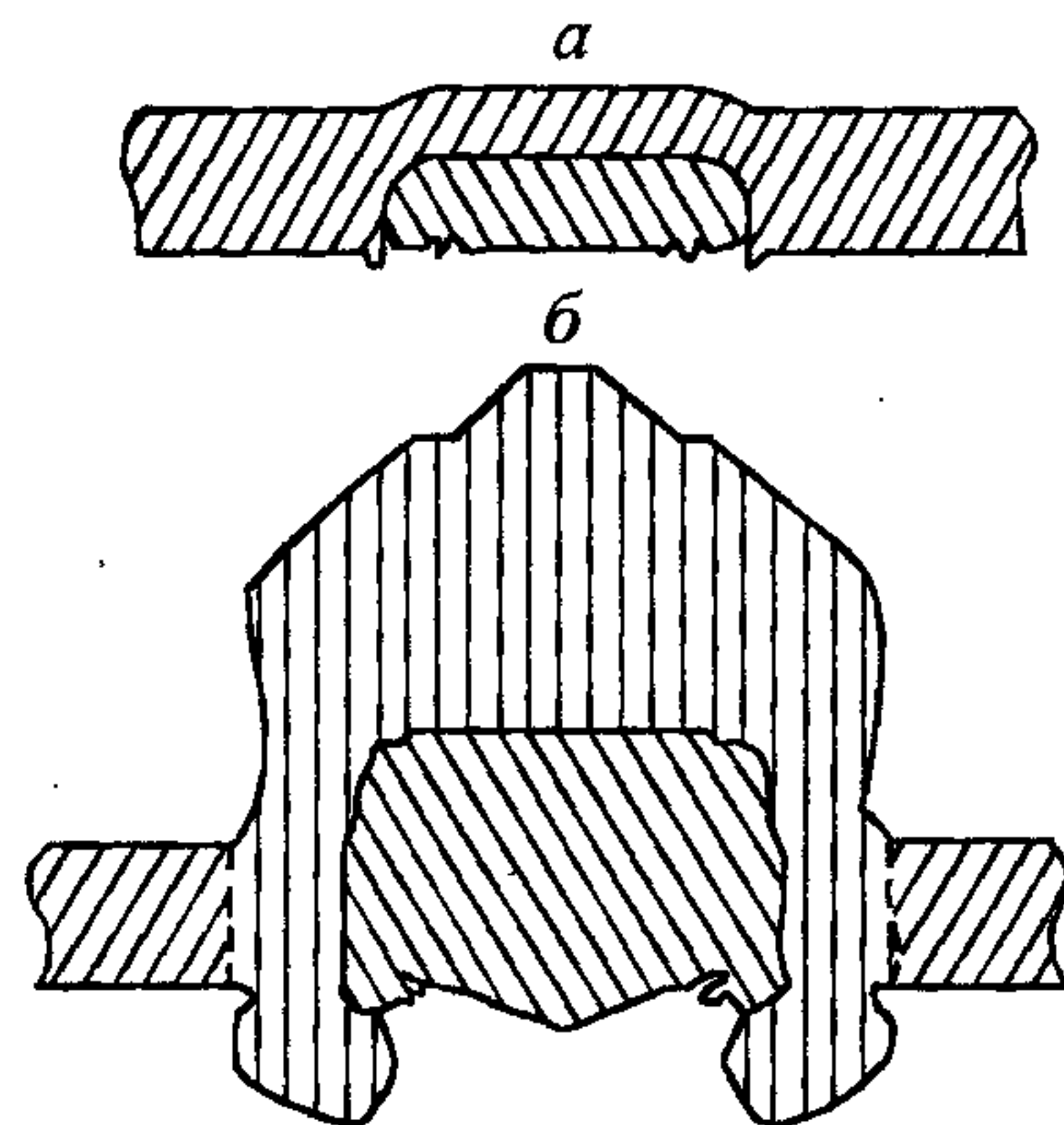


Рис. 1.25. Расчетная картина взаимодействия на два момента времени:  $t = 0,42$  мкс (а) и  $t = 1,05$  мкс (б).



Результаты расчета пробития тонких преград

Материал	$D$ пробоины, см	$D/2$ (формула (1.4.6))	Время пробития, мкс
Алюминий	3,6	1,8	3,6
Железо	3,5	1,75	2,6
Никель	3,8	1,9	3,3
Медь	3,8	1,9	3,6
Текстолит	4,4	2,1	6,4
Железо (осб)	3,4	1,7	1,55

алюминия, меди, железа, никеля и текстолита. Соударения производились во всех случаях со скоростью 5 км/с. Размеры мишени: диаметр  $d_n = 40$  мм, толщина  $t_n = 6$  мм. Размеры снаряда: диаметр  $d = 20$  мм, высота  $H_0 = 12$  мм. Диаметр пробоины, рассчитанный по эмпирической формуле (1.4.6), при заданных исходных данных  $D = 3,82$  см. Как показали экспериментальные данные [106] и расчеты по эмпирической формуле (1.4.6), диаметр пробоины практически не зависит от материала экрана. Этот же вывод можно сделать, анализируя результаты вышеприведенных расчетов, которые представлены в табл. 1.10.

Необходимо отметить, что полученные величины диаметров пробоины хорошо согласуются с результатами экспериментов и расчетами по формуле (1.4.6). Наибольшие расхождения имеют место для текстолита, что, на наш взгляд, связано с недостаточно точными значениями постоянных, входящих в уравнение состояния. Во всех этих расчетах зависимость давления от плотности и внутренней энергии бралась в форме  $P = (\gamma - 1)\rho E$ , а один расчет (последний в таблице) был проведен с уравнением состояния Осборна. Конечные размеры диаметра пробоины при этом совпадают, но время пробития во втором случае существенно меньше, чем в первом.

Очень показательна зависимость отношения диаметра пробоины к диаметру ударника от скоростей соударения. Для этого также был проведен ряд расчетов для разных соотношений толщин преград к диаметру ударника и разных скоростей соударения. Условия соударения в расчетах выбирались так, чтобы разрушение ударника и центральной части преграды описывалось в рамках модели импульсного механизма. Результаты этих расчетов приведены на рис. 1.26. Сплошные линии построены по эмпирической формуле (1.4.6). На рисунке также отмечены экспериментальные точки для алюминиевых шариков



диаметром 3,2 мм и алюминиевых преград. Таким образом, температурный критерий разрушения для однослойных преград обеспечивает хорошее согласие диаметра пробоины как с экспериментальными данными, так и с эмпирическим соотношением (1.4.6) и не зависит от прочностных свойств материала преграды при скоростях удара  $v_0 > 3$  км/с. Как показали результаты расчетов, в более тонкой преграде отверстие будет меньше, так как к ней прилагается меньший импульс на единицу площади поперечного сечения и давление в тонкой преграде понижается быстрее из-за волн разрежения. Из этих рассуждений ясно, что диаметр отверстия в тонкой мишени всегда будет меньше диаметра кратера в полубесконечной мишени при прочих одинаковых параметрах.

Как показали дальнейшие проведенные расчеты, с увеличением скорости соударения линейная зависимость от скорости (1.4.6) нарушается и для заданного отношения толщины преграды к диаметру ударника существует такая скорость соударения, что отношение  $D/d$  будет максимальным. Эту скорость будем называть критической скоростью  $v_{кр}$  соударения для фиксированных геометрических параметров. Расчеты, полученные для алюминиевых ударников диаметром  $d = 0,32$  см и алюминиевых преград толщиной:  $t_n \sim 0,16$  см в первой серии  $t_n/d = 0,504$ ;  $t_n \sim 0,08$  см во второй серии  $t_n/d = 0,254$ , приведены на рис. 1.27. С увеличением  $v_0 > v_{кр}$   $\lim_{v_0 \rightarrow \infty} D/d \rightarrow 1$ . Это связано с тем, что ско-

рость проникания ударника в преграде будет приближаться к скорости движения ударной волны в преграде и пробоина будет образовываться за промежуток времени  $\Delta t$ , который много меньше времени существенного

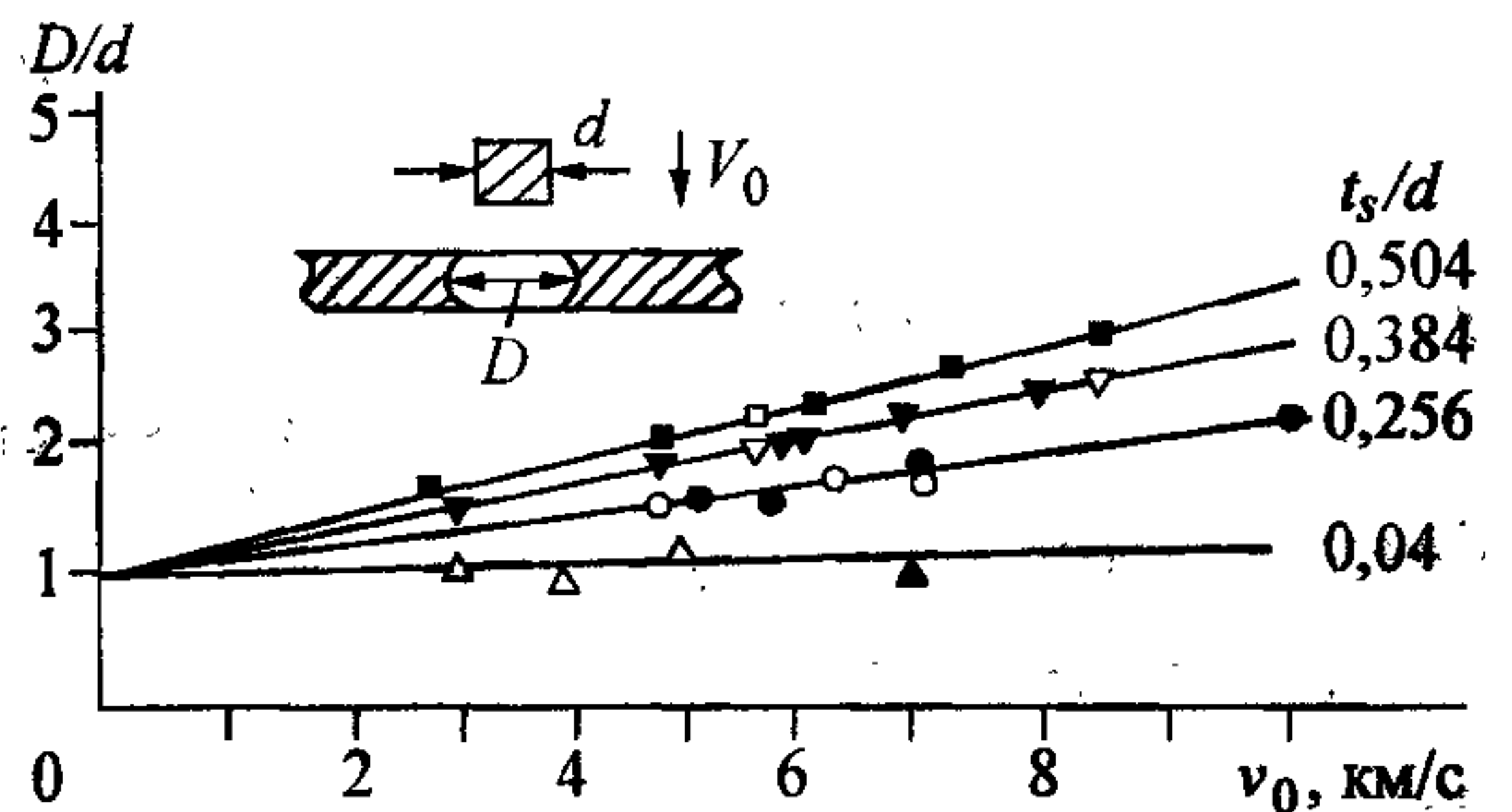


Рис. 1.26. Зависимость отношения диаметра к диаметру ударника от скорости соударения.

о;  $\nabla$ ;  $\Delta$  — экспериментальные точки для алюминиевых шариков диаметром 3,2 мм и преград из алюминиевого сплава 2021-Т3. Сплошные линии построены по теоретическому соотношению (1.4.6),  $\nabla$ ;  $\bullet$ ;  $\blacktriangle$ ;  $\blacksquare$  — результаты численного счета.

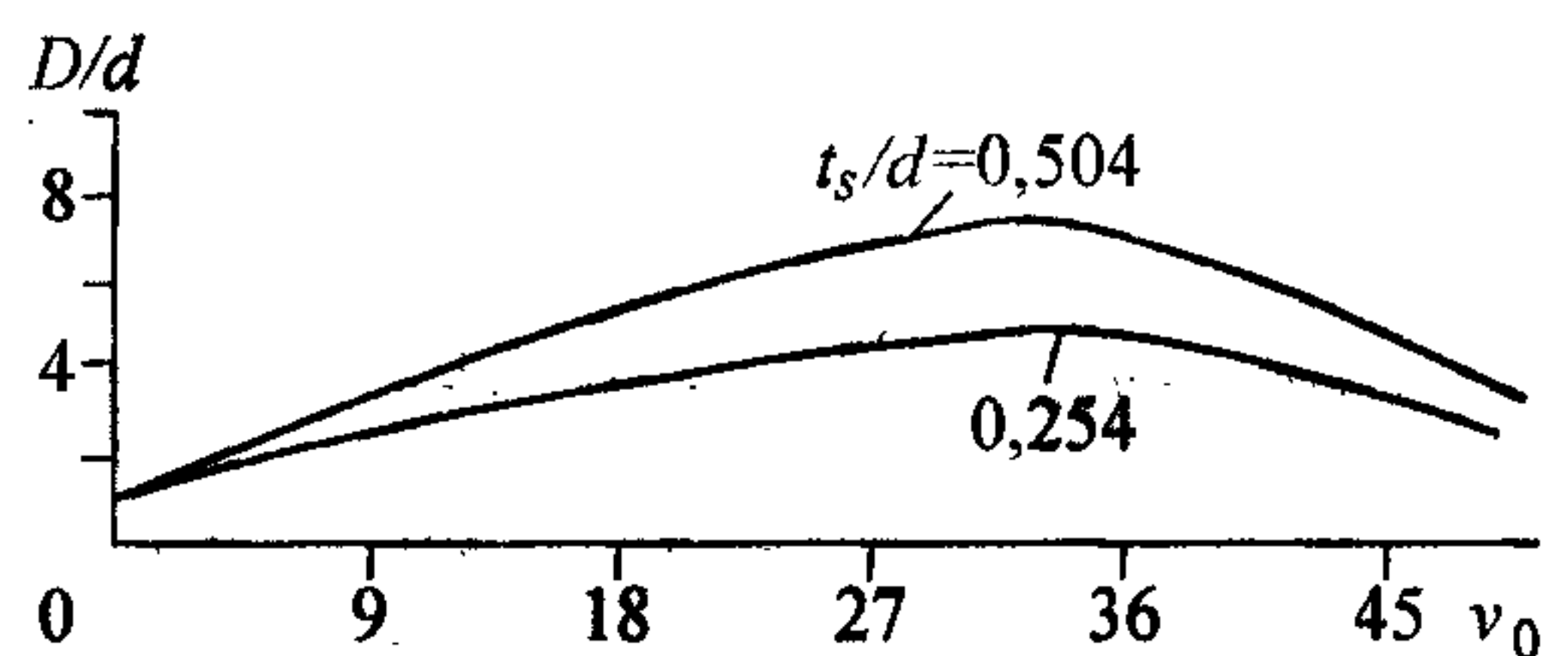


Рис. 1.27. Зависимость диаметра отверстия от скорости удара.

поперечного расширения ударника. Следовательно, с возрастанием величины  $t_s/d$  критическая скорость  $v_{кр}$  будет увеличиваться, что подтверждается и результатами, данными на рис. 1.27, т.е.  $t_s/d = 0,504$ ,  $v_{кр} = 35$  км/с, а при  $t_s/d = 0,254$   $v_{кр} = 33$  км/с. Качественно это явление совпадает с известным в задачах обтекания тел сверхзвуковым потоком газа, где с увеличением скорости набегающего потока фронт ударной волны приближается к обтекаемому телу. Следует заметить, что эти выводы носят качественный характер, так как в расчетах не учитываются процессы излучения.

#### 1.4.2. Отскок стержней от твердой преграды

Задача отскока различных тел от твердых преград интересна в первую очередь тем, что это тот класс классических задач, который не может быть успешно решен без анализа процессов взаимодействия волн нагрузки и разгрузки, что позволяет сформулировать физический критерий явления отскока. Достаточно простой эксперимент позволяет провести верификацию используемых математических моделей и соответственно провести уточнение численных значений физических постоянных, используемых в математических моделях. Обычно в современной литературе процесс отскока стержней при упругопластическом ударе рассматривался в одномерном приближении [109—111], что существенно упрощает волновой анализ, и только в нескольких работах [112—115] изучают эти процессы в многомерном приближении.

Будем рассматривать класс задач, связанных с соударением твердых деформируемых тел с различными скоростями в двумерной постановке. Так как объемные силы, теплопроводность и источники тепла отсутствуют, то уравнения движения, описывающие напряженно-деформированное состояние такой среды в лагранжевых координатах, имеют вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = - \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} + \alpha \frac{u}{r} \right],$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} + \alpha \frac{S_{rr} - S_{\theta\theta}}{r} - \frac{\partial P}{\partial r},$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} + \alpha \frac{S_{rz}}{r} - \frac{\partial P}{\partial z},$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \left[ S_{rr} \frac{\partial u}{\partial r} + S_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + \alpha S_{\theta\theta} \frac{u}{r} + S_{rz} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right], \quad (1.4.7)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = u, \quad \frac{\partial S_{rr}}{\partial t} = 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{3\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = w, \quad \frac{\partial S_{zz}}{\partial t} = 2\mu \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{3\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right),$$

$$\frac{\partial S_{\theta\theta}}{\partial t} = 2\mu \left( \alpha \frac{u}{r} + \frac{1}{3\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial S_{rz}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right),$$

где  $\rho$  — плотность среды;  $u, w$  — компоненты вектора скорости в проекции на оси координат  $r$  и  $z$  соответственно;  $t$  — время;  $E$  — удельная внутренняя энергия. Тензор напряжения представлен в виде

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + S_{ij} \quad (i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3),$$

где  $P = \frac{1}{3} \sum_1^3 \sigma_{ii}$ ;  $S_{ij}$  — девиатор напряжения с компонентами  $S_{rr}, S_{zz}, S_{\theta\theta}, S_{rz}$ ;  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ ;  $\mu$  — модуль сдвига. Считается, что напряжения при растяжении

положительны и отрицательны при сжатии. Величина  $\alpha = 0$  соответствует плоскому деформированному состоянию, а  $\alpha = 1$  — осесимметричному.

Для замыкания системы уравнений (1.4.7) используем модель пластического течения, т.е. второй инвариант девиатора тензора напряжения в области пластичности удовлетворяет условию текучести Мизеса

$$S_{rr}^2 + S_{zz}^2 + S_{\theta\theta}^2 + 2S_{rz}^2 \leq \frac{2}{3} Y_0^2, \quad (1.4.8)$$

где  $Y_0$  — предел текучести, определяемый из результатов экспериментов на одноосное растяжение. Уравнение состояния среды представим в виде

$$P = a_1(\eta - 1) + a_2(\eta - 1)^2 + a_3(\eta - 1)^3 + a_4\eta E, \quad (1.4.9)$$



где  $\eta = \rho/\rho_0$ ;  $\rho_0$  — начальная плотность;  $a_1, a_2, a_3, a_4$  — постоянные. Далее  $a_1 = \neq K, a_2 = a_3 = a_4 = 0$ . При наличии упрочнения поверхность текучести изменяется в процессе нагружения, что может быть учтено в первом приближении за счет переменного предела текучести [116].

**Задача 1.** Рассмотрим задачу о продольном ударе цилиндрического стержня длины  $L_0$  и радиуса  $R_0$  об абсолютно твердую преграду со скоростью  $v_0$  (рис. 1.28). Масса цилиндра  $m$ .

Данную физическую задачу математически можно сформулировать следующим образом: найти функции  $\rho, u, w, \sigma_{ij}$ , удовлетворяющие системе уравнений (1.4.7)—(1.4.9), начальным условиям  $w = v_0, \rho = \rho_0, \sigma_{ij} = 0$  в области  $D$  ( $ABCD$ ) и граничным условиям  $\sigma^{ij} \cdot n_j = 0$  на  $ABCD, S_{rz} = 0$  и  $w = 0$  на  $DA$ , где  $n_j$  — компоненты единичного вектора нормали к границе  $ABCD$ . Следует заметить, что граница  $ABCD$  в процессе деформирования изменяется, а поверхность контакта  $AD$ , следовательно, будет переменной. Это учитывается при решении задачи.

Решение данной задачи осуществляется модернизированным методом Уилкинса, подробно рассмотренным ниже в главе 3. Основной целью работы при этом является выяснение физики явления продолжительности удара.

За начало отсчета продолжительности удара принимается момент времени, когда между границей тела  $ABCD$  и преградой  $MN$  появится хотя бы одна общая точка. Этот момент времени принимаем за  $t = 0$ .

Если в процессе взаимодействия тела  $ABCD$  с преградой  $MN$  возникнет состояние, когда поверхности тела и преграды не будут иметь общих точек, то этот момент времени будем считать окончанием продолжительности удара. Примем его за  $t = t_*$ .

**Определение.** Отскоком будем называть явления, которые происходят при соударении тела  $ABCD$  с преградой  $MN$  за промежуток времени  $t_*$ . В данном случае  $t_*$  есть время контакта или время продолжительности удара.

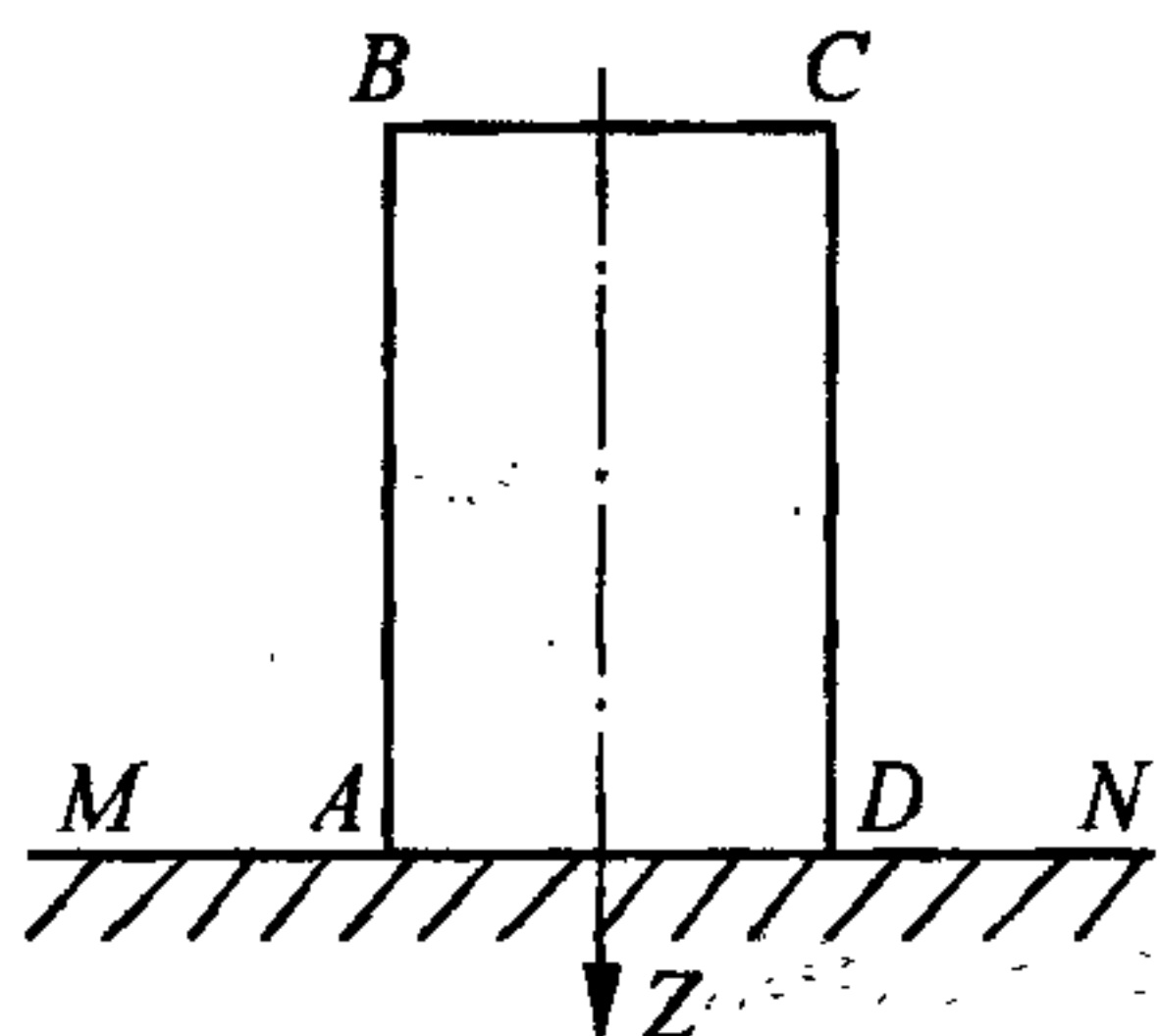


Рис. 1.28. Геометрия области соударения с недеформированной преградой.

Проведенные серии расчетов при различных скоростях соударения позволили выяснить картину распространения упругопластических волн и понять явление отскока. Пример сложного напряженного состояния, возникающего в стальном стержне с параметрами  $Y_0 = 0,012$  Мбар,  $R_0 = 0,3175$  см,  $L_0 = 3$  см,  $\rho = 7,87$  г/см<sup>3</sup>,  $K = 1,7$  Мбар,  $\mu = 0,8$  Мбар,  $v_0 = 75$  м/с для момента времени  $t_1 = 2,3$  мкс, приведен на рис. 1.29, когда волна не дошла до поверхности  $BC$ . От контактной границы  $DA$  в начале данного процесса соударения формируется волна сжатия двухволновой конфигурации, причем скорости движения этих волн существенно различны. Первая — волна упругая, а вторая — пластическая, амплитуда и скорость которой существенно зависят от начальной скорости удара. Наличие поперечных волн разгрузки, идущих от боковых поверхностей  $AB$  и  $DC$ , снижают интенсивность продольных волн, и поэтому вычисленное напряженно-деформированное состояние стержня отличается от результатов решения задач, полученных по одномерному приближению. Достигнув свободной поверхности  $CB$ , упругая волна сжатия отражается от нее упругой волной разгрузки и движется навстречу фронту пластической волны нагрузки. В момент их взаимодействия, как следует из решения локальной задачи распада разрыва, интенсивность пластической волны уменьшается скачком, а в сторону  $CB$  будет опять распространяться фронт упругой волны сжатия. В дальнейшем описанный процесс повторяется до тех пор, пока система волн упругой разгрузки не снимет полностью амплитуду пластической волны сжатия. В каждом сечении  $r = \text{const}$  описанный выше процесс взаимодействия волн будет качественно аналогичным и будет отличаться только амплитудами и скоростями распространения. Этот факт приводит к тому, что волна разгрузки приходит к поверхности  $MN$  в

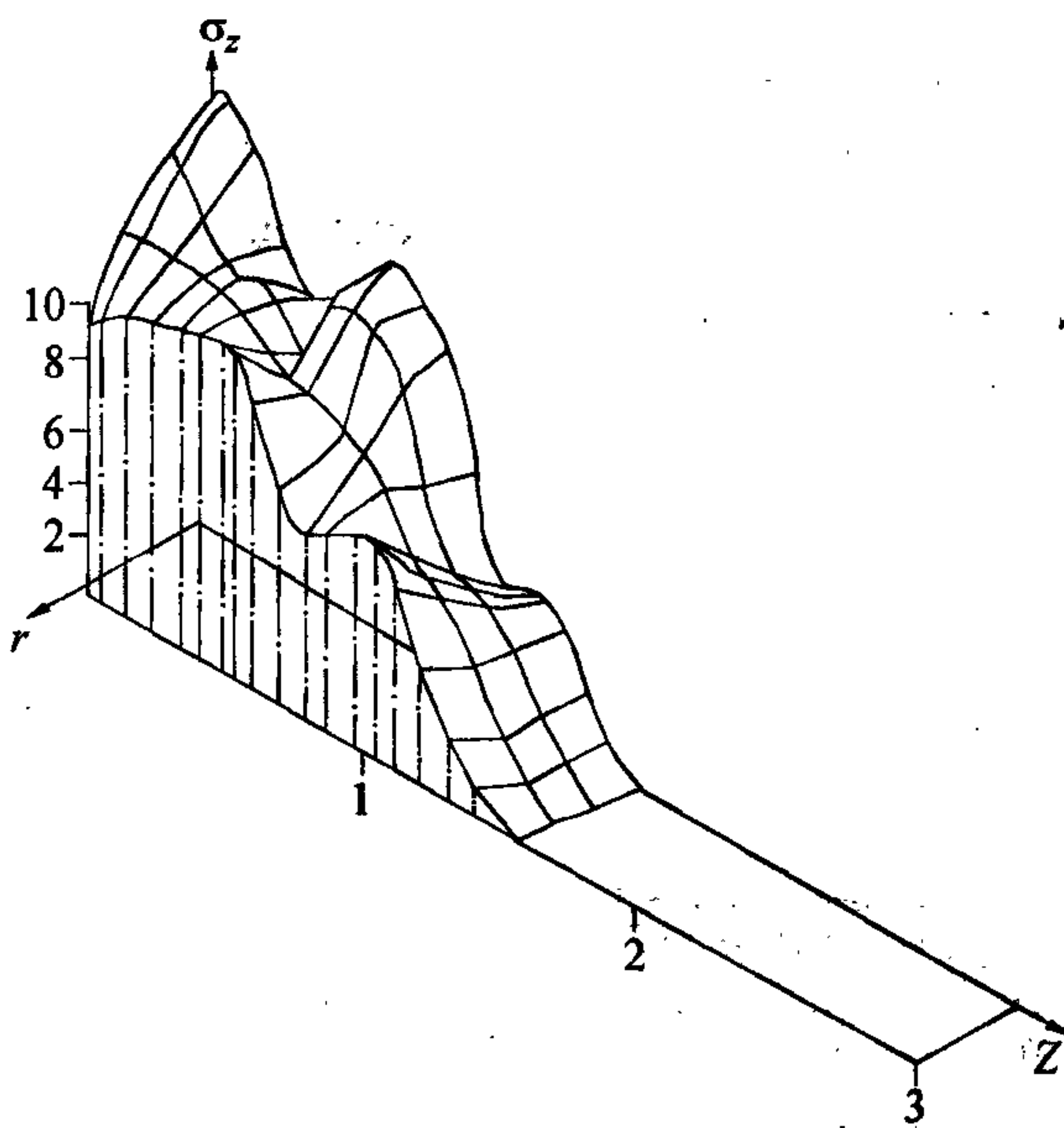


Рис. 1.29. Напряженное состояние в стальном стержне при скорости удара 75 м/с на момент времени  $t = 2,3$  мкс.



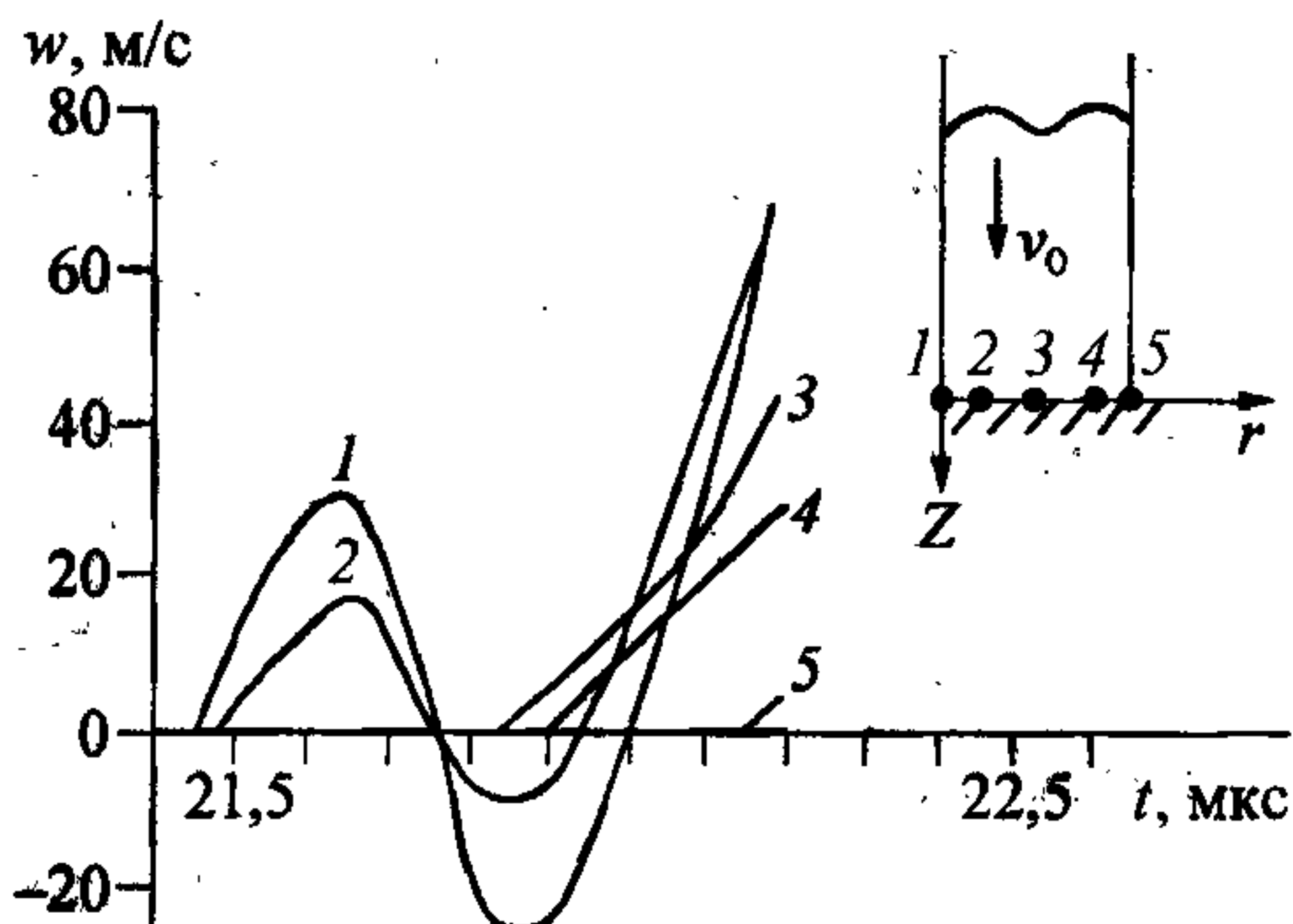


Рис. 1.30. Изменение скорости точек границы  $DA$  в зависимости от времени.

такта  $DA$  от  $MN$  в данном случае в отличие от одномерного приближения существенно связано с двумерностью.

Для практического определения момента отскока удобно воспользоваться соотношением

$$F = \int_{S(t)} \sigma_z dS,$$

где  $S(t)$  — граница контакта  $DA$ . Обращение  $F$  в нуль соответствует моменту отскока. Расчеты, проведенные при больших значениях предела упругости  $Y_0$  (таких, что пластичность не возникает), показывают, что время отскока практически постоянно у стержней одинаковой длины при различных скоростях соударения (кривые 1—3 на рис. 1.31). Скорости удара соответственно 150, 100 и 50 м/с. Кривые 4 и 5 — расчеты при  $Y_0 = 0,012$  Мбар и скоростях удара 75 и 50 м/с. Осциллирующий вид зависи-

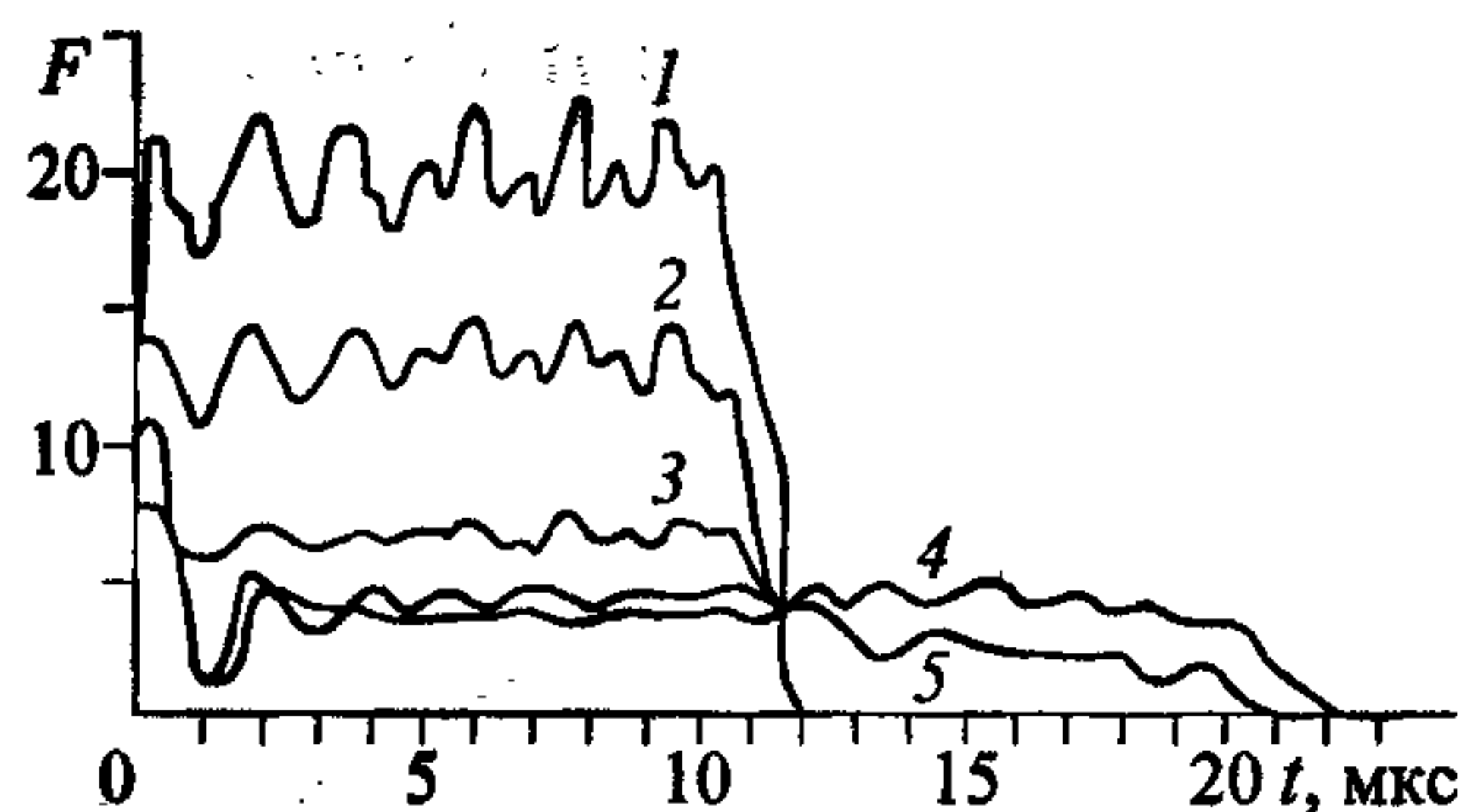


Рис. 1.31. Расчет силы, действующей на ударник, для различных значений предела упругости  $Y_0$  и скоростей соударения.

Поясн. см. в тексте.

каждом сечении  $r = \text{const}$  в различные моменты времени. Следовательно, контакт точек  $DA$  с  $MN$  нарушится неодновременно. Особенно это хорошо видно на рис. 1.30. Цифрами 1—5 показано изменение скорости точек границы  $DA$  в зависимости от времени. Интересно отметить, что отошедшие точки контакта  $DA$  могут через некоторое время снова присоединяться к твердой границе  $MN$ . Неодновременное отделение точек кон-

такта обусловлен волнами разгрузки от свободной боковой поверхности. Время отскока для кривых 1—3 совпадает со временем прихода отраженной от свободного торца стержня волны, двигающейся со стержневой скоростью.

Рассмотрим зависимость безразмерной величины времени продолжительности удара  $t_*/t_0$  от скорости  $v_0$



(рис. 1.32, сплошная кривая,  $t_0$  — время продолжительности удара при упругом соударении). Рост продолжительности удара  $t^*/t_0$  с увеличением скорости носит существенно ступенчатый характер, что, вообще говоря, качественно подтверждается результатами экспериментов [110, 111]. Ступенчатый вид этой зависимости объясняется в первую очередь волновым характером взаимодействия пластической волны с упругой волной разгрузки. Качественная картина такого процесса была описана выше.

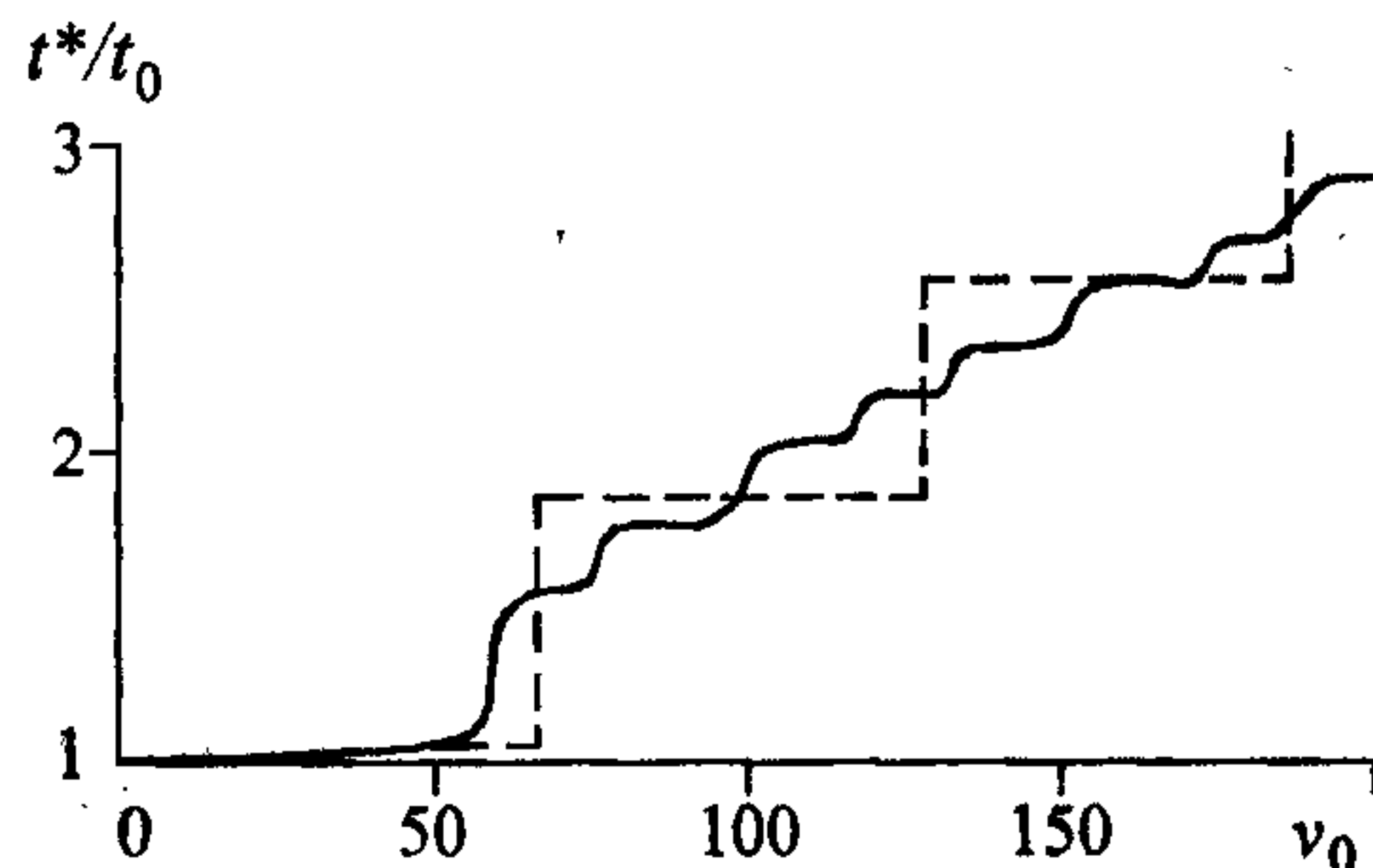


Рис. 1.32. Время продолжительности удара в зависимости от скорости соударения.

Поясн. см. в тексте.

Рассмотрим решение задачи 1 [116], но только в одномерной постановке в приближении напряженного состояния, когда  $\sigma_\theta = \sigma_r = 0$  — модели идеальной пластичности. Покажем, что данная задача в классе непрерывных функций решения не имеет. Для доказательства воспользуемся известным решением аналогичной задачи, предложенной в [117] в рамках упругопластического приближения схемы Прандтля. В полученных формулах работ [7, 117] перейдем к пределу при  $C_1 \rightarrow 0$ , где  $C_1$  — скорость пластической волны. Тогда значение деформаций на границе контакта будет  $\epsilon \rightarrow \infty$ , тем доказывается утверждение.

Таким образом, остается выяснить, почему решение в двумерной постановке дает качественно правильный результат. Этот факт объясняется тем, что при решении задачи 1 в двумерной постановке по сравнению с одномерной учитывается изменение площади сечения стержня, особенно в пластической области при прохождении упругопластической волны по стержню. Учет в данном случае изменения площади сечения в процессе нагружения на поведение решения задачи качественно аналогичен учету упрочнения в зависимости  $\sigma_z - \epsilon$  при решении в одномерном приближении.

Выделим в первоначально цилиндрическом стержне элементарный объем  $dV$ :

$$dV = f dz,$$

полученный сечением стержня двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми  $dz$ . Здесь  $f(z) \approx f(z + dz/2) \approx [f(z) + f(z + dz)]/2$ . Уравнение со-

хранения массы этого элементарного объема имеет вид

$$\rho dV = \rho_0 dV_0,$$

где  $\rho_0$  и  $V_0$  — начальные величины. Уравнения движения в этом случае для квазиодномерного приближения в лагранжевых координатах запишем в виде

$$f\rho dw/dt = dT/dz, dz/dt = w, T = \sigma_z f(z).$$

Полученная система уравнений в упругой области замыкается законом Гука, записанным в форме

$$\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t} = (1-2\nu) \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = E \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (1.4.10)$$

где  $V = \rho_0/\rho$ ;  $\nu = \lambda/(2(\lambda + \mu))$ ;  $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$ ;  $\lambda$  и  $\mu$  — параметры Ламе. Соотношение (1.4.10) получено при условии, что  $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$ ,  $\sigma_z \neq 0$ ,  $\dot{\epsilon}_r = -\nu \dot{\epsilon}_z$ , где точки означают дифференцирование по времени. В области пластической деформации имеем

$$\sigma_z = -P + S_z,$$

$$S_z = \pm(2/3)Y_0, P = \pm(1/3)Y_0.$$

Так как в пластической области материал среды несжимаем, то объем остается постоянным, что позволяет найти изменение площади сечения  $f$ . Таким образом, данная физическая задача сводится к следующей математической: найти функции  $P$ ,  $w$ ,  $\sigma_z$ ,  $f$ , удовлетворяющие в области  $D_z$  ( $0 \leq t < \infty$ ;  $-L_0 \leq z \leq 0$ ) системе уравнений

$$f\rho \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial z}; \rho dV = \rho_0 dV_0, T = \sigma_z f(z),$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = E \frac{\partial w}{\partial z}; f = \frac{\partial V}{\partial z}; \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t} = (1-2\nu) \frac{\partial w}{\partial z} \text{ при } \sigma_z < Y_0; \quad (1.4.11)$$

$$f\rho \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial z}; \rho dV = \rho_0 dV_0; \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = E \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$T = \sigma_z f(z), \sigma_z = \text{sgn}(\sigma_z) Y_0 \text{ при } \sigma_z \leq Y_0, \quad (1.4.12)$$



$$dV^* = \left[ (1-2\nu) \frac{\sigma_z}{E} + 1 \right] dV_0; \quad f = \frac{dV^*}{dz},$$

начальным условиям  $\rho = \rho_0$ ,  $\sigma_z = 0$ ,  $w = w_0$  в области  $D_z$ ;

граничным условиям  $z = -L_0$ ,  $\sigma_z = 0$  для (1.4.11),  $z = 0$ ,  $w = 0$  для (1.4.12)

и условию на неизвестной подвижной границе —  $L_0 \leq z_1(t) \leq 0$ ;  $\sigma_z = Y_0$ ;  $[v_1] = 0$ .

Здесь  $v_1$  — перемещение;  $[]$  — скачок соответствующей величины.

Поставленная задача решалась численно методом [31]. Результаты рассчитанных зависимостей  $t_*/t_0$  от скорости удара представлены на рис. 1.32 кривой 2. Видно, что данная зависимость является четко выраженной ступенчатой функцией. Однако количественные результаты этих двух решений существенно различаются.

**Задача 2.** Рассмотрим задачу о продольном ударе усеченных конических стержней длины  $L_0$  с радиусами  $R_0$  и  $R_1$  об абсолютно твердую преграду со скоростью  $v_0$  в двумерной постановке.

Математическая постановка этой задачи практически аналогична задаче 1, поэтому ее здесь не приводим. Величины сил взаимодействия  $F$  для двух конусов ( $L_0 = 3$  см,  $R_0 = 0,335$  см,  $R_1 = 0,3$  см — кривая 1;  $L_0 = 3$  см,  $R_0 = 0,3$  см,  $R_1 = 0,335$  см — кривая 2) и цилиндра ( $L_0 = 3$  см,  $R_0 = 0,3175$  см), масса и кинетическая энергия которых одинаковы, приведены на рис. 1.33 ( $v_0 = 75$  м/с). Даже при малых углах конусности время отскока существенно отличается от времени отскока цилиндрического стержня.

Это явление связано с процессом кумуляции упругой волны нагрузки и разгрузки из-за изменения площади сечения и их взаимодействия с падающей пластической волной. При этом следует заметить, что и импульс действия у конического стержня ( $L_0 = 3$  см,  $R_0 = 0,3$  см,  $R_1 = 0,335$  см) будет больше, чем у цилиндрического. Этот факт интересен еще тем, что одну и ту же кинетическую энергию можно по-разному перевести в пластическое деформирование в зависимости от возбуждаемого волнового процесса в среде.

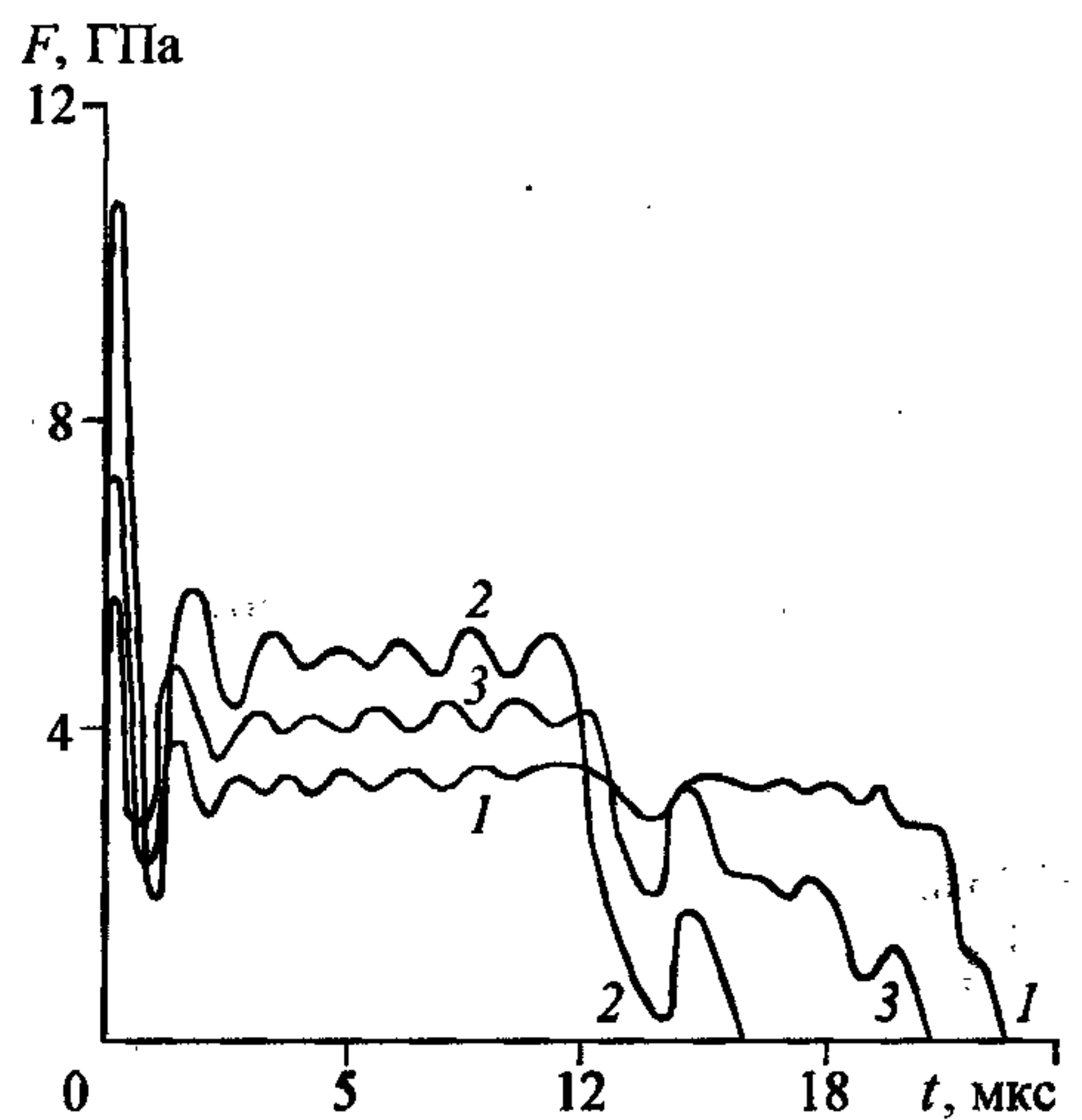


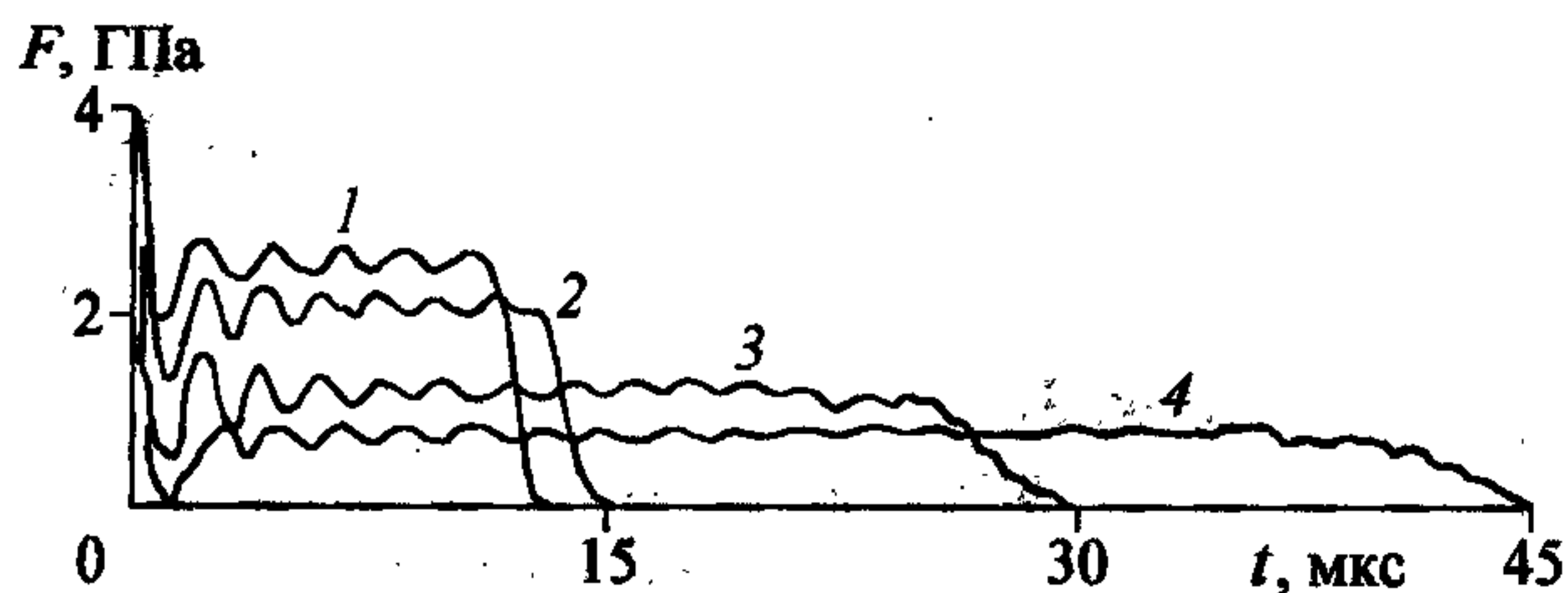
Рис. 1.33. Величина силы взаимодействия для конусов и цилиндра.

Поясн. см. в тексте.

**Задача 3.** Цилиндрический стержень длины  $L_0$  и радиуса  $R_0$  состоит из двух материалов. Слои материалов расположены параллельно оси симметрии. Внутренний цилиндр имеет радиус  $R_0/2$ . Толщина внешней оболочки также  $R_0/2$ . Скорость удара  $v_0 = 50$  м/с. На границе между слоями материалов выполняется условие идеального механического контакта, которое математически сводится к равенству смещений и напряжений на этой границе.

Решение задачи находим модифицированным методом Уилкинса. При численном решении задачи счет идет без явного выделения границы контакта между материалами. Расчеты проводились для слоев, состоящих из стали и меди, со значениями констант:  $\rho_0 = 7,85$  г/см<sup>3</sup>,  $k = 170$  ГПа,  $\mu = 80$  ГПа,  $Y_0 = 1,2$  ГПа — сталь;  $\rho_0 = 8,9$  г/см<sup>3</sup>,  $Y_0 = 139$  ГПа,  $\mu = 46$  ГПа,  $Y_0 = 0,3$  ГПа — медь, где  $\rho_0$  — плотность материала,  $k$  — коэффициент объемного сжатия,  $\mu$  — модуль сдвига,  $Y_0$  — предел текучести.

На рис. 1.34 показано изменение силы  $F$ , действующей на границе стержня с преградой в зависимости от времени  $t$  для четырех случаев сочетания материалов (1, 4 — стержень сплошной соответственно из стали и из меди, 2 — внутренний цилиндр из меди, а оболочка из стали, 3 — внутренний цилиндр из стали, а внешняя оболочка из меди). Заметим, что при одной и той же начальной скорости удара и одинаковой геометрии масса стержней будет разной, а значит, различна и начальная кинетическая энергия стержней. Однако существенное влияние на время контакта стержня с преградой  $t_k$  имеет лишь предел текучести материалов. Чем меньше предел текучести, тем больше время контакта стержня с преградой (случаи 2, 4). Природа этого явления состоит в том, что при ударе стержня о преграду от контактной границы распространяется волна сжатия двухволновой конфигурации. Упругий предвестник движется со скоростью упругих волн, которая значительно превышает скорость пластической волны. Отражаясь от свободного торца стержня, упругая волна сжатия переходит в волну растяжения и распространяется в противоположном направлении. При взаимодействии этих волн происходит перераспределение напря-



**Рис. 1.34.** Изменение силы  $F$ , действующей на границе стержня с преградами из различных материалов.

Поясн. см. в тексте.



жений, что приводит к уменьшению напряжений за фронтом пластической волны. В результате такого взаимодействия в сторону свободного торца стержня опять движется упругая волна сжатия с амплитудой, соответствующей пределу текучести материала. В результате нескольких актов взаимодействия волны разгрузки с пластической волной напряжения в последней уменьшаются и в конечном итоге становятся растягивающими. В силу этого и происходит отделение стержня от преграды. Поэтому с увеличением предела текучести материала увеличивается амплитуда волны разгрузки, и снятие сжимающих напряжений в стержне происходит за меньшее число взаимодействий волны разгрузки и пластической волны.

Для составного стержня время контакта в случае 3 больше и в случае 2 меньше. При этом уровень напряжений в стержне, где медный цилиндр находится в стальной оболочке, выше. Ясно, что и общая деформация стержня здесь будет меньше.

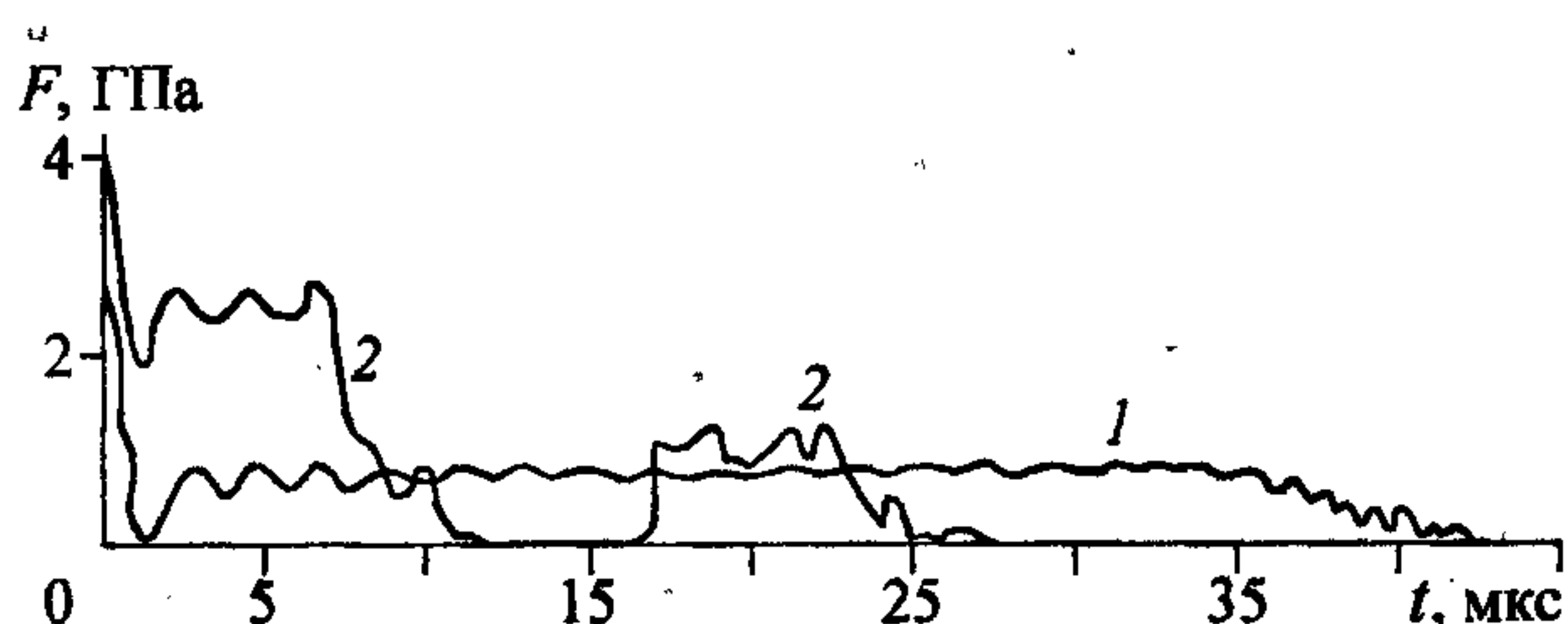
**Задача 4.** Геометрические размеры стержня остаются теми же, что и в задаче 3. Скорость удара  $v_0 = 50$  м/с. Материалы слоев стержня прежние, но располагаются слои так, что половина стержня длиной  $L/2$  из одного материала, а вторая половина  $L/2$  — из другого. Удар осуществляется сначала медным концом, а затем стальным. На рис. 1.35 показано изменение силы  $F$  в зависимости от  $t$  для этих двух вариантов расчета.

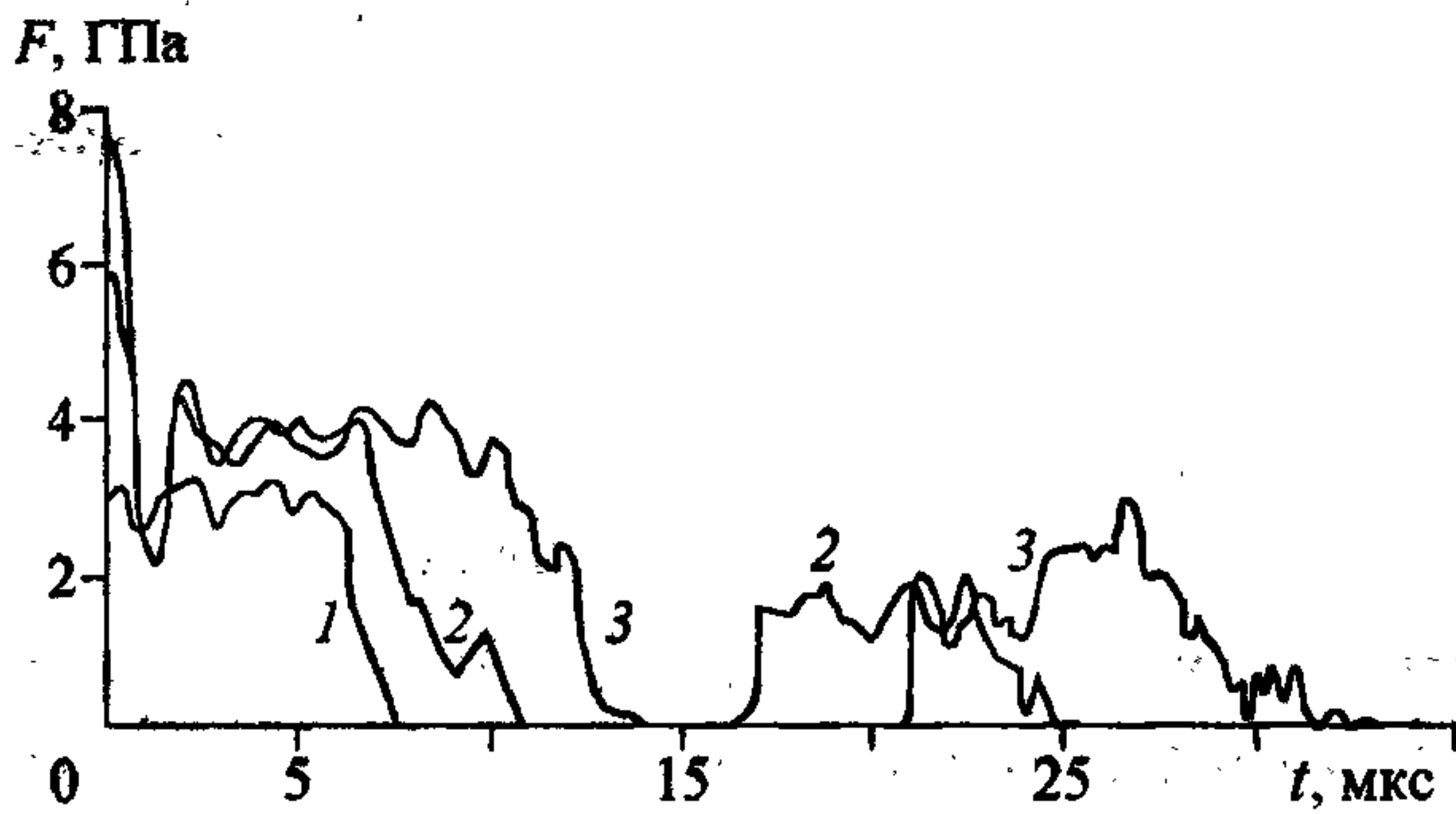
В случае 1 время контакта близко к времени контакта сплошного медного стержня и график  $F(t)$  изменяется аналогично 4 (см. рис. 1.34).

В случае 2, когда происходит удар стальным концом после обращения силы  $F$  в нуль и отскока стержня от преграды, имеет место вторичное касание стержня преграды. Такое явление будем называть повторным отскоком. Если повысить скорость удара, то время первого отскока увеличивается, но вместе с этим увеличивается продолжительность времени повторного касания стержнем преграды и промежуток между первым отскоком и повторным касанием. На рис. 1.36 приведено изменение силы  $F(t)$  для трех значений начальной скорости

Рис. 1.35. Изменение силы  $F$  от времени для составных стержней из разных материалов.

Поясн. см. в тексте.





**Рис. 1.36.** Изменение силы  $F$  от времени для различных скоростей удара.

Поясн. см. в тексте.

удара, м/с: 25 (1), 50 (2) и 75 (3). Интересно отметить, что промежуток времени между первым отскоком и повторным касанием зависит от отношения длин стального и медного участков стержня. Установлено, что существует такая длина медного участка, при которой повторного касания не происходит.

Суммарная длина стержня

при этом остается постоянной. Объяснение явления повторного отскока аналогично объяснению для сплошного стержня. При этом следует учитывать, что на границе контакта стального и медного участков стержня происходит перераспределение напряжений в волне сжатия, так как взаимодействие последней с контактной границей приводит к образованию волны разрежения, идущей в участок стержня из стали. Это вызвано тем, что медь — более мягкий материал, чем сталь.

Для экспериментального наблюдения процесса соударения тел с преградой разработана методика скоростной фоторегистрации [118], которая позволяет определять такие параметры, как скорость движения и проникания, время контакта с преградой и т. д. Очевидно, что при регистрации процессов, протекающих со скоростью  $\sim 10^3$  м/с, необходимо обеспечить высокое быстродействие (время экспозиции кадров должно быть  $\sim 10^{-7}$  с). Для решения этих задач наиболее перспективны оптические схемы многоэкспозиционной фоторегистрации на основе лазерных источников света. Использование серии управляемых лазерных импульсов в сочетании с их малой длительностью позволяет получить хорошее пространственное и временное разрешение и обеспечить жесткую синхронизацию с исследуемым явлением.

В данном случае разработан стробоскопический источник световых импульсов на основе рубинового лазера с периодической модуляцией добротности, который позволяет получать серию (от 1 до 100) импульсов генерации длительностью  $\sim 3 \cdot 10^{-8}$  с. Интервалы между импульсами регулируются дискретно через 1 мкс в пределах от 10 до 500 мкс с точностью 0,2 мкс. Электрооптический модулятор выполнен на ячейке Керра. Активным элементом гене-



ратора является кристалл рубина диаметром 8 мм и длиной 120 мм. Резонатор образован двумя зеркалами с диэлектрическими покрытиями. Зеркало с коэффициентом отражения  $\sim 100\%$  вместе с электрооптическим модулятором добротности составляло четвертьволновой светозатвор-отражатель, включаемый при сбросе напряжения. В качестве поляризатора применялась призма из исландского шпата. Четвертьволновой светозатвор-отражатель выполнен в виде единой конструкции, элементы которой размещались в корпусе из фторопласта, заполненного нитробензолом. Параметры ячейки Керра: расстояние между электродами 8 мм, их длина 50 мм, четвертьволновое напряжение 15 кВ, емкость ячейки 30 пФ. Электронная схема управления ячейкой Керра состояла из: 1) генератора синхронизирующих импульсов. Для этой цели использовался серийно выпускаемый шестиканальный генератор задержанных импульсов Г34-6; 2) задающего генератора, вырабатывающего серию электрических импульсов, число которых могло изменяться от 1 до  $10^3$ , интервалы между импульсами регулировались дискретно через 1 мкс в пределах от 2 до  $10^3$  мкс. В качестве задающего использовался промышленный генератор Г5-27 с точно калиброванным временным сдвигом. Наличие в приборе кварцевого резонатора обеспечивало нестабильность длительности интервалов между импульсами не хуже 0,1 мкс; 3) формирователя высоковольтных импульсов.

Схема экспериментальной установки, предназначенной для исследования процесса соударения тел с преградой, представлена на рис. 1.37. Для придания необходимой скорости стержню (цилиндр диаметром  $2R_0 = 5,2$  мм и длиной

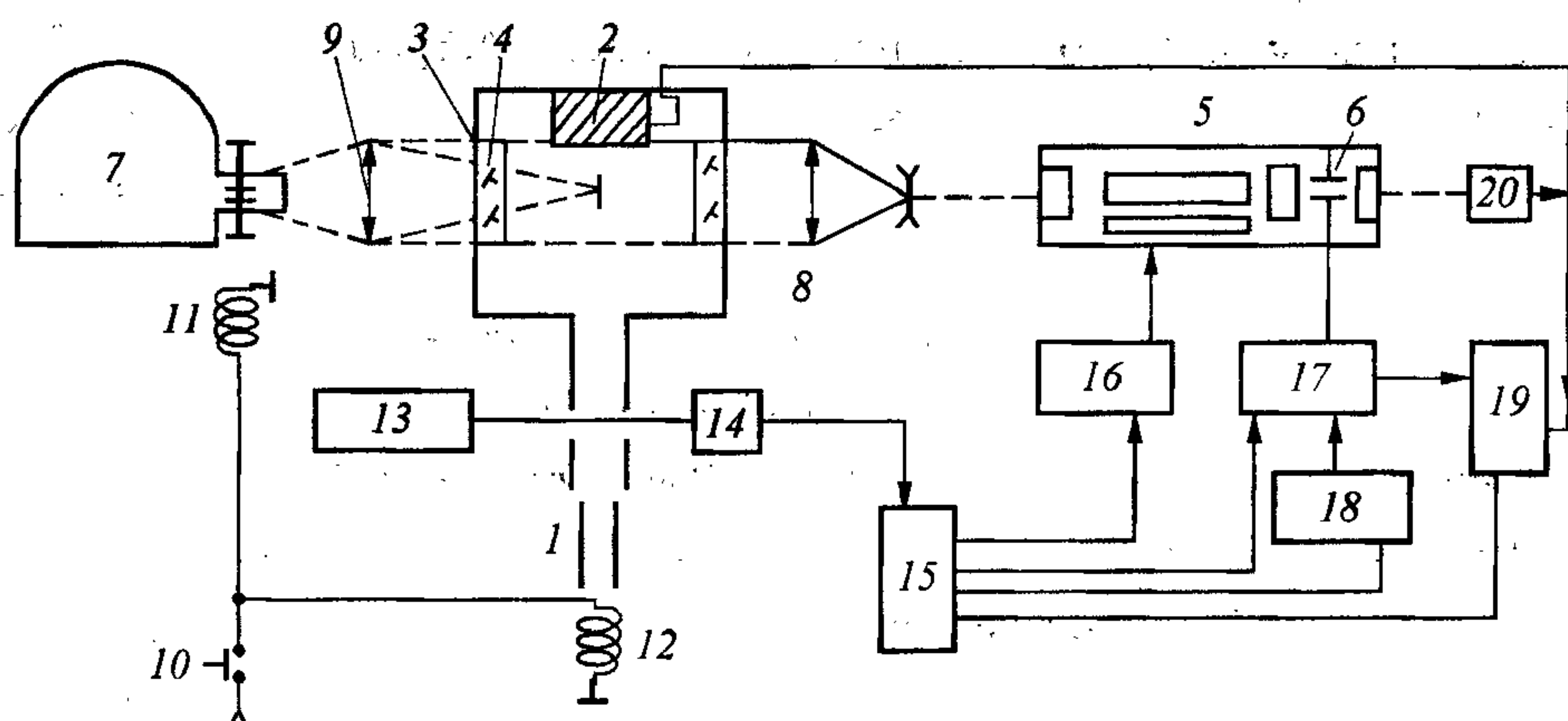


Рис. 1.37. Схема экспериментальной установки.

Поясн. см. в тексте.

$L_0 = 20$  мм) применялось разгонное устройство 1. Преграда 2 размещалась в стальной защитной камере 3 с прозрачными окнами 4. Процесс соударения стержня с преградой регистрировался с использованием высокоскоростной киносъемки. В качестве источника стробоскопической подсветки служил лазер 5 с периодической модуляцией добротности четвертьволновым электрооптическим затвором Керра 6. Изображение фиксировалось с помощью ждущего фоторегистратора ЖФР-3 7, работающего в режиме фоторазвертки. Телескопическая система 8 расширяла световой пучок лазера до размеров окна ( $d = 60$  мм), а линзой 9 (фокусное расстояние  $f = 300$  мм) изображения снаряда и преграды фокусировались на пленке фоторегистратора. Установка работала следующим образом. Заряжалась батарея накачки ламп лазерного стробоскопа, и снаряд помещался в разгонное устройство. Кнопкой "Пуск" 10 открывался электромеханический затвор 11 фоторегистратора, и с помощью электромагнитного спускового устройства 12 приводилось в действие разгонное устройство. Стержень на пути к преграде пересекал используемый для синхронизации луч лазера ЛГ-52-3 13, при этом с фотодиода ФД-2 14 сигнал отрицательной полярности поступал на генератор синхроимпульсов ГЗИ-6 15. Через подобранные времена задержки синхроимпульсы с генератора ГЗИ-6 поступали на блок поджига ламп накачки ОКГ 16, формирователь высоковольтных импульсов 17 и задающий генератор 18. Контроль числа и формы импульсов осуществлялся с помощью запоминающего осциллографа С8-2 19, при этом электрические импульсы с ячейки Керра через емкостный делитель поступали на один вход осциллографа, а световые импульсы, преобразованные в электрические фотоэлементом ФЭК-14 20, — на другой. Кроме этого, к преграде 2 был приклеен тензодатчик, сигнал с которого также поступал на осциллограф.

Эта же установка использовалась для съемки процесса соударения в режиме щелевой развертки. Управляющее напряжение на ячейку Керра не подавалось, и ОКГ работал в режиме свободной генерации. Контроль работы лазера осуществлялся с помощью осциллографа С8-2. Одновременно с задающего генератора на осциллограф поступали метки времени.

На рис. 1.38, а представлена кинограмма процесса соударения, снятая в кадровом режиме. Интервалы между кадрами 40 мкс, время экспозиции  $3 \cdot 10^{-8}$  с. На рис. 1.38, б приведена фотография процесса, снятая в режиме фоторазвертки при работе лазера в "пичкóвом" режиме. Из этих фотографий можно определить скорости подлета и отскока стержня от преграды, а также время контакта. Типичный график зависимости скорости для двух торцов медного



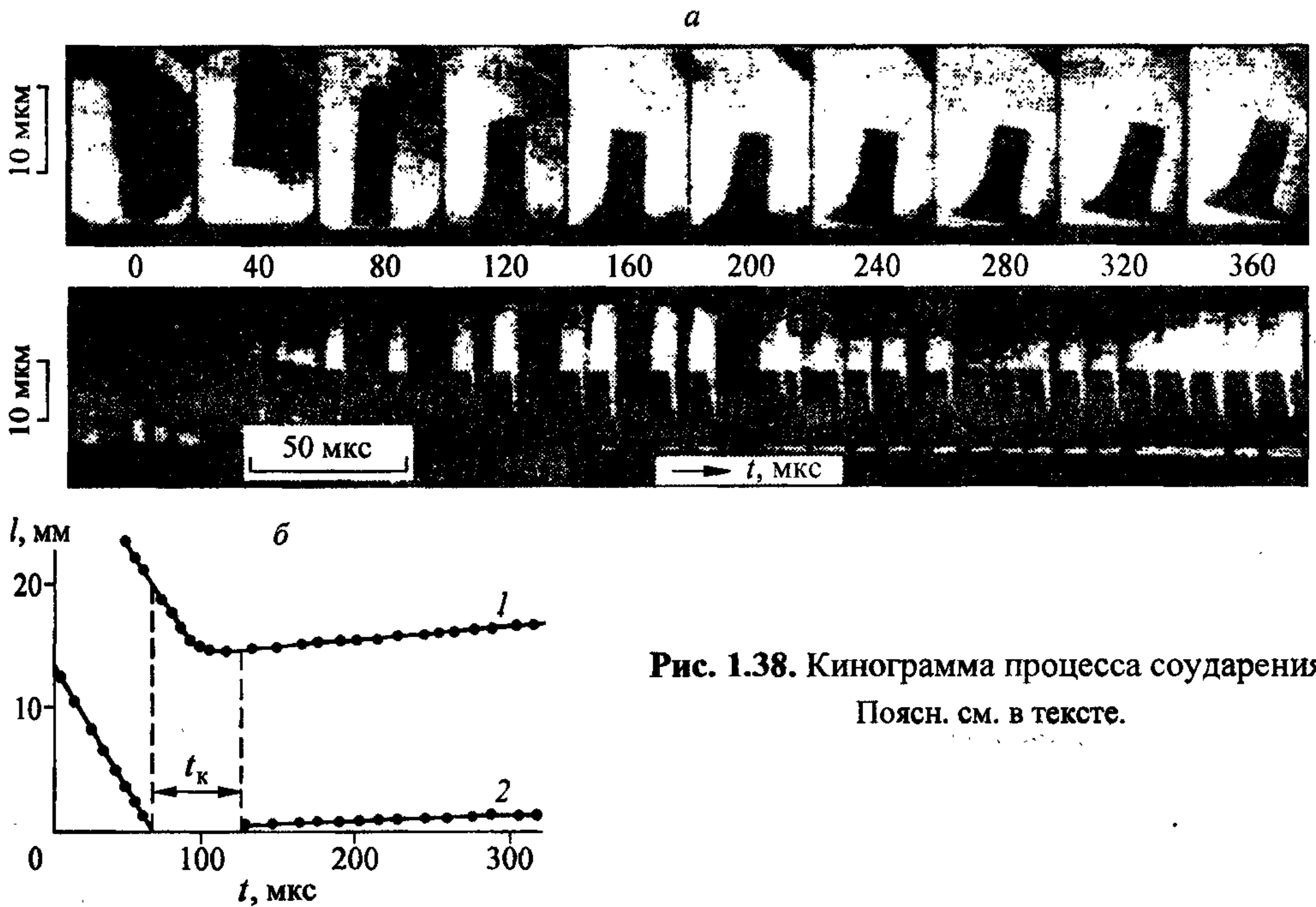


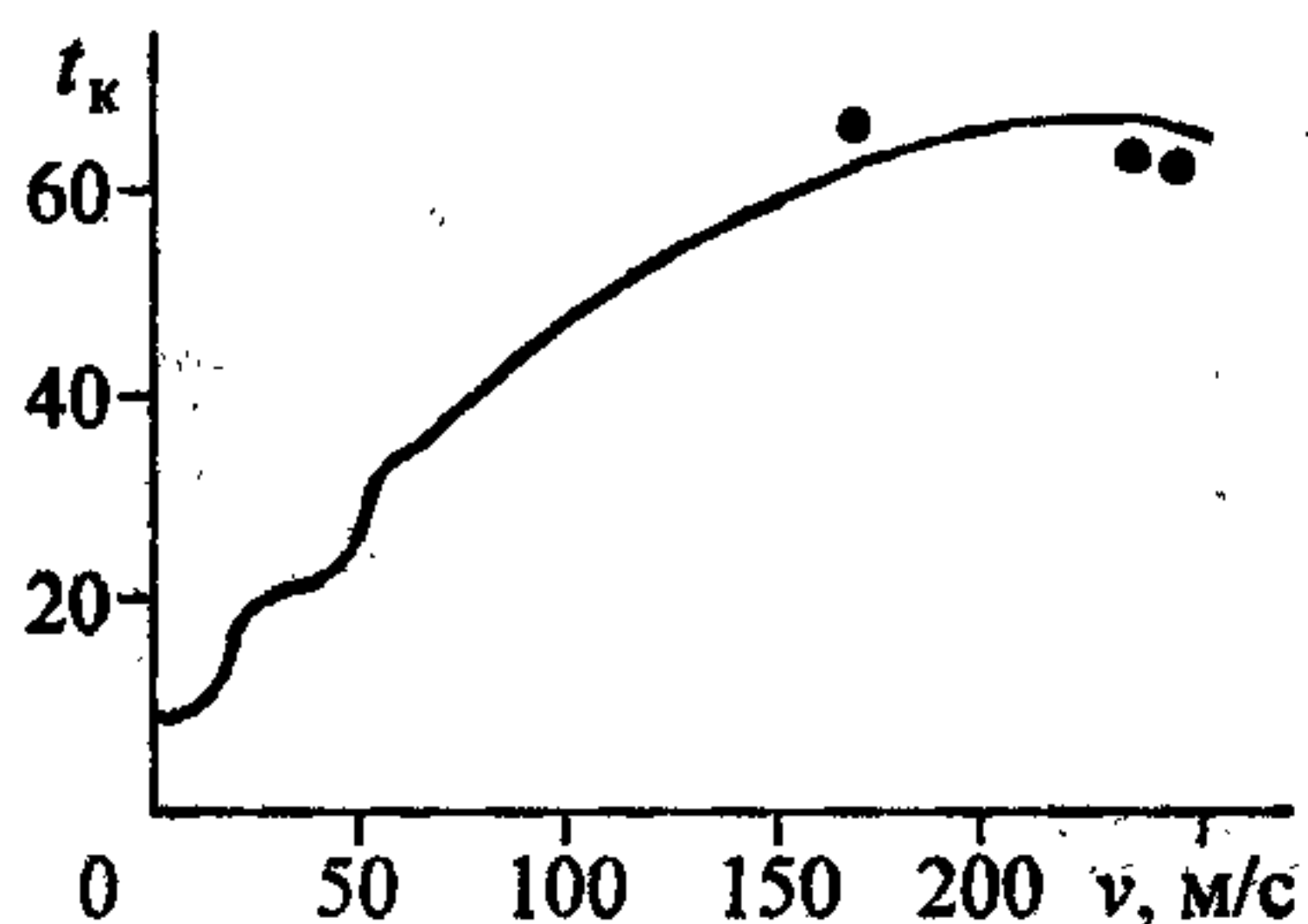
Рис. 1.38. Кинограмма процесса соударения.

Поясн. см. в тексте.

цилиндрического стержня при соударении со стальной преградой показан на рис. 1.38, б (1 — задний торец стержня, 2 — передний торец стержня).

Данные сопоставления численных расчетов с экспериментом приведены на рис. 1.39. Сплошной линией представлена зависимость времени контакта медного стержня со стальной преградой от начальной скорости удара. Расчет удара стержня по твердой преграде проводился при следующих параметрах: длина и диаметр стержня составляли соответственно 2 и 0,55 см, плотность материала  $\rho_0 = 8,9 \text{ г/см}^3$ , модуль объемного сжатия  $k = 139 \text{ ГПа}$ , модуль сдвига  $\mu = 46 \text{ ГПа}$ . Принималось, что динамический предел текучести меди  $Y_0 = 0,3 \text{ ГПа}$ . В отличие от задачи удара стержня из стали (задача 1) участок ступенчатого поведения  $t_k$  сдвинут здесь в начальную область кривой при скоростях удара до 20 м/с. Это объясняется тем, что при увеличении скорости удара амплитуда напряжений в пластической волне повышается у меди быстрее, чем у стали. Результаты экспериментов по определению времени контакта при соударении медных стержней с закаленной стальной преградой также приведены на рис. 1.39 (точки).

Удовлетворительное совпадение расчета и эксперимента свидетельствует о том, что математическая модель упругопластического поведения среды пра-



**Рис. 1.39.** Время контакта для медных стержней в зависимости от скорости удара.

Поясн. см. в тексте.

вильно описывает явление отскока стержня от преграды.

С другой стороны, по результатам сравнения времени отскока стержней от твердых преград, полученным численными расчетами, и данных экспериментов можно уточнить динамические характеристики материалов модели. В частности, этой величиной может быть предел текучести  $Y_0$ .

### Литература к главе 1

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966. — 686 с.
2. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. — М.: Наука, 1971. — 854 с.
3. Бриджмен П. В. Новейшие работы в области высоких давлений. — М.: ИЛ, 1948. — 300 с.
4. Давиденков Н. Н. Механические свойства металлов. — М.: ОНТИ, 1936. — 216 с.
5. Давиденков Н. Н. Динамическое испытание материалов. — М.: ОНТИ, 1936. — 395 с.
6. Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Т. 1, 596 с.; Т. 2, 431 с. — М.: Наука, 1984.
7. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. — М.: Физматгиз, 1961. — 400 с.
8. Лаврентьев М. А. Кумулятивный снаряд и принципы его работы// УМН. — 1957. — Т. 12, № 4(76). — С. 41—52.
9. Златин Н. А., Кожушко А. А. Гидродинамические модельные представления в теории высокоскоростного взаимодействия твердых тел и границы их применимости// ЖТФ. — 1962. — Т. 52, вып. 2. — С. 330—334.
10. Златин Н. А., Красильщиков А. П., Мишин Г. И., Попов Н. Н. Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях. — М.: Наука, 1974. — 344 с.
11. Златин Н. А. О предельных скоростях сплошной конденсированной кумулятивной струи// Проблемы математики и механики. — Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1983. — С. 94—97.



12. Златин Н. А. О роли сжимаемости в процессе динамического деформирования пластических тел// Некоторые проблемы прочности твердого тела. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1959. — С. 222—229.
13. Златин Н. А. К теории высокоскоростного соударения металлических тел// ЖТФ. — 1961. — Т. 31, № 8. — С. 982—990.
14. Златин Н. А. О кинетических параметрах начального периода процесса соударения пластических тел// Там же. — 1963. — Т. 33, № 2. — С. 231—233.
15. Фомин В. М., Хайруллин Н. Х., Степанцов Г. К. К задаче о распространении волн в физически нелинейных стержнях конечной длины// Исследование по теории пластин и оболочек. Вып. 9. — Казань: Изд-во КГУ, 1971. — С. 354—383.
16. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. — М.: Мир, 1974. — 338 с.
17. Сепанов Т. В. Уругопластическое деформирование материалов под действием импульсных нагрузок. — Киев: Наук. думка, 1979. — 266 с.
18. Кукуджанов В. Н. Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения уругопластических сред// Успехи механики. — 1985. — Т. 8, вып. 4. — С. 21—64.
19. Фомин В. М., Хакимов Э. М. Численное моделирование волн сжатия и разрежения в металлах// ПМТФ. — 1979. — № 5. — С. 114—122.
20. Zukas J. A., Nicholas T., Swift H. F. et al. Impact dynamics. — 1982.— 452 p.
21. Бушман А. В., Канель Г. И., Ни А. Л., Фортгов В. Е. Теплофизика и динамика интенсивных импульсных воздействий. — Черноголовка, 1988. — 200 с.
22. Мержиевский Л. А. Ударные волны в конденсированных средах: Учеб. пособие/ НГУ. — Новосибирск, 1982. — 83 с.
23. Симонов И. В. Удар пластинки по уругопластическому полупространству. Численное моделирование// Изв. АН СССР. МТТ. — 1974. — № 2. — С. 105—112.
24. Симонов И. В., Чекин Б. С. Высокоскоростное соударение железных пластин// ФГВ. — 1975. — Т. 11, № 2. — С. 274—281.
25. Флитман Л. М. Удар пластинки по уругопластическому полупространству// Изв. АН СССР. МТТ. — 1974. — № 2. — С. 97—104.
26. Gilman J. J. Dislocation dynamics and the response of materials to impact// Appl. Mech. Rev. — 1968. — V. 21, N 8. (Русский перевод: Механика. — 1970. — № 2. — С. 767—783.)
27. Kuriama S., Kawata K. Propagation of stress wave with plastic deformation in metal obeying the constitutive equation of the Johnston—Gilman type// J. Appl. Phys. — 1973. — V. 44, N 8. — P. 3445—3454.
28. Curran D. R. Nonhydrodynamic attenuation of shock waves in aluminum// Ibid. — 1963. — V. 34, N 9. — P. 2913—2920.
29. Новиков С. А., Сеницина Л. М. О влиянии давления ударного сжатия на величину критического напряжения сдвига в металлах// ПМТФ. — 1970. — № 6. — С. 107—110.
30. Чельшев В. Т., Шехтер В. И., Шушко А. А. Об изменении давления на поверхности преграды при контактном взрыве заряда ВВ// ФГВ. — 1970. — Т. 6, № 2. — С. 217—223.
31. Уилкинс М. Расчет уруго-пластических течений// Вычислительные методы в гидродинамике. — М.: Мир, 1967. — С. 212—263.

32. Тесленко Т. С. Рентгеновские исследования микроискажений в ГЦК-металлах после нагружения плоскими ударными волнами// ФГВ. — 1977. — Т. 13, № 1. — С. 121—125.
33. Wilkins M. L. Computer Simulation of Dynamic Phenomen. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1999. — 246 p.
34. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. — М.: Наука, 1961. — 400 с.
35. Григорян С. С. К решению задачи о подземном взрыве в мягких грунтах// ПММ. — 1964. — Т. 28, вып. 6. — С. 1070—1082.
36. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов// Там же. — 1960. — Т. 24, вып. 6. — С. 1057—1072.
37. Зволинский Н. В. Многократное отражение упругих волн в слое// Тр. Геофиз. ин-та. — 1954. — № 22(149). — С. 26—49.
38. Зволинский Н. В., Рейтман М. И., Шапиро Г. С. Динамика деформируемых твердых тел// Механика в СССР за 50 лет. — М.: Наука, 1972. — С. 291—323.
39. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. — М.: ИЛ, 1955. — С. 1—92, 159—177.
40. Ляхов Г. М. Основы динамики взрыва в грунтах и жидких средах. — М.: Недра, 1964. — 216 с.
41. Кабулов В. К. Алгоритмизация в теории упругости и деформированной теории пластичности. — Ташкент: Фан, 1966. — 394 с.
42. Домбровский Г. А., Литвинов Г. В., Малышев Б. М. Продольный растягивающий удар по натянутой проволоке// Инж. ж. мех. тв. тела. — 1968. — № 2. — С. 106—110.
43. Рейтман М. И., Шапиро Г. С. Динамическая теория пластичности// Итоги науки и техники. Сер. Упругость и пластичность. — М., 1968. — С. 1—111.
44. Шемякин Е. И. Динамические задачи теории упругости и пластичности/ НГУ. — Новосибирск, 1968. — 337 с.
45. Никифоровский В. С., Шемякин Е. И. Динамическое разрушение твердых тел. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1979. — 270 с.
46. Канель Г. И., Разоренов С. В., Уткин А. В., Фортов В. Е. Ударно-волновые явления в конденсированных средах. — М.: Янус-К, 1996. — 407 с.
47. Прагер В. Проблемы теории пластичности. — М.: Физматгиз, 1958. — 135 с.
48. Теория пластичности. — М.: ИЛ, 1948. — 447 с.
49. Ильюшин А. А. Пластичность. — М.: Гостехиздат, 1948. — 271 с.
50. Годунов С. К., Роменский Е. И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. — Новосибирск: Научная книга, 1998. — 267 с. (Университет. Сер.: Т. 4).
51. Иванов Г. В. Об уравнениях упругопластического деформирования при произвольной величине поворотов и деформаций// ПМТФ. — 1978. — № 3. — С. 130—135.
52. Садовский В. М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. — М.: Наука, 1997. — 208 с.
53. Кадашевич В. И., Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая эффект Баушингера// Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 117, № 4. — С. 78—89.



54. Гохфельд Д. А. Несущая способность конструкций в условиях теплосмен. — М.: Машиностроение, 1970. — 250 с.
55. Besseling J. F. A theory of elastic, plastic and creep deformations of an initially isotropic material showing anisotropic strain hardening, creep recovery, and secondary creep// J. Appl. Mech. — 1958. — V. 25, N 4. — P. 529—536.
56. Соколовский В. В. Распространение упруговязкопластических волн в стержнях// ПММ. — 1948. — Т. 12, вып. 3. — С. 261—280.
57. Соколовский В. В. Одномерные нестационарные движения вязкопластической среды// Там же. — 1949. — Т. 13, вып. 6. — С. 623—632.
58. Malvern L. E. The propagation of longitudinal waves of plastic deformation in a bar of material exhibiting a strain-rate effect// J. Appl. Mech. — 1951. — V. 18, N 2. — P. 203—208.
59. Malvern L. E. Plastic wave propagation in a bar of material exhibiting a strain rate effect// Quart. Appl. Math. — 1951. — V. 8. — P. 405—411.
60. Cristescu N. Dynamic plasticity. — Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1967. — 614 p.
61. Lubliner J. A. Generalized theory of strain-rate dependent plastic wave propagation in bars// J. Mech. and Phys. Solids. — 1964. — V. 12. — P. 59—65.
62. Кукуджанов В. Н. Распространение упругопластических волн в стержнях с учетом влияния скорости деформации// Труды ВЦ АН СССР. — М., 1967. — С. 3—47.
63. Кукуджанов В. Н. Одномерные задачи распространения волн напряжения в стержнях// Там же. — 1977. — Вып. 7. — С. 2—56.
64. Кокошвили С. М. Экспериментальное исследование соответствия квазистатического растяжения и распространения продольных волн в полиэтиленовом стержне// Мех. полимеров. — 1971. — № 3. — С. 564—567.
65. Brevet P. Обработка результатов динамических испытаний образцов при большой скорости нагружения// Мес. mater. ёлес. — 1972. — N 269. — P. 5—13.
66. Wood E. R., Lin T. H. Неупругая динамическая реакция конечного стержня// РТК. — 1969. — Т. 7, № 11. — С. 2158—2160.
67. Kawashima S., Kawamura R. Исследование механических свойств алюминиевых стержней при высоких скоростях нагружения// Trans. Jap. Astronaut. And Space Sci. — 1970. — V. 13, N 22. — P. 27—36.
68. Кокошвили С. М., Музыченко В. П., Тамуж В. П. Численное решение задачи об ударе жесткой массы по вязкоупругому стержню конечной длины// Мех. полимеров. — 1971. — № 3. — С. 450—456.
69. Sulicin I. Дополнительные замечания, касающиеся “плато” в динамической теории пластичности// Arch. mech. storow. — 1975. — V. 27, N. 4. — P. 665—668.
70. Tokurog Tarsuo. Определение уравнения для термодинамических материалов// Trans. Jap. Soc. Aeronaut. and Space sci. — 1973. — V. 16, N 31. — P. 51—59.
71. Gilman D. J. Dislocation dynamics and the response of materials to impact// Appl. Mech. Rev. — 1968. — V 2, N 8. (Рус. перевод: Механика. — 1970. — № 2.) — P. 96—124.
72. Гилман Дж. Микродинамическая теория пластичности// Микропластичность. — М.: Металлургия, 1972. — С. 18—37.

73. Kawata K., Kyriyama S. Распространение волн напряжений с пластическими деформациями в металлах, подчиняющихся определяющему уравнению типа Джонсона—Гилмана// J. Appl. Phys. — 1973. — V. 44, N 8. — P. 3445—3454.
74. Нигматулин Р. И., Холин Н. Н. К модели упругопластической среды с дислокационной кинетикой пластического деформирования// Изв. АН СССР. ММТ. — 1974. — № 4. — С. 131—146.
75. Козин Н. С., Степанов Ю. С., Холин Н. Н. Уравнения динамической пластичности для поликристаллических металлических материалов// ПМТФ. — 1979. — № 6. — С. 147—153.
76. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. — М.: Наука, 1971. — 231 с.
77. Новацкий В. К. Волновые задачи теории пластичности. — М.: Мир, 1978. — 307 с.
78. Пэжина П. Основные вопросы вязкопластичности. — М.: Мир, 1968. — 175 с.
79. Ильюшин А. А., Победра Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. — М.: Наука, 1980. — 280 с.
80. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977. — 383 с.
81. Работнов Ю. Н., Суворова Ю. В. О законе деформирования металлов при одноосном нагружении// Изв. АН СССР. МТТ. — 1972. — № 4. — С. 78—84.
82. Суворова Ю. В., Осокин А. Е. Распространение одномерных волн в нелинейных материалах// Механика полимеров. — 1978. — № 3. — С. 62—67.
83. Степанов Г. В. Упругопластическое деформирование материалов под действием импульсных нагрузок. — Киев: Наук. думка. — 1979. — 266 с.
84. Басин Р. А., Ленский В. С., Ленский Э. В. Динамические зависимости между напряжениями и деформациями// Проблемы динамики упругопластических сред. — М.: Мир, 1975. — С. 7—38.
85. Христианович С. А., Шемякин Е. И. О плоской деформации пластического материала при сложном нагружении// Изв. АН СССР. МТТ. — 1969. — № 2. — С. 138—149.
86. Христианович С. А. Деформация упрочняющегося пластического материала// Там же. — 1974. — № 2. — С. 148—174.
87. Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И. К вопросу о плоском деформировании упрочняющихся и разупрочняющихся пластических материалов// ПМТФ. — 1977. — № 3. — С. 156—174.
88. Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И. О механизме деформирования сыпучего материала при больших сдвигах// ФТПРПИ. — 1974. — № 3. — С. 130—133.
89. Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И. Некоторые постановки краевых задач L-пластичности// ПМТФ. — 1975. — № 2. — С. 128—137.
90. Ревуженко А. Ф. Вариационные постановки краевых задач разрушения// Там же. — 1980. — № 4. — С. 148—156.
91. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. — М.: Наука, 1978. — 303 с.
92. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. — М.: Наука, 1968. — 687 с.



93. Куропатенко В. Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики// Тр. Математ. ин-та АН СССР. — 1966. — Т. 74, ч. I. — С. 34—50.
94. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 418 с.
95. Забабахин Е. И. Явления неограниченной кумуляции// Механика в СССР за 50 лет. Т. 2. — М.: Наука, 1970. — С. 313—342.
96. Лаптев В. И., Тришин Ю. А. Увеличение начальной скорости и давления при ударе по неоднородной преграде// ПМТФ. — 1974. — № 6. — С. 128—132.
97. Кукуджанов В. Н. Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред// Успехи механики. — 1985. — Т. 8, вып. 4. — С. 21—63.
98. Труды по гиперзвуковому удару// Int. Journ. of impact engng. — 1987. — V. 5, N 1—4; 1990. — V. 10, N 1—4; 1995. — V. 17, N 1—6.
99. Харлоу Ф. Х. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики// Вычислительные методы в гидродинамике. — М.: Мир, 1967. — С. 316—342.
100. Анучина Н. Н. О методах расчета течений сжимаемой жидкости с большими деформациями// ЧММСС. — 1970. — Т. 1, № 4. — С. 3—84. (ВЦ СО РАН СССР)
101. Петренко В. Е. О методах расчета течений несжимаемой жидкости с большими деформациями// Колебания упругих конструкций с жидкостью: Докл. симп-ма/НЭТИ. — Новосибирск, 1973. — С. 164—182.
102. Фомин В. М., Яненко Н. Н. Численное моделирование задач высокоскоростного взаимодействия тел// Мат-лы симп-ма “Нелинейные волны деформации”. Т. 2. — Таллин, 1978. — С. 179—182.
103. Фомин В. М., Яненко Н. Н., Шапеев В. П. On some methods for the numerical simulation of flows with complex structure// Computer methods in applied mechanics and engineering. — 1979. — V. 17/17. — P. 659—671.
104. Фомин В. М., Сапожников Г. А., Гладышев А. М. Численный расчет взрывного обжатия конических облицовок методом частиц в ячейках// Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Мат-лы VIII Всесоюз. конф-ции/ ИТПМ СО АН СССР. — Новосибирск, 1984. — С. 103—109.
105. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц. — М.: Наука, 1982. — 391 с.
106. Высокоскоростные ударные явления/ Под. ред. Р. Кинслоу. — М.: Мир, 1973. — 528 с.
107. Ворожцов Е. В., Яненко Н. Н. Методы локализации особенностей при численном решении задач газодинамики. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1985. — 222 с.
108. Качан М. С., Киселев Ю. В., Тришин Ю. А. Взаимодействие ударных волн с контактной границей соударяющихся тел// ФГВ. — 1975. — Т. 11, № 5. — С. 767—773.
109. Веклич Н. А., Кукуджанов В. Н., Малышев Б. М. О продолжительности упругопластического удара по стержню// Тез. докл. IV симп-ма по распространению волн. — Кишинев: Штиинца, 1968.
110. Веклич Н. А. О распространении и взаимодействии упругопластических волн в

- стержне при ударе о преграду// Изв. АН СССР. МТТ. — 1970. — № 4. — С. 182—186.
111. Веклич Н. А., Малышев Б. М. Продолжительность удара упругопластического стержня// Там же. — 1976. — № 2. — С. 193—197.
112. Альтшулер Л. В., Трунин Р. Ф., Урлин В. Д. и др. Развитие в России динамических методов исследования высоких давлений// УФН. — 1999. — Т. 169. — № 2. — С. 323—344.
113. Гулидов А. И., Фомин В. М. Анализ распространения упругопластических волн в коротких стержнях// Мат-лы симп-ма “Нелинейные волны деформаций”. Т. 2. — Таллин, 1978. — С. 141—146.
114. Гулидов А. И., Фомин В. М. Численное моделирование отскока осесимметричных стержней от твердой преграды// ПМТФ. — 1980. — № 3. — С. 126—132.
115. Бойко В. М., Гулидов А. И., Фомин В. М. и др. Экспериментально-теоретическое исследование отскока коротких стержней от твердой преграды// Там же. — 1982. — № 5. — С. 129—133.
116. Баренблат Г. И., Ишлинский А. Ю. Об ударе вязкопластического стержня о жесткую преграду// ПММ. — 1962. — Т. 26, № 3. — С. 497—502.
117. Ленский В. С. Об упругопластическом ударе стержня о жесткую преграду// Там же. — 1949. — Т. 13, № 2. — С. 165—170.
118. Бойко В. М., Папырин А. Н. Быстродействующие методы лазерной диагностики гетерогенных потоков// Современные экспериментальные методы исследования процессов тепло- и массообмена. Ч. 2/ ИТМО АН БССР. — Минск, 1981. — С. 3—20.
119. Rosenblatt M., Kreyenhagen K.N., Romene W.D. Numerical studies of ejects characteristics behind thin plates// AIAA J. — 1970. — V. 8. — P. 1005—1011.



## УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ В МОДЕЛЯХ СПЛОШНЫХ СРЕД

---

Поведение сплошных сред описывается системой законов сохранения массы, количества движения и энергии — нелинейных эволюционных уравнений с частными производными и уравнениями состояния, связывающими термодинамические характеристики веществ.

Уравнение состояния определяет термодинамические свойства вещества в широком диапазоне плотностей и давлений. При численном моделировании нестационарных движений сплошной среды либо под воздействием потоков энергии на вещество, либо под действием импульсных механических нагрузок уравнение состояния в существенной степени определяет точность и надежность получаемых результатов. Проведение подобных расчетов требует адекватного описания термодинамических свойств веществ от нормальных условий до давлений в десятки мегабар и температур в сотни тысяч градусов. Следует также отметить, что получаемая в экстремальных условиях опытная информация имеет, как правило, сложный интегральный характер и интерпретация результатов экспериментальных измерений в большинстве случаев невозможна без привлечения методов численного моделирования.

Современные теоретические модели позволяют получить значения свойств веществ на отдельных и, как правило, не перекрывающихся участках фазовой диаграммы. Следует отметить, что чисто теоретическое описание наиболее важной в прикладном отношении области сильнонагретой металлической жидкости и плотной плазмы — типичных состояний вещества, возникающих в условиях интенсивного импульсного энерговыделения в конденсированной фазе, — чрезвычайно затруднено вследствие неупорядоченности и сильной неидеальности. Обычно эти модели связаны с громоздкими численными расчетами, а полученная с их помощью информация существует в виде графиков или таблиц ограниченного объема, что затрудняет непосредственное использование этих данных в численном моделировании нестационарных газодинамических процессов.

Альтернативный подход при построении широкодиапазонных уравнений состояния заключается в конструировании полуэмпирических моделей, в кото-

рых общий вид функциональных зависимостей термодинамического потенциала устанавливается с привлечением теоретических представлений, а данные экспериментальных измерений используются для определения численных значений коэффициентов в этих зависимостях. Такой подход позволяет максимально использовать имеющуюся экспериментальную и расчетную информацию и дает возможность построить уравнение состояния в компактной форме, удобной для проведения численных расчетов.

**Общие требования к уравнениям состояния.** Характеристики сплошной среды, как и характеристики вещества, носят статистический характер и выражают средние свойства ансамблей микрочастиц. Так температура и давление газа пропорциональны средней кинетической энергии его молекул. Связи между характеристиками сплошной среды — термодинамическими функциями называются уравнениями состояния (УРС) термодинамической системы (сплошной среды или вещества). Поскольку термодинамика изучает свойства равновесных систем, то УРС не могут описывать изменение состояния веществ со временем. Это ограничение носит принципиальный характер.

В качестве примера можно указать на плазму. Если плазма находится в равновесном состоянии, то ее свойства можно описывать единым уравнением состояния. Если же плазма подвергается воздействию электромагнитного поля, т.е. участвует в неравновесном процессе, то требуется по отдельности рассматривать УРС ионов и УРС электронов. Для описания их взаимодействия в системе законов сохранения следует добавить эволюционные уравнения, описывающие релаксацию температур, давлений и скоростей.

Набор свойств вещества, которые необходимо использовать для математического моделирования поведения вещества в широком диапазоне изменения его характеристик, продемонстрируем на примере УРС в комплексе ВОЛНА [1]. Принятая здесь математическая модель описывает такие неустановившиеся движения сжимаемых идеальных и неидеальных сред, в которых свойства среды могут меняться в широком диапазоне от упругих свойств при низких температурах до свойств фотонного газа при высоких температурах. При расчете динамики среды учитываются адиабатическая сжимаемость, теплопроводность, фазовые переходы (плавление, испарение, полиморфизм), детонация ВВ, упругость, пластичность, хрупкость, разрушение, электропроводимость, магнитные и электрические свойства. Если свойства среды определяются уравнениями неэволюционного типа, то они относятся к уравнениям состояния ве-



ществ. Неравновесные свойства описываются уравнениями эволюционного типа, дополняющими систему законов сохранения.

Расчет величин по уравнениям состояния при численном решении нестационарных задач механики сплошной среды достаточно трудоемок и составляет большую часть в общем объеме вычислений. Поэтому при создании УРС большое внимание следует обращать на их экономичность.

Разные физические модели требуют знания разных теплофизических свойств. Однако есть величины, знание которых нужно в каждой модели независимо от диапазона изменения термодинамических величин. Это прежде всего давление  $P$ . В газах, жидкостях и плазме, находящихся в равновесном состоянии, давление является единственной поверхностной силой. В твердых телах дело обстоит сложнее, поскольку поверхностные силы зависят от ориентации площадок. Однако, несмотря на тензорный характер напряжений и деформаций в твердом теле связь между  $P$  и удельным объемом  $V$  принимает вид зависимости между шаровыми частями соответствующих тензоров. Следовательно построение зависимости  $F(P, V, E) = 0$  является основной задачей независимо от применяемых физической и математической моделей.

Как показывает практика расчетов на ЭВМ динамики сжимаемых сред, уравнения состояния должны удовлетворять ряду требований.

Уравнение состояния должно точно аппроксимировать экспериментальные и теоретические данные о термодинамических свойствах веществ. Это необходимо для точности математического моделирования динамических процессов. Под точным описанием экспериментальных и теоретических данных понимается такое описание, когда отклонение УРС от исходных данных не превышает погрешность этих данных.

В пределах существования каждой фазы, т.е. в пределах области стабильности и метастабильности, поверхность УРС должна быть непрерывной и гладкой. Это необходимо для успешной работы численных алгоритмов расчета динамики. Разрывы термодинамических функций или разрывы их производных, т.е. изломы поверхности УРС, приводят к появлению нефизичных колебаний и потере точности численных алгоритмов.

Разрывы термодинамических функций при выходе за пределы области метастабильности или разрывы их производных при выходе за пределы области стабильности фазы, т.е. при фазовых переходах, диктуются физикой дела, и они неизбежны. На такие разрывы алгоритм расчета динамики должен реагировать так, чтобы точность расчета не терялась. Таким образом, в случае мно-

гофазного уравнения состояния в программе расчета динамики нужно применять соответствующие алгоритмы [1].

В пределах существования каждой фазы уравнение состояния должно удовлетворять условиям:

1)  $P \rightarrow +\infty$  при  $T = \text{const}$  и  $V \rightarrow 0$  — вещество нельзя изотермически бесконечно сжать приложением конечного давления;

2)  $C_V = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V > 0$  — тепловая внутренняя энергия тела возрастает при его нагревании;

3)  $\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T < 0$  при  $\left( \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_T > 0$  — вещество сопротивляется сжатию или растяжению.

Уравнение состояния должно быть широкодиапазонным, поскольку переход в процессе расчета динамики с одного уравнения состояния на другое может привести к появлению нефизичных колебаний и к изменению структуры решения задачи.

Перечисленные требования противоречивы. Как показывает практика построения УРС, трудно обеспечить одновременные точность, экономичность и широкий диапазон применимости. Дело в том, что такие процессы, как плавление, испарение, диссоциация, ионизация, делают термодинамическую поверхность сложной по структуре, и для ее точного описания простых форм уже недостаточно. Математическая форма УРС становится сложной и громоздкой.

## 2.1. Выбор независимых термодинамических переменных

Согласно первому началу термодинамики,

$$dE = -P dV + T dS, \quad (2.1.1)$$

где  $E$  — внутренняя энергия,  $S$  — энтропия,  $V$  — объем,  $P$  — давление. Так как  $dE$  является полным дифференциалом, то

$$P = - \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_S, \quad T = \left( \frac{\partial E}{\partial S} \right)_V, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S} = \frac{\partial^2 E}{\partial S \partial V}. \quad (2.1.2)$$



В адиабатических процессах  $TdS=0$  и законы сохранения массы, количества движения и энергии содержат три термодинамические величины  $P, V, E$ . Уравнение состояния, связывающее эти три величины, чаще всего используется в виде

$$P = P(V, E). \quad (2.1.3)$$

Этого уравнения оказывается достаточно для замыкания системы законов сохранения в адиабатическом случае. Однако при описании адиабатических течений вещества иногда возникает необходимость определить и температуру. В этом случае уравнение состояния должно содержать уже две функции:

$$P = P(V, E), T = T(V, E). \quad (2.1.4)$$

Эти функции являются зависимыми. Чтобы показать это, запишем (2.1.4) в виде

$$P = P(V, E(V, S)), T = T(V, E(V, S)).$$

Дифференцируя  $P$  по  $S$  и  $T$  по  $V$ , получим

$$\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V = T \left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_E - P \left(\frac{\partial T}{\partial E}\right)_V. \quad (2.1.5)$$

Из (2.1.3), (2.1.5) и следует условие термодинамической совместности функций  $P(V, E)$  и  $T(V, E)$

$$T \left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_V = P \left(\frac{\partial T}{\partial E}\right)_V - \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_E. \quad (2.1.6)$$

Если основные уравнения содержат четыре термодинамических величины  $P, V, E, T$ , то в качестве независимых термодинамических переменных чаще всего используются  $V$  и  $T$ . Уравнения состояния

$$P = P(V, T), E = E(V, T) \quad (2.1.7)$$

также являются зависимыми. Для получения уравнения их термодинамической совместности свободная энергия

$$F(V, T) = E(V, T) - TS(V, T)$$

записывается в дифференциальном виде

$$dF = dE - TdS - SdT. \quad (2.1.8)$$

С одной стороны, поскольку независимыми переменными являются  $V$  и  $T$ , то (2.1.8) можно записать в виде

$$dF = \left( \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_T - T \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \right) dV + \left( \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V - T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V - S \right) dT. \quad (2.1.9)$$

С другой стороны, в силу (2.1.1)

$$dF = -PdV - SdT \quad (2.1.10)$$

и следовательно,

$$P = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T, \quad S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V. \quad (2.1.11)$$

Дифференцируя  $P$  по  $T$  и  $S$  по  $V$  и приравнивая смешанные производные, получим условие того, что  $dF$  является полным дифференциалом:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T. \quad (2.1.12)$$

Из (2.1.9), (2.1.11) и (2.1.12) следует условие термодинамической совместности функций (2.1.7):

$$\left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_T - T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = -P. \quad (2.1.13)$$

Вообще говоря, в качестве уравнения состояния может быть взят один из термодинамических потенциалов:

внутренняя энергия  $E(V, S)$ ,

свободная энергия  $F(V, T) = E - TS$ ,

энтальпия  $H(P, S) = E + PV$ ,

функция Гиббса  $\Phi(P, T) = E + PV - TS$ .

Однако эти функции непосредственно практически не применяются в качестве уравнений состояния в математических моделях механики сплошной среды.

## 2.2. Холодные компоненты энергии и давления

Внутренняя энергия  $E$  идеального вещества зависит от двух термодинамических функций. Рассмотрим два случая, когда независимыми переменными



являются  $V, S$  или  $V, T$ . Согласно теореме Нернста, нулевая изотерма совпадает с нулевой изоэнтропой. Следовательно,

$$E_x(V) = \lim_{S \rightarrow 0} E(V, S) = \lim_{T \rightarrow 0} E(V, T). \quad (2.2.1)$$

В подавляющем большинстве случаев  $E$  представляется в виде суммы холодной и тепловой компонент

$$E = E_x(V) + E_T, \quad (2.2.2)$$

где  $E_T$  такова, что

$$\lim_{T \rightarrow 0} E_T(V, T) = \lim_{S \rightarrow 0} E_T(V, S) = 0.$$

Основными структурными элементами металлов являются положительные ионы и газ свободных электронов. Силы притяжения определяются кулоновским взаимодействием электронов с ионами, а также обменной энергией между электронами. Силы отталкивания также определяются кулоновским взаимодействием, кинетической энергией свободных электронов и перекрытием электронных оболочек ионов. Анализ [2] указанных сил приводит к следующей зависимости  $E_x$  от безразмерной плотности

$$\delta = \frac{\rho}{\rho_{ok}} = \frac{V_{ok}}{V},$$

$$E_x = aF(\delta) - c\delta^{\frac{1}{3}} + d\delta^{\frac{2}{3}}, \quad (2.2.3)$$

где  $F(\delta) = \exp\left(b\left(1 - \delta^{\frac{1}{3}}\right)\right)$ . Влияние первого члена в этом уравнении в метал-

лах со слабым перекрытием электронных оболочек мало. Если же вклад в энергию взаимодействия перекрытия оболочек не мал, то пренебречь можно третьим членом в (2.2.3), и получаемая зависимость

$$E_x = aF(\delta) - c\delta^{\frac{1}{3}} \quad (2.2.4)$$

по форме совпадает с уравнением для ионных кристаллов, которое широко применяется для описания [2, 3] свойств холодных металлов. Ниже кратко излагаются результаты [2, 3] по холодным потенциалам для разных типов ве-

ществ. Для валентных кристаллов предлагается уравнение

$$E_x = F(\delta)(a\delta^{\frac{1}{3}} - c), \quad (2.2.5)$$

а для некоторых металлов — уравнение Борна—Майера

$$E_x = \frac{c_{ok}^2}{b\mu} [3\mu(F(\delta) - 1) - b(\delta^m - 1)]. \quad (2.2.6)$$

Исходя из феноменологической теории конечных деформаций Мурнагана, Бэрч предложил уравнение

$$E_x = \frac{3a_1}{4\rho_{ok}} \left\{ a_2 + 1,5 - 3(1 + a_2)\delta^{\frac{2}{3}} + (1,5 + 3a_2)\delta^{\frac{4}{3}} - a_2\delta^2 \right\}. \quad (2.2.7)$$

Паком, Эвансом и Паулингом была предложена комбинированная зависимость  $E_x(\delta)$ , сочетающая экспоненциальную функцию со степенным рядом от  $\delta^{\frac{1}{3}}$ :

$$E_x = \frac{3A}{b\rho_{ok}} \left\{ \sum_{i=1}^5 \frac{24}{(i-1)!b^{5-i}} \left[ \delta^{\frac{1-i}{3}} F(\delta) - 1 \right] + \frac{b}{5} \left[ \delta^{\frac{5}{3}} - 1 \right] \right\}. \quad (2.2.8)$$

Наиболее широкое распространение получило уравнение

$$E_x = A \left( \delta^{\frac{m}{3}} - 1 \right) - B \left( \delta^{\frac{n}{3}} - 1 \right). \quad (2.2.9)$$

Рассматривая (2.2.9), в 1903 г. Ми полагал  $n=3$ , в 1923 г. Бор использовал (2.2.9) также при  $n=3$ . Целый ряд работ (Борн, Слейтер, Леннард-Джонс, Грюнайзен, Паулинг, Бардин и др.) был направлен на уточнение  $n$  и  $m$ .

Для описания свойств ряда металлов при  $\delta > 1$  в [4] предложена зависимость

$$E_x = c_{ok}^2 \sum_{i=1}^N \frac{3a_i}{i} \delta^{\frac{i}{3}-1}. \quad (2.2.10)$$

В литературе встречается большое число других зависимостей  $E_x$  от  $\delta$ . Но из сравнения даже небольшого числа уравнений (2.2.3)—(2.2.10) видно, что аналитическая форма неустойчива относительно квантово-механических предположений о свойствах вещества — небольшие отличия в них приводят к сильно различающимся аналитическим зависимостям. Несмотря на заметное



продвижение в области теоретических моделей кристаллического состояния вещества, в настоящее время не удастся построить теоретическую зависимость  $E_x(\delta)$ , не требующую использования экспериментальных данных для уточнения численных значений входящих в нее параметров.

Давление  $P$  определяется выражением (2.1.2). В классе представлений (2.2.2) это уравнение принимает вид

$$P = -\frac{dE_x(V)}{dV} - \left( \frac{\partial E_T}{\partial V} \right)_S.$$

Поскольку  $T=0$ ,  $S=0$ ,  $E_T=0$ ,  $\left( \frac{\partial E_T}{\partial V} \right)_S = 0$ , то

$$P_x(V) = -\frac{dE_x}{dV}. \quad (2.2.11)$$

Таким образом из (2.2.2) следует

$$P = P_x(V) + P_T, \quad (2.2.12)$$

где  $P_T = -\left( \frac{\partial E_T}{\partial V} \right)_S$ . Если от  $V$  перейти к безразмерной плотности  $\delta = \frac{1}{V \rho_{ok}}$ , то

(2.2.11) примет вид

$$P_x = \rho_{ok} \delta^2 \frac{dE_x}{d\delta}. \quad (2.2.13)$$

Подставляя сюда поочередно  $E_x(\delta)$  из (2.2.3)—(2.2.10), получим уравнения для  $P_x(\delta)$ :

$$P_x = \frac{1}{3} \rho_{ok} \delta^{\frac{2}{3}} \left( abF(\delta) - c\delta^{\frac{2}{3}} + 2d\delta \right), \quad (2.2.14)$$

$$P_x = \frac{1}{3} \rho_{ok} \delta^{\frac{2}{3}} \left( abF(\delta) - c\delta^{\frac{2}{3}} \right), \quad (2.2.15)$$

$$P_x = \frac{1}{3} \rho_{ok} \delta^{\frac{2}{3}} F(\delta) \left( a\delta^{\frac{2}{3}} + ab\delta^{\frac{1}{3}} - bc \right), \quad (2.2.16)$$

$$P_x = \rho_{ok} c_{ok}^2 \delta^{\frac{2}{3}} \left( F(\delta) - \delta^{\mu + \frac{1}{3}} \right), \quad (2.2.17)$$

$$P_x = \frac{3}{2} a_1 \delta^{\frac{5}{3}} \left( \delta^{\frac{2}{3}} - 1 \right) \left( 1 + a_2 - a_2 \delta^{\frac{2}{3}} \right), \quad (2.2.18)$$

$$P_x = A \delta^{-\frac{2}{3}} (F(\delta) - 1), \quad (2.2.19)$$

$$P_x = \frac{1}{3} \rho_{ok} \delta \left( A m \delta^{\frac{m}{3}} - B n \delta^{\frac{n}{3}} \right), \quad (2.2.20)$$

$$P_x = \rho_{ok} c_{ok}^2 \sum_{i=1}^N a_i \delta^{1+\frac{i}{3}}. \quad (2.2.21)$$

Любое уравнение состояния применимо в некоторой области изменения  $\delta$ . Чем шире эта область, тем предпочтительнее оказывается уравнение состояния. Глобальные уравнения состояния, применимые во всей области изменения термодинамических величин, должны удовлетворять условиям

$$P_x = 0, \quad E_x = 0, \quad \frac{dP_x}{d\delta} = \rho_{ok} c_{ok}^2 \quad \text{при } \delta = 1, \quad (2.2.22)$$

$$P_x = 0, \quad E_x = Q_0 \quad \text{при } \delta = 0, \quad (2.2.23)$$

$$P_x = \infty, \quad E_x = \infty \quad \text{при } \delta = \infty. \quad (2.2.24)$$

Величина  $c_{ok}$  является предельным значением скорости звука  $c(P, T)$  при  $P \rightarrow 0$  и  $T \rightarrow 0$ . Теплота сублимации  $Q_0$  связана с  $P_x(V)$  уравнением

$$Q_0 = - \int_{V_{ok}}^{\infty} P_x(V) dV. \quad (2.2.25)$$

Метод определения теплоты сублимации  $Q_0$  изложен в [5].

Анализ показывает, что из приведенных выше уравнений (2.2.3)—(2.2.10), (2.2.14)—(2.2.21) условиям (2.2.22), (2.2.24) удовлетворяют лишь (2.2.3), (2.2.9), (2.2.10), (2.2.14), (2.2.20), (2.2.21). Остальные уравнения являются локальными, применимыми в ограниченной области изменения  $\delta \geq 1$ . Условиям (2.2.23) удовлетворяют уравнения (2.2.6)—(2.2.9), (2.2.17), (2.2.18). Они могут использоваться в области  $\delta < 1$ . Полному набору условий (2.2.22)—(2.2.24) удовлетворяют лишь уравнения (2.2.9), (2.2.20), которые могут применяться во всем диапазоне  $0 \leq \delta < \infty$ .



### 2.3. Тепловая энергия и тепловое давление

Тепловая составляющая давления и энергии с удовлетворительной точностью может быть представлена в виде суммы, в которой первое слагаемое описывает свойства атомов (ионов, ядер), а второе — электронов:

$$E_T = E_{\text{я}}(V, T) + E_{\text{е}}(V, T). \quad (2.3.1)$$

Преобразуем уравнение термодинамической совместности так, чтобы оно не содержало  $P_x$  и  $E_x$ :

$$\left( \frac{\partial E_T}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial P_T}{\partial T} \right)_V - P_T. \quad (2.3.2)$$

Подставив (2.3.1) в (2.3.2), получим линейное дифференциальное уравнение

$$\left( \frac{\partial P_T}{\partial T} \right)_V - \frac{P_T}{T} = \frac{1}{T} \left\{ \left( \frac{\partial E_{\text{я}}}{\partial V} \right)_T + \left( \frac{\partial E_{\text{е}}}{\partial V} \right)_T \right\}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$P_T = \psi(V)T + T \int \frac{1}{T^2} \left( \frac{\partial E_{\text{я}}}{\partial V} + \frac{\partial E_{\text{е}}}{\partial V} \right) dT. \quad (2.3.3)$$

Поскольку  $\psi(V)$  является произвольной функцией, обязанной своим происхождением правилам интегрирования, то ее в общем случае можно представить в виде  $\psi(V) = \psi_{\text{я}}(V) + \psi_{\text{е}}(V)$ . Тогда уравнение (2.3.3) разделяется по компонентам

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{я}} &= \psi_{\text{я}}(V)T + T \int \frac{1}{T^2} \left( \frac{\partial E_{\text{я}}}{\partial V} \right)_T dT, \\ P_{\text{е}} &= \psi_{\text{е}}(V)T + T \int \frac{1}{T^2} \left( \frac{\partial E_{\text{е}}}{\partial V} \right)_T dT. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.4)$$

В классе уравнений состояния, определяемых гипотезой (2.3.1), уравнения (2.3.4) являются определениями ядерной и электронной компонент давления.

Выбор зависимости  $E_{\text{я}}(V, T)$  и  $E_{\text{е}}(V, T)$  играет существенную роль в определении области применимости уравнения состояния. Рассмотрим этот вопрос на примере уравнения состояния с разделяющимися переменными

$$E_{\text{тя}} = f(V) \cdot F(T). \quad (2.3.5)$$

Поскольку  $P_{\text{тя}}$ ,  $E_{\text{тя}}$  и  $P_{\text{те}}$ ,  $E_{\text{те}}$  удовлетворяют одному и тому же уравнению (2.3.4), то дальше ограничимся рассмотрением  $E_{\text{тя}}$ . Все выводы будут применимы и к  $E_{\text{те}}$ , если не делать ограничений, присущих только свойствам ядер.

Из (2.3.4), (2.3.5) следует

$$P_{\text{тя}} = \psi_{\text{я}}(V) \cdot T + T \frac{df(V)}{dV} \int \frac{F(T)}{T^2} dT. \quad (2.3.6)$$

Чтобы в (2.3.6) не было интеграла, возьмем  $F(T)$  в виде

$$F(T) = T^2 \frac{d\Omega(T)}{dT}.$$

Тогда (2.3.5) и (2.3.6) примут вид

$$E_{\text{тя}} = f(V) \cdot T^2 \frac{d\Omega(T)}{dT}, \quad (2.3.7)$$

$$P_{\text{тя}} = \psi_{\text{я}}(V) \cdot T + \frac{df(V)}{dV} \Omega(T) T, \quad (2.3.8)$$

$$c_{V\text{я}} = \left( \frac{\partial E_{\text{тя}}}{\partial T} \right)_V = f(V) \left( T^2 \frac{d^2\Omega(T)}{dT^2} + 2T \frac{d\Omega}{dT} \right). \quad (2.3.9)$$

Из уравнения (2.1.1) выразим  $dS$ :

$$dS = \frac{1}{T} dE + \frac{P}{T} dV$$

и подставим сюда  $dE$ , полученное после дифференцирования (2.3.7):

$$dE_{\text{тя}} = \left( \frac{df(V)}{dV} T^2 \frac{d\Omega(T)}{dT} \right) dT + f(V) \left( T \frac{d\Omega(T)}{dT} + T \frac{d}{dT} \left( T \frac{d\Omega(T)}{dT} \right) \right) dT.$$

В результате получим

$$dS = \left( \frac{df}{dV} T \frac{d\Omega}{dT} + \psi_{\text{я}}(V) + \frac{df}{dV} \Omega \right) dV + f \left( \frac{d\Omega}{dT} + \frac{d}{dT} \left( T \frac{d\Omega}{dT} \right) \right) dT. \quad (2.3.10)$$

Выражение для  $dS$  является полным дифференциалом, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial T} \left\{ T \frac{df}{dV} \frac{d\Omega}{dT} + \psi_{\text{я}}(V) + \Omega \frac{df}{dV} \right\} = \frac{\partial}{\partial V} \left( f \frac{d\Omega}{dT} + f \frac{d}{dT} \left( T \frac{d\Omega}{dT} \right) \right).$$



Решение уравнения (2.3.10) имеет вид

$$S = f(V)\Omega(T) + f(V)T \frac{d\Omega(T)}{dT} + \int \psi_{\text{я}}(V) dV. \quad (2.3.11)$$

Поскольку согласно теореме Нернста  $S = 0$  при  $T = 0$ , то для того, чтобы исчез третий член в (2.3.11), функция  $\Omega(T)$  должна иметь вид

$$\Omega(T) = K_1 + M(T), \quad (2.3.12)$$

где  $K_1 = \text{const}$ . В этом случае необходимые условия выполнения теоремы Нернста имеют вид

$$\psi_{\text{я}}(V) = -K_1 \frac{df(V)}{dV}. \quad (2.3.13)$$

Окончательно величины, характеризующие тепловые ядерные компоненты, имеют вид

$$E_{\text{тя}} = f(V)T^2 \frac{dM(T)}{dT}, \quad (2.3.14)$$

$$P_{\text{тя}} = \frac{df(V)}{d(V)} M(T)T, \quad (2.3.15)$$

$$c_{V\text{я}} = f(V) \frac{d}{dT} \left( T^2 \frac{dM(T)}{dT} \right), \quad (2.3.16)$$

$$S = f(V) \frac{d}{dT} (TM(T)). \quad (2.3.17)$$

Очень часто тепловые компоненты  $E_{\text{тя}}$  и  $P_{\text{тя}}$  записываются в виде

$$P_{\text{тя}} = \frac{\Gamma(V, T)E_{\text{тя}}}{V}, \quad (2.3.18)$$

где  $\Gamma(V, T)$  — так называемая функция Грюнайзена. Из (2.3.14), (2.3.15) и (2.3.18) следует

$$\Gamma(V, T) = \frac{V \frac{df(V)}{dV} VM(T)}{f(V)T \frac{dM(T)}{dT}}. \quad (2.3.19)$$

При  $T \rightarrow 0$  должно быть  $\Gamma \rightarrow \Gamma_x(V)$ . Это возможно, если функция  $M(T)$  удовлетворяет условию

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{d \ln M(T)}{d \ln T} = K_2 = \text{const.} \quad (2.3.20)$$

Следовательно,

$$\Gamma_x(V) = \frac{d \ln f(V)}{K_2 d \ln V}. \quad (2.3.21)$$

Из (2.3.19) и (2.3.21) следует выражение для  $\Gamma(V, T)$ :

$$\Gamma(V, T) = \frac{K_2 \Gamma_x(V)}{\frac{d \ln M(T)}{d \ln T}}. \quad (2.3.22)$$

Функция Грюнайзена  $\Gamma(V, T)$  может быть выражена через величины, которые измеряются экспериментально. Продифференцируем (2.3.18) по  $T$  при постоянном  $V$ :

$$E_T \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial T} \right)_V + \Gamma \left( \frac{\partial E_T}{\partial T} \right)_V = V \left( \frac{\partial P_T}{\partial T} \right)_V.$$

Используя термодинамическое уравнение

$$\left( \frac{\partial P_T}{\partial T} \right)_V = - \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T,$$

приняв во внимание, что  $\left( \frac{\partial P_T}{\partial T} \right)_V = \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$ ,  $\alpha = - \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$ , получим

$$E_T \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial T} \right)_V + \Gamma c_V = - \alpha V^2 \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T. \quad (2.3.23)$$

Используем уравнение

$$\frac{c_P}{c_V} = \frac{(\partial S / \partial T)_P}{(\partial S / \partial T)_V}.$$

Производные энтропии по  $T$  заменим с помощью уравнений

$$\left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_S \left( \frac{\partial P}{\partial S} \right)_T + 1 = 0, \quad \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_S \left( \frac{\partial V}{\partial S} \right)_T + 1 = 0$$



производными по  $V$ . В результате получим

$$c_p \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = c_v \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_S.$$

С помощью этого уравнения заменим  $c_v$  на  $c_p$  в (2.3.23):

$$\Gamma \frac{c_p \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T V^2}{c^2} - E_T \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial T} \right)_V = \alpha V^2 \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T. \quad (2.3.24)$$

Если предположить, что  $\Gamma = \Gamma_0 = \text{const}$ , то  $\left( \frac{\partial \Gamma_0}{\partial T} \right)_V = 0$  и из (2.3.24) следует широко известная формула

$$\Gamma_0 = \frac{\alpha c^2}{c_p}. \quad (2.3.25)$$

В правой части (2.3.25) стоят величины, которые определяются экспериментально: скорость звука, коэффициент объемного расширения и теплоемкость при постоянном давлении. Следует отметить, что формула (2.3.25) справедлива лишь при  $\Gamma_0 = \text{const}$ .

Условия широкодиапазонности тепловых ядерных составляющих можно сформулировать так:

1. При  $T \rightarrow 0$  должно быть

$$S \rightarrow 0, \quad E_{\text{тя}} \rightarrow 0, \quad P_{\text{тя}} \rightarrow 0, \quad \Gamma \rightarrow \Gamma_x(V). \quad (2.3.26)$$

2. При  $T \rightarrow \infty$  должно быть

$$S \rightarrow \infty, \quad E_{\text{тя}} \rightarrow \infty, \quad P_{\text{тя}} \rightarrow \infty, \quad \Gamma_x \rightarrow \frac{2}{3}. \quad (2.3.27)$$

Для класса уравнений состояния, определяемого гипотезой (2.3.5), условия (2.3.26) принимают вид

$$\Omega(T) = K_1 + M(T), \quad K_1 = \text{const}, \quad (2.3.28)$$

$$\Psi_x(V) = -K_1 \frac{df(V)}{dV}, \quad (2.3.29)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} T \frac{d \ln M(T)}{d \ln T} = K_2 = \text{const.} \quad (2.3.30)$$

Если хотя бы одно из условий (2.3.26), (2.3.27) не выполнены, то уравнение состояния является локальным.

Рассмотрим одно из таких локальных уравнений состояния. При температурах  $T > 300 + 400$  К можно принять, что

$$\psi_E = 0, \quad \psi = \psi_n, \quad E_{тн} = f(T), \quad E_{те} = \varphi(V)T^2. \quad (2.3.31)$$

Тогда из (2.3.4) следует

$$P_t = \psi(V)T + \frac{d\varphi}{dV}T^2. \quad (2.3.32)$$

Определим еще выражение для  $c_v$ , дифференцируя  $E_t$  по  $T$ :

$$c_v = \frac{df(T)}{dT} + 2\varphi(V)T. \quad (2.3.33)$$

Величина  $\frac{df(T)}{dT}$  есть теплоемкость ядер. В указанном диапазоне температур она с удовлетворительной точностью для твердых тел может быть взята равной  $3R$ . Тогда

$$f(T) \approx 3RT. \quad (2.3.34)$$

Построенные тепловые компоненты уравнения состояния содержат пока две неопределенные функции  $\varphi(V)$  и  $\psi(V)$ . Функция  $\varphi(V)$  входит во все члены уравнений (2.3.1), (2.3.32), (2.3.33), которые определяют поведение электронов. Функция  $\psi(V)$  входит только в компоненту теплового давления, которая определяет поведение ядер.

Запишем тепловые компоненты уравнения состояния в виде

$$P_t V = \Gamma E_t, \quad (2.3.35)$$

где  $\Gamma$  — коэффициент Грюнайзена. Выразим  $\Gamma$  из (2.3.35) и подставим в полученное уравнение  $P_t$  и  $E_t$ . В результате получим

$$\Gamma = \frac{V \left\{ \psi(V) + \frac{d\varphi}{dV} T \right\}}{3R + \varphi(V)T}. \quad (2.3.36)$$



При  $T \rightarrow 0$ ,  $\Gamma \rightarrow \Gamma_x(V)$  и из (2.3.36) следует

$$\psi(V) = \frac{3R}{V} \Gamma_x(V).$$

При  $T \rightarrow \infty$ ,  $\Gamma \rightarrow \Gamma_\infty(V)$  из (2.3.36) следует

$$\frac{d \ln \varphi}{d \ln V} = \Gamma_\infty(V).$$

Если предположить, что  $\Gamma_x(V) = \Gamma_\infty(V) = \Gamma_0 = \text{const}$ , то  $\psi(V)$  и  $\varphi(V)$  принимают вид

$$\psi(V) = \frac{3R}{V} \Gamma_0, \quad \varphi(V) = BV^{\Gamma_0},$$

где  $B = \text{const}$ . Окончательно тепловые компоненты и  $c_V$  в уравнении состояния Ми—Грюнайзена (при постоянном  $\Gamma_0$ ) примут вид

$$\left. \begin{aligned} P_T &= \frac{\Gamma_0 (3RT + BV^{\Gamma_0} T^2)}{V}, \\ E_T &= 3RT + BV^{\Gamma_0} T^2, \\ c_V &= 3R + 2BV^{\Gamma_0} T. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.37)$$

Из (2.3.36) следует, что при  $T \rightarrow 0$  вклад вторых слагаемых в числителе и знаменателе уменьшается и  $\Gamma$  определяется отношением теплового давления ядер к их тепловой энергии. С целью повышения точности описания свойств веществ многими авторами вводится понятие о решеточном (холодном) коэффициенте Грюнайзена. Для получения зависимости  $\Gamma_x(V)$  предполагается, что средняя частота колебаний тела зависит от его объема. Согласно Слэтеру и Ландау, все частоты изменяются пропорционально скорости звука и обратно пропорционально межатомному расстоянию. Конкретизация этих предположений может приводить к различным теоретическим зависимостям  $\Gamma_x(V)$ . В [3] дан их подробный анализ и приведена обобщенная зависимость

$$\Gamma_x(V) = \gamma + \frac{t-2}{3} \frac{V d^2 (P_x(V) V^{2t/3}) / dV^2}{2 d(P_x(V) V^{2t/3}) / dV}. \quad (2.3.38)$$

Значение  $t=0$  отвечает теории Ландау—Слэтера,  $t=1$  — Дугдэйла—Макдональда,  $t=2$  — теории свободного объема. Предельное значение  $\Gamma_x(V)$  при

$V \rightarrow 0$  равно  $\frac{2}{3}$ . Константа  $\gamma$  введена для согласования  $\Gamma$  при  $\delta = 1$  со значением, определяемым по теплофизическим данным в нормальных условиях по формуле (2.3.25).

При высоких температурах основной вклад в тепловое давление и тепловую энергию дают вторые слагаемые в числителе и знаменателе (2.3.36), определяемые тепловым возбуждением электронов. В предельном случае очень высоких температур электроны можно считать свободным электронным газом, в котором  $\Gamma_0 = \frac{2}{3}$ . В этом случае  $\varphi(V)$  может быть записана в виде

$$\varphi(V) = \frac{1}{2} \beta_0 \left( \frac{V}{V_{ok}} \right)^{2/3}.$$

Константы интегрирования взяты так, чтобы  $\varphi(V)$  совпала с аналогичной функцией в [3]. Окончательно уравнение состояния принимает вид

$$E_T = E_{\text{тя}}(V, T) + E_{\text{те}}(V, T), \quad P_T = \Gamma(V, T) (E_{\text{тя}} + E_{\text{те}})/V, \quad (2.3.39)$$

$$E_{\text{тя}} = 3RT, \quad E_{\text{те}} = 0,5\beta_0 \left( \frac{V}{V_{ok}} \right) T^2, \quad (2.3.40)$$

$$c_V = 3R + \beta_0 \left( \frac{V}{V_{ok}} \right)^{2/3} T, \quad (2.3.41)$$

$$\Gamma = \frac{3R\Gamma_x(V) + \frac{1}{3}\beta_0 \left( \frac{V}{V_{ok}} \right)^{2/3} T}{3R + 0,5\beta_0 \left( \frac{V}{V_{ok}} \right)^{2/3} T}. \quad (2.3.42)$$

Построенные изложенным выше способом зависимости  $P_T$ ,  $E_T$ ,  $c_V$ ,  $\Gamma$  от  $V$  и  $T$  содержат две произвольные постоянные:  $\beta_0$  в (2.3.40)—(2.3.42) и  $t$  в (2.3.38). Этого произвола часто оказывается недостаточно, чтобы описать имеющиеся экспериментальные данные по ударному сжатию и изобарическому тепловому расширению. Поэтому часто вместо  $3R$  в (2.3.40)—(2.3.42) берут  $c_{V0}$ , которое может варьироваться вблизи значения  $3R$ . Кроме того, для увеличения адекватности уравнения состояния свойствам вещества в области средних температур



иногда полагают  $\Gamma_{\infty} \neq \frac{2}{3}$ , а иногда, например [4],  $\Gamma_{\infty} \neq 0,5$ .

Обратим внимание еще на одну особенность рассмотренных выше уравнений состояния. Она вытекает из предположения, что ядра и электроны находятся в тепловом равновесии и имеют одинаковую температуру. Это значит, что независимость ядерной и электронной компонент в  $P_T$  и  $E_T$  лишь кажущаяся. На самом деле они связаны друг с другом уравнениями, получающимися после исключения  $T$  из  $P_{TЯ}$  и  $P_{Te}$ ,  $E_{TЯ}$  и  $E_{Te}$ . В случае уравнения состояния (2.3.39)—(2.3.42) эти уравнения имеют вид

$$E_{Te} = 0,5\beta_0 \left( \frac{V}{V_{ок}} \right)^{2/3} \left( \frac{E_{TЯ}}{3R} \right)^2, \quad (2.3.43)$$

$$P_{Te} = \frac{1}{3}\beta_0 \left( \frac{V}{V_{ок}} \right)^{2/3} \left( \frac{P_{TЯ}}{3R\Gamma_x(V)} \right)^2. \quad (2.3.44)$$

Из (2.3.43)—(2.3.44) видно, что тепловые электронные компоненты энергии и давления обращаются в ноль одновременно с ядерными компонентами.

В уравнении состояния (2.3.39)—(2.3.42) можно перейти от независимых переменных  $V, T$  к независимым переменным  $V, E$ . Для этого  $T$  выражается с помощью (2.3.17) через  $E_T = E - E_x$ :

$$T = \frac{3R}{\beta_0} \left( \frac{V}{V_{ок}} \right)^{2/3} \left( \sqrt{1 + \frac{2\beta_0}{9R^2} \left( \frac{V}{V_{ок}} \right)^{2/3} E_T} - 1 \right). \quad (2.3.45)$$

Подставив (2.3.45) в (2.3.41) и (2.3.42), получим выражения для  $c_V$  и  $\Gamma$  через  $V$  и  $E_T$ :

$$c_V = 3R \sqrt{1 + \frac{2\beta_0}{9R^2} \left( \frac{V}{V_{ок}} \right)^{2/3} E_T},$$

$$\Gamma = \frac{\Gamma_x(V) + \frac{1}{3} \left( \sqrt{1 + \frac{2\beta_0}{9R^2} \left( \frac{V}{V_{ок}} \right)^{2/3} E_T} - 1 \right)}{1 + 0,5 \left( \sqrt{1 + \frac{2\beta_0}{9R^2} \left( \frac{V}{V_{ок}} \right)^{2/3} E_T} - 1 \right)}.$$

Выражение энтропии  $S(V, T)$  для уравнения состояния (2.3.37) имеет вид

$$S = 3R \ln T + 4BV^{\Gamma_0} T + 3R\Gamma_0 \ln V. \quad (2.3.46)$$

Поскольку в (2.3.46)

$$S \rightarrow -\infty \text{ при } T \rightarrow 0, S \rightarrow \infty \text{ при } T \rightarrow \infty,$$

$$S \rightarrow -\infty \text{ при } V \rightarrow 0, S \rightarrow \infty \text{ при } V \rightarrow \infty,$$

$$P_T \rightarrow \infty \text{ при } V \rightarrow 0, P_T \rightarrow 0 \text{ при } V \rightarrow \infty,$$

$$c_V \rightarrow 3R \text{ при } T \rightarrow 0, c_V \rightarrow \infty \text{ при } V \rightarrow \infty,$$

то это уравнение состояния локально. Оно неверно при малых  $T$ .

#### 2.4. Простейшее уравнение состояния конденсированного вещества

Широкое применение в расчетах динамики сплошной среды в конденсированном состоянии получило уравнение состояния, в котором холодные и тепловые компоненты взяты в виде

$$P_x = \frac{\rho_0 c_0^2}{m} (\delta^m - 1), \quad (2.4.1)$$

$$E_x = \frac{c_0^2}{m} \left( \frac{\delta^{m-1} - 1}{m-1} + \delta^{-1} - 1 \right), \quad (2.4.2)$$

$$P_T = \Gamma_0 \rho_0 \delta (E - E_x), \quad (2.4.3)$$

где  $\rho_0, c_0$  — плотность и скорость звука при  $T \approx 300$  К и  $P=0$ ;  $m, \Gamma_0$  — эмпирические константы. Коэффициент Грюнайзена  $\Gamma_0$  определяется по уравнению (2.3.25), константа  $m$  определяется при заданных  $\rho_0, c_0, \Gamma_0$  так, чтобы описать экспериментальные данные по ударному сжатию.

Как известно, в весьма широком диапазоне давлений ударная адиабата с хорошей точностью представляется линейной зависимостью между скоростью ударной волны и скоростью вещества за фронтом

$$D = c_0 + b \cdot U. \quad (2.4.4)$$

Константы  $c_0$ ,  $b$  известны для широкого круга веществ. Далее предполагается, что перед фронтом ударной волны давление и энергия равны нулю, а плотность равна  $\rho_0$ . С помощью соотношений Гюгонио формула (2.4.4) преобразуется к виду

$$P_H = \frac{\rho_0 c_0^2 (\delta - 1) \delta}{[b - (b - 1) \delta]^2}, \quad (2.4.5)$$

где  $P_H$  — давление в ударносжатом веществе. Для уравнений состояния (2.4.1)—(2.4.3) уравнение ударной адиабаты имеет вид

$$P_H = \frac{2\rho_0 c_0^2 \left( \delta^m + (\Gamma_0 - 1) - \Gamma_0 \left( \frac{\delta^m - \delta}{m - 1} - \delta \right) \right)}{(2 + \Gamma_0 (1 - \delta))m}. \quad (2.4.6)$$

Из (2.4.5) и (2.4.6) следует уравнение для определения  $m$  в виде

$$\frac{2 \left[ \delta^m - 1 - \Gamma_0 \left( \frac{\delta^m - \delta}{m - 1} - 1 + \delta \right) \right]}{m[2 + (1 - \delta)\Gamma_0]} = \frac{\delta(\delta - 1)}{(b - (b - 1)\delta)^2}. \quad (2.4.7)$$

Значение  $m$  определяется из уравнения (2.4.7) при некоторой средней плотности из интересующего диапазона. Уравнение (2.4.7) решается численно.

В том случае, когда для рассматриваемой среды имеются ударные адиабаты с различной начальной плотностью, например, ударные адиабаты пористых образцов, коэффициент Грюнайзена может быть вычислен по формуле

$$\Gamma_0 = \frac{P_{H2} - P_{H1}}{\rho(E_{H2} - E_{H1})}, \quad (2.4.8)$$

где  $(P, E)_{H1}$ ,  $(P, E)_{H2}$  — давление и энергия ударносжатого вещества на разных ударных адиабатах при одинаковой плотности за фронтом.

Уравнение состояния (2.4.1)—(2.4.3) имеет весь ограниченный диапазон точности описания термодинамических свойств веществ. Этот диапазон ограничивается постоянством  $\Gamma_0$ , поскольку на самом деле коэффициент Грюнайзена зависит от плотности и температуры. Кроме того, это уравнение состояния обладает ограниченными аппроксимационными возможностями и не описывает поведение холодного давления при малых плотностях, и поэтому оно не может описывать испарение. Таким образом, данное уравнение состояния огра-



ничено областью плотностей и температур около их нормальных значений ( $T \sim 10^3$  К,  $0,9 \sim \delta \sim 1,5$ ).

Уравнение состояния (2.4.1)—(2.4.3) может с успехом применяться для описания термодинамических свойств веществ и при высоких значениях плотностей и температур, но в ограниченном диапазоне. В этом случае константы  $\rho_0$ ,  $c_0$ ,  $m$ ,  $\Gamma_0$ ,  $c_{\nu 0}$  определяются из условия наилучшего описания свойств вещества в интересующем диапазоне, при этом их значения, как правило, сильно отличаются от тех, которые применяются для описания низкого диапазона давлений и температур.

## 2.5. Уравнение состояния в области расширения вещества

При электровзрыве проводников или при воздействии некоторых видов излучений на вещество в веществе за короткое время резко возрастает тепловая энергия. Если энергия нагрева порядка теплоты испарения, то вещество может испариться. В [6] для описания свойств веществ в диапазоне энергий от 0 до  $\approx 200$  кДж/г и при плотностях от  $\approx 0$  до  $1,5\rho_{ок}$  предложено простейшее уравнение состояния, в котором учитывается уменьшение коэффициента Грюнайзена при уменьшении плотности и при увеличении температуры.

Давление и удельная внутренняя энергия выбираются [6] в виде суммы холодной и тепловой компонент (2.2.2), (2.2.12). Холодные компоненты взяты по Леннард-Джонсу в виде (2.2.9), (2.2.20). Связь между  $A$  и  $B$  следует из условия (2.2.25) в виде

$$Q_0 = B - A. \quad (2.5.1)$$

Тепловая компонента выбирается в виде (2.3.35), где коэффициент Грюнайзена  $\Gamma$  определяется как функция плотности и тепловой энергии:

$$\Gamma = \left[ \Gamma_{п} + \frac{(\Gamma_0 - \Gamma_{п})(1+b)\delta}{1+b\delta} \right] \frac{Q_0 + \eta E_T}{Q_0 + \xi E_T}. \quad (2.5.2)$$

Здесь  $\Gamma_0$  — коэффициент Грюнайзена в нормальных условиях;  $\Gamma_{п}$  — коэффициент Грюнайзена холодного пара;  $b$ ,  $\eta$ ,  $\xi$  — эмпирические константы. Формула (2.5.2) обеспечивает при  $\delta \rightarrow 0$  переход к значению коэффициента Грюнайзена пара  $\Gamma_{п}$ . К недостаткам уравнения (2.5.2) можно отнести увеличение  $d\Gamma/d\delta$  при

$\delta \rightarrow 0$  и рост  $\Gamma$  при  $\delta \rightarrow \infty$ , что противоречит теоретическим представлениям и экспериментальным данным о поведении функции  $\Gamma(\delta)$ .

Для повышения экономичности и точности описания зависимости  $\Gamma(\delta)$  в [7] проведена модификация УРС [6].

Зависимости  $P_x(\delta)$ ,  $E_x(\delta)$  выбирались в виде

$$E_x = \begin{cases} \frac{c_{ok}^2}{2} (\delta-1)^2 \frac{1+a}{1+a\delta} & \text{при } \delta \geq 1, \\ Q_0 (\delta-1)^2 \frac{1+2\delta}{1+b\delta} & \text{при } \delta < 1, \end{cases} \quad (2.5.3)$$

где  $a$ ,  $b$  — эмпирические константы. В силу (2.2.13) холодное давление имеет вид

$$P_x = \begin{cases} \frac{\rho_{ok} c_{ok}^2 (1+a) \delta^2 (\delta-1)}{2(1+a\delta)^2} (2+a(\delta+1)) & \text{при } \delta \geq 1, \\ \frac{\rho_{ok} Q_0 \delta^2}{(1+b\delta)^2} (4b\delta^3 + 6\delta^2 - 3\delta^2 - 6\delta - b) & \text{при } \delta < 1. \end{cases} \quad (2.5.4)$$

Параметры  $c_{ok}$ ,  $Q_0$  и  $b$  связаны соотношением

$$Q_0 = \frac{1}{6} c_{ok}^2 (1+b), \quad (2.5.5)$$

которое следует из условия непрерывности и гладкости зависимости  $P_x(\delta)$  при  $\delta = 1$ .

Тепловая компонента вводится согласно уравнению (2.3.35). Зависимость коэффициента Грюнайзена от безразмерной плотности  $\delta$  и тепловой энергии имеет вид

$$\Gamma = \begin{cases} \Gamma_0 \frac{Q_0 + \eta E_T}{Q_0 + \xi E_T} & \text{при } \delta \geq 1, \\ \left( \Gamma_{II} + \delta^2 (3-2\delta) (\Gamma_0 - \Gamma_{II}) \right) \frac{Q_0 + \eta E_T}{Q_0 + \xi E_T} & \text{при } \delta < 1, \end{cases} \quad (2.5.6)$$

где  $\Gamma_0$  — коэффициент Грюнайзена конденсированного вещества в нормальных условиях;  $\Gamma_{\text{п}}$  — коэффициент Грюнайзена холодного пара;  $\eta, \xi$  — эмпирические константы. Из-за ангармоничности колебаний атомов и теплового возбуждения электронов коэффициент Грюнайзена с ростом температуры или уменьшением плотности изменяется. За счет выбора констант  $\Gamma_0, \Gamma_{\text{п}}, \eta, \xi$  зависимость (2.5.6) может описать это изменение в ограниченной области плотностей и температур.

Тепловые составляющие выбирались без разделения на ядерные и электронные компоненты. Тепловая энергия выбиралась в классе уравнений (2.3.5) с  $f(V) = K_1 = \text{const}$ . В этом случае из уравнения термодинамической совместности (2.4.6) следует

$$P_{\text{T}} = \psi(V)T. \quad (2.5.7)$$

Функция  $\psi(\rho)$  выбиралась в виде

$$\psi(\rho) = \begin{cases} c_{V0} \Gamma_0 \rho & \text{при } \delta \geq 1, \\ c_{V0} (\Gamma_{\text{п}} + \delta^2 (3 - 2\delta) (\Gamma_0 - \Gamma_{\text{п}})) \rho & \text{при } \delta < 1. \end{cases} \quad (2.5.8)$$

Из (2.5.6), (2.5.4) и (2.5.8) следует зависимость  $E_{\text{T}}$  от  $T$ :

$$E_{\text{T}} = \frac{c_{V0} \xi T - Q_0}{2\eta} + \sqrt{\left(\frac{c_{V0} \xi T - Q_0}{2\eta}\right)^2 + \frac{c_{V0} Q_0 T}{\eta}} \quad \text{при } \delta \geq 1. \quad (2.5.9)$$

Формулы для расчета давления и энергии обеспечивают непрерывность и гладкость поверхности уравнения состояния. В некотором диапазоне температур  $0 \leq T \leq T_{\text{кр}}$  изотермы немонотонны, следовательно, уравнение состояния имеет область двухфазных состояний конденсированное вещество + пар и критические параметры в том же смысле, что и уравнение состояния Ван-дер-Ваальса. Вне области двухфазности уравнение состояния удовлетворяет условиям нормальности вещества по Бете—Вейлю.

Критические параметры  $(\rho, T)_{\text{кр}}$ , как известно, определяются системой уравнений

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = 0. \quad (2.5.10)$$



Благодаря линейной зависимости давления от температуры решение системы (2.5.10) сводится к решению одного уравнения относительно критической плотности. Ввиду громоздкости это уравнение здесь не приводится.

Кривая равновесия пара и жидкости (твердое тело и жидкость в этом уравнении состояния не различаются) и область двухфазных состояний определяются по правилу Максвелла

$$\int_{V_{ж}}^{V_{п}} (P - P_p) dV = 0, \quad (2.5.11)$$

где  $P_p$  — равновесное давление в смеси пара и жидкости,  $V_{п}$ ,  $V_{ж}$  — удельные объемы пара и жидкости при  $P = P_p$ . Уравнение (2.5.11) вместе с уравнением состояния образует систему уравнений, которая определяет параметры пара и жидкости при фазовом равновесии. Эта система может быть решена только численно, поэтому параметры фаз при равновесии представляются в виде таблиц.

Уравнение состояния содержит девять эмпирических параметров:  $\rho_{ок}$ ,  $c_{ок}$ ,  $Q_0$ ,  $a$ ,  $c_{\nu 0}$ ,  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_{п}$ ,  $\eta$ ,  $\xi$ . Параметры  $\rho_{ок}$ ,  $c_{ок}$ ,  $Q_0$ ,  $c_{\nu 0}$ ,  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_{п}$  имеют ясный физический смысл и могут быть определены на основе справочных данных о теплофизических свойствах веществ. Остальные параметры определяются по экспериментальным и теоретическим данным о теплофизических свойствах веществ при высоких давлениях и температурах.

Таблица 2.1

Параметры уравнения состояния

Параметр	Вещество		
	Al	Pb	Cu
$\rho_{ок}$ , г/см <sup>3</sup>	2,71	11,34	8,93
$c_{ок}$ , км/с	5,22	1,98	3,9
$Q_0$ , кДж/г	10	0,84	4,5
$a$	0,342	0,067	0
$\Gamma_0$	2,06	3	1,95
$\Gamma_{п}$	2/3	2/3	2/3
$\eta$	0,125	0,13	0,33
$\xi$	0,59	0,78	0,91
$c_{\nu 0}$ , Дж/(г·град)	0,92	0,12	0,40

Критические параметры и теплота испарения

Параметр	Вещество		
	Al	Pb	Cu
$\rho_{кр}$ , г/см <sup>3</sup>	0,63	3,34	2,47
$\rho_{кр}^{исп}$ , г/см <sup>3</sup>	0,64	3,5–3,6	2,4
$P_{кр}$ , ГПа	0,85	0,38	1,8
$P_{кр}^{исп}$ , ГПа	0,45	0,2	0,75
$Q_{исп}$ , кДж/г	10,75	0,899	4,86
$(Q_{исп} + Q_{плав})^{эсп}$	10,9	0,884	5,01

Для Al, Cu и Pb в [7] были определены параметры уравнения состояния из условия наилучшего описания экспериментальной и теоретической информации о теплофизических свойствах [8—11].

По уравнению состояния с параметрами, приведенными в табл. 2.1, были проведены расчеты критических параметров и параметров при испарении. В табл. 2.2 приведены расчетные критические параметры и расчетная теплота испарения при нормальном давлении.

## 2.6. Уравнение состояния металлов в области ударного сжатия

Как правило, для построения УРС в этой области используют данные по однократному ударному сжатию сплошных образцов, данные по ударной сжимаемости пористых материалов и уравнение (2.3.38), связывающее коэффициент Грюнайзена решетки с производными холодной зависимости давления от плотности. Рассмотрим такое уравнение состояния из [12]. Ударные адиабаты сплошных образцов аппроксимировались уравнением

$$P_H = \sum_{k=1}^n a_k (\delta - 1)^k. \quad (2.6.1)$$

Значения коэффициентов  $a_k$  определяются из условий наилучшей аппроксимации экспериментальных данных по ударному сжатию. Численные значения  $a_k$  для алюминия, меди, свинца и железа приведены в табл. 2.3.

Коэффициенты  $a_k$  для разных металлов, ГПа

$k$	Алюминий	Медь	Свинец	Железо
1	73,1	137,0	41,4	30,3
2	152,7	271,7	101,7	724,5
3	143,5	224,0	120,0	-271,2
4	-887	1078	-43	-14
5	2862	-2967	547	852
6	-3192	3674	-801	-
7	1183			

Энергия и давление представляются в этом уравнении состояния в виде суммы трех компонент: холодной, тепловой ядерной и тепловой электронной. Для компонент выбраны следующие выражения

$$E_{\text{тя}} = c_{V\text{я}}(T - T_0) + E_0, \quad P_{\text{тя}} = \Gamma_x(V)T_{\text{тя}}/V. \quad (2.6.2)$$

$$E_{\text{те}} = \frac{1}{2}\beta_0 \left( \frac{V}{V_{ok}} \right)^{0,5} T^2/V, \quad P_{\text{те}} = 0,25\beta_0 \left( \frac{V}{V_{ok}} \right)^{0,5} T^2/V. \quad (2.6.3)$$

Зависимость  $\Gamma_x(V)$  получается из (2.3.38) при  $t=1$  в виде

$$\Gamma_x(V) = -\frac{1}{3} \frac{V d^2 (P_x(V)V^{2/3})/dV^2}{2 d(P_x(V)V^{2/3})/dV},$$

где  $P_x(V)$  пока неизвестно. Далее предполагается, что  $P_x(\delta)$  имеет вид

$$P_x(\delta) = \sum_{k=1}^N b_k (\delta-1)^k. \quad (2.6.4)$$

Из (2.6.4) и (2.2.13) следует выражение для  $E_x(\delta)$ :

$$E_x = \frac{1}{\rho_{ok}} \sum_{k=1}^N b_k (\delta-1)^{k+1} \left\{ \frac{1}{k+3} (\delta-1)^2 + \frac{2}{k+2} (\delta-1) + \frac{1}{k+1} \right\}. \quad (2.6.5)$$

Из условий Гюгонио и (2.6.1) находилась зависимость



$$E_H = \frac{1}{2\delta} \sum_{k=1}^N a_k (\delta-1)^{k+1}. \quad (2.6.6)$$

Поскольку

$$E_H = E_x + E_{\text{тя}} + E_{\text{те}}, \quad (2.6.7)$$

то для каждого заданного  $\delta$  получается квадратное относительно  $T$  уравнение

$$0,5\beta_0 \delta^{-0,5} T^2 + c_{Vя} T + E_0 - c_{Vя} T_0 + E_x(\delta) - E_H(\delta) = 0. \quad (2.6.8)$$

Решение его имеет вид

$$T = \frac{2\delta^{0,5}}{\beta_0} \left( \sqrt{c_{Vя}^2 + 2\beta_0 \delta^{-0,5} [E_H(\delta) - E_x(\delta) + c_{Vя} T_0 - E_0]} - c_{Vя} \right). \quad (2.6.9)$$

Подставив  $T(\delta)$  в уравнение

$$P_H = P_x(\delta) + P_{\text{тя}} + P_{\text{те}},$$

получим уравнение, содержащее для каждого заданного значения  $\delta$  известные коэффициенты  $a_k$  и неизвестные коэффициенты  $b_k$ . Нужно взять на ударной адиабате столько точек, сколько коэффициентов  $b_k$ . Получается нелинейная система уравнений. Численное решение этой системы позволяет найти значения коэффициентов  $b_k$ . В [12] найдено три коэффициента  $b_1, b_2, b_3$  и получены табличные зависимости  $P_x(\delta), E_x(\delta)$  для Al, Cu, Pb, Fe.

Поскольку  $E_{\text{тя}}, P_{\text{тя}}, E_{\text{те}}, P_{\text{те}}$  содержат одну и ту же температуру  $T$ , то, значит неявно сделано предположение, что температура ядер и электронов одинакова, т.е. они находятся в тепловом равновесии. Это предположение в совокупности с наличием  $T_0 \neq 0$  и  $E_0 \neq 0$  в (2.6.2) приводит к некоторым противоречиям и сужает как область применимости уравнения состояния, так и класс функций, в котором может выбираться зависимость  $E_x(V)$ . Покажем это на простом примере. Рассмотрим холодную деформацию при  $T=0$ . В этом случае  $E_{\text{те}} = 0, E_{\text{тя}} = E_0 - c_{Vя} T_0 = \text{const}, P_{\text{тя}} = \Gamma_x(V)(E_0 - c_{Vя} T_0)/V, P_{\text{те}} = 0$ . Поскольку  $E_T \neq 0, P_T = F(V)$  при  $T=0$ , то это уравнение состояния формально не удовлетворяет требованию о разделении холодных и тепловых компонент давления и энергии. Чтобы оно удовлетворило этому требованию, следует  $E_{\text{тя}}$  и  $P_{\text{тя}}$ , получаемые при  $T=0$ , перенести в холодные члены. Новые холодные  $\bar{P}_x(V)$  и  $\bar{E}_x(V)$  примут вид

$$\bar{P}_x = P_x(V) + \Gamma_x(V)(E_0 - c_{Vя}T_0)/V,$$

$$\bar{E}_x = E_x(V) + (E_0 - c_{Vя}T_0).$$

$\bar{P}_x(V)$ ,  $\bar{E}_x(V)$  должны удовлетворять уравнению (2.2.11). Но так как  $E_0 - c_{Vя}T_0 = \text{const}$ , то  $\frac{\partial \bar{E}_x}{\partial V} = \frac{\partial E_x}{\partial V}$  и (2.2.11) принимает вид

$$\frac{dE_x}{dV} = -P_x(V) - \frac{\Gamma_x(V)}{V}(E_0 - c_{Vя}T_0). \quad (2.6.10)$$

Поскольку  $P_x(V)$  и  $E_x(V)$  связаны уравнением (2.2.11), то (2.6.10) справедливо лишь при

$$E_0 - c_{Vя}T_0 = 0. \quad (2.6.11)$$

Верно также и обратное утверждение, что при  $E_0 - c_{Vя}(T - T_0) \neq 0$   $P_x(V)$  и  $E_x(V)$  не должны удовлетворять уравнению (2.1.17). Поскольку  $P_x(V)$  и  $E_x(V)$  в [12] удовлетворяют уравнению (2.2.11), и если  $E_0 - c_{Vя}(T - T_0) \neq 0$ , то тепловые члены имеют вид:

$$P_T = \frac{\Gamma_x(V) [c_{Vя}(T - T_0) + E_0]}{V} + \frac{\beta_0}{4V} \left( \frac{V}{V_{ок}} \right)^{0,5} T^2, \quad (2.6.12)$$

$$E_T = c_{Vя}(T - T_0) + E_0 + \frac{\beta_0}{2} \left( \frac{V}{V_{ок}} \right)^{0,5} T^2. \quad (2.6.13)$$

Подставив (2.6.12), (2.6.13) в уравнение термодинамической совместности (2.3.2), приходим снова к условию (2.6.11).

Однако из приведенных в [12] данных по  $E_0$  и  $c_{Vя}$  в нормальных условиях следует, что  $E_0 - c_{Vя}T_0 \neq 0$ . Это означает, что тепловые члены в уравнении состояния (6.2) не удовлетворяют уравнению термодинамической совместности (2.3.2) и рассматриваемое уравнение состояния является термодинамически некорректным.

Аналогично ведут себя тепловые члены и в уравнении состояния, предложенном в [4]. Указанная термодинамическая некорректность проявляется в области, где  $E$  становится сравнимой с величиной  $E_0 - c_{Vя}T_0$ . Так, из [12] следует,

что для алюминия  $E_0 - c_{v\alpha} T_0 \approx -0,1$  кДж/г, а минимальная энергия на ударной адиабате в экстремально изученном диапазоне  $\sim 4,3$  кДж/г. Погрешность в энергии, определяемая термодинамической некорректностью, составила, таким образом,  $\sim 2,5\%$ , что сравнимо с погрешностью экспериментальных данных. Хорошее совпадение теоретических ударных адиабат с экспериментальными в [4] и [12] объясняется тем, что обе работы посвящены построению уравнений состояния для области высоких и сверхвысоких давлений.

В [13] для описания экспериментов по ударному сжатию пористых металлов предложено уравнение состояния, которое расширяет диапазон применимости по температурам по сравнению с [12]. Это достигается путем усложнения тепловых и электронных компонент. В [13] учитывается ангармонизм колебания атомов решетки, который возникает при высоких температурах. Квадратичный закон для электронной энергии заменяется аппроксимацией расчетных данных модели Томаса—Ферми.

Холодное давление задано в виде (2.2.21). Параметры  $a$ , определялись тем же способом, что и в [12], т.е. как изложено выше.

Тепловые компоненты давления и энергии имеют вид

$$P_{\text{тя}} = \frac{3\Gamma(\rho) + Z}{1 + Z} \rho R(T - \hat{T}); \quad (2.6.14)$$

$$E_{\text{тя}} = \frac{2 + Z}{1 + Z} \frac{3}{2} R(T - \hat{T}),$$

где  $Z = \frac{lR(T - \hat{T})}{c_x^2}$ ;  $l$  — эмпирическая константа;  $c_x^2 = \frac{dP_x}{d\rho}$ ;  $R$  — универсальная

газовая постоянная. Коэффициент Грюнайзена холодного вещества  $\Gamma(\rho)$  взят по Ландау—Слэтеру:

$$\Gamma(\rho) = \frac{1}{3} + \frac{d \ln C_x}{d \ln \rho}. \quad (2.6.15)$$

Теплоемкость  $C_V$  имеет вид

$$c_V = \frac{2}{3} R [1 + (1 + Z)^{-2}]. \quad (2.6.16)$$

Из (2.6.14) и (2.6.16) следует, что при  $T \rightarrow 0$  уравнение состояния сводится к уравнению состояния Ми—Грюнайзена, а при  $T \rightarrow \infty$  тепловые компоненты превращаются в уравнение состояния идеального газа. Безразмерная эмпириче-



ская константа  $l$  регулирует скорость перехода в идеальный газ при  $T \rightarrow \infty$ .

Электронные компоненты имеют вид

$$\begin{aligned} E_e &= (b^2 / \beta) \ln \operatorname{ch}(\beta T / b); \\ P_e &= g\rho E_e = g\rho^2 (b^2 / \beta) \ln \operatorname{ch}(\beta T / b), \end{aligned} \quad (2.6.17)$$

где  $g = -\frac{d \ln \beta}{d \ln \rho}$ ;  $b$  — эмпирическая константа.

При  $T \ll b/\beta$  формулы (2.6.17) переходят в известный квадратичный закон

$$E_e = \beta T^2 / 2,$$

который справедлив лишь до температуры Ферми ( $T = (30 \div 50) \cdot 10^3$  К).

Электронный аналог коэффициента Грюнайзена  $g(\rho)$  выбран в виде

$$g(\rho) = \sum_{k=1}^4 c_k \delta^{-k}, \quad (2.6.18)$$

где постоянные коэффициенты  $c_k$  определяются из условия наилучшего описания экспериментальных данных по ударному сжатию пористых металлов.

В [13] удалось точнее описать экспериментальные данные по ударному сжатию пористых металлов (Al, Cu, Pb, Ni), чем в [12].

Применимость уравнения состояния [13] со стороны высоких температур ограничена аппроксимационными возможностями формул (2.6.17), поскольку электронный аналог коэффициента Грюнайзена  $g$  зависит и от  $T$ . Кроме того, применимость УРС [13] ограничена и со стороны малых плотностей. При  $\rho \leq 0,8\rho_0$  формула (2.6.15) дает нефизичное поведение коэффициента Грюнайзена решетки, поскольку при некотором  $\rho = \rho_*$  функция  $c_x(\rho)$  обращается в нуль и функция  $\Gamma(\rho)$  становится при  $\rho = \rho_*$  разрывной.

## 2.7. Уравнение состояния с переменной теплоемкостью ядер

В [10] предложено уравнение состояния, которое расширяет диапазон применимости уравнения состояния [13] в сторону меньших плотностей вплоть до газовых.

Давление и удельная внутренняя энергия складываются из холодных, тепловых и электронных составляющих. Холодные составляющие имеют вид

(2.2.6), (2.2.17). Теоретическое значение параметра  $\mu = \frac{1}{3}$ . Однако для повышения точности описания параметр  $\mu$  варьируется. При других значениях констант из работ [2, 14] энергия сублимации оказывается завышенной в два—три раза, поэтому в формулах (2.2.6) и (2.2.17) при  $\delta \leq 1$  был взят другой набор констант, чем при  $\delta > 1$ . Таким образом, холодные составляющие имеют две ветви, которые гладко “сшиваются” при  $\delta = 1$ . Для этого достаточно соблюсти условие непрерывности производной  $\frac{dP_x}{d\delta}$ .

Формулы (2.2.6) и (2.2.17) таковы, что при очень больших сжатиях ( $>10^3$ ) давление и энергия начинают убывать, что нефизично. Однако, при  $\delta < \sim 10$  эти уравнения достаточно точны. Для описания сжатия при  $\delta > \sim 10$  добавляется третья ветвь в виде

$$E_x = \delta^n \frac{E_1 \delta^2}{1 + e_1 \delta + e_2 \delta^2} + E_0. \quad (2.7.1)$$

Холодное давление определяется уравнением (2.2.13).

Эмпирические константы  $E_0$ ,  $E_1$ ,  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $n$  определяются из условия гладкой сшивки ветвей и аппроксимации расчетных данных по модели ТФП [11].

Тепловые составляющие давления и энергии ядер имеют вид

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{тя}} &= \frac{c_{V0} \Gamma_x(\delta) + c_{Vn} \Gamma_n T f(\delta)}{1 + T f(\delta)} \cdot \rho T, \\ E_{\text{тя}} &= \frac{c_{V0} + c_{Vn} \Gamma_n T f(\delta)}{1 + T f(\delta)} \cdot T. \end{aligned} \right\} \quad (2.7.2)$$

Функция Грюнайзена для ядер следует из (2.7.2) в виде

$$\Gamma_x = \frac{c_{V0} \Gamma_x(\delta) + c_{Vn} \Gamma_n T f(\delta)}{c_{V0} + c_{Vn} T f(\delta)} \cdot \rho.$$

Здесь  $c_{V0}$  — теплоемкость конденсированного вещества в нормальных условиях;  $c_{Vn}$  — теплоемкость пара;  $\Gamma(\delta)$  — коэффициент Грюнайзена холодного вещества;  $\Gamma_n$  — коэффициент Грюнайзена пара. Функция  $f(\delta)$  определяется из условия термодинамической совместности и имеет вид

$$f(\delta) = \exp \left[ \int \frac{c_{V\Pi} \Gamma_{\Pi} + c_{V0} \Gamma(\delta)}{c_{V\Pi} - c_{V0}} d \ln V \right], \quad (2.7.3)$$

где  $V$  — удельный объем.

Формула (2.7.2) представляет собой обобщение формул тепловых составляющих из работы [13] на случай многоатомной молекулы пара и произвольный вид коэффициента Грюнайзена холодного вещества  $\Gamma(\delta)$ .

Зависимость  $\Gamma(\delta)$  определяется по формуле (2.3.38) при  $\delta \geq 1$ .

Формула (2.3.38) при плотностях меньше нормальной неприменима, так как знаменатель при некоторой плотности  $\rho^* < \rho_0$  обращается в нуль, коэффициент Грюнайзена становится разрывным, что нефизично. При  $0 < \rho \leq \rho_0$  для  $\Gamma$  была взята математически простейшая формула, обеспечивающая непрерывную интерполяцию коэффициента Грюнайзена по (2.3.38) при  $\delta = 1$  и значении  $\Gamma_{\Pi}$

$$\Gamma_{\Pi} = \Gamma + \sum_{i=1}^{N_1} \eta_i \delta^i; \quad N_1 = 3 \div 4. \quad (2.7.4)$$

Эмпирические константы определялись из условия гладкой “сшивки” ветвей (2.3.38) и (2.7.4) при  $\delta = 1$  и по теплофизическим данным при  $\delta \leq 1$ .

Подставив (2.3.38) и (2.7.4) в (2.7.3) и проведя интегрирование, получим

$$f(\delta) = \begin{cases} f_{01} \delta^{-\Gamma_{\Pi}} \exp \left( \frac{k}{1-k} \sum_{i=1}^{N_1} \eta_i \frac{\delta^i}{i} \right) & \text{при } \delta < 1; \\ f_{01} \rho^{\omega} / \left| (P_x)'_v + \frac{2}{3} \text{tr} P_x \right|^m & \text{при } \delta \geq 1, \end{cases} \quad (2.7.5)$$

где  $k = c_{V0}/c_{V\Pi}$ ;  $\omega = \left[ c_{V\Pi} \Gamma_{\Pi} + c_{V0} \left( \frac{2}{3} - \gamma \right) \right] / (c_{V0} - c_{V\Pi})$ ;  $m = 0,5 c_{V0} / (c_{V0} - c_{V\Pi})$ .

Константы  $f_{01}, f_{02}$  появляются при интегрировании в формуле (2.7.3) и связаны условием непрерывности функции  $f(\delta)$  при  $\delta = 1$ :

$$f_{01} = f_{02} \left[ \exp \left( \frac{k}{1-k} \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\eta_i}{i} \right) \right] - \frac{3\rho_0^{\omega-1}}{n_2(q_2 - 2)}. \quad (2.7.6)$$

Из формулы (2.7.5) следует, что первые две производные функции  $f(\delta)$  при  $\delta = 1$  будут непрерывны, так как функция  $\Gamma(\delta)$  при  $\delta = 1$  непрерывна вместе с первой производной. Вместо константы  $f_{02}$  удобнее ввести безразмерную варь-



ируемую константу  $l$  по формуле

$$l = \frac{f_{02} A \rho_0^{\omega-2}}{R}, \quad (2.7.7)$$

где  $A$  — атомный вес;  $R$  — универсальная газовая постоянная. Константа  $l$  играет ту же роль, что и одноименная константа в работе [13].

Из формул (2.7.2)—(2.7.7) следует, что при  $V \rightarrow \infty$  или  $T \rightarrow \infty$  формулы (2.7.2) переходят в термическое и калорическое уравнения состояния идеального газа, т.е. тепловые составляющие отражают тот факт, что при больших температурах или больших объемах вещество превращается в газ (испаряется). Константа  $l$  регулирует “скорость” перехода в пар.

Для электронной энергии была выбрана формула

$$E_e = \frac{\beta(\delta)}{2} \frac{T_\Phi T^2}{T_\Phi + T(\delta_* + \delta)^{-\Gamma_3}}. \quad (2.7.8)$$

Здесь  $\beta = \beta_0(\delta_* + \delta)^{-\Gamma_3}$  — коэффициент теплоемкости электронов;  $T_\Phi$ ,  $\Gamma_3$ ,  $\delta_*$  — эмпирические константы. Константа  $T_\Phi$  имеет размерность температуры и играет роль температуры Ферми. При  $T \ll T_\Phi$  формула (2.7.8) превращается в известный квадратичный закон для электронной энергии [13]:

$$E_e = \frac{\beta(\delta)}{2} T^2.$$

При  $T \approx T_\Phi$  начинается отклонение от квадратичного закона, и при  $T \gg T_\Phi$  энергия зависит только от  $T$ , причем линейно:

$$E_e = 0,5\beta_0 T_\Phi T.$$

Константа  $\delta_*$  введена для ликвидации расходимости электронной теплоемкости при  $\delta \rightarrow 0$ . Сравнение с результатами расчета по модели ТФП [11] показывает, что  $\delta_* \approx 0,04$ .

Величину  $\beta_0$  и  $T_\Phi$  можно оценить теоретически,  $\beta_0$  определяется также и из эксперимента при  $T \approx 0$  [15]. Константы  $\beta_0$ ,  $T_\Phi$ ,  $\Gamma_3$  определялись из условия наилучшего описания данных по ударному сжатию.

Формула для  $P_e$  следует из условия термодинамической совместности в виде

$$P_e = \frac{\Gamma_3 \delta}{\delta_* + \delta} \rho E_e. \quad (2.7.9)$$

Из формулы (2.7.9) следует, что при  $\delta \gg \delta_*$  электронный аналог коэффициента Грюнайзена равен  $\Gamma_3$ .

Изложенное уравнение состояния таково, что при  $\rho < \rho_0$  в некотором диапазоне температур изотермы немонотонны, т.е. существуют критические параметры в том же смысле, что и в уравнении состояния Ван-дер-Ваальса.

Уравнение состояния содержит следующие независимые параметры:

$$\rho_0, q_1, \mu_1, q_2, \Pi_2, \mu_2, t, \gamma, l, c_{V0}, c_{V\Pi}, \Gamma_{\Pi}, \eta_i, \beta_0, \Gamma_3, T_{\Phi}, \delta_*.$$

Параметры  $\rho_0, c_{V0}, c_{V\Pi}, \Gamma_{\Pi}$  имеют ясный физический смысл и известны из теории или эксперимента. Остальные константы определялись в два этапа. Сначала при заданных  $\rho_0, c_{V0}, c_{V\Pi}, \Gamma_{\Pi}$  и  $\delta_* = 0,05$  определялись константы  $\gamma, l, \beta_0, \Gamma_3, T_{\Phi}, \Pi_2, q_2, \mu_2, t$  из условия наилучшего описания данных по ударному сжатию.

Параметры  $q_1, \Pi_1, \mu_1, \eta_1, \dots, \eta_{N1}$  определялись из условия наилучшего описания экспериментальных данных по тепловому расширению и тех экспериментальных точек ударных адиабат пористых образцов, в которых  $\rho < \sim \rho_0$ .  
Энергия связи

$$Q_0 = - \int_{V_0}^{\infty} P_x dV$$

полагалась равной справочному значению теплоты испарения при давлениях ниже  $10^{-4}$  ГПа. С найденными параметрами уравнения состояния рассчитывались критические параметры и кривая равновесия пара и конденсированного вещества. Затем параметр  $\mu_1$  и энергия связи корректировались для лучшего согласия со справочными данными по испарению и с оценкой критических параметров, которая сделана в [16].

В табл. 2.4 приведены оптимальные значения параметров  $\mu_2, t, q_2, l, \Gamma_3, \beta_0$  в сравнении с экспериментальными или теоретическими значениями, а также с данными из работы [13].

Значения  $\mu_2$  для всех четырех металлов выше теоретического, т.е. силы притяжения меняются несколько быстрее, чем предписывает потенциал Борна—Майера. Значения  $q_2$  для разных металлов близки. Параметры  $(\mu, q)_2$  определяются по данным ударного сжатия в промежутке  $1 < \delta \lesssim 2$ , тем не менее расчет по формулам (2.2.6) и (2.2.17) хорошо согласуется с данными ТФП-модели.

Формулы (2.7.3), (2.7.5) громоздки и неэкономичны для практических вычислений, поэтому функция  $\Gamma(\delta)$  при найденных  $\mu_2, q_2, t, \gamma$  аппроксимировалась

Оптимальные значения параметров

Элемент	$q_2$	$t$	$\mu_2$		$l$		$\beta_0$ , Эрг/(г·К <sup>2</sup> )		$T_\Phi \cdot 10^3$ , К		$\Gamma_\infty$	
			Рас- чет	Тео- рия	Рас- чет	[13]	Рас- чет	Экспе- римент	Рас- чет	Тео- рия	Рас- чет	[13]
Al	6,94	0	1,1	1/3	10	6	670	518	218	137	0,30	0,5
Cu	10,1	2,2	0,45	1/3	14	9	104	109	210	82	0,76	0,5
Pb	9,19	2,3	0,9	1/3	5,4	30	150	144	145	55	0,34	0,8
Fe	10,6	4	1,4	1/3	1,2	—	275	900	129	171	0,49	—

при  $\delta \geq 1$  математически простой функцией

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{N_2} \xi_i \delta^{-i} + \Gamma_\infty.$$

Параметры для Al, Cu, Pb, Fe приведены в табл. 2.5. В железе при давлении на ударной волне около 13 ГПа, как известно, происходит фазовый переход  $\alpha \rightarrow \epsilon$  с объемным эффектом не более 2,5%. При построении уравнения состояния  $\alpha$ -железо трактовали как пористое  $\epsilon$ -железо, поэтому в табл. 2.5  $\rho_0 = 7,8$  г/см<sup>3</sup>.

Таблица 2.5

Параметры для Al, Cu, Pb и Fe

Параметр	Al	Cu	Pb	Fe
$\rho_{ok}$ , г/см <sup>3</sup>	2,71	8,93	11,34	8
$c_{ok}$ , км/с	5,25	3,93	1,95	4
$q_1$	17,0	31,3	26,4	9,48
$\mu_1$	0,5	1/3	0,5	1
$q_2$	6,95	10,1	9,19	10,6
$\mu_2$	1	0,5	1	1
$c_{\gamma_0}$ , Дж/(г·град.)	0,92	0,392	0,12	0,46
$c_{\gamma_n}$ , Дж/(г·град.)	0,46	0,196	0,06	0,23
$\Gamma_\Pi$	2/3	2/3	2/3	2/3
$\Gamma_\infty$	2/3	2/3	2/3	2/3
$\eta_1$	0	0	0	1,972
$\eta_2$	2,345	12,417	6,612	-1,836
$\eta_3$	-3,44	-18,923	-5,112	4,941
$\eta_4$	11,69	7,840	0,343	-3,658
$\eta_5$	-8,93	0	0	0



## 2.8. Плавление, испарение и ионизация

Учет плавления и ионизации позволяет расширить диапазон описания свойств веществ и повысить точность по сравнению с [10]. В [17] предложено такое уравнение состояния и описан способ его построения. Дальнейшее изложение УРС и способа его построения сделано по [17] с некоторыми сокращениями и изменениями.

Модель жидкости без учета электронов имеет следующий вид. Для давления  $P$  применяется выражение Ван-дер-Ваальса

$$P = \frac{NkT}{V - V_c} + P^{\text{пр}}(V), \quad (2.8.1)$$

где  $N = \text{const}$  — число частиц в объеме  $V$ ;  $k$  — постоянная Больцмана;  $T$  — абсолютная температура;  $V_c$  — коволок. Второе слагаемое в (2.8.1) описывает в приближении среднего поля притяжение между частицами. Притяжение играет значительную роль вблизи нормальных условий и малосущественно при больших степенях расширения:  $P^{\text{пр}} \rightarrow 0$  при  $V \rightarrow \infty$ . В исходной модели Ван-дер-Ваальса  $P^{\text{пр}} = -a/V^2$  ( $a = \text{const}$ ). Здесь используется аналогичная зависимость, конкретный вид которой приводится ниже. Первое слагаемое в (2.8.1) представляет собой давление отталкивания  $P^{\text{от}}$ , имеющее кинетическое происхождение. Оно обусловлено поступательным движением частиц, которые рассматриваются как материальные точки в свободном объеме  $V - V_c$ . Считается, что это давление является причиной, сжимающей частицы, поэтому полагается

$$V_c = V_c(P^{\text{от}}). \quad (2.8.2)$$

Данное предположение является обобщением предположения [18], и оно переходит в последнее, когда  $P^{\text{пр}} = 0$  (или  $\text{const}$ ).

В некоторых случаях при использовании этой модели удобнее работать не с функцией  $V_c(P^{\text{от}})$ , а с обратной для нее, т.е. с  $P^{\text{от}}(V_c)$ . Тогда, с учетом (2.8.1), (2.8.2) и определения  $P^{\text{от}} = NkT/(V - V_c)$ , в переменных  $T$  и  $V_c$  термическое уравнение состояния записывается в виде

$$V = V_c + \frac{NkT}{P^{\text{от}}(V_c)}; \quad (2.8.3)$$

$$P = P^{\text{от}}(V_c) + P^{\text{от}}(V). \quad (2.8.4)$$

Свободная энергия  $F$ , внутренняя энергия  $E$  и энтропия  $S$  определяются следующими выражениями:

$$F = Nk\varepsilon_0 + E^{\text{от}}(V_C) + E^{\text{мп}}(V) + \frac{3}{2}NkT - NkT \left( S_0 + \frac{5}{2} \ln T - \ln P^{\text{от}}(V_C) \right); \quad (2.8.5)$$

$$E = Nk\varepsilon_0 + E^{\text{от}}(V_C) + E^{\text{мп}}(V) + \frac{3}{2}NkT; \quad (2.8.6)$$

$$S = Nk \left( S_0 + \frac{5}{2} \ln T - \ln P^{\text{от}}(V_C) \right), \quad (2.8.7)$$

где

$$E^{\text{от}}(V_C) = - \int_{\infty}^{V_C} P^{\text{от}}(V_C) dV_C; \quad (2.8.8)$$

$$E^{\text{мп}}(V) = - \int_{\infty}^V P^{\text{мп}}(V) dV, \quad (2.8.9)$$

а  $\varepsilon_0, S_0 = \text{const.}$

Данная модель, так же как и модель Ван-дер-Ваальса, учитывает испарение жидкости и ее сжимаемость при низких температурах. В пределе высоких температур она переходит в уравнение состояния одноатомного идеального газа.

Модель допускает обобщение на случай смеси произвольного состава. Это обобщение привлекается здесь для описания области высокотемпературных состояний, где существенное значение имеет ионизация. При рассмотрении последней используется метод, аналогичный [19]. Учитывается только термическая ионизация, характерная для газовых систем, но не ионизация "давлением". Электроны описываются классическим способом.

При низких температурах в рассматриваемой модели ионизация не существенна, в частности, она мала на значительной части кривой плавления. Пренебрежение ионизацией позволяет относительно простым аналитическим образом произвести объединение уравнений состояния жидкой и твердой фаз. Для жидкости вблизи кривой плавления используется представление модели в форме (2.8.3)—(2.8.7). Для твердого вещества применяется модель Ми—Грюнайзена

$$P = P_x(V) + \frac{\gamma(V)}{V} 3NkT; \quad (2.8.10)$$

$$E = E_x(V) + 3NkT; \quad (2.8.11)$$

$$S = 3Nk \ln T - 3Nk \ln \theta_D(V); \quad (2.8.12)$$

$$\gamma = -\frac{d \ln \theta_D(V)}{d \ln V}, \quad (2.8.13)$$

где  $\gamma$  — коэффициент Грюнайзена;  $\theta_D$  — эмпирическая температура Дебая;  $P_x$ ,  $E_x$  — “холодные” давление и энергия. На кривой плавления (пл) равны температуры, давления и термодинамические потенциалы Гиббса твердой (т) и жидкой (ж) фаз:

$$T^T = T^J \equiv T_{\text{пл}}; \quad (2.8.14)$$

$$P^T = P^J \equiv P_{\text{пл}}; \quad (2.8.15)$$

$$E_{\text{пл}}^T - T_{\text{пл}} S_{\text{пл}}^T + P_{\text{пл}} V_{\text{пл}}^T = E_{\text{пл}}^J - T_{\text{пл}} S_{\text{пл}}^J + P_{\text{пл}} V_{\text{пл}}^J. \quad (2.8.16)$$

Следствием (2.8.16) является уравнение Клапейрона—Клаузиуса

$$\frac{dT_{\text{пл}}}{dP_{\text{пл}}} = \frac{V_{\text{пл}}^J - V_{\text{пл}}^T}{S_{\text{пл}}^J - S_{\text{пл}}^T}. \quad (2.8.17)$$

В качестве критерия плавления используется геометрический критерий, аналогичный критерию Линдемманна. Считается, что вещество находится в жидкой фазе, когда относительная доля свободного объема, доступного атомам при их движении в жидкости, равна или больше определенной (малой) величины, т.е. постулируется, что кривая плавления определяется уравнением

$$\frac{V_{\text{пл}}^J - V_C}{V_C} = \beta, \quad (2.8.18)$$

где  $\beta = \text{const}$  — эмпирический параметр. Уравнения (2.8.3), (2.8.4), (2.8.18) позволяют рассчитывать  $T_{\text{пл}}$  и  $P_{\text{пл}}$  в зависимости от  $V_C$ , на основе которых определяется кривая плавления в  $T$ — $P$ -координатах. Далее считается заданной зависимость  $\theta_D(V)$  (этот способ используется при небольших степенях сжатия; способ, применяемый при повышенных сжатиях, принципиально не отличающийся от первого, приводится ниже). Тогда из уравнения (2.8.17) с привлечением (2.8.7), (2.8.12), (2.8.18) может быть определена связь  $V_{\text{пл}}^T(V_C)$ , после чего из (2.8.13) находится  $\gamma$ , а затем из (2.8.6), (2.8.10), (2.8.11), (2.8.16)— холодная кривая твердой фазы. Тем самым уравнение твердой фазы является полностью определенным. Его переменными, так же как и для жидкости, являются  $T$  и  $V_C$ . Расчеты на его основе проводятся в том случае, если оказывается, что при заданном  $V_C$  температура  $T$  меньше  $T_{\text{пл}}(V_C)$ . В противном случае используется модель (2.8.3)—(2.8.7).



В областях смеси фаз твердое тело + жидкость и жидкость + пар уравнение состояния строится обычным способом, когда предполагается, что в смеси есть фазовое равновесие.

Для конкретной реализации описанной схемы требуется иметь зависимости  $P^{\text{от}}(V_C)$ ,  $P^{\text{пр}}(V)$ ,  $\theta_D(V)$ , параметры  $V_{00}$ ,  $\beta$  и характеристики ионов  $\sigma(T)$ . Для представления  $P^{\text{пр}}(V)$  во всем диапазоне  $V$  в данном случае используется следующая зависимость:

$$P^{\text{пр}}(V) = -A \left( \frac{V}{V_{00}} \right)^{-n}, \quad (2.8.19)$$

где  $A$ ,  $n = \text{const}$ .  $P^{\text{от}}(V_C)$  в области расширения и небольшого сжатия принимается в виде

$$P^{\text{от}}(V_C) = A \exp \left( \alpha \left( 1 - \frac{V_C}{V_{00}} \right) \right), \quad (2.8.20)$$

где  $\alpha = \text{const}$ . Для  $\theta_D(V)$  применяется

$$\theta_D(V) = \theta_0 \exp \left( \gamma_0 \left( 1 - \frac{V}{V_0} \right) \right), \quad (2.8.21)$$

где  $\theta = \text{const}$ ;  $V_0 = 1/\rho_0$  — удельный объем твердого тела в нормальных условиях ( $\rho_0$  — плотность);  $\gamma_0$  — экспериментальное значение коэффициента Грюнайзера в нормальных условиях. Можно отметить, что (2.8.21), (2.8.13) дают линейную  $\gamma$ — $V$ -зависимость

$$\gamma(V) = \gamma_0 \frac{V}{V_0}. \quad (2.8.22)$$

Подбор параметров  $V_{00}$ ,  $\beta$ ,  $A$ ,  $n$ ,  $\alpha$ ,  $\theta_0$  производится исходя из описания моделью величины энергии сублимации твердого тела  $Q$ , условий, что при  $V = V_0$  и  $T = 293$  К  $P = 1$  атм воспроизводятся значения изоэнтропического модуля сжатия  $K_{S0}$  и его производной по давлению  $dK_S/dP|_p$ , а также того, что при  $P = 1$  атм модельные значения температуры  $T_{\text{пл}}^0$  и энтальпии  $H_{\text{пл}}^0$  равны экспериментальным.

Представление  $P^{\text{от}}(V_C)$  в виде (2.8.20) является неудовлетворительным при повышенных сжатиях. Ввиду этого в последней области использовались зависимости типа

$$P^{\text{от}}(V_C) = \sum_k A_k \left( \frac{V_C}{V_{00}} \right)^{\alpha_k}. \quad (2.8.23)$$

Часть коэффициентов  $A_k$ ,  $\alpha_k$  находится из условий гладкой (включая вторую производную) сшивки (2.8.20) и (2.8.23), часть — из оптимальной аппроксимации ударной адиабаты сплошного вещества. Обеспечивается также правильное описание холодной кривой в пределе высоких сжатий ( $P_x = bV^{-5/3}$ , где  $b$  — теоретический коэффициент для вырожденного электронного газа).

Экспериментальные данные и теоретические модели свидетельствуют о том, что скачок энтропии при плавлении  $\Delta S_{\text{пл}} = S_{\text{пл}}^{\text{ж}} - S_{\text{пл}}^{\text{т}}$  приблизительно постоянен (равен  $Nk$ ). Экстраполяция зависимости (2.8.21) в область повышенных сжатий приводит к нарушению этой закономерности. Ввиду этого в последнем случае вместо представления (2.8.21) использовалось следующее:

$$\frac{\Delta S_{\text{пл}}(V_C)}{Nk} = 0,08 + \sum_{r=1}^3 S_r \left( \frac{V_C}{V_{00}} \right)^r, \quad (2.8.24)$$

где  $S_r = \text{const}$ . С привлечением (2.8.24) из (2.8.17) (при уже найденном  $\beta$  в (2.8.18) и других параметрах и зависимостях) определяется, как и ранее, связь  $V_{\text{пл}}^{\text{т}}(V_C)$ , после чего из (2.8.7) и (2.8.10)—(2.8.13), (2.8.16) — холодная кривая твердого вещества. Коэффициенты  $S_r$  в (2.8.24) находятся из условий гладкости “сшивки” скачков энтропии на нижнем и верхнем участках. “Сшивка” (2.8.21) с (2.8.24) производится при тех же сжатиях ( $\approx 1,2—1,5$ ), что и (2.8.20) с (2.8.23).

Модель применялась для ряда металлов: Al, Fe, Ni, Cu, Mo, Ta, W, Pb и др. Использовались данные относительно  $\gamma_0$ ,  $b$ ,  $Q$  из [18];  $T_{\text{пл}}^0$  и  $H_{\text{пл}}^0$  из [20]. Значения  $K_{S0}$  и  $dK_S/dP|_p$  определялись исходя из описания ударных адиабат сплошных образцов на начальном участке. Они обычно несколько отличаются от значений соответствующих параметров, получаемых в результате часто используемой на практике линейной либо квадратичной обработки ударно-волновых данных в координатах волновая  $D$  — массовая скорость  $U$  в широком диапазоне параметров ( $D = c_0 + \lambda U + \dots$ ;  $K_{S0} = \rho c_0^2$ ,  $dK_S/dP|_p = 4\lambda - 1$ ), и в целом ближе к тем, которые получаются в ультразвуковых измерениях при низких давлениях.

Статистические суммы при расчетах ограничивались первым членом. Параметры ионов брались из [21, 22].



## 2.9. Уравнение состояния равновесной смеси фаз

В уравнениях состояния, описывающих фазовые переходы, на плоскости термодинамических переменных появляются области, где вещество находится в двухфазном состоянии. Границы этих областей определяются уравнениями фазового равновесия и рассчитываются по уравнениям состояния фаз, как правило, численно и представляются таблично. Давления и температуры фаз в равновесной смеси, а также их термодинамические потенциалы Гиббса одинаковы:

$$T_1 = T_2; P_1 = P_2; E_1 + P_1 V_1 - T_1 S_1 = E_2 + P_2 V_2 - T_2 S_2. \quad (2.9.1)$$

Уравнения (2.9.1) определяют кривую равновесия фаз  $P = P_p(T)$ , т.е. в переменных  $P, T$  область двухфазных состояний вырождается в линию, а уравнение состояния  $P = P(\rho, T)$  для смеси вырождается в функцию одной переменной  $P = P_p(T)$ . В равновесной смеси фаз удельный объем и внутренняя энергия смеси определяются по формулам

$$V = \eta V_1 + (1 - \eta) V_2; E = \eta E_1 + (1 - \eta) E_2, \quad (2.9.2)$$

где  $\eta$  — массовая концентрация первой фазы.

Из (2.9.2) следует

$$E = \frac{V_2 - V}{V_2 - V_1} E_1 + \frac{V - V_1}{V_2 - V_1} E_2. \quad (2.9.3)$$

Для получения уравнения состояния равновесной смеси в виде  $E = E(V, T)$  достаточно подставить в (2.9.3) зависимости  $V_1(T), V_2(T), E_1(T), E_2(T)$ :

$$E = \frac{V_2(T) - V}{V_2(T) - V_1(T)} E_1(T) + \frac{V - V_1(T)}{V_2(T) - V_1(T)} E_2(T). \quad (2.9.4)$$

Для получения уравнения состояния в виде  $P = P(V, E)$  в (2.9.3) подставляются зависимости  $V_1(P), V_2(P), E_1(P), E_2(P)$  и полученное уравнение преобразуется к виду [23]

$$E = A(P) + B(P)V, \quad (2.9.5)$$

где

$$A = \frac{V_2(P)E_1(P) - E_2(P)V_1(P)}{V_2(P) - V_1(P)}, \quad B = \frac{E_2(P) - E_1(P)}{V_2(P) - V_1(P)}. \quad (2.9.6)$$

Если зависимости  $V_1, V_2, E_1, E_2$  от  $P$  представлены в аналитическом виде, что бывает только в модельных уравнениях состояния, то для получения урав-



нения состояния смеси в виде  $P = P(V, E)$  уравнение (2.9.5) решается относительно  $P$  аналитически или численно. В случае, когда указанные зависимости представлены таблично, что обычно и бывает на практике, то уравнение (2.9.5) можно решить относительно  $P$  только численно. Достаточно экономичен следующий способ вычисления  $P$  по  $V$  и  $E$  [23]. Уравнение (2.9.5) записывается в виде

$$F(P) = E - A(P) + B(P)V = 0. \quad (2.9.7)$$

Функции  $A(P)$ ,  $B(P)$  могут быть заранее рассчитаны по формулам (2.9.6) и представлены в виде таблиц  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $P_i$ . При заданных значениях  $V$ ,  $E$  отыскиваются узлы таблицы  $i$ ,  $i+1$ , в которых функция  $F(P)$  меняет знак. Затем линейной интерполяцией  $P$  по  $F$  вычисляется  $P$  при  $F=0$ . При необходимости точность интерполяции может быть повышена за счет вычисления дополнительных значений  $F$  в узлах сетки по  $P$ .

Изложенный алгоритм не обеспечивает непрерывности  $P$  на границах смеси фаз. Величина скачка определяется точностью интерполяций. Поэтому данный алгоритм вычисления  $P$  по  $V$  и  $E$  может применяться лишь в тех программах расчета динамики, где строгая непрерывность УРС не требуется. Если требуется непрерывность функции  $P = P(V, E)$ , то можно поступить следующим образом. По найденному значению  $P$  (как это было изложено выше) интерполяцией вычисляются значения  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ . Затем по уравнениям состояния фаз вычисляются давления в фазах  $P_1 = P_1(V_1, E_1)$  и  $P_2 = P_2(V_2, E_2)$ . Значения  $P_1$  и  $P_2$  будут различны и несколько отличны от  $P$  ввиду погрешности интерполяции при вычислении  $P$ . Окончательное значение давления в смеси вычисляется усреднением  $P_1$  и  $P_2$  по объемной концентрации фаз в смеси:

$$\bar{P} = \xi P_1 + (1 - \xi) P_2,$$

где  $\xi$  — объемная концентрация первой фазы в смеси

$$\xi = \frac{\eta V_1}{V_2(1 - \eta) + \eta V_1}.$$

В [24] предложен способ приближенного описания смеси пара и жидкости. Анализ изоэнтроп в области смеси жидкости и пара, построенных по уравнениям состояния [6, 7, 10], показывает, что они имеют простой вид и могут быть описаны простыми аналитическими зависимостями. Одно из простейших уравнений состояния смеси жидкости и пара имеет вид

$$P = \Gamma_c \rho \left( E_p - E_n + (E_n - Q_0) \frac{\delta_n - \delta}{\delta_n + K_c \delta} \right),$$

где  $\Gamma_c = \text{const}$ ,  $\delta_n$ ,  $E_n$  — безразмерная плотность (сжатие) и внутренняя энергия жидкости в точке кипения при нормальном давлении соответственно,  $K_c$  — параметр уравнения состояния. При таком описании области двухфазного состояния бинадаль находится как линия, при переходе через которую сохраняются непрерывными  $P$  и  $E$ . Эти значения находятся как решения системы двух нелинейных уравнений:

$$V\{P - P_x(V)\} - \Gamma(E)\{E - E_x(V)\} = 0,$$

$$PV - \Gamma_c(E - E_n) + (E_n - Q_0) \frac{\delta_n - \delta}{\delta_n + K_c \delta} = 0.$$

Зависимость  $P(V)$  вдоль бинадали табулируется.

## 2.10. Табличная форма уравнения состояния

Табличная форма УРС является альтернативой аналитической форме. Математический аппарат построения таблиц и интерполирования детально исследован теоретически, в этой области вычислительной математики накоплен большой практический опыт и имеется обширная научная литература.

Наибольшее распространение при построении табличных УРС получили полиномиальные интерполяции и, в частности, сплайны, как самые экономичные в вычислительном отношении.

При практическом построении любых аппроксимаций, в том числе и табличных, решающее значение имеет выбор независимых переменных и аппроксимируемых функций. Этот выбор должен обеспечивать минимальность кривизны аппроксимируемой функции и простоту, а значит, и экономичность преобразования переменных. Так, табулирование холодных и тепловых компонент следует проводить раздельно, поскольку в этом случае объем таблиц существенно уменьшается. Тепловые компоненты давления и энергии удобно [25] табулировать в переменных  $x = \ln T$ ;  $y = \ln \delta$ ;  $f = \ln P_T$ ;  $z = \ln E_T$ . В этих переменных аппроксимируемая поверхность близка к плоскости, однако преобразование переменных не является экономичным, так как требует вычисления логарифмов при переходе к переменным  $x, y, f, z$  и экспонент — при обратном переходе.



В случае табличной формы представления для экономичности интерполяций предпочтительнее равномерные прямоугольные сетки, поскольку в этом случае поиск необходимых для интерполяций табличных значений является тривиальным, а интерполяционные формулы имеют наиболее простой вид. Однако равномерные сетки не являются оптимальными в том смысле, что при заданной точности аппроксимации, вообще говоря, не обеспечивают минимального объема таблиц. Разумным представляется компромисс, когда область табличного представления разбивается на несколько участков, в которых сетки равномерные. Выбор границ участков проводится на стадии предварительного анализа проведения аппроксимируемой функции.

Для табличного представления холодных компонент УРС эффективны кубические сплайны, поскольку обеспечивается высокая степень гладкости при экономичном расчете термодинамических функций и их производных. Количество коэффициентов сплайна для аппроксимации функции одной переменной равно  $4N$ , где  $N$  — количество интервалов сетки, т.е. относительно не велико.

Для табличного представления тепловых компонент заранее невозможно отдать предпочтение какому-либо виду полиномиальных интерполяций. Все зависит от структуры аппроксимируемой функции. Если функция достаточно проста и можно обойтись небольшим числом точек сетки по каждой переменной, то предпочтительнее сплайн-аппроксимация. Если же число узлов сетки  $N \times M \geq 100$ , то вычисление сплайна по табличным значениям в 1,6 раза дороже, чем при бикубической интерполяции на равномерных сетках. При возрастании числа узлов сетки затраты на вычисление сплайна по табличным значениям пропорционально растут, тогда как вычисление бикубического полинома по табличным значениям не зависит от числа точек сетки. Вычисление сплайна будет дешевым, если хранить коэффициенты сплайна, но тогда резко возрастет расход памяти ЭВМ.

При табличном представлении тепловых компонент УРС при обычной локальной полиномиальной интерполяции оптимальным является бикубический полином. Благодаря высокой точности интерполяции (четвертый порядок аппроксимации) таблицы имеют сравнительно малый объем ( $\approx 10^3$  чисел на термодинамическую функцию), а вычисление бикубического сплайна по табличным значениям на равномерных сетках эквивалентно вычислению одной степенной функции, т.е. требует мало времени ЭВМ. Полиномы меньшей степени требуют существенно более подробных таблиц, а полиномы более высокой



степени требуют существенно больше времени ЭВМ на вычисление значения полинома.

При всех очевидных достоинствах локальная бикубическая интерполяция не обеспечивает гладкость поверхности УРС. Для некоторых алгоритмов расчета динамики негладкость УРС крайне нежелательна, так как может привести к отказам. Однако в большинстве случаев той приближенной гладкости (величина разрыва производных третьего порядка малости), которую обеспечивает бикубическая интерполяция, вполне достаточно.

Если требуется строгая гладкость, то можно применять следующую модификацию бикубической интерполяции [25]:

$$f_M^3 = \left\{ f_1^3 \left[ 1 + \frac{2(x-x_1)}{x_2-x_1} \right] + (f'_{1x})^3 (x-x_1) \right\} \left( \frac{x-x_2}{x_2-x_1} \right)^2 + \\ + \left\{ f_2^3 \left[ 1 - \frac{2(x-x_2)}{x_2-x_1} \right] + (f'_{2x})^3 (x-x_2) \right\} \left( \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \right)^2;$$

где

$$f_1^3(y) = \left\{ f_{11} \left[ 1 + \frac{2(y-y_1)}{y_2-y_1} \right] + f'_{12y} (y-y_2) \right\} \left( \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \right)^2 + \\ + \left\{ f_{12} \left[ 1 + \frac{2(y-y_1)}{y_2-y_1} \right] + f'_{12y} (y-y_2) \right\} \left( \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \right)^2;$$

$$f_2^3(y) = \left\{ f_{21} \left[ 1 + \frac{2(y-y_1)}{y_2-y_1} \right] + f'_{21y} (y-y_1) \right\} \left( \frac{y-y_2}{y_2-y_1} \right)^2 + \\ + \left\{ f_{22} \left[ 1 - \frac{2(y-y_1)}{y_2-y_1} \right] + f'_{22y} (y-y_2) \right\} \left( \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \right)^2;$$

$$(f'_{1x})^3 = \left\{ f'_{11x} \left[ 1 + \frac{2(y-y_1)}{y_2-y_1} \right] + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{11} (y-y_1) \right\} \left( \frac{y-y_2}{y_2-y_1} \right)^2 + \\ + \left\{ f'_{12x} \left[ 1 - \frac{2(y-y_2)}{y_2-y_1} \right] + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{12} (y-y_2) \right\} \left( \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \right)^2;$$

$$(f'_{2x})^3 = \left\{ f'_{21x} \left[ 1 + \frac{2(y-y_1)}{y_2-y_1} \right] + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{21} (y-y_1) \right\} \left( \frac{y-y_2}{y_2-y_1} \right)^2 +$$

$$+ \left\{ f'_{22x} \left[ 1 - \frac{2(y-y_2)}{y_2-y_1} \right] + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{22} (y-y_2) \right\} \left( \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \right)^2.$$

Производные  $f'_{xij}$ ,  $f'_{yij}$ ,  $\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{ij}$  определяются по формулам

$$f'_{xij} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{x_{i+1} - x_{i-1}}; \quad f'_{yij} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}};$$

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{ij} = \frac{f_{i+1}^{j+1} - f_{i-1}^{j+1} - f_{i+1}^{j-1} + f_{i-1}^{j-1}}{(x_{i+1} - x_{i-1})(y_{j+1} - y_{j-1})}.$$

По математическому смыслу изложенный способ интерполяции представляет собой приближенное построение двумерного аналога полинома Эрмита. Однако точность этой интерполяции на один порядок ниже, чем бикубической, и она несколько дороже.

При составлении таблиц приходится решать задачу на оптимум в условиях ограничений, а именно, при заданной точности аппроксимации выбирать расположение узлов сетки так, чтобы их число было минимальным. В общем случае выбор оптимальной сетки представляет собой непростую вычислительную проблему из-за большой размерности (большое число узлов сетки). Если ограничиться сетками, в которых узлы располагаются по некоторому заранее определенному закону, то размерность задачи на оптимум резко уменьшается. В случае равномерных сеток размерность задачи становится минимальной и равна двум, так как надо найти число узлов сетки по каждой переменной, например, по плотности и температуре.

В [26] задача построения оптимальной неравномерной сетки для сплайна в  $N$ -представлении решалась путем простого перебора. При этом пришлось оптимизировать значение примерно тридцати переменных (суммарное число сеток по плотности и тепловой энергии). Благодаря относительно малому числу варьируемых переменных, данную задачу на оптимум удалось решить методом простого перебора. Небольшое число узлов сетки объясняется тем, что тепловые компоненты в УРС [26] имеют простую структуру.

В [25] оптимальная прямоугольная равномерная по каждой переменной

сетка для бикубической интерполяции строилась путем минимизации числа узлов при условии, чтобы максимальная погрешность интерполяции не превышала заданное число. Варьировалось число узлов сетки по температуре и плотности. Оптимальная сетка получалась путем поиска двух переменных в ограниченной области методом деформируемого многогранника в сочетании с методом скользящего допуска [27].

Здесь необходимо сделать следующее пояснение. Минимизируемая функция  $N(h_x, h_y)$ , где  $h_x, h_y$  — шаги сетки по  $x$  и  $y$ , является разрывной, так как число узлов сетки определяется по формуле

$$N = \text{Ent} \left( \frac{x_{\max} - x_{\min}}{h_x} \right) \text{Ent} \left( \frac{y_{\max} - y_{\min}}{h_y} \right)$$

Здесь  $x_{\max}, x_{\min}, y_{\max}, y_{\min}$  — пределы области табулирования. Тем не менее данный метод построения оптимальной сетки оказался вполне работоспособным.

## Литература к главе 2

1. Куропатенко В. Ф., Ковеленко Г. В., Кузнецова В. И. и др. Комплекс программ ВОЛНА и неоднородный разностный метод для расчета неустановившихся движений сжимаемых сплошных сред// Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. — 1989. — Вып. 2. — С. 9—29.
2. Жарков В. Н., Калинин В. А. Уравнения состояния твердых тел при высоких давлениях и температурах. — М.: Наука, 1968. — 311 с.
3. Альтшулер Л. В. Применение ударных волн в физике высоких давлений// УФН. — 1965. — Т. 85, вып. 2. — С. 197—257.
4. Кормер С. Б., Урлин С. Б. Об интерполяционных уравнениях состояния металлов для области сверхвысоких давлений// Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 131, № 3. — С. 542—545.
5. Глушак Б. Л., Куропатенко В. Ф., Новиков С. А. Исследование прочности материалов при динамических нагрузках. — Новосибирск.: Наука, Сиб. отд-ние, 1989. — 295 с.
6. Куропатенко В. Ф., Нечай В. З., Сапожников А. Т., Севастьянов В. Е. Уравнение состояния с учетом испарения// Доклад на III Всесоюзном семинаре по моделям механики сплошной среды. — Новосибирск, 1973.
7. Сапожников А. Т., Першина А. В. Интерполяционное уравнение состояния в области испарения// Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математич. физики. — 1984. — Вып. 2(16). — С. 29—34.
8. Чиркин В. С. Теплофизические свойства материалов ядерной техники: Справочник. — М.: Атомиздат, 1968. — 484 с.
9. Compendium of shock wave data/ General Editor M. van Thil. — Livermore, University of California, June, 1966.



10. Сапожников А. Т., Першина А. В. Полуэмпирическое уравнение состояния металлов в широком диапазоне плотностей и температур// Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математич. физики. — 1979. — Вып. 4(6). — С. 47—55.
11. Калиткин Н. Н., Кузьмина Л. В. Таблицы термодинамических функций вещества при высокой концентрации энергии/ ИПМ АН СССР. — М., 1975. (Препринт; № 35.)
12. Альтшулер Л. В., Кормер С. Б., Баканова А. А., Трунин Р. Ф. Уравнения состояния алюминия, меди и свинца для области высоких давлений// ЖЭТФ. — 1960. — Т. 38, вып. 3. — С. 790—798.
13. Кормер С. Б., Фунтиков А. И., Урлин В. Д., Колесникова А. Н. Динамическое сжатие пористых металлов и уравнение состояния с переменной теплоемкостью при высоких температурах// ЖЭТФ. — 1962. — Т. 42, вып. 3. — С. 686—702.
14. Альтшулер Л. В., Баканова А. А., Трунин Р. Ф. Ударные адиабаты и нулевые изотермы семи металлов при высоких давлениях// ЖЭТФ. — 1962. — Т. 42, № 1. — С. 91.
15. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966. — 686 с.
16. Дремин А. Н., Леонтьев А. А., Фортгов В. Е. Оценка параметра критической точки. Теплофизика высоких температур. — 1975. — Т. 13, № 5. — С. 1072—1080.
17. Медведев А. Б. Модель уравнения состояния с учетом испарения, ионизации и плавления// Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. — 1992. — Вып. 1. — С. 12—20.
18. Gschneidner K. A. Physical properties and interrelationships of metallic and semimetallic Elements// Solid State Physics. — 1964. — V. 16 — P. 275—426.
19. Копышев В. П., Хрусталева В. В. Уравнение состояния водорода до 10 Мбар// ПМТФ. — 1980. — № 1. — С. 122—128.
20. Тонков Е. Ю. Фазовые диаграммы элементов при высоком давлении. — М.: Наука, 1979. — 191 с.
21. Радциг А. А., Смирнов Б. М. Параметры атомов и атомных ионов. — М.: Энергоатомиздат, 1986. — 344 с.
22. More С. Е. Ionization Potentials and Ionization Limits Derived from Optical Spectra: NSRDS-NBS. V. 34. — Washington, D.C.: US. Gov't Printing Office, 1970.
23. Бакулин Ю. Д., Куропатенко В. Ф., Лучинский А. Магнитогидродинамический расчет взрывающихся проводников// ЖЭТФ. — 1976. — Т. 46, вып. 9. — С. 1963—1969.
24. Куропатенко В. Ф., Минаева И. С. Уравнение состояния некоторых металлов// Численные методы механики сплошной среды — Новосибирск, 1982. — Т. 13, № 6. — С. 69—74.
25. Сапожников А. Т., Герщук П. Д., Малышкина Е. Л. и др. Широкодиапазонное табличное уравнение состояния ГЛОБУС и его применение для описания меди// Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. — 1991. — Вып. 1. — С. 9—17.
26. Елисеев Г. М., Клинишов Г. Е. Уравнение состояния твердых веществ и его сплайн-аппроксимация/ ИПМ АН СССР. — М., 1982. (Препринт; № 173.)
27. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. — М.: Мир, 1975. — 535 с.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕЛ

---

Проблема количественного описания явления удара представляет собой весьма сложную задачу, и поэтому с ней связано целое научно-техническое направление исследований, интенсивно развивающееся в последнее время. Соударение тел сопровождается разнообразными процессами, возникновение и относительная роль которых зависят от формы и физических характеристик объектов, а также, что более существенно, от относительной скорости соударения. Кроме того, соударение часто сопровождается соответствующим внедрением одного тела в другое. В процессе высокоскоростного удара одно или оба соударяющихся тела могут разрушаться, разлетаться или распыляться, что приводит к диссипации значительной энергии.

Описание процессов соударения строилось, до соответствующего развития вычислительной техники, в основном на уровне инженерных и одномерных подходов. И хотя эти подходы позволили объяснить некоторые качественные и количественные закономерности, детальное исследование механики процессов при высокоскоростном соударении тел можно выполнить только с помощью численных методов в двумерном и трехмерном приближениях. Применение аналитических методов к решению такого класса задач (особенно в пространственном случае) остается необычайно трудной проблемой.

В данной главе приводятся основные уравнения баланса, характерные начальные и граничные условия для динамических задач механики деформируемого твердого тела. Поведение материалов описывается моделью идеальной упругопластической среды Прандтля—Рейсса, которая получила широкое распространение после выхода известной работы М. Уилкинса [1]. Приведена разностная схема и дана ее новая механическая интерпретация. В приложения вынесены алгоритм расчета и структура данных для случаев двух и трех пространственных переменных, позволяющие проводить счет на произвольных разностных сетках, а также симметричный алгоритм расчета контактных границ и две численные модели для описания процессов разрушения среды. С использованием данных моделей разрушения получено численное решение ряда конкретных задач, которые не только являются обоснованием предлагаемого



подхода к исследованию процессов соударения деформируемых тел в диапазоне скоростей до  $2 + 3$  км/с, но и имеют самостоятельное значение.

### 3.1. Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим систему из  $N$  тел в декартовой системе координат. Пусть каждое тело имеет объем  $V_{0i}$ , массу  $m_i$  и скорость  $U_{0i}$ . С точки зрения механики соударение является процессом взаимодействия элементов этой системы в результате наличия у них разных скоростей, причем можно считать, что любое из тел может быть как деформируемым, так и абсолютно жестким. Выберем систему отсчета, связанную с одним из тел, так, чтобы относительно этой системы тело покоилось, и назовем это тело преградой, а все остальные тела, имеющие ненулевую скорость, ударниками. Естественно, что ударники, в силу разных относительных скоростей, могут соударяться между собой, и для каждого из этих случаев одно из тел можно выбрать в качестве преграды.

Будем исходить из лагранжева способа описания среды в предположении отсутствия массовых сил и теплопроводности. Следуя [1], выпишем уравнения законов сохранения, уравнения упругопластической модели Прандтля—Рейсса и соотношения, позволяющие отслеживать процесс разрушения материала.

Уравнения траектории материальных частиц:

$$\dot{x}_i = U_i. \quad (3.1.1)$$

Уравнение неразрывности среды:

$$V_0 \rho_0 = V \rho. \quad (3.1.2)$$

Закон изменения импульса материальной частицы:

$$\rho \dot{U}_i = \sigma_{ij,j}. \quad (3.1.3)$$

Изменение внутренней энергии частицы:

$$\rho \dot{e} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (3.1.4)$$

Тензор скоростей деформаций имеет вид

$$\dot{\epsilon}_{ij} = 0,5(U_{i,j} + U_{j,i}). \quad (3.1.5)$$

Тензор напряжений представим в общепринятой форме

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} P + s_{ij}, \quad (3.1.6)$$



где  $s_{ij}$  — девиатор тензора напряжений, отвечающий за реакцию на сдвиговое формоизменение материальной частицы,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $P(\rho, e)$  — давление как функция текущей плотности и энергии [2]:

$$P = P_x + P_T, \quad e = e_x + e_T, \quad P_x = P_x(\rho), \quad e_x = \int_{V_0}^V P_x dV,$$

$$P_x = K_1(\eta - 1) + K_2(\eta - 1)^2 + K_3(\eta - 1)^3, \quad P_T = \Gamma \rho (e - e_x). \quad (3.1.7)$$

Здесь  $\eta = \rho / \rho_0$ ,  $V = 1 / \eta$ ,  $P_x$ ,  $P_T$  — холодная и тепловая составляющие давления,  $e_x$ ,  $e_T$  — холодная и тепловая составляющие внутренней энергии,  $\Gamma$  — коэффициент Грюнайзена,  $\dot{\epsilon}_{ij}^e$  — компоненты тензора скоростей упругих деформаций. Для рассматриваемых здесь задач в основном использовалось уравнение для давления в виде  $P = P(\rho) = K(\eta - 1)$  без учета тепловой составляющей.

Уравнения процесса принимаем в форме Прандтля—Рейсса

$$\overset{\nabla}{s}_{ij} + d\lambda' s_{ij} = 2\mu \dot{\epsilon}'_{ij}, \quad \dot{\epsilon}'_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij} \delta_{ij} / 3 \quad (3.1.8)$$

при условии пластичности Губера—Мизеса

$$s_{ij} s_{ij} \leq 2Y_0^2 / 3. \quad (3.1.9)$$

Здесь  $Y_0$  — динамический предел текучести, а для определения скалярного множителя  $d\lambda'$  используется известная процедура приведения к кругу текучести [1]. Материальная частица, двигаясь вдоль своей траектории, может вращаться как жесткое целое, что учитывается производной Яумана:

$$\overset{\nabla}{s}_{ij} = \dot{s}_{ij} - \omega_{ik} s_{kj} - \omega_{jk} s_{ki}, \quad \omega_{ij} = 0,5(U_{i,j} - U_{j,i}). \quad (3.1.10)$$

В уравнениях (3.1.1)—(3.1.10) использованы общепринятые обозначения: каждый из индексов  $(i, j, k)$  пробегает значения  $(1, 2, 3)$ ; по повторяющимся индексам проводится суммирование; точка над символом — производная по времени; индекс после запятой — производная по соответствующей координате;  $x_i$ ,  $U_i$  — компоненты векторов положения и скорости материальной частицы;  $\rho$  — текущая плотность,  $K$  — модуль объемного сжатия,  $\mu$  — модуль сдвига.

Каждому телу в декартовой системе координат  $\{x_j\}$  ставится в соответствие счетная область  $D^i(\mathbf{x}, t)$  с границами  $G^i(\mathbf{y}, t)$ , здесь  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  — радиус-вектор материальной частицы, а  $\mathbf{y}$  — точки границы. В общем случае счетные области  $D^i(\mathbf{x}, t)$  изменяются во времени и могут быть многосвязанными.

Начальные условия для  $i$ -го тела при  $t = 0$  в области  $D^i(\mathbf{x}, t)$  часто имеют вид

$$\rho^i(\mathbf{x}, 0) = \rho^{i0}(\mathbf{x}), U_j^i(\mathbf{x}, 0) = U_j^{i0}(\mathbf{x}), s_{ij} = P = e = 0, \quad (3.1.11)$$

где  $\rho^{i0}(\mathbf{x}), U_j^{i0}(\mathbf{x})$  — заданные начальные распределения плотности материала и вектора скорости.

Для формулировки граничных условий введем следующие обозначения:  $\mathbf{n}^i$  — вектор внешней нормали к границе  $G^i(\mathbf{y}, t)$  области  $D^i(\mathbf{x}, t)$ ;  $\mathbf{f}^i(\mathbf{y}, t)$  — вектор внешних поверхностных сил на границе  $G^i(\mathbf{y}, t)$ ;  $\mathbf{w}^i(\mathbf{y}, t)$  — вектор скорости на границе  $G^i(\mathbf{y}, t)$ .

На любой границе области  $G^i(\mathbf{y}, t)$  можно задать следующие условия (см., например, [3]):

$$\text{кинематические} \quad \mathbf{u}^i(\mathbf{y}, t) = \mathbf{w}^i(\mathbf{y}, t); \quad (3.1.12)$$

$$\text{динамические} \quad \sigma_{kl}^i(\mathbf{y}, t)n_l^i = f_k^i(\mathbf{y}, t) \quad (k, l=1, 2, 3), \quad (3.1.13)$$

где  $\sigma_{kl}^i$  — компоненты тензора напряжений на границе области  $G^i(\mathbf{y}, t)$ , которая, как правило, подлежит определению;

смешанные:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^i(\mathbf{y}, t) &= \mathbf{w}^i(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y} \in G^{i\alpha}(\mathbf{y}, t), \\ \sigma_{kl}^i(\mathbf{y}, t)n_l^i &= f_k^i(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y} \in G^{i\beta}(\mathbf{y}, t). \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Здесь

$$G^i(\mathbf{y}, t) = G^{i\alpha}(\mathbf{y}, t) \cup G^{i\beta}(\mathbf{y}, t).$$

Поверхностью контакта двух тел  $G^{ij}(\mathbf{z}, t)$  будем называть множество точек  $\mathbf{z}$ , которые удовлетворяют условию  $G^{ij}(\mathbf{z}, t) = G^i(\mathbf{y}, t) \cap G^j(\mathbf{y}, t)$ .

На границе контакта между телами необходимо выполнить определенные условия согласования векторов скорости  $\mathbf{u}^i(\mathbf{z}, t)$  и  $\mathbf{u}^j(\mathbf{z}, t)$ , компонент тензора напряжений  $\sigma_{kl}^i$  и  $\sigma_{kl}^j$ . Конкретные виды условий на контактных границах будут выписаны ниже. Для упрощения алгоритма расчета движения границ будем использовать вектора внешних поверхностных сил  $\mathbf{f}^i(\mathbf{y}, t)$ . Силы реакции, которые определяются по ходу решения задачи, будем обозначать символами  $\mathbf{R}^i(\mathbf{z}, t)$ .

Пусть в каждой точке  $\mathbf{z}$  контактной поверхности  $G^{ij}(\mathbf{z}, t)$  определена общая нормаль, тогда

$$\mathbf{n}^i = -\mathbf{n}^j.$$

Разложим вектор  $\mathbf{A}(\mathbf{z}, t)$  в точке  $\mathbf{z}$  на нормальную и касательную составляющие

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_t, \quad (3.1.15)$$

которые вычисляются по формулам  $\mathbf{A}_n = (\mathbf{A}, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{A}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{A})$ .

Заменим действие тела  $i$  на тело  $j$  в точке  $\mathbf{z}$  вектором силы реакции  $\mathbf{R}^i(\mathbf{z}, t)$  и соответственно действие тела  $j$  на тело  $i$  вектором силы реакции  $\mathbf{R}^j(\mathbf{z}, t)$ . Тогда  $\mathbf{R}^i(\mathbf{z}, t) = -\mathbf{R}^j(\mathbf{z}, t)$ , и согласно (3.1.15) будем иметь

$$\mathbf{R}^i = \mathbf{N}^i + \mathbf{T}^i,$$

где  $\mathbf{N}^i$  и  $\mathbf{T}^i$  — нормальная и касательная составляющие вектора силы реакции.

Рассмотрим постановку граничных условий на контактной поверхности в некоторых конкретных случаях.

1. Идеальный механический контакт. Материальные частицы, принадлежащие границам взаимодействующих тел, движутся как единое целое, т.е.

$$\mathbf{U}^i(\mathbf{z}, t) = \mathbf{U}^j(\mathbf{z}, t), \quad \mathbf{R}^i(\mathbf{z}, t) = -\mathbf{R}^j(\mathbf{z}, t). \quad (3.1.16)$$

2. Скольжение материалов без трения. В этом случае выполняются условия непроникания и равновесия для нормальных составляющих сил реакции

$$\mathbf{U}_n^i(\mathbf{z}, t) = \mathbf{U}_n^j(\mathbf{z}, t), \quad \mathbf{N}_n^i(\mathbf{z}, t) = -\mathbf{N}_n^j(\mathbf{z}, t), \quad (3.1.17)$$

$$\mathbf{T}^i(\mathbf{z}, t) = \mathbf{T}^j(\mathbf{z}, t) = 0, \quad \mathbf{z} \in G^{ij}(\mathbf{z}, t).$$



Условия (3.1.17) применяются только для сжимающих сил реакции, т.е.  $(N^i, \mathbf{n}^i) < 0$ . При нарушении этого условия на границах  $G^i(\mathbf{y}, t)$  и  $G^j(\mathbf{y}, t)$  ставятся условия свободной от напряжений поверхности.

3. Скольжение материалов при наличии кулоновского трения. Пусть коэффициент трения  $k$ , тогда сила трения определяется выражением

$$\mathbf{T}^i = k|\mathbf{N}^i|\mathbf{q}^i, \quad \mathbf{q}^i = -\frac{\mathbf{U}_t^i - \mathbf{U}_t^j}{|\mathbf{U}_t^i - \mathbf{U}_t^j|} \text{ при условии } (N^i, \mathbf{n}^i) < 0, \quad (3.1.18)$$

где  $\mathbf{q}^i$  — единичный вектор на касательной плоскости к поверхности контакта, направленный против вектора относительной скорости. Граничные условия имеют вид

$$\mathbf{U}_n^i(\mathbf{z}, t) = \mathbf{U}_n^j(\mathbf{z}, t), \quad \mathbf{R}^i(\mathbf{z}, t) = -\mathbf{R}^j(\mathbf{z}, t). \quad (3.1.19)$$

Касательные составляющие скорости вычисляются по касательным составляющим силы реакции  $\mathbf{T}^i(\mathbf{z}, t)$ , предварительные значения  $\mathbf{T}^{i*}(\mathbf{z}, t)$  которых находятся из второго соотношения (3.1.16). Если величина  $|\mathbf{T}^{i*}(\mathbf{z}, t)|$  меньше  $k|\mathbf{N}^i(\mathbf{z}, t)|$ , то  $\mathbf{T}^i(\mathbf{z}, t) = k|\mathbf{N}^i(\mathbf{z}, t)|$ . В противном случае внутренние силы не могут преодолеть силы трения и скольжение границ отсутствует, тогда условия скольжения (3.1.19) заменяются на условия идеального контакта (3.1.16).

Поскольку реальные материалы обладают конечной прочностью, то система уравнений (3.3.1)—(3.3.10) дополняется критериями разрушения, в качестве которых выбраны предельные значения следующих величин:

- а) максимальное растягивающее напряжение  $|\sigma_1| < \sigma_*$ ;
- б) максимальная растягивающая деформация  $|\varepsilon_1| < \varepsilon_*$ ;
- в) максимальная сдвиговая деформация  $\Gamma_1 = |\varepsilon_1 - \varepsilon_3|/2 < \Gamma_*$ ;
- г) максимальное касательное напряжение  $|\sigma_1 - \sigma_3|/2$ ;
- д) предельная внутренняя энергия  $e < e_*$ ;
- е) предельная пластическая деформация сдвига

$$\varepsilon^p = \int \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} dt < \varepsilon_*^p, \quad (3.1.20)$$

где  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  — пластическая составляющая компонент тензора скоростей деформаций,  $\varepsilon^p$  — интенсивность сдвиговых пластических деформаций. Кроме этих

критериев в области  $\rho < \rho_0$  вводится параметр разрыхления  $\chi = (1 - \rho/\rho_0) > \chi_*$ .

Если в некотором элементарном объеме выполнен хотя бы один из критериев (3.1.20), то полагается, что среда повреждена, т.е. изменились ее прочностные свойства. В частности, для описания такой среды используется модель жидкости, которая сопротивляется объемному сжатию и не сопротивляется сдвигу и растяжению. Если в результате дальнейшего деформирования плотность среды станет меньше предельной, т.е.  $\chi > \chi_*$ , то будем считать, что материал в этом объеме разрушился (фрагментировался) и будем заменять его дискретными (одной или несколькими) частицами, имеющими размер, массу и импульс.

Постановка задачи: в любой момент времени  $t > 0$  найти функции  $\mathbf{x}(t)$ ,  $U(\mathbf{x}, t)$ ,  $\rho(\mathbf{x}, t)$ ,  $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$  и  $e(\mathbf{x}, t)$ , удовлетворяющие в областях  $D^i(\mathbf{x}, t)$  уравнениям (3.1.1)—(3.1.10), начальным данным типа (3.1.11) и согласованным граничным условиям (3.1.12)—(3.1.14) на границах  $G^i(\mathbf{y}, t)$ .

Постановка конкретных задач взаимодействия твердых тел, разностная схема и методы моделирования процессов разрушения приведены ниже.

### 3.2. Разностная схема и ее физическая интерпретация

При численном решении системы (3.1.1)—(3.1.10) вычислительный процесс организуется следующим образом. Области  $D^i(\mathbf{x}, 0)$  ставится в соответствие счетная область, в которой задается конечное множество точек-узлов. Счетная область покрывается ячейками сетки (многоугольниками или многогранниками), не налегающими друг на друга и заполняющими счетную область без зазоров. Вершины ячеек являются узлами сетки. Частным случаем для двух пространственных переменных являются сетки с треугольными ячейками, четырехугольными ячейками или ячейками Дирихле. В пространственном случае используются сетки с ячейками в виде тетраэдров или шестигранников.

Компоненты векторов скорости и координат определяются в узлах сетки, а плотность, внутренняя энергия, компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций считаются постоянными по ячейке и относятся к геометрическим центрам ячеек.

Конечно-разностные схемы могут быть получены либо на основе пред-



ставления частных производных по пространственным переменным контурными интегралами и применения теоремы о среднем, либо на основе вариационных подходов, или метода конечных элементов. Производные по времени аппроксимируются, как в схеме “крест”.

Расчет осуществляется путем перехода от известного состояния задачи на момент времени  $t^n$  к состоянию на момент времени  $t^{n+1}$  и повторяется до тех пор, пока не будет получена полная картина движения на заданном интервале по времени.

Обратим внимание на следующий, важный на наш взгляд, момент. Часто в расчетах авторы выбирают разностные сетки с ячейками одного типа, например, только треугольные или только четырехугольные. Вызвано это в первую очередь тем, что число ячеек, окружающих внутренние узлы, может быть выбрано в таком случае постоянным (шаблон для вычисления скоростей узлов). Для граничных узлов указанный шаблон всегда переменный.

Для построения разностной схемы необходимо аппроксимировать частные производные по пространственным переменным. Из формулы Остроградского—Гаусса имеем

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \phi(\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}) ds, \quad (3.2.1)$$

где  $\phi$  — скалярная функция в объеме  $V$ ;  $x_i$  — декартова координата;  $V$  и  $S$  — некоторый объем и ограничивающая его кусочно-гладкая поверхность;  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{i}$  — вектор внешней нормали к поверхности  $S$  и единичный вектор вдоль оси  $x_i$  соответственно;  $ds$  — элемент поверхности  $S$ ;  $\cdot$  — знак скалярного умножения.

Дальнейшее изложение проведем для трехмерного случая, выделив отдельно только вариант осевой симметрии, где ось  $x$  направлена вдоль оси симметрии, а ось  $y$  — вдоль радиуса.

Рассмотрим ячейку разностной сетки (рис. 3.1, а) с  $L$  вершинами. Площадь ячейки определяется по формуле

$$A = 0,5 \sum_{l=1}^L (x_{l+1} - x_l)(y_{l+1} - y_l).$$

Обход контура осуществляется по узлам в направлении против часовой стрелки и полагается  $x_{L+1} = x_1$ ,  $y_{L+1} = y_1$ . Объем ячейки в плоском случае



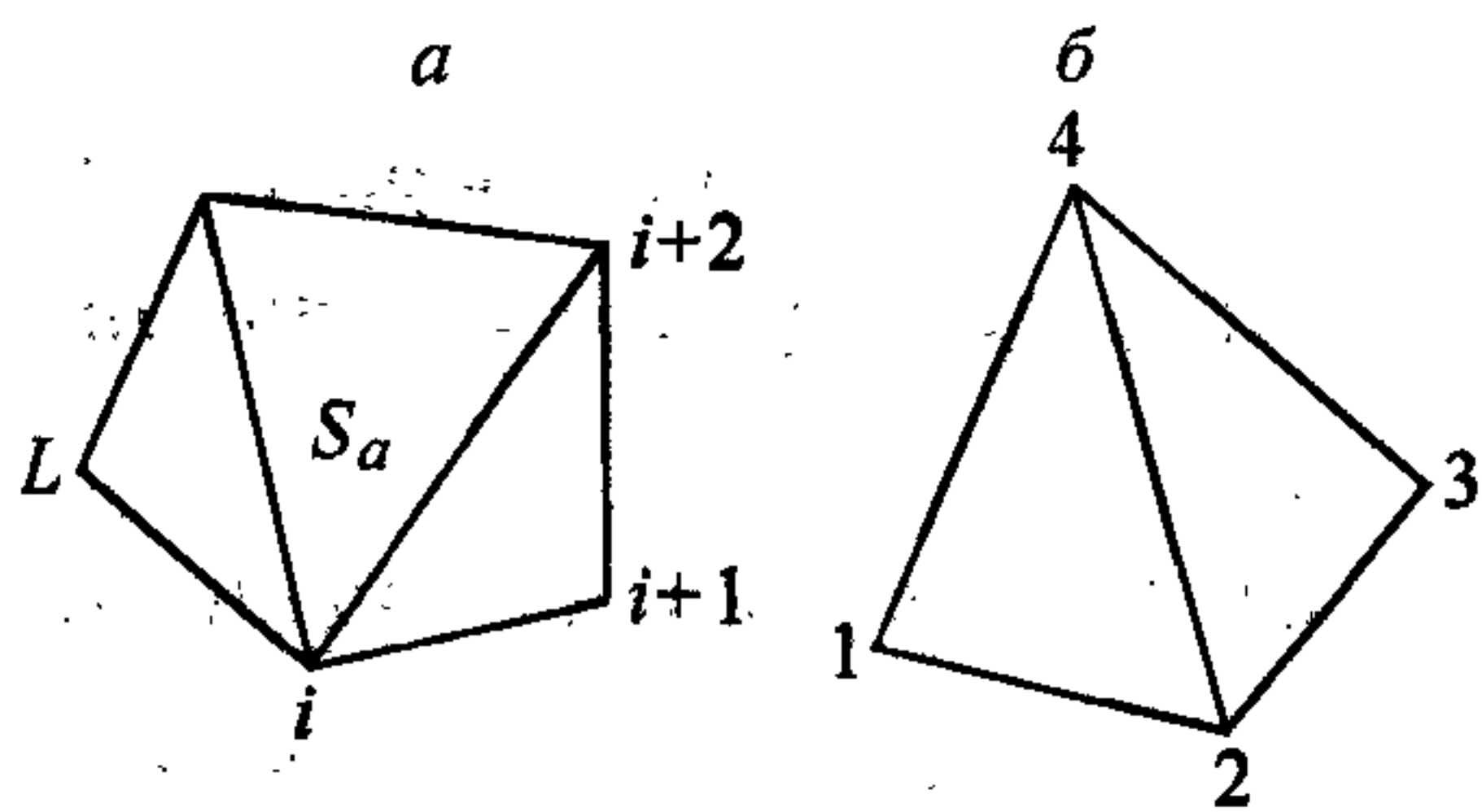


Рис. 3.1. Ячейки 2D и 3D разностных сеток.

$l=4$  — локальные номера узлов тетраэдра. Ост. поясн. см. в тексте.

$V = A$ , а в осесимметричном —  $V = \sum S_a \bar{y}_a$ , здесь  $S_a$  — площадь треугольников, на которые разбивается ячейка,  $\bar{y}_a$  — радиальная координата геометрического центра треугольника  $S_a$ . В трехмерном случае ячейка — тетраэдр (рис. 3.1, б) и ее объем равен

$$V = \frac{1}{6} (\mathbf{r}_{21} \times \mathbf{r}_{31}) \cdot \mathbf{r}_{41},$$

где знаки  $\times$  и  $\cdot$  означают векторное и скалярное произведения.

Так как используется лагранжев подход, то уравнение неразрывности имеет простой вид (3.1.1). Масса ячейки определяется в начальный момент времени и используется в дальнейшем для нахождения текущей плотности из соотношения

$$m = \rho^0 V^0 = \rho^n V^n = \text{const},$$

здесь  $V^n$ ,  $\rho^n$  — текущие объем и плотность ячейки.

В двумерном случае, используя соотношение (3.2.1), для ячейки получим

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{(-1)^{j-1} \sum_{l=1}^L (U_{i,l+1} + U_{i,l})(x_{j,l+1} - x_{j,l})}{\sum_{l=1}^L (x_{i,l+1} + x_{i,l})(x_{j,l+1} - x_{j,l})}, \quad (3.2.2)$$

где индексы  $i, j$  принимают значения 1 и 2, а индекс  $l$  введен выше и означает номер узла.

В трехмерном случае (3.2.2) принимает вид

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{1}{6V} [(U_{i,1} + U_{i,2} + U_{i,3})S_{j,123} + (U_{i,1} + U_{i,2} + U_{i,4})S_{j,124} + (U_{i,1} + U_{i,3} + U_{i,4})S_{j,134} + (U_{i,2} + U_{i,3} + U_{i,4})S_{j,234}], \quad (3.2.3)$$

где  $S_{j,\zeta\zeta\zeta} = (\mathbf{r}_{\zeta\zeta} \times \mathbf{r}_{\zeta\zeta}) \cdot \mathbf{j} / 2$  — проекция площади соответствующей грани тетраэдра на единичный вектор  $\mathbf{j}$  оси  $x_j$ .

Компоненты тензора скоростей деформаций определяются по формулам

(3.1.5). Окружная компонента в случае осевой симметрии имеет вид

$$\dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{\Delta V}{V\tau} - \dot{\epsilon}_{xx} - \dot{\epsilon}_{yy},$$

где  $\tau$  — шаг по времени [1].

Девiator тензора напряжений находится из следующих разностных соотношений:

$$s_{ij}^* = s_{ij}^n + 2\mu\Delta\dot{\epsilon}'_{ij} + \Delta\omega_{ik}s_{kj}^n + \Delta\omega_{jk}s_{ki}^n, \quad (3.2.4)$$

$$s_{ij}^{n+1} = s_{ij}^*, \text{ если } s_{ij}^*s_{ij}^* \leq 2Y_0^2/3, \text{ и } s_{ij}^{n+1} = \frac{s_{ij}^*Y_0\sqrt{2/3}}{\sqrt{s_{ij}^*s_{ij}^*}}, \text{ если } s_{ij}^*s_{ij}^* > 2Y_0^2/3.$$

Здесь  $\Delta\dot{\epsilon}'_{ij} = \dot{\epsilon}'_{ij}\tau$ ,  $\dot{\epsilon}'_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}\delta_{ij}/3$ ,  $\Delta\omega_{ij} = \omega_{ij}\tau$ .

Давление и удельная внутренняя энергия вычисляются как

$$P^{n+1} = A(\rho^{n+1}) + B(\rho^{n+1})e^{n+1},$$

$$e^{n+1} = \frac{e^n - \left\{ \frac{1}{2} [A(\rho^{n+1}) + P^n] + q^{n+1} \right\} (V^{n+1} - V^n) + \Delta z}{1 + \frac{1}{2} B(\rho^{n+1}) (V^{n+1} - V^n)}, \quad (3.2.5)$$

где  $\Delta z = V^{n+1} (s_{ij}\Delta\dot{\epsilon}'_{ij})^{n+1}$ ,  $V^{n+1} = \rho^0/\rho^{n+1}$ , а  $q^{n+1}$  — искусственная вязкость, которая вычисляется через изменение удельного объема и часто представляется в виде суммы квадратичной и линейной [1].

Рассмотрим разностное уравнение баланса импульса в случае аксиальной симметрии. Фрагмент разностной сетки приведен на рис. 3.2. Выберем замкнутый контур  $L$ , ограничивающий площадь  $S$ , составленный из отрезков, соединяющих геометрические центры ячеек с серединами сторон, содержащих узел  $i$  сетки.

Уравнения движения в интегральной форме записываются в виде

$$\dot{U} \iint_S \rho ds = \oint_L (\sigma_{xx} dy - \sigma_{xy} dx) + \iint_S \frac{\sigma_{xy}}{y} ds, \quad (3.2.6)$$

$$\dot{w} \iint_S \rho ds = \oint_L (\sigma_{xy} dy - \sigma_{yy} dx) + \iint_S \frac{(\sigma_{yy} - \sigma_{\theta\theta})}{y} ds. \quad (3.2.7)$$

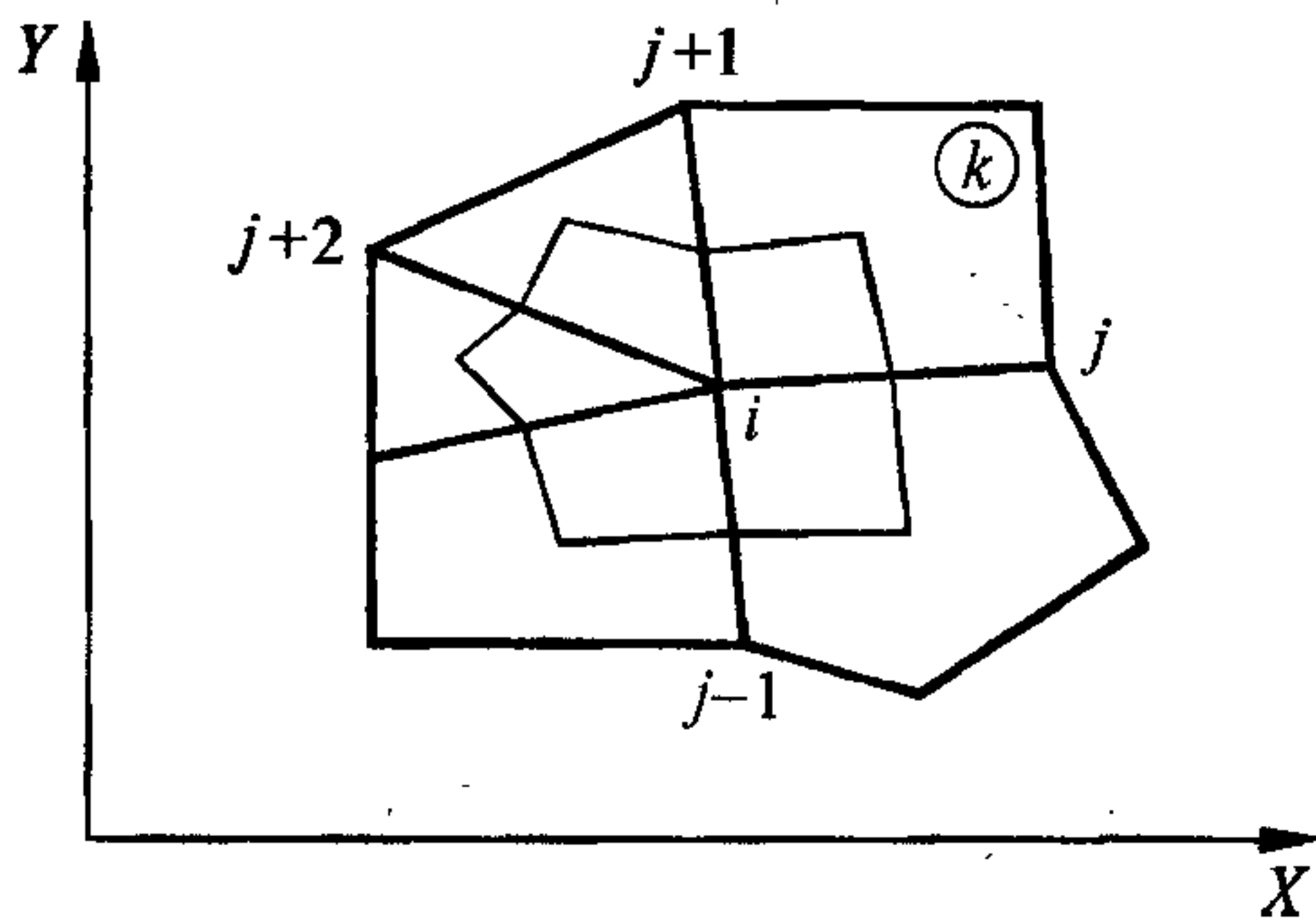


Рис. 3.2. Контур интегрирования.

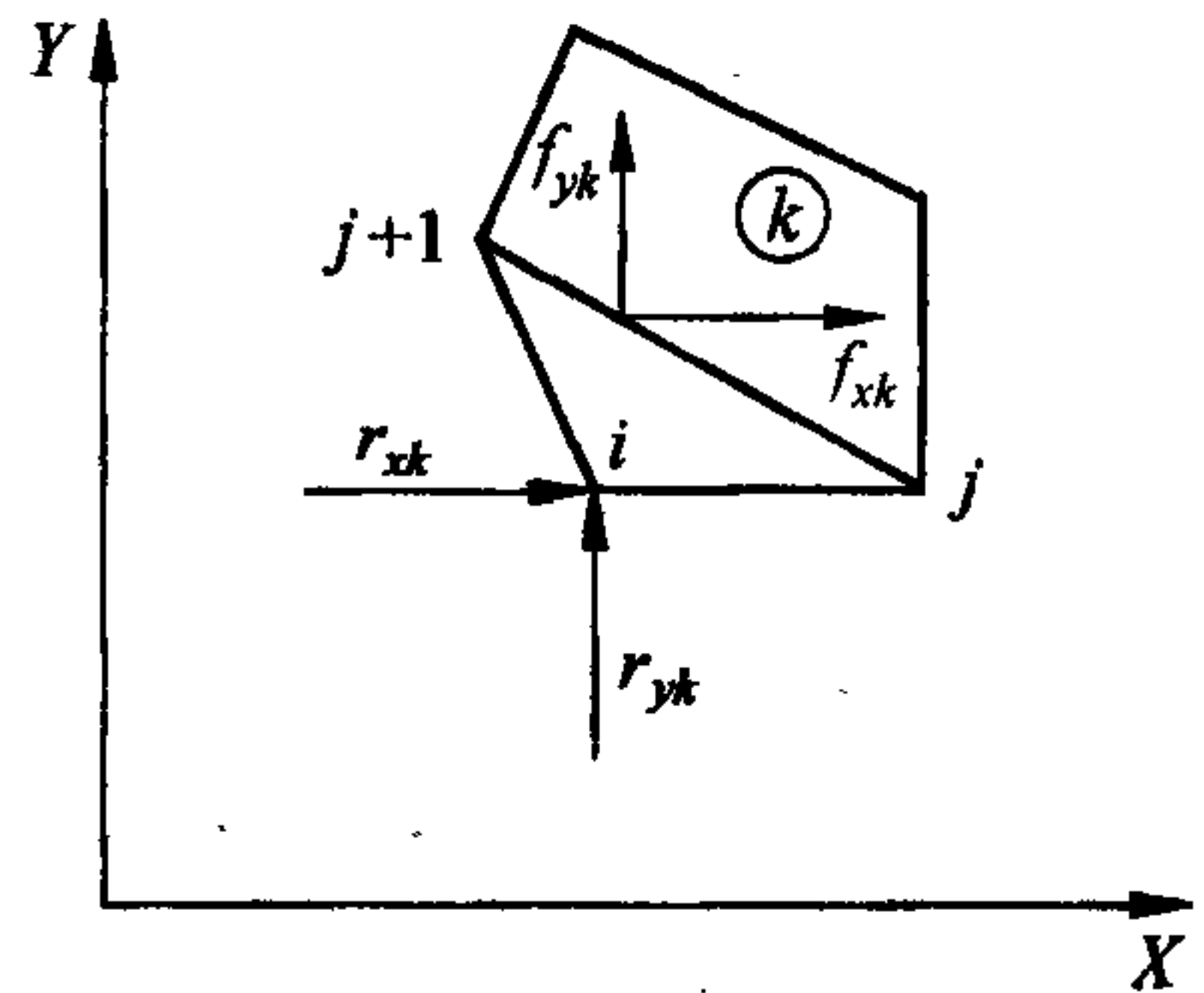


Рис. 3.3. Разложение узловых сил на внутренние  $f$  и внешние  $r$ .

Полагая, что компоненты тензора напряжений постоянны в пределах ячейки, имеем

$$\begin{aligned} \dot{U}_i &= \sum_k \left[ \sigma_{xx} (y_{j+1} - y_j) - \sigma_{xy} (x_{j+1} - x_j) + \beta_{xi} \right] / 2\varphi_i, \\ \dot{w}_i &= \sum_k \left[ \sigma_{xy} (y_{j+1} - y_j) - \sigma_{yy} (x_{j+1} - x_j) + \beta_{yi} \right] / 2\varphi_i. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Суммирование проводится по всем ячейкам, содержащим узел  $i$ , а величины

$$\varphi_i = \sum_k \frac{m_k}{L_k}, \quad \beta_{xi} = 2 \sum_k \sigma_{xy} \frac{A_k}{\bar{y}_k L_k}, \quad \beta_{yi} = 2 \sum_k (\sigma_{yy} - \sigma_{\theta\theta}) \frac{A_k}{\bar{y}_k L_k}, \quad (3.2.9)$$

где  $m_k, A_k$  — масса и площадь  $k$ -й ячейки,  $L_k$  — число узлов, образующих ячейку  $k$ ,  $\bar{y}_k$  — радиальная координата центра ячейки.

Координаты узлов с индексами  $j+1$  и  $j$  выбираются так, как показано на рис. 3.2. Заметим, что слагаемые  $\beta_{xi}$  и  $\beta_{yi}$  вводятся только в осесимметричном случае и, в отличие от [1], для однородности вычислений их следует выбирать в виде (3.2.9).

Таким образом, конечно-разностные уравнения (3.2.8) с учетом (3.2.9) совпадают с разностными уравнениями на сетках с четырехугольными ячейками [1] и на сетках с треугольными ячейками и являются обобщением на случай разностных сеток с произвольными ячейками.

Рассмотрим случай, когда счетная область состоит из одной ячейки, и обозначим один узел вершины  $i$ , а два ближайших к нему узла —  $j$  и  $j+1$  соответственно (рис. 3.3). Введем обозначения



$$d_i = \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}, \quad \cos\alpha_i = (y_{j+1} - y_j)/d_i, \\ \sin\alpha_i = (x_{j+1} - x_j)/d_i, \quad (3.2.10)$$

$$f_{xi} = \sigma_{xx} \cos\alpha_i - \sigma_{xy} \sin\alpha_i, \quad f_{yi} = \sigma_{xy} \cos\alpha_i - \sigma_{yy} \sin\alpha_i.$$

Подставляя выражения (3.2.10) в уравнения (3.2.8), получим

$$\dot{U}_i = (F_{xi} + R_{xi})/2\varphi_i = (f_{xi}d_i + \beta_{xi} + R_{xi})/2\varphi_i, \\ \dot{w}_i = (F_{yi} + R_{yi})/2\varphi_i = (f_{yi}d_i + \beta_{yi} + R_{yi})/2\varphi_i, \quad (3.2.11)$$

где  $F_{xi}, F_{yi}$  — компоненты вектора сил, действующих на узел  $i$  ячейки за счет внутренних напряжений, а  $R_{xi}, R_{yi}$  — компоненты вектора внешних сил, задаются граничными условиями (3.1.13). Масса узла  $i$  определяется из (3.2.9), а  $\beta_{xi}, \beta_{yi}$  в осесимметричном случае включаются в компоненты  $F_{xi}, F_{yi}$ .

Вернемся к уравнениям (3.2.8), записанным для внутренних узлов. С учетом (3.2.11) имеем

$$\dot{U}_i = \left( \sum_k F_{xik} + \sum_k R_{xik} \right) / 2\varphi_i, \quad \dot{w}_i = \left( \sum_k F_{yik} + \sum_k R_{yik} \right) / 2\varphi_i. \quad (3.2.12)$$

Здесь индекс  $i$  обозначает номер узла, а индекс  $k$  — номера ячеек, содержащих этот узел. Суммирование ведется по всем ячейкам, содержащим узел  $i$ . Компоненты вектора  $\mathbf{R}$  для ячеек, окружающих внутренний узел, являются силами реакций, заменяющих действие сил со стороны других ячеек на узел данной ячейки.

Таким образом, введение вектора  $\mathbf{R}$  позволяет единым образом записать разностные уравнения для внутренних и граничных узлов разностной сетки, причем для внутренних узлов всегда выполняются условия  $\sum_k R_{xik} = 0,$

$\sum_k R_{yik} = 0$ . Для граничных узлов компоненты вектора  $\mathbf{R}$  вычисляются через

плотности внешних сил, заданных граничными условиями:

$$\sum_k R_{xik} = \psi_{xi} ds_i, \quad \sum_k R_{yik} = \psi_{yi} ds_i, \quad (3.2.13)$$

где  $\psi_x, \psi_y$  определяются по (3.1.13),  $ds_i$  — длина контура интегрирования

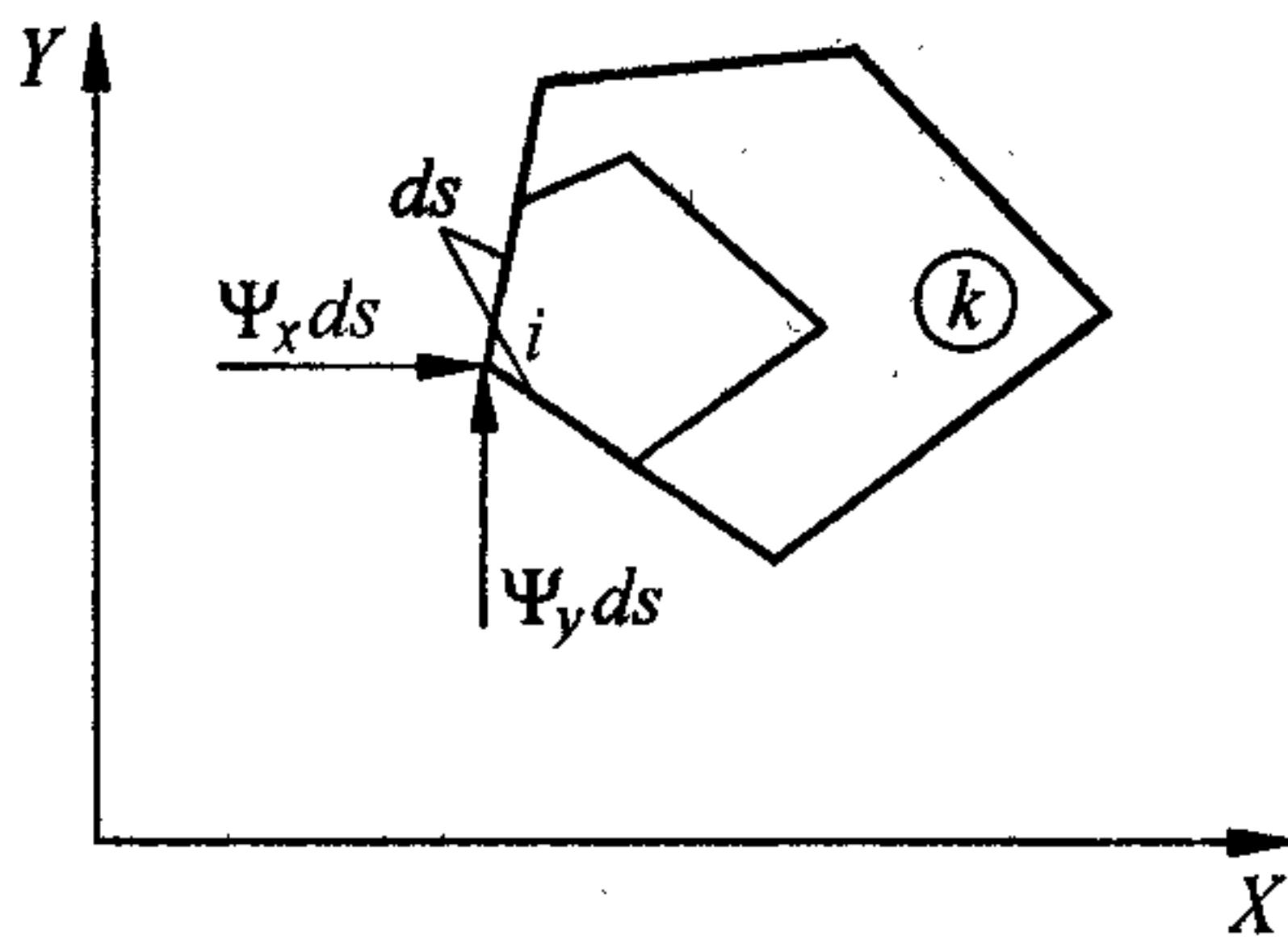


Рис. 3.4. Интегрирование плотности граничных сил.

вдоль границы счетной области для данного граничного узла (рис. 3.4).

Необходимо заметить, что при выводе разностных уравнений (3.2.12) форма ячеек (т.е. число узлов, образующих ячейку) используется только при определении масс, приписываемых узлам, и косвенно при выборе контура для вычисления скоростей узлов, так как от ее вида зависит число ячеек, окружающих узел сетки. Из этого сле-

дует, что в одной счетной области могут присутствовать ячейки разных типов.

В пространственном случае соотношения для компонент вектора скорости (3.2.8) принимают вид

$$\dot{U}_{ij} = \left( \sum_k F_{ijk} + \sum_k R_{ijk} \right) / 2\varphi_i, \quad \varphi_i = \sum_k \varphi_{ik}, \quad \varphi_{ik} = m_k / 4, \quad (3.2.14)$$

где индекс  $j$  пробегает значения 1, 2, 3, а индекс  $k$  означает суммирование по всем ячейкам, содержащим узел  $i$ . Структура внутренней силы  $F_{ijk}$  для узла  $i$  тетраэдральной ячейки достаточно проста и определяется по формуле

$$F_{ijk} = S_{ik} \left( \sum_{l=1}^3 \sigma_{jl} n_l \right)_k = S_{ik} f_{ijk}, \quad (3.2.15)$$

где  $i$  — номер узла,  $S_{ik}$  — площадь противоположной грани тетраэдра. При вычислении компонент силы  $F_{ijk}$  необходимо учитывать, что нормаль к граням тетраэдра всегда внешняя.

Пусть  $k$  ячеек содержат общий узел  $i$ . Полагая, что силы реакции отсутствуют, найдем предварительные значения вектора скорости узла  $i$  для каждой ячейки  $k$  независимо:

$$U_{ik}^* = U_{ik}^n + F_{ik}^n \tau / (2\varphi_{ik}). \quad (3.2.16)$$

Тогда истинное значение вектора скорости для узла  $i$  ячейки  $k$  на следующем временном слое  $U_{ik}^{n+1}$  запишется в виде  $U_{ik}^{n+1} = U_{ik}^* + R_{ik}^n \tau / (2\varphi_{ik})$ . Из условия сплошности среды следует, что все узлы движутся с одной скоростью  $U_i^{n+1}$ , которую найдем из уравнения баланса импульса

$$2 \sum_k U_{ik}^{n+1} \varphi_{ik} = 2 \sum_k U_{ik}^* \varphi_{ik} + \tau \sum_k R_{ik},$$

отсюда

$$U_i^{n+1} = \frac{\sum_k U_{ik}^* \varphi_{ik}}{\sum_k \varphi_{ik}}. \quad (3.2.17)$$

Формулы (3.2.17) имеют простой механический смысл. Вектор истинной скорости  $U_i^{n+1}$  любого внутреннего узла на  $(n+1)$ -м шаге определяется через предварительные значения скоростей узлов  $i$  отдельных ячеек  $k$ , окружающих этот узел, исходя из условия сплошности среды и закона абсолютно неупругого соударения узлов ячеек как материальных частиц среды.

Таким образом, предложена новая механическая трактовка явной разностной схемы, позволяющая с единых позиций описывать движение как внутренних, так и граничных узлов на сетках, содержащих различные по форме ячейки.

### 3.3. Моделирование процессов проникновения ударников в массивные мишени

Задача о проникании стержня в преграду имеет относительно простые решения в некоторых асимптотических случаях, например, внедрение заостренного недеформируемого ударника в массивную преграду. Данная задача нашла как экспериментальное [4, 5], так и численное [6, 7] решение. Другим асимптотическим случаем является высокоскоростное проникание длинного деформируемого стержня в массивную мишень. Для описания процесса образования каверны в этом случае была применена модель идеальной несжимаемой жидкости [8, 9].

Глубина проникновения  $h$  тонкой струи в полубесконечную преграду в первом приближении оценивается по формуле

$$h = L \sqrt{\rho_p / \rho_t}, \quad (3.3.1)$$

где  $L$  — длина струи,  $\rho_p$  — ее плотность,  $\rho_t$  — плотность преграды. В данной модели не учитывается целый комплекс параметров как геометрического, так и



физико-механического плана, поэтому результаты экспериментов при скоростях столкновения тел до 3 км/с показывают меньшие значения глубины пробития  $h$ , а также наличие в каверне неразрушенных частей ударника. Аналитические исследования показали, что необходимо учитывать как прочностные свойства, так и геометрические факторы даже при таких высоких давлениях [10—12].

Приближенные аналитические модели концентрируют свое внимание на основном из механизмов, вводят упрощающие допущения, которые облегчают решение уравнений сплошной среды, сводя их к алгебраическим или обыкновенным дифференциальным уравнениям. Более того, почти все эти модели требуют введения эмпирических констант.

Чтобы решить задачу о соударении деформируемых тел в полном объеме, приходится прибегать к численному решению системы уравнений механики сплошной среды. Численное решение задач о высокоскоростном проникании длинных стержней в полубесконечные мишени было получено как на эйлеровых [13—15], так и лагранжевых [16—18] сетках; как с помощью конечных разностей [16], так и конечных элементов [17, 18]. Методы на основе лагранжева подхода используют либо перестройку разностной сетки [16—18], либо механизм эрозии материала [19—22], причем применяются точечные частицы. Ниже решение задачи о внедрении длинных стержней в массивные мишени получено с помощью лагранжевых сеток и дискретных частиц конечного размера, которые моделируют движение фрагментов разрушенного материала [23].

### **3.3.1. Проникновение недеформируемого ударника в толстые упругопластические преграды**

Рассмотрим задачу об ударе цилиндрического ударника с конической головной частью по преграде — толстой круглой пластине по нормали. Процесс проникания таких ударников сопровождается большими деформациями материала преграды за счет его вытеснения. Эти деформации имеют необратимый характер и связаны с пластическими свойствами среды.

Торможение ударника происходит под действием силы сопротивления со стороны материала преграды, интенсивность которой зависит от многих факторов. К ним относятся: геометрия головной части, масса ударника, его проч-

ностные характеристики, толщина преграды, ее плотность и динамический предел текучести материала. Влияние каждого из этих факторов будет исследовано ниже.

Решение задачи о проникании ударника с конической головной частью в деформируемую преграду продемонстрируем на конкретном примере, поскольку для него имеется экспериментально полученная зависимость глубины проникания ударника от времени [5]. Будем считать ударник жестким. Параметры ударника: масса  $m = 11$  г, радиус  $R_0 = 0,4$  см, угол при вершине конической части  $2\alpha = 60^\circ$ . Параметры преграды: толщина  $H = 4,5$  см, радиус  $R = 2,25$  см. Преграда изготовлена из технически чистого железа с физико-механическими свойствами: плотность  $\rho = 7,85$  г/см<sup>3</sup>, коэффициент объемного сжатия  $K = 1,7$  Мбар, модуль сдвига  $\mu = 0,8$  Мбар, динамический предел текучести  $Y_0 = 0,0072$  Мбар. Начальная скорость ударника  $V_0 = 840$  м/с [4].

Положение ударника в преграде на момент окончания счета, когда скорость ударника стала равной нулю, показано на рис. 3.5. Деформации разностной сетки приведены лишь вблизи ударника, так как именно в этой части области они существенны. В расчете использовалась локальная перестройка разностной сетки, поэтому часть ячеек, прилегающих к оси симметрии и поверхности ударника, удалена из счета с передачей массы, импульса и энергии соседним ячейкам (см. приложение Б).

Отметим особенности формы кратера. На поверхности преграды образуются наплывы, возникающие за счет выдавливания материала преграды из лицевых слоев. Диаметр кратера уменьшается с глубиной  $h$  и при некоторой глубине  $h = h_{cr}$  его диаметр становится равным диаметру ударника. Скорость

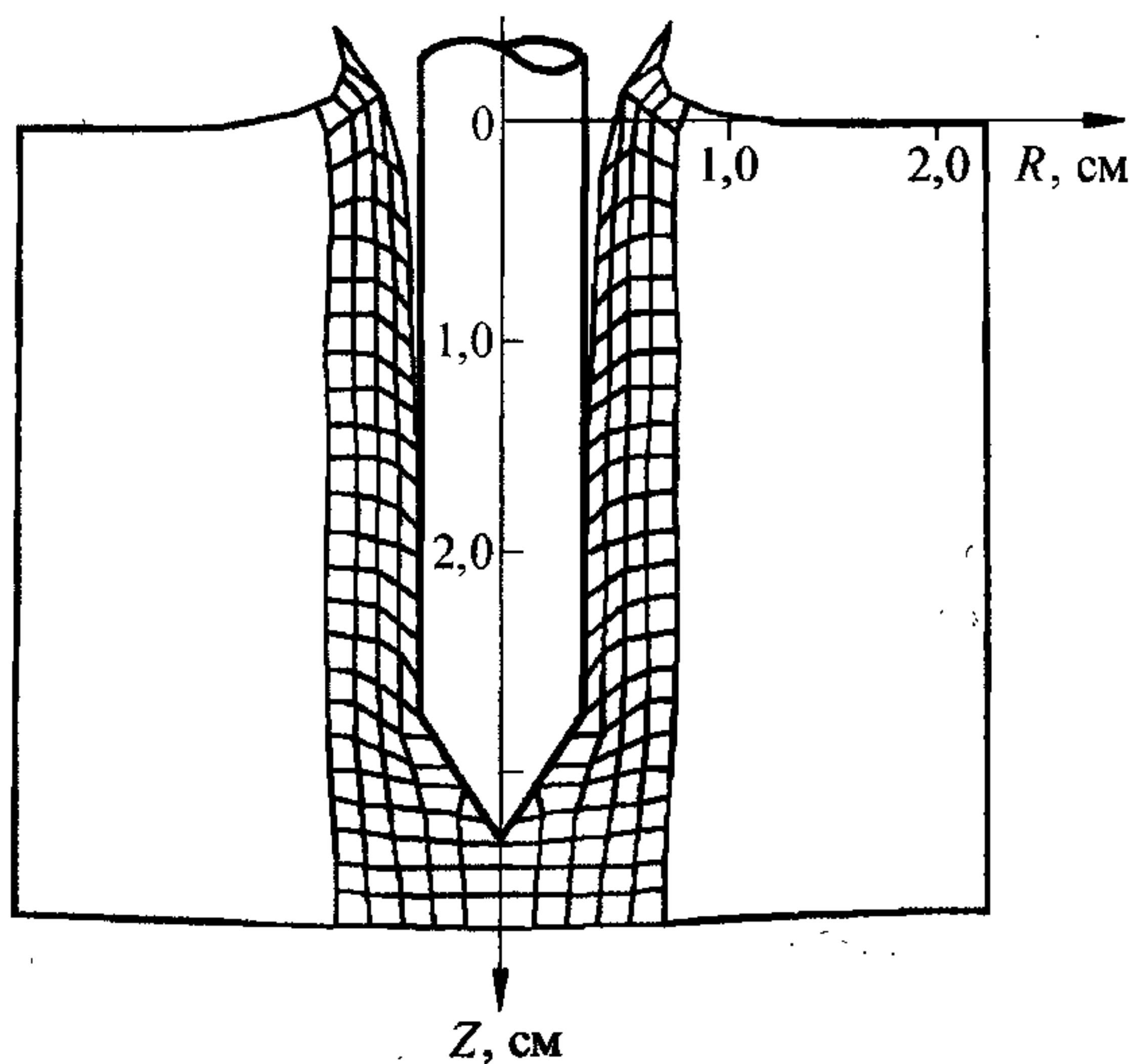


Рис. 3.5. Проникание жесткого ударника в толстую преграду.



ударника  $V_{cr}$  на глубине  $h_{cr}$ , следуя [4], будем называть критической.

Явление увеличения диаметра кратера по сравнению с диаметром цилиндрической части ударника обусловлено превышением радиальной составляющей кинетической энергии над работой, необходимой для преодоления прочностных сил. Набор радиальной скорости частицами среды происходит при движении вдоль конической головной части ударника. При скорости внедрения ударника  $V > V_{cr}$  запасенной радиальной составляющей кинетической энергии достаточно для преодоления прочностных сил при сходе с конической части ударника, что и приводит к увеличению диаметра кратера. С уменьшением скорости внедрения ударника запасенная радиальная составляющая кинетической энергии также уменьшается, и при достижении скорости внедрения критического значения  $V_{cr}$  диаметры кратера и ударника сравниваются. При уменьшении угла раствора конусной части ударника величина критической скорости увеличивается.

Заметим, что для ударника с оживальной головной частью эффект увеличения диаметра кратера отсутствует, кроме лицевых слоев преграды, где сказывается существенное влияние свободной поверхности.

Одним из основных параметров, характеризующих стойкость материала преграды, является динамический предел текучести. С увеличением предела текучести величина критической скорости повышается, так как для преодоления прочностных свойств материала необходима большая энергия, а значит, и большая скорость внедрения ударника.

Рассмотрим динамику процесса проникания ударника. В качестве характерных параметров выберем величину силы сопротивления  $F$ , действующей на ударник со стороны преграды и среднее по площади контакта значение силы  $F_p$ . Формулы для определения этих величин имеют вид

$$F(t) = \int_{R_1}^{R_2} r (\sigma_{rr} \sin^2 \alpha + \sigma_{zz} \cos^2 \alpha + \sigma_{rz} \sin \alpha \cos \alpha) dr, \quad F_p(t) = F(t) / \int_{R_1}^{R_2} r dr.$$

Здесь  $R_1(t)$  и  $R_2(t)$  — радиусы, определяющие границы поверхности контакта между ударником и преградой;  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $2\alpha$  — угол раствора конуса головной части ударника. Зависимости величин  $F$  и  $F_p$  от времени приведены на рис. 3.6 и 3.7.



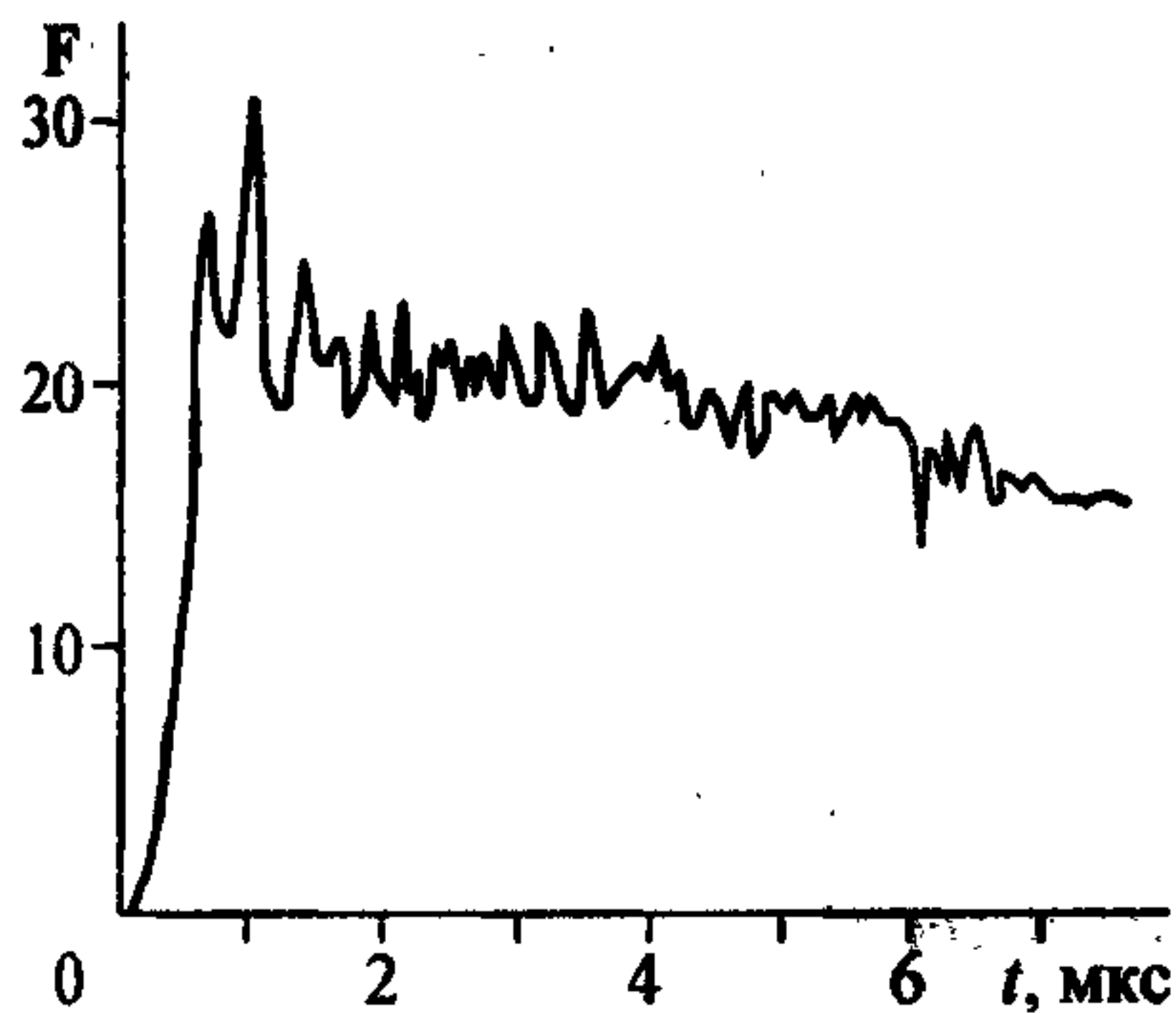


Рис. 3.6. Зависимость силы сопротивления от времени при проникании жесткого ударника.

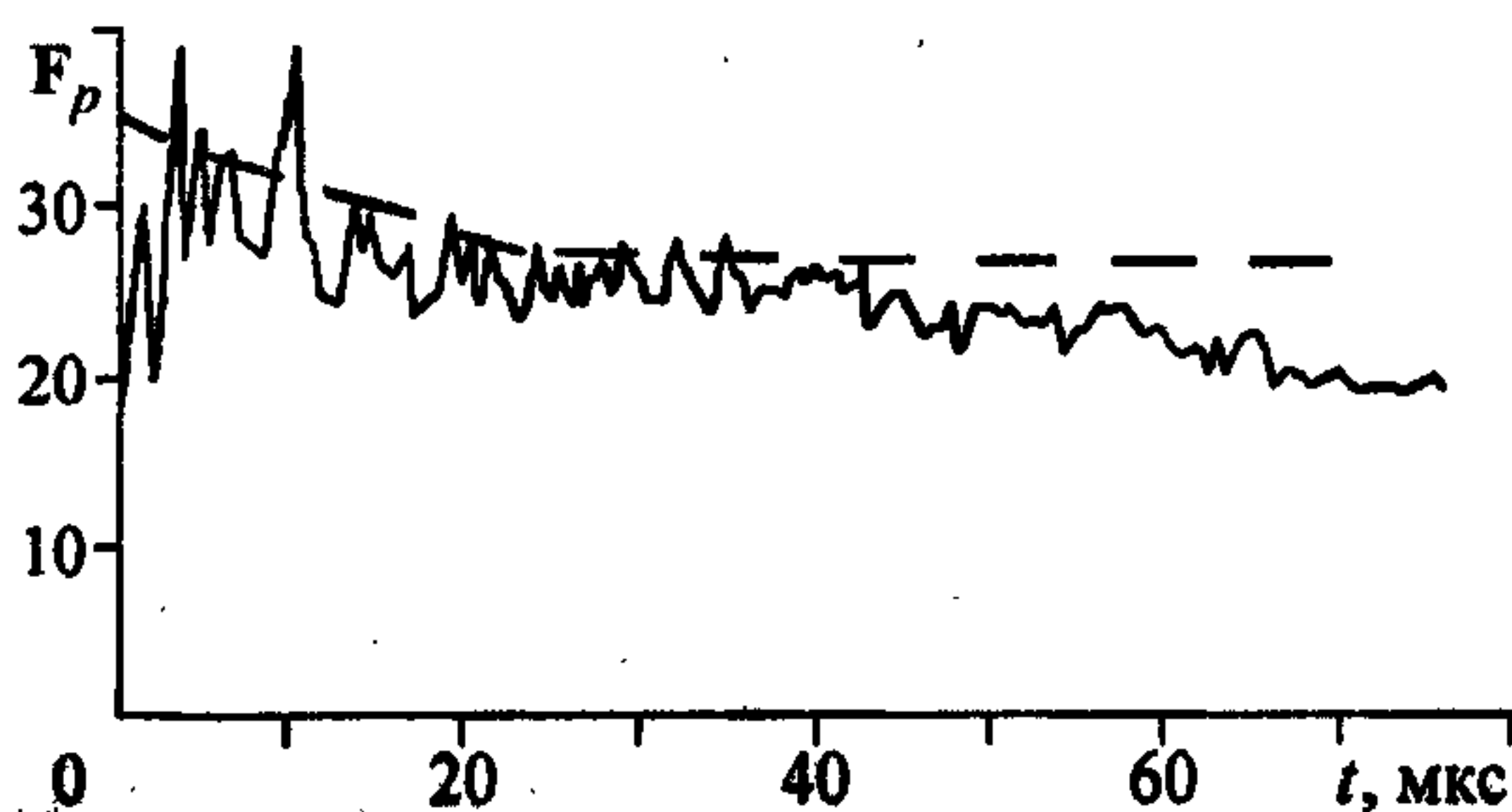


Рис. 3.7. Поведение плотности силы сопротивления для жесткого ударника.

Из определения этих величин следует, что при внедрении ударника на глубину, равную высоте конической головной части, отношение  $F/F_p$  будет постоянным и равным площади поперечного сечения цилиндрической части ударника. При меньших глубинах проникания площадь контакта увеличивается, поэтому величина  $F$  возрастает, а величина  $F_p$  принимает конечное значение. Колебания, которым подвержены значения  $F$  и  $F_p$ , носят, по-видимому, как физический, так и численный характер. Это обусловлено волновым характером возмущений, которые распространяются по преграде, и дискретным представлением среды при моделировании процесса проникания.

Амплитуда колебаний  $F$  и  $F_p$  больше на начальной стадии, когда скорость внедрения максимальна. Начиная с глубины, превышающей приблизительно полтора калибра ударника, амплитуда осцилляций уменьшается. Если толщина преграды большая, то в процессе торможения ударника  $F$  и  $F_p$  достигают наибольших значений при внедрении на высоту головной части. Далее наблюдается спад, и хотя скорость движения становится мала,  $F$  и  $F_p$  не стремятся к нулю.

Штриховой линией на рис. 3.7 нанесено изменение  $F_p$ , найденное по формулам из [5] (формулы получены аппроксимацией экспериментальных данных). Видно, что эти зависимости хорошо согласуются. Уменьшение величины  $F_p$  с течением времени в расчете объясняется влиянием свободной тыльной поверхности преграды, так как расчетная область ограничена.

Зависимости скорости ударника и глубины его проникания  $S$  от времени приведены на рис. 3.8, 3.9. Время полного торможения ударника — 80 мкс. За этот промежуток времени скорость ударника уменьшается до нуля, однако сила  $F$  при этом в нуль не обращается (см. рис. 3.6). Поэтому встает вопрос о выборе критерия, по которому следует прекращать численный расчет и считать, что процесс окончился.

Возможны два критерия. Первый — когда скорость ударника станет равной нулю; второй — когда сила, действующая на ударник, станет равной нулю и произойдет отделение ударника от преграды. Выбор критерия зависит от результатов исследования физики явления. Так, если необходимо проследить глубину внедрения ударника, то можно воспользоваться первым критерием. Если же нужно выяснить детали процесса, такие как изменение упругих перемещений или напряжений и их влияние на конечные размеры кратера, то необходимо применить второй критерий. Видно, что первый критерий проще, а так как упругие смещения малы и на размеры кратера практически не влияют, то в дальнейшем мы и будем использовать его.

Сопоставление численного расчета и эксперимента по глубине проникания показывает, что при данных прочностных свойствах материала преграды получаем хорошее совпадение (см. рис. 3.9). Заметим, что используемая в расчете величина динамического предела текучести  $Y_0$  взята из [4] и приблизительно равна трети от величины динамической твердости  $H_D$ , которая определяется в [4, 5] на основе экспериментов.

Так как волновые процессы в ударнике не учитываются, то расчет в этом приближении должен давать несколько завышенное значение конечной глубины кратера, чем в эксперименте, что и видно на рис. 3.9.

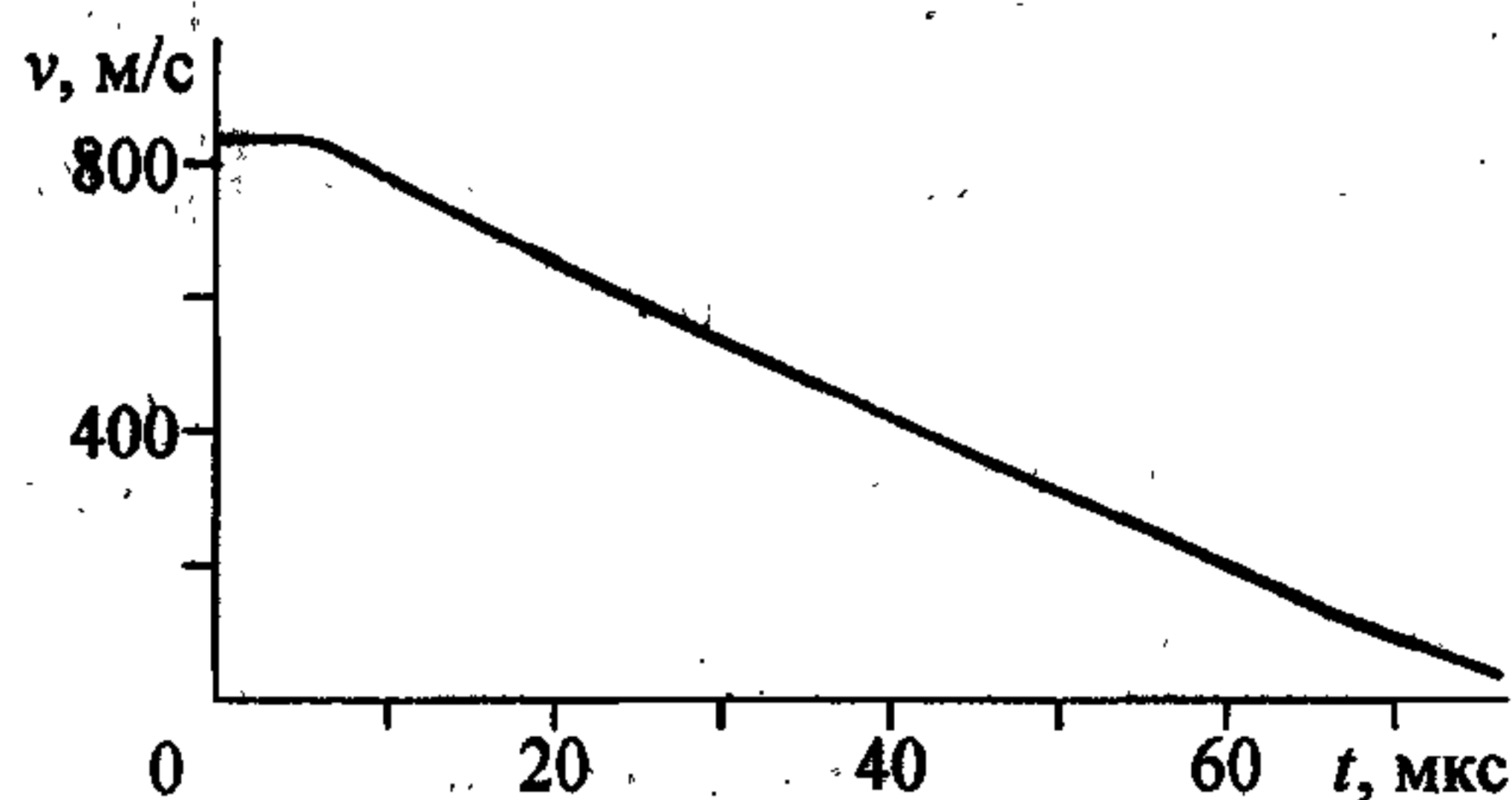


Рис. 3.8. Затухание скорости внедрения жесткого ударника во времени.

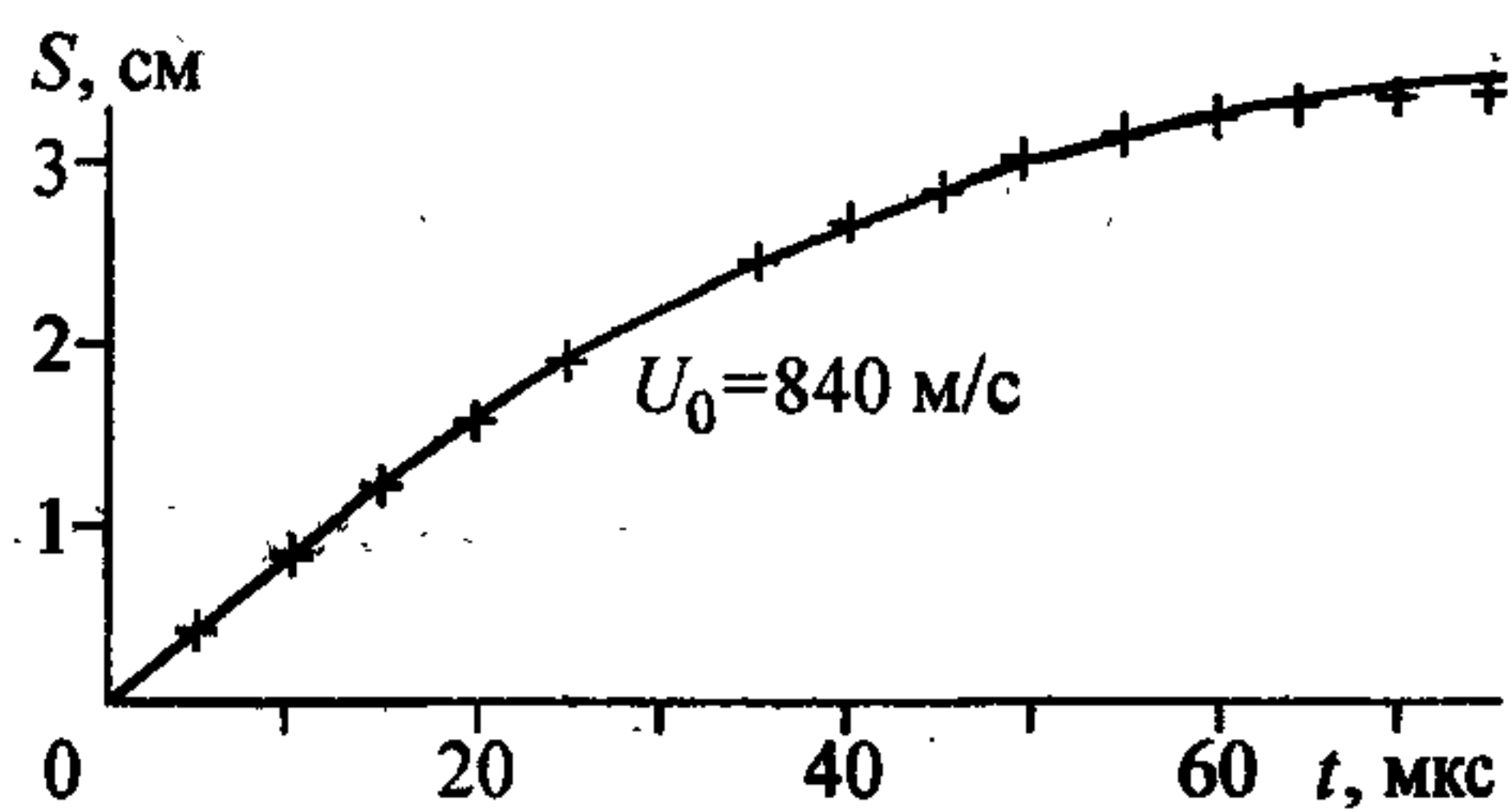


Рис. 3.9. Глубина проникания ударника (сплошная линия — расчет, + — эксперимент [5]).



Рассмотрим вопрос о влиянии сжимаемости закаленного ударника на процесс проникания. Параметры преграды приведены выше, а для ударника выбрана сталь с плотностью  $\rho = 7,85 \text{ г/см}^3$ , коэффициентом объемного сжатия  $K = 1,7 \text{ Мбар}$ , модулем сдвига  $\mu = 0,8 \text{ Мбар}$  и динамическим пределом текучести  $Y_0 = 0,035 \text{ Мбар}$  (закаленная сталь). Сопоставление результатов расчетов приведено на рис. 3.10, где сплошные линии — деформация разностной сетки в деформируемом ударнике и в преграде на момент времени  $t = 60 \text{ мкс}$ , штриховые линии — границы жесткого ударника и поверхность кратера в преграде на тот же момент времени. Расхождение составляет 3% при полной глубине кратера около 3 см. Форма деформируемого закаленного ударника мало отличается от первоначальной. Это подтверждает предположение о том, что ударник при таких условиях соударения можно считать недеформируемым, и пренебрежение сжимаемостью материала ударника вполне оправдано.

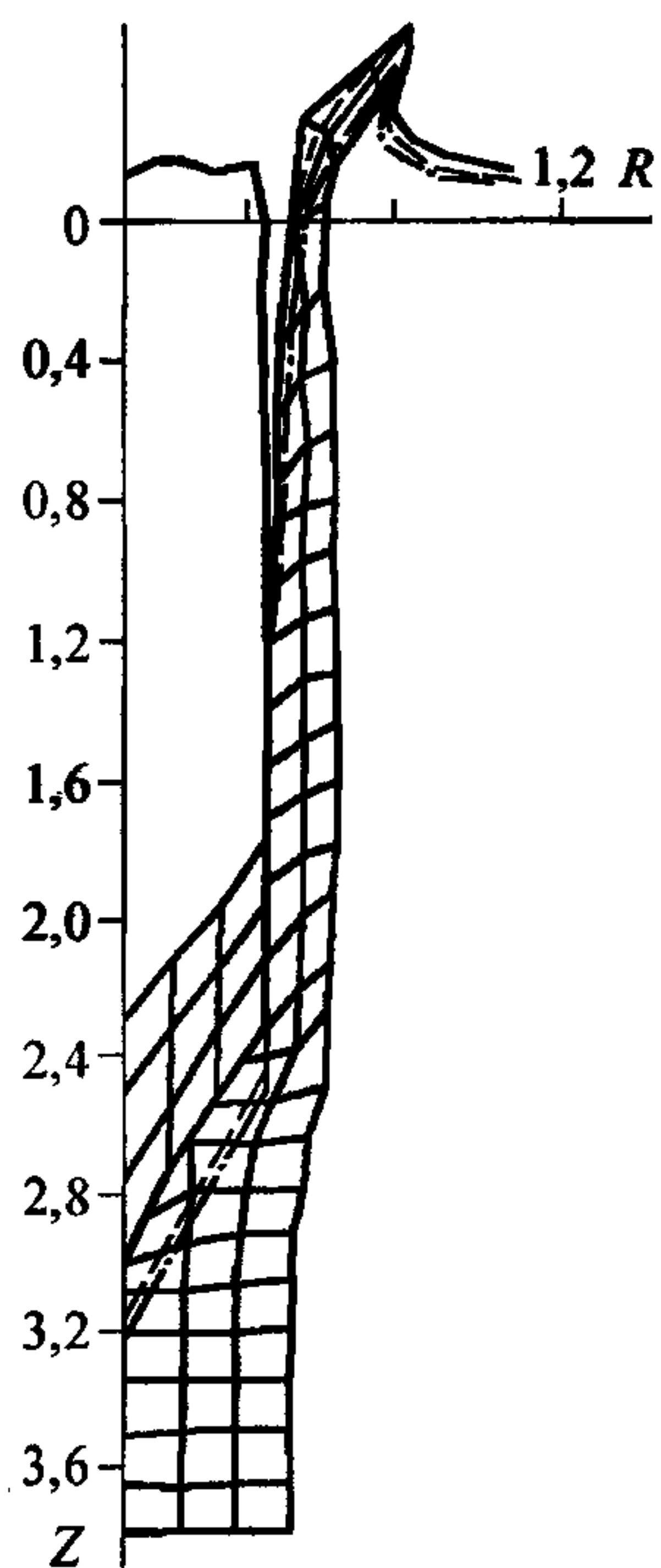


Рис. 3.10. Сравнение результатов расчета проникания жесткого и деформируемого ударников с экспериментом.

### 3.3.2. Проникание деформируемого ударника в массивные упругопластические преграды

В процессе высокоскоростного взаимодействия тел материалы испытывают большие деформации и поглощают значительные количества энергии, которые переводят их из сплошного состояния в диспергированное. Так, удар компактного тела по тонкому экрану вызывает образование запреградного облака осколков [24], высокоскоростное соударение стержня с преградой приводит к разрушению материалов стержня и преграды с выносом фрагментов из кратера [25]. Необходимость моделирования таких процессов ставит задачей разработку новых методов расчета, позволяющих четко отслеживать свобод-



ные и контактные границы тел, а также образование и движение фрагментов разрушенного материала. Частично данную задачу решают свободно-лагранжевы методы, однако можно выбрать более экономичный путь, а именно: сочетать простоту лагранжевых сеток с дискретными частицами [19—21, 26], но конечного размера.

В работе [27] на основе метода размерностей проведено моделирование процесса соударения деформируемых тел. Формула, полученная на основе анализа теории размерности для относительной глубины проникания ударника в преграду, имеет вид

$$\frac{h}{L_0} = F \left( \frac{\rho_{01} U_0^2}{H_1}, \frac{H_2}{H_1}, \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}, \beta_0, \frac{\rho_{02} a_2}{\rho_{01} a_1} \right), \quad (3.3.2)$$

где  $\rho$  — плотность;  $L_0$  — длина ударника;  $h$  — глубина кратера;  $H$  — динамическая твердость;  $U$  — скорость удара;  $a$  — скорость звука в материале,  $\beta_0$  — коэффициент формы головной части ударника; 1 — относится к материалу преграды, 2 — к ударнику. Смысл этой зависимости состоит в том, что результат соударения двух тел при высоких скоростях встречи можно воспроизвести в опыте с другой соответственно подобранной парой тел, но при более низком значении скорости удара. Кстати, зависимость (3.3.1) следует из (3.3.2) при больших скоростях проникания, когда прочностными свойствами среды можно пренебречь. Там же [27] данный вывод был проверен экспериментально на ряде подобранных пар материалов и получил хорошее подтверждение не только по конечному результату, но и по текущим значениям деформационных и силовых характеристик.

Здесь представлены результаты численного эксперимента по моделированию процесса соударения деформируемых пар тел. Рассмотрим нагружение массивных мишеней по нормали цилиндрическими ударниками диаметром 8 мм и длиной 20 мм, как это сделано в работе [27]. Один ударник был изготовлен из мягкой стали с параметрами  $\rho^0 = 7,85 \text{ г/см}^3$ , динамическая твердость  $H_1 = 167 \text{ кг/мм}^2$ , другой — из отожженной меди ( $\rho^0 = 8,9 \text{ г/см}^3$ , динамическая твердость  $H_1 = 65 \text{ г/мм}^2$ ). В качестве мишеней использовались массивные блоки диаметром 60 мм из дюралюминия ( $\rho^0 = 2,80 \text{ г/см}^3$ , динамическая твердость  $H_1 = 67 \text{ кг/мм}^2$ ) и отожженного алюминия ( $\rho^0 = 2,70 \text{ г/см}^3$ ,

Параметры материалов

Материал	$\mu$ , Мбар	$K$ , Мбар	$Y_0$ , кбар	$\sigma_*$ , кбар	$\epsilon_*$	$\epsilon_\tau^*$	$e^*$ , см <sup>2</sup> /мкс <sup>2</sup>	$\chi^*$ , %
Fe	0,8	1,7	6,4	70	0,5	—	0,047	3
Cu	0,485	1,38	2,5	45	0,6	—	—	3
Д16	0,275	0,73	2,56	16	0,35	0,18	0,008	3
Al	0,275	0,73	1,0	16	0,45	—	0,006	3

динамическая твердость  $H_1 = 26 \text{ кг/мм}^2$ ). Величины скоростей удара равнялись 1380 и 870 м/с соответственно для стального ударника в дюралюминий и медного — в отожженный алюминий. Следуя работе [27], первый опыт назовем “оригинальным”, а второй — “модельным”. Динамическая твердость  $H_1$  связана с динамическим пределом текучести  $Y_0$  линейной зависимостью с коэффициентом  $\approx 0,33$ . В расчете использовались константы и предельные параметры материалов на разрушение, представленные в табл. 3.1.

В качестве начальных условий принимаются:  $\rho_i(r, z, 0) = \rho_{i0}$ ,  $U_i(r, z, 0) = U_{i0}$ ,  $\sigma_{ij}(r, z, 0) = 0$ ,  $e(r, z, 0) = 0$ . Граничные условия:  $\sigma_n = \sigma_\tau = 0$  — на свободных поверхностях, и  $\sigma_n^+ = \sigma_n^-$ ,  $U_n^+ = U_n^-$ ,  $\sigma_\tau^+ = \sigma_\tau^- = 0$  — для сжимающих напряжений на поверхности контакта.

Расчетные области покрывались комбинированной сеткой: более мелкой, с треугольной ячейкой — в зоне больших деформаций и четырехугольной — на периферии. На рис. 3.11 приведен фрагмент разностной сетки.

На рис. 3.12 и 3.13 представлены результаты расчета кратера в мишени на момент времени  $t_0$  (время остановки ударника), иллюстрирующие окончание процесса проникания в “оригинальном” и “модельном” опытах. Для

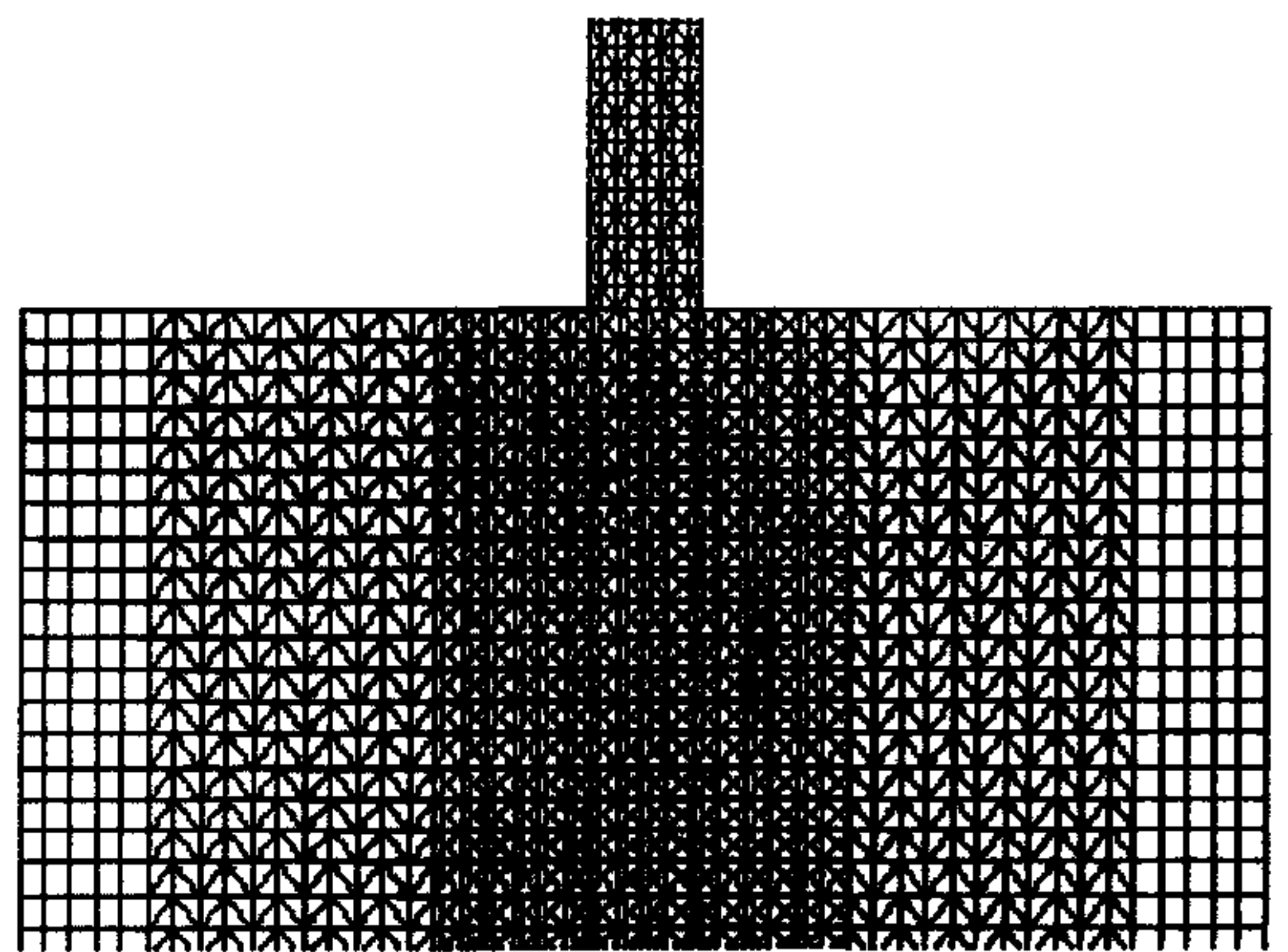


Рис. 3.11. Фрагмент разностной сетки для задач внедрения цилиндров в массивные мишени.



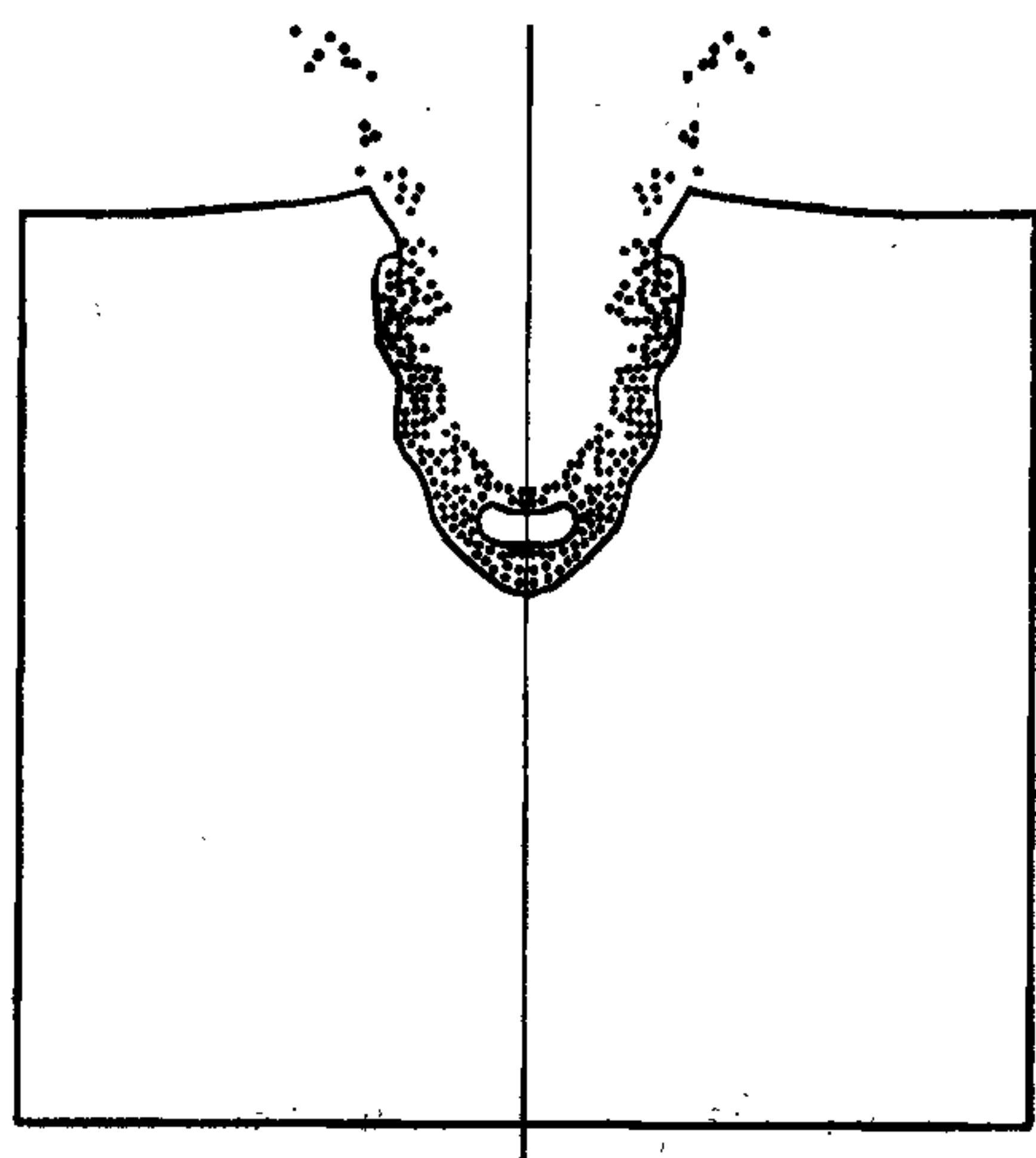


Рис. 3.12. Результат расчета “оригинального” эксперимента [27].

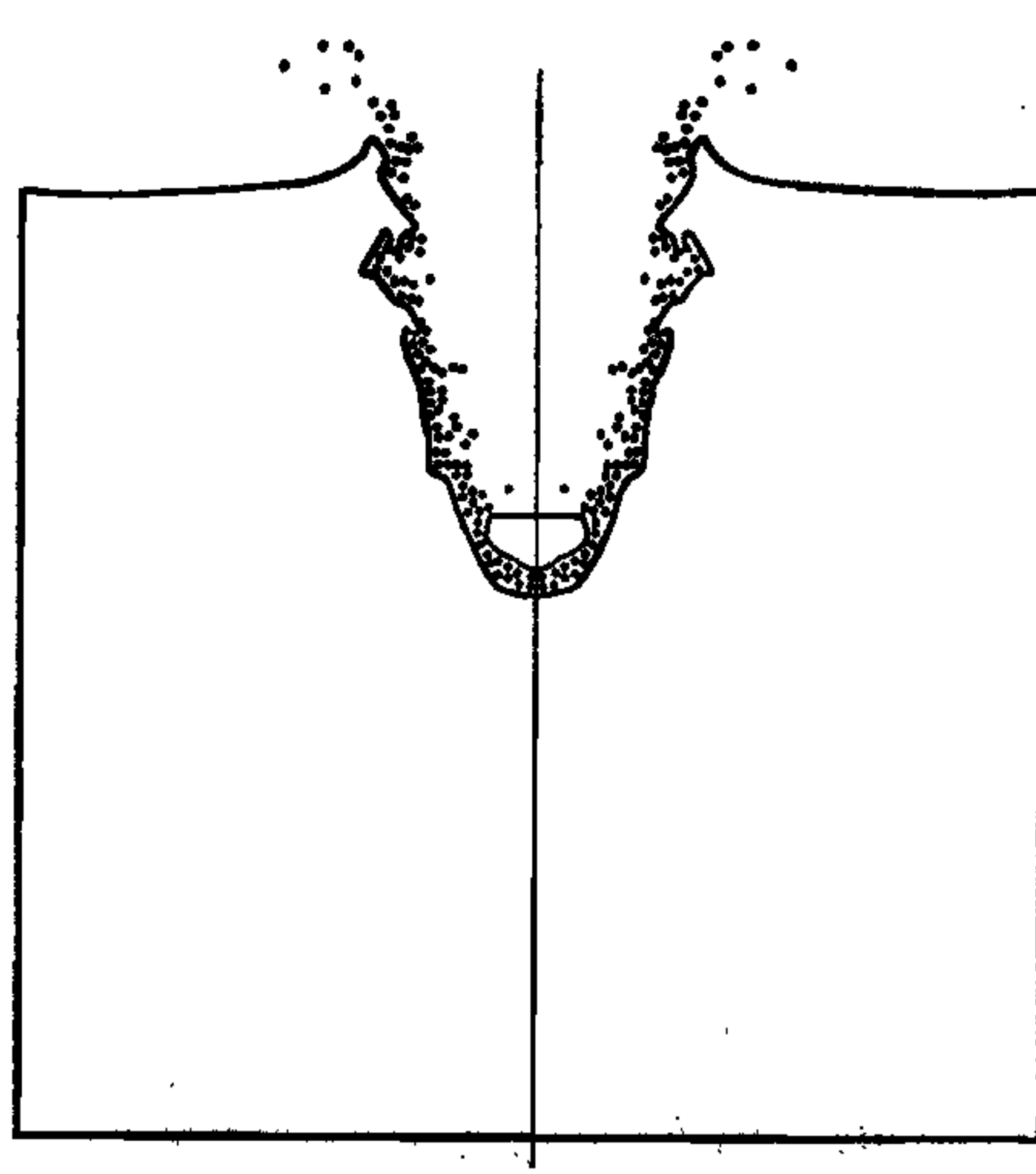


Рис. 3.13. Результат расчета “модельного” эксперимента [27].

более ясной картины выведены только границы расчетной области и частицы разрушенного материала.

Глубина проникновения стержней в обоих реальных опытах равнялась  $35,5 \pm 0,5$  мм. В расчете получены значения 36 и 37,4 мм, которые отличаются от экспериментальных данных на 1,4 и 5,4%.

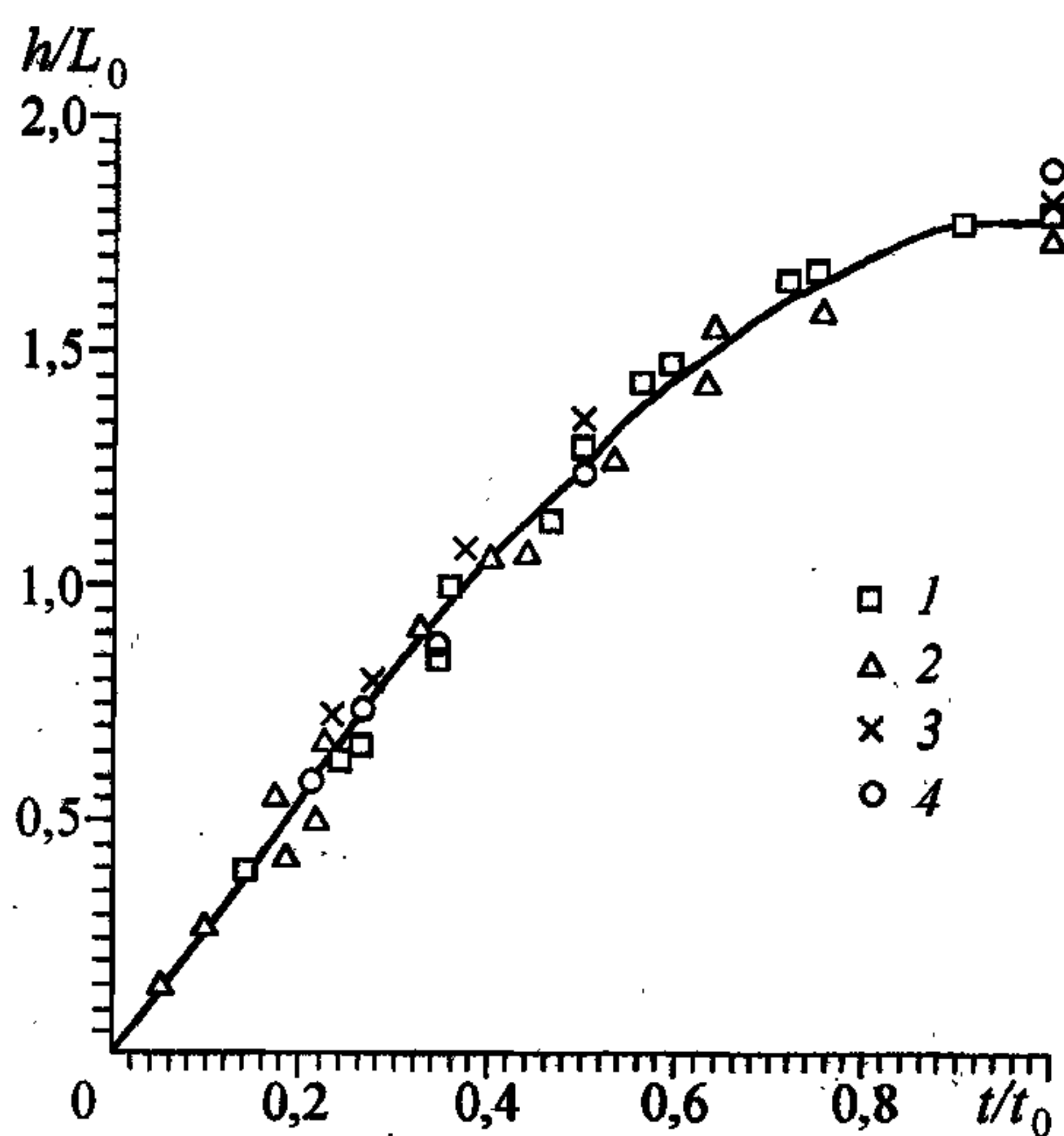


Рис. 3.14. Динамика процесса проникания в безразмерных переменных ( $h/L_0, t/t_0$ ), 1, 2 — эксперимент [27], 3, 4 — результат расчета.

от экспериментальных данных на 1,4 и 5,4%. На рис. 3.14 показана динамика процесса проникания в безразмерных переменных ( $h/L_0, t/t_0$ ), где  $h/L_0$  — отношение текущей глубины кратера к начальной длине стержня, а  $t/t_0$  — отношение текущего времени к времени всего процесса проникания. Таким образом, хорошее соответствие получено не только для конечной глубины пробития, но и для всего процесса проникания.

Рассмотрим важную практическую задачу о высокоскоростном соударении цилиндрического



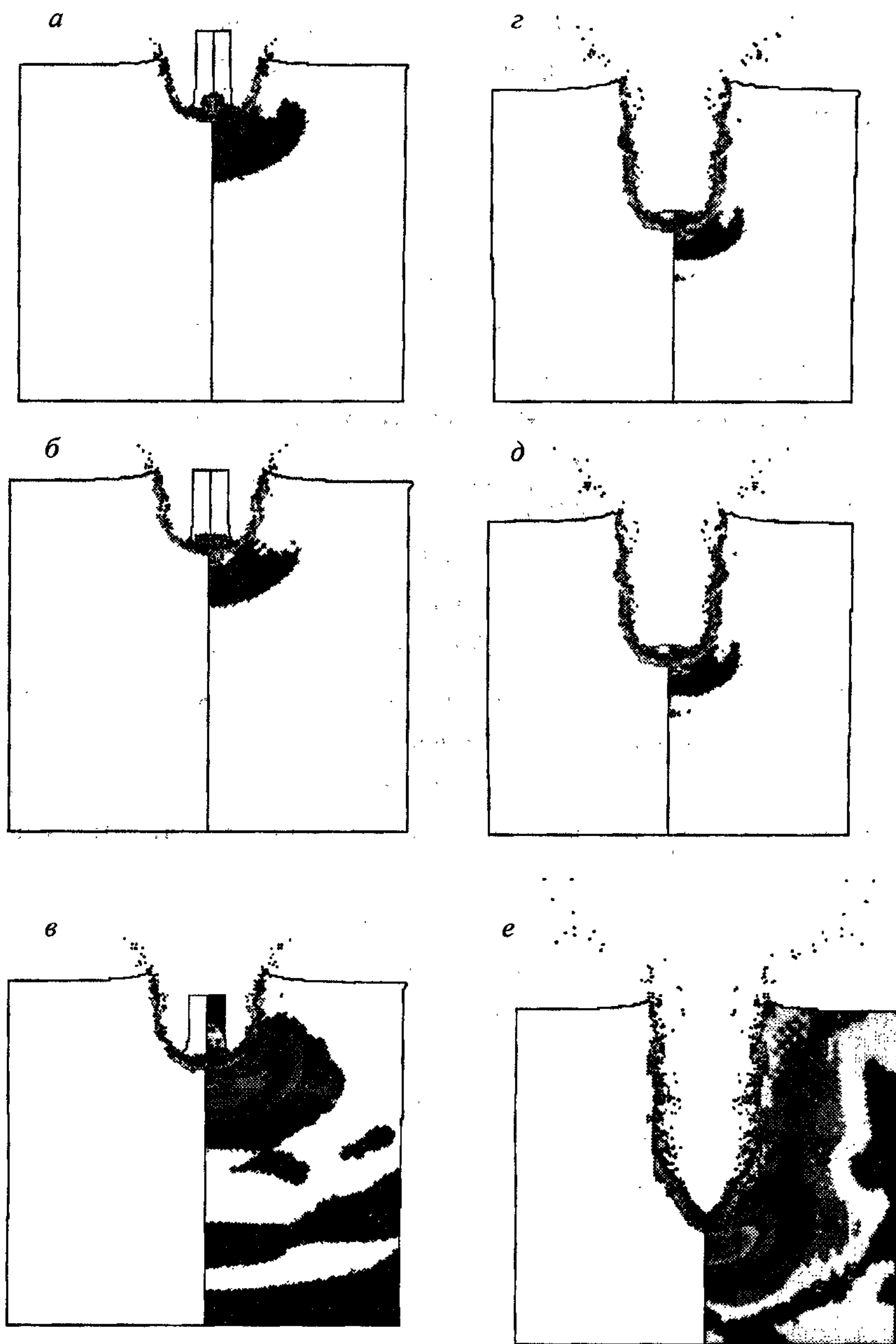
стержня из тяжелого сплава, диаметр которого много меньше его длины, с массивной стальной мишенью с начальной скоростью  $U_0$ . Стержень покрывался треугольной расчетной сеткой. В мишени использовалась комбинированная сетка, аналогичная сеткам в предыдущих расчетах. Соотношение шагов по пространству в ударнике и преграде выбиралось из условия согласования временных шагов в областях, содержащих различные материалы,  $\Delta h_1 / c_1 = \Delta h_2 / c_2$ . Здесь  $\Delta h_i$  — шаги по пространству,  $c_i$  — максимальные значения скоростей звука в средах. Проведены расчеты проникания и сделано сравнение с экспериментальными данными из работы [28]. Ударники изготовлены из вольфрамового сплава W-10, диаметр 5,54 мм, удлинение  $\lambda = L/D = 5$ . Мишени — массивные блоки из ст. 4340. Скорость удара 2,55 км/с. Параметры материалов представлены в табл. 3.2.

При высокоскоростном соударении цилиндрического ударника с преградой и в материале ударника, и в материале мишени возникают большие давления, которые распространяются от поверхности контакта в виде волн сжатия. Наличие свободных поверхностей приводит к формированию волн разгрузки сжатия и радиальному течению материалов ударника и преграды в этой области. Таким образом, начинается образование кратера, причем диаметр кратера на начальной стадии удара такой же, как и при “коротком” ударе (см. [4]). За счет течения и следующего за ним разрушения происходят потеря некоторой части материала ударника и вынос его вместе с материалом мишени из кратера. Поэтому начальная часть каверны имеет больший диаметр по сравнению с глубинной частью, где движение ударника происходит в стесненных условиях и ему приходится раздвигать материал преграды, преодолевая прочностное сопротивление. За счет больших деформаций головная часть ударника постоянно разрушается, образуя дискретные частицы выносятся на боковую поверхность каверны. Таким образом, моделируется процесс срабатывания удар-

Таблица 3.2

Параметры материалов

Материал	$\rho_0$ , г/см <sup>3</sup>	$\mu$ , Мбар	$K$ , Мбар	$\gamma_0$ , кбар	$\sigma_*$ , кбар	$\epsilon_*$	$\epsilon_r^*$	$e^*$ , см <sup>2</sup> /мкс <sup>2</sup>	$\chi^*$ , %
W-10	17,0	1,6	3,11	6,45	20	0,35	0,25	0,05	4
Ст. 4340	7,85	0,75	1,83	10,0	75	0,25	0,2	0,047	3



**Рис. 3.15.** Кинограмма процесса проникания тяжелого стержня в массивную мишень на моменты времени 4, 8, 10, 12, 22, 42 мкс (*a—e* соответственно).

Ост. поясн. см. в тексте.

ника. Как видно из рисунков, форма несработавшейся части стержня несколько отличается от “грибообразной”, наблюдаемой в реальных экспериментах. Если рассматривать в качестве границы ударника и образовавшиеся в результате разрушения фрагменты, то форма головной части вполне соответствует известным экспериментальным данным. К моменту времени  $t = 50$  мкс ударник полностью срабатывается и превращается в систему фрагментов, которые в дальнейшем останавливаются. На рис. 3.15 показаны кадры кинограммы расчета на различные моменты времени. Приведены распределение давления и форма кратера в мишени. Расчетная величина глубины каверны  $h = 4,59$  см, отличие от значения экспериментальной глубины  $h_e = 4,1$  см составляет 12 %.

Отсюда можно сделать вывод, что предложенная численная модель разрушения материалов (3.1.20) позволяет достаточно точно рассчитывать процессы внедрения высокоскоростных деформируемых ударников в массивные мишени.

### **3.3.3. Проникание сегментированных ударников в массивные преграды**

Согласно [4], процесс внедрения удлиненного ударника осуществляется в основном на установившейся стадии, а при ударе компактным телом — в неустановившемся режиме при максимально возможном давлении в зоне контакта, поэтому относительная глубина проникания существенно больше.

С этой целью проведена серия расчетов проникания сегментированных ударников в полубесконечные преграды и сделано сравнение с экспериментальными данными из работы [28]. Ударники изготовлены из вольфрамового сплава W-10, диаметр  $D = 0,554$  см, эквивалентное удлинение  $\lambda = 5$ . В качестве мишени использовались массивные блоки из ст. 4340. Сегментированные ударники представляют собой набор цилиндров с отношением  $L/D = 1$  и разнесенных в пространстве на  $S = D$  и  $S = 2D$ . Масса сегментированных ударников совпадает с массой сплошных. Скорость удара 2,55 км/с. Параметры материалов приведены ранее в табл. 3.2.

Сегментированный стержень покрывался треугольной расчетной сеткой, содержащей 64 элемента в каждом сегменте. В преграде использовалась комбинированная сетка. Общее число элементов в данной расчетной области 1032.



Для моделирования удара сегментированного ударника выполнено два расчета с разнесением  $S/D=1$  и  $S/D=2$ . От поверхности контакта, в момент встречи тел, распространяются волны сжатия как в ударник, так и в преграду, параметры которых определяются скоростью встречи и ударными адиабатами. Со свободных поверхностей области, охваченной волной сжатия, формируются волны разгрузки сжатия, частицы обоих тел приобретают радиальную составляющую скорости. По достижении волной сжатия тыльной поверхности сегмента образуется волна разгрузки, взаимодействие волн разгрузки приводит к формированию области растягивающих напряжений, при определенной величине которых происходит разрушение материала. За счет приобретенной кинетической энергии разрушенный материал выносится за пределы кратера, по-

этому

следует ожидать большего объема кратера по сравнению с ударом, при котором не происходит разрушение материала преграды и ударника. К моменту подхода второго сегмента уже полностью сформирован кратер от первого сегмента. Поскольку удар второго сегмента начинается в глубине преграды, то вынос материала затруднен, и диаметр формируемой каверны меньше по сравнению с диаметром каверны от сплошного стержня (рис. 3.16, где показан процесс проникания сегментированного стержня на моменты времени  $t = 5, 15$  и  $115$  мкс). Кинетические энергии ударников (сплошного и сегментированного) равны и переходят в работу по вытеснению одного и того же материала, поэтому

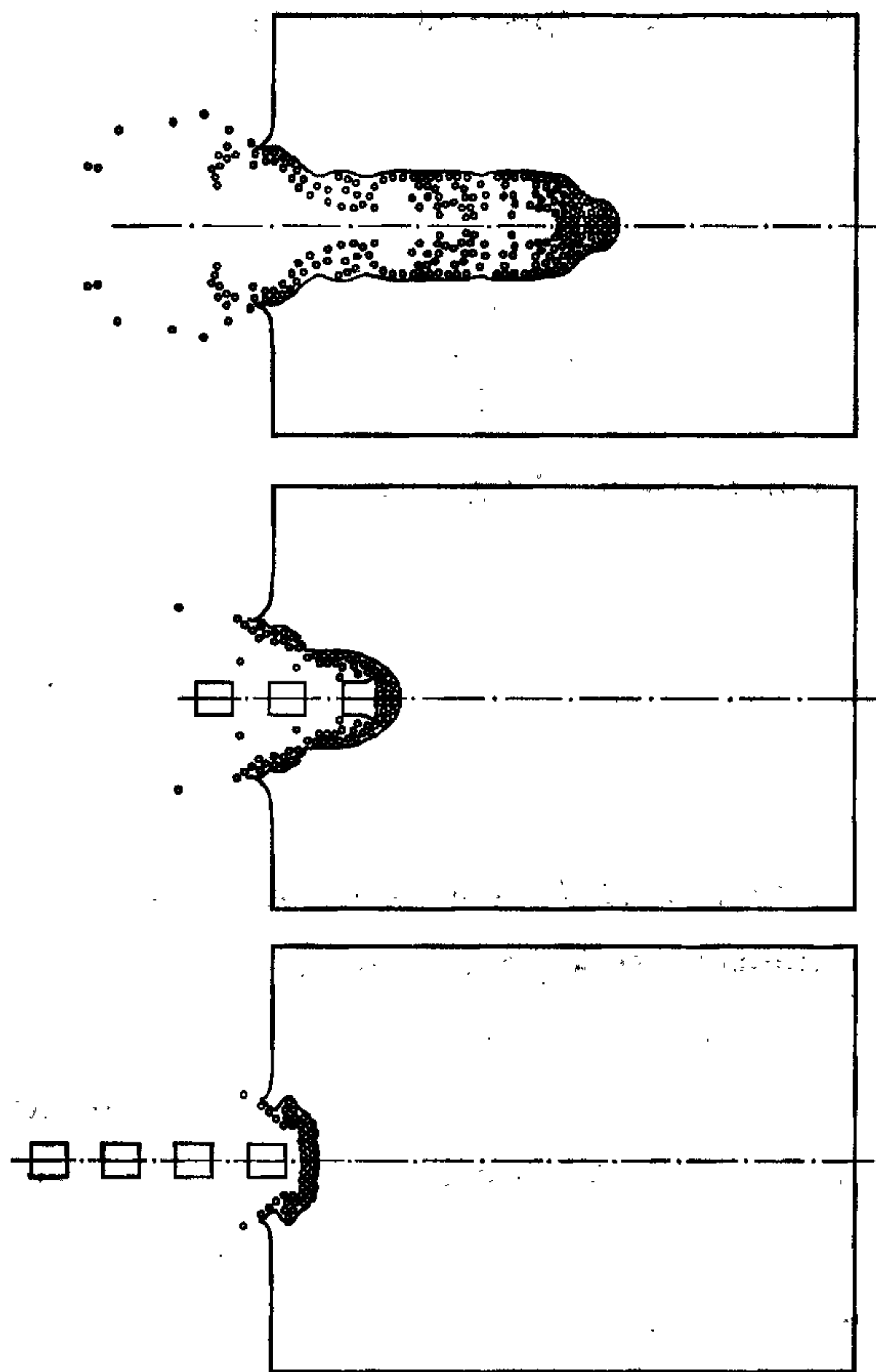


Рис. 3.16. Процесс проникания сегментированного ударника в массивную мишень (разнесение  $S = H$ ).

из энергетических соображений следует, что при меньшем диаметре каверны в случае сегментированного ударника получим большую ее глубину. В расчете получена глубина каверны  $h = 5,24$  см, а экспериментальное значение —  $h_e = 4,6$  см [28]. Отличие составляет 14 %.

Процессы проникания сегментированных ударников с разным разнесением (в нашем случае  $S/D = 1$  и  $S/D = 2$ ) различаются тем, что во втором случае время прихода следующего сегмента увеличено в два раза. Это приводит к тому, что предыдущий ударник полностью срабатывается и практически полностью растекается по дну каверны. Тогда как в случае меньшего разнесения последующий сегмент наталкивается на заторможенную до некоторой степени, неразрушенную часть предыдущего сегмента, что приводит к потере передачи энергии в направлении удара и увеличению диаметра каверны. Действительно, диаметр каверны  $d_2 = 1,28$  см во втором случае немного меньше величины  $d_1 = 1,33$  см. Тем самым создается предпосылка для формирования более глубокой каверны.

На рис. 3.17 приведены кадры из кинограммы процесса проникания сегментированного ударника с разнесением  $S/D = 2$  в массивную стальную преграду в моменты времени  $t = 5, 40$  и  $115$  мкс. В расчете для глубины каверны получено значение  $h = 5,62$  см, а экспериментальная величина  $h_e = 5,4$  см [28], отличие 4 %.

Сравнение численных результатов с экспериментальными данными показало, что предложенные выше модель повреждаемой среды и метод свободных элементов позволяют решать широкий класс

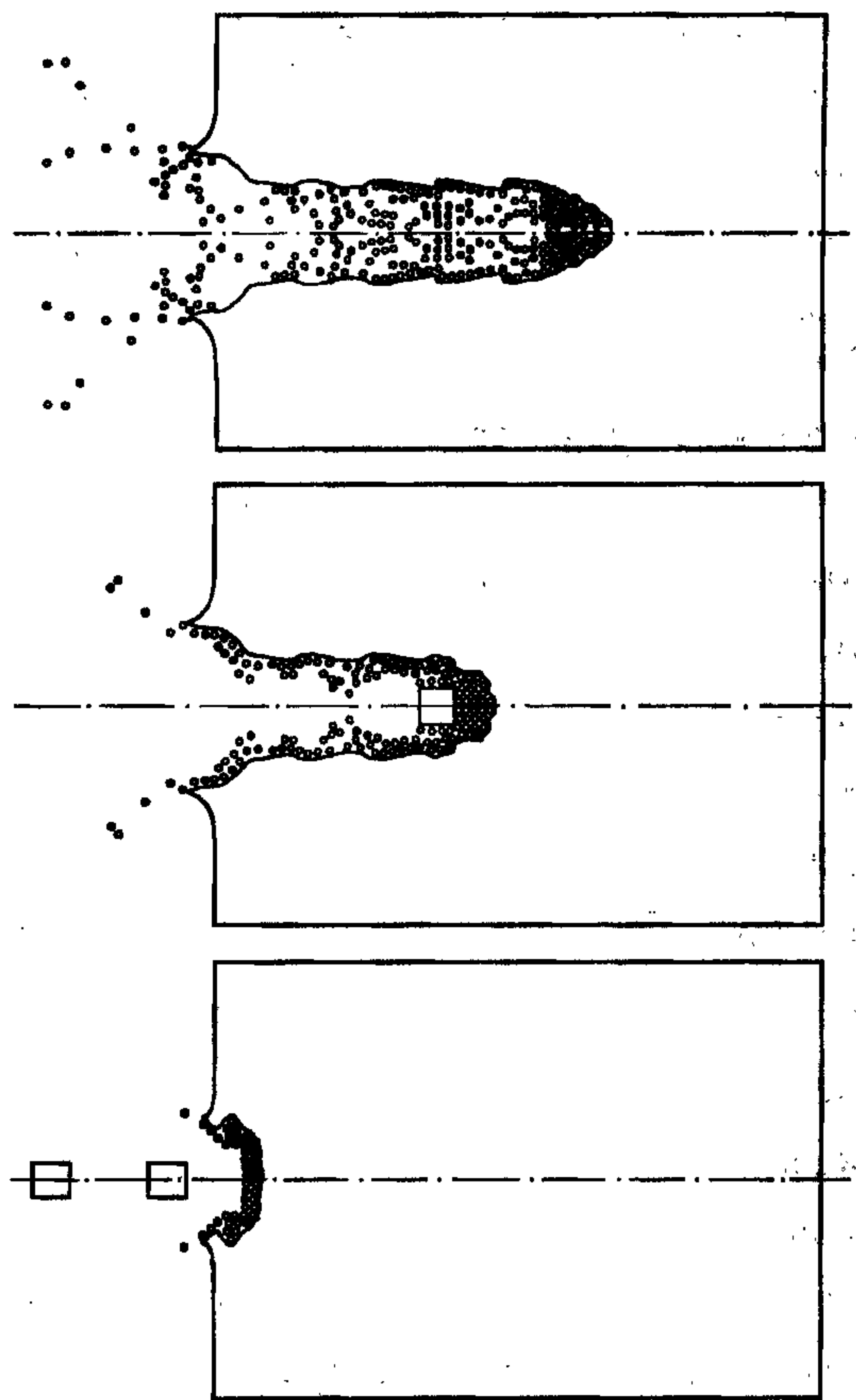


Рис. 3.17. Процесс проникания сегментированного ударника (разнесение  $S = 2H$ ).



двумерных задач высокоскоростного взаимодействия твердых тел при наличии многих контактных поверхностей и различных механизмов разрушения материалов.

### 3.3.4. Последовательное соударение ударников с преградой

Сопоставляя динамические процессы высокоскоростного внедрения в массивную преграду удлинённых  $L_0 \gg d_0$  ( $L_0$  — длина,  $d_0$  — диаметр) и тонких  $L_0 \ll d_0$  ударников, легко убедиться, что относительная глубина внедрения  $h/L_0$  во втором случае существенно больше. Согласно классификации этапов взаимодействия [4], при ударе диском ( $\lambda = L_0/d_0 \ll 1$ ,  $\lambda$  — удлинение) процесс внедрения происходит в неустановившемся режиме при достаточно небольших временах (короткий удар) и максимально возможном давлении в зоне контакта

$$P = \rho_{01} D_1 U_1, \quad (3.3.3)$$

где  $\rho_{01}$  — плотность преграды;  $D_1$ ,  $U_1$  — скорость ударной волны и массовая скорость среды за волной. При этом тыльной волной разгрузки (со стороны диска) ударно нагруженное вещество преграды и ударника выбрасывается из кратера. Процесс внедрения удлинённого же ударника  $\lambda \gg 1$  осуществляется в основном на установившейся стадии до момента “срабатывания” бойка, а давление в зоне контакта ударника и преграды ниже (3.3.3) из-за действия боковых волн разгрузки сжатия. В 1979 г. на основе методов математического моделирования Г. А. Сапожников и В. М. Фомин получили эффект увеличения глубины кратера в полубесконечной преграде, заменив удлинённый ( $\lambda > 1$ ) ударник компактными ( $\lambda \approx 1$ ) определенным образом разнесёнными бойками с суммарной массой и энергией, равными таковым исходного ударника. В этом случае каждый последующий удар происходит по частично нагруженной предыдущим ударом среде, а срабатываемый материал удаляется из “тени” очередного удара радиальным течением, возникающим из-за боковых волн разгрузки. Позднее эти данные были подтверждены экспериментально. Аналогичное явление наблюдал Ю. А. Тришин при проникании разорванной кумулятивной струей. В последние годы появился ряд публикаций за рубежом, в которых независимо



получены идейно близкие результаты [28—32]. В этих работах, в дополнение к вышеизложенной схеме, разнесенные ударники соединены стержнем диаметром  $d_c < d_0$ .

На примере численного (методом частиц в ячейках) и экспериментального моделирования последовательного соударения двух ударников с преградой поясним указанный эффект. Качественное представление о процессе деформирования стальных ударников ( $\lambda = 0,125$ , относительное расстояние между бойками  $\delta/L_0 = 1,67$ ) и преграды дает рис. 3.18, на котором показано поле частиц-масс тел, взаимодействующих со скоростью  $U_0 = 0,45$  см/мкс, на момент времени  $t = 5,4$  мкс. Частицы-маркеры отмечают контактные и свободные границы, а по сгущению частиц-масс и градиентам функций течения фиксируется положение ударной волны. Одним из принципиальных моментов процесса последовательного соударения тел является динамика распространения ударных волн и волн разгрузки, которые определяют направление движения материалов. На рис. 3.19 для задачи удара одного ударника с отношением  $\lambda = 0,125$  штрихами указан “конус одномерности”, отсеченный боковой волной разгрузки, сплошной линией — положение ударной волны в преграде на ряд мо-

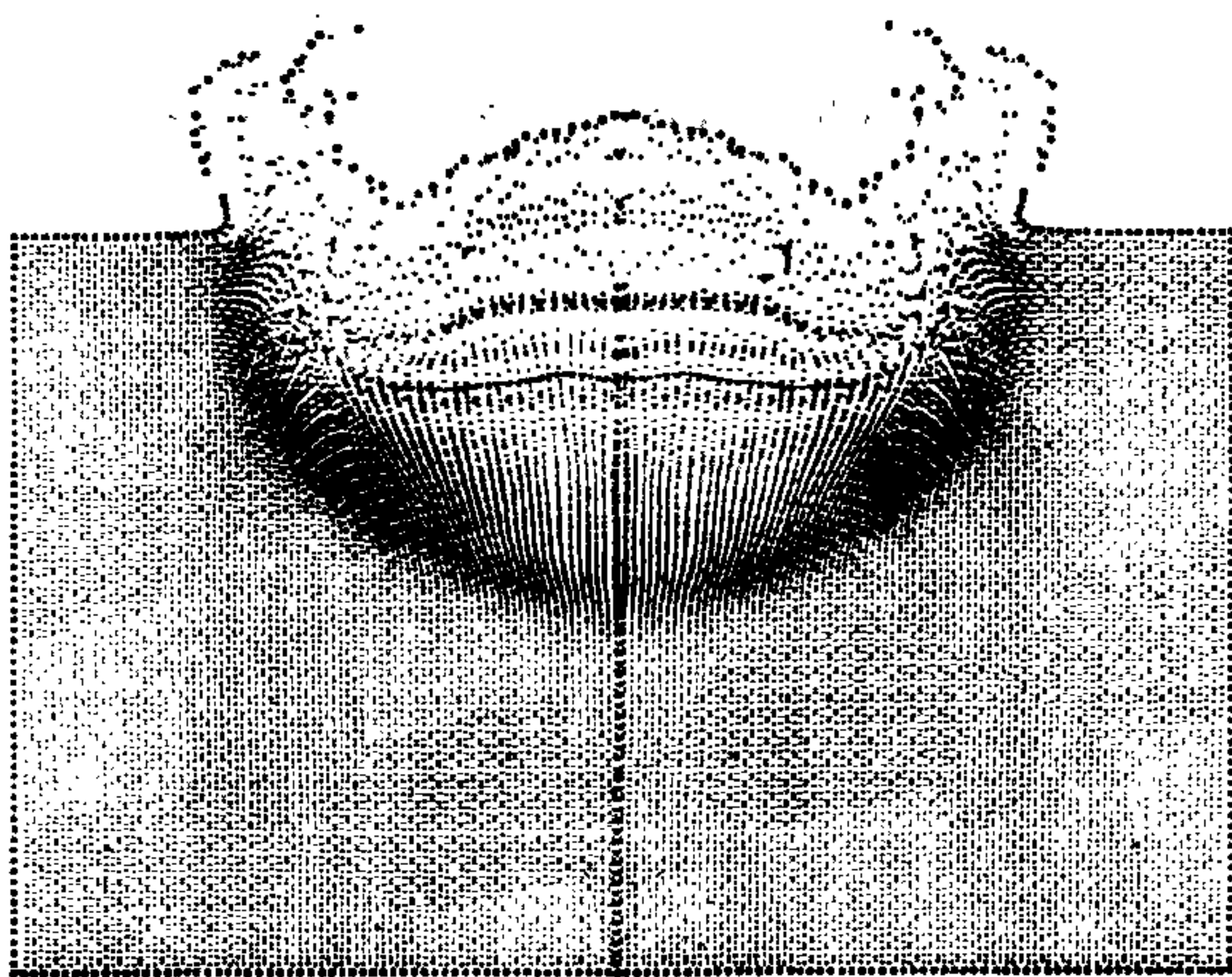


Рис. 3.18. Расчет удара пластинкой по массивной мишени на момент времени  $t = 5,4$  мкс.

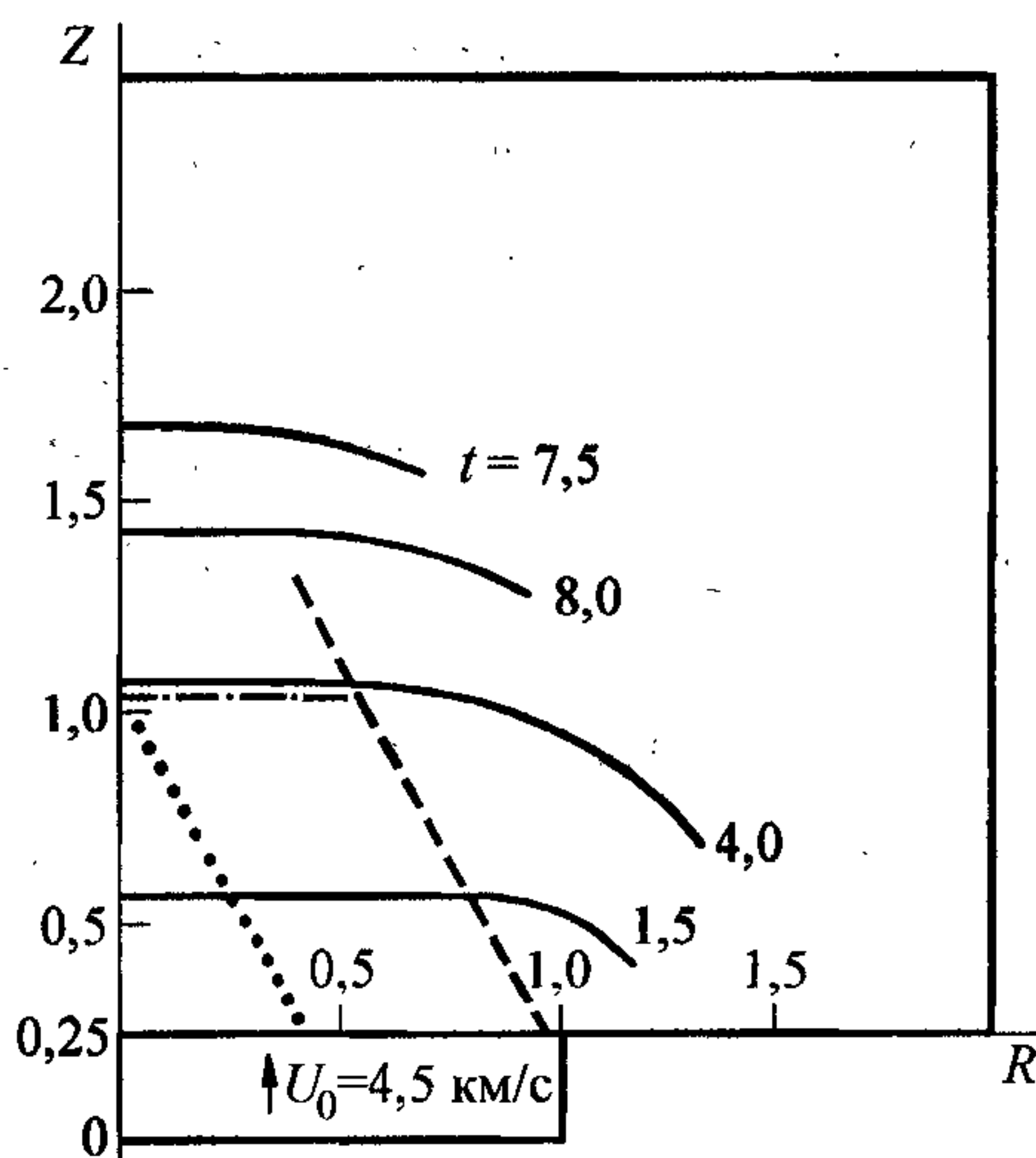


Рис. 3.19. Конус одномерности, отсеченный боковой волной разгрузки.

Поясн. см. в тексте.

ментов времени, штрихпунктирной — место встречи этой ударной волны и “тыльной” волны разгрузки. Здесь же пунктиром отмечен вариант удара с  $\lambda = 0,29$ , когда волны встречаются у оси.

С учетом вышеизложенного естественно было ожидать, что при последовательных нагружениях преграды дисками ( $\lambda_i$ ,  $i$  — номер бойка-диска) масса ударника и значительная доля ударно нагруженного материала преграды выносятся из каверны навстречу очередному бойку, что приводит к значительной потере кинетической энергии бойка. При ударе компактным телом по преграде характерные времена прихода волн разгрузки (тыльной и боковой) к оси в области контакта близки, поэтому процесс взаимодействия ударников с преградой проходит на границе неустановившейся и установившейся стадий. В этом случае расстояние между ударниками выбирается таковым, чтобы максимально обеспечить вынос среды боковой волной разгрузки из “тени” взаимодействия очередного удара:

$$\delta > \frac{U_0 d_0}{2} (1/c + 1/U_r), \quad (3.3.4)$$

где  $c$  — наименьшее из значений скорости звука преграды и бойка,  $U_r$  — средняя радиальная составляющая скорости среды, выбрасываемой из кратера.

В эксперименте медные ударники цилиндрической формы с удлинением  $\lambda = 0,5 \div 1,0$  ускорялись в пороховой системе до скорости  $U_0 = 0,125 \pm \pm 0,005$  см/мкс. Схема опытов приведена на рис. 3.20, а. Ударники 1 устанавливались в эбонитовой обойме 2 зафиксированными на заданном расстоянии  $\delta$ . Между срезом ствола ускоряющей системы 1 (рис. 3.20, б) и преградой 4 устанавливался стальной отсекающий элемент 3, при встрече с которым обойма 2 разрушалась. При подходе к преграде (рис. 3.20, в) заданное расстояние  $\delta$  между прошедшими отсекающим элементом ударниками, их скорость и ориентация, по данным рентгеноимпульсной регистрации, сохранялись.

Преграды представляли собой массивные свинцовые блоки. Свинец в качестве материала преграды выбран по следующим соображениям. Согласно теории моделирования высокоскоростного соударения твердых тел [4, 33], относительная глубина каверны

$$h/L_0 = f(\rho_t U_0^2 / H_t), \quad (3.3.5)$$

где  $\rho_t$ ,  $H_t$  — соответственно плотность и динамическая твердость материала



преграды. Из (3.3.5) следует, что при заданной величине безразмерного параметра  $\rho_1 U_0^2 / H_1$  глубина внедрения  $h$  ударяющего тела с заданными физико-механическими характеристиками и длиной  $L_0$  остается постоянной. Эта закономерность дает возможность моделировать в широком диапазоне скоростей результат соударения с преградами, имеющими существенно различающиеся физико-механические характеристики. В частности, исходя из (3.3.5), можно показать, что скорости соударения в “оригинальном” процессе  $U_{02}$  и в “модельном”  $U_{01}$  связаны соотношением

$$U_{02} / U_{01} = (W_2 / W_1)^{1/2}, \quad (3.3.6)$$

где  $W = H_1 / \rho_1$  — удельная работа пластического деформирования материала преграды. Из формулы (3.3.6) видно, что “модельный” процесс соударения со свинцовой преградой при скорости встречи  $U_{01} = 0,125$  см/мкс, легко достижимой в эксперименте, воспроизводит “оригинальный” процесс высокоскоростного соударения с преградой из высокопрочной стали при скорости  $U_{02} \approx 1,0$  см/мкс.

Расстояние  $\delta$  варьировалось в опытах от 0 до  $\infty$ . В первом из предельных случаев ( $\delta = 0$ ) удар производился одним ударником длиной  $2L_0$ , во втором — ударником длиной  $L_0$  по дну кратера, предварительно в отдельном опыте образованном ударником той же длины.

Экспериментальные данные представлены на рис. 3.21 в виде зависимостей конечной глубины кратера  $h$  от расстояния между ударниками  $\delta$  для

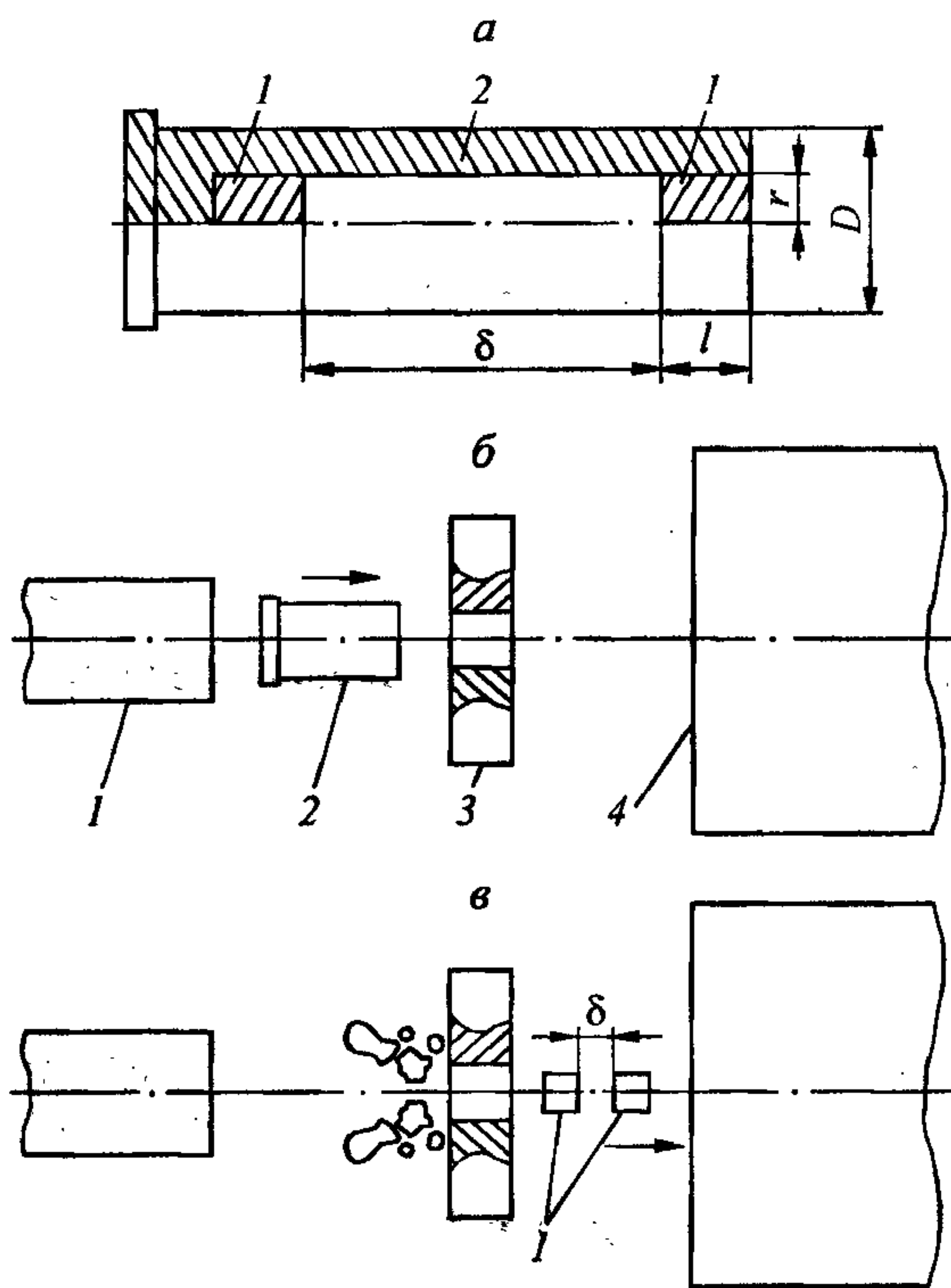


Рис. 3.20. Схема экспериментальной сборки сегментированного ударника и выделение его при выстреле.

Поясн. см. в тексте.



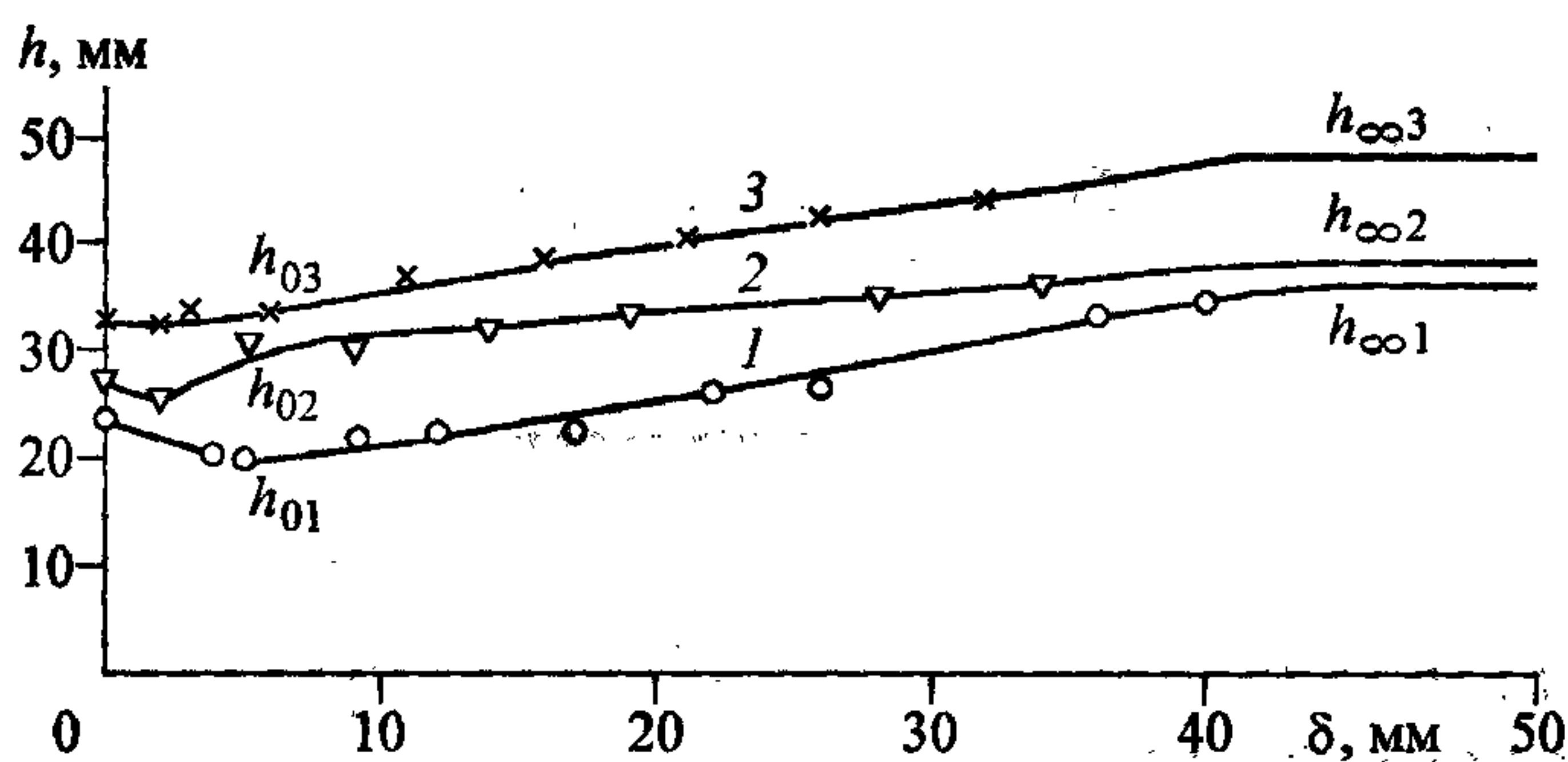


Рис. 3.21. Сравнение расчетных и экспериментальных глубин пробития.

Поясн. см. в тексте.

$\lambda = 0,5, 0,75$  и  $1,0$  (соответственно кривые 1—3). Экспериментальные точки — средние значения по пяти—шести опытам.

Большое влияние инерционного течения материала преграды, в результате указанного выше волнового механизма взаимодействия тел, демонстрируют данные, полученные при предельных значениях  $\delta$ . Глубина  $h_\infty$  каверны, образованной при  $\delta_\infty$ , на 40% превышает глубину  $h_0$  каверны, образованной одним ударником удвоенной длины.

Зависимостью глубины  $h(\delta)$  для  $\lambda = 0,5$  наиболее характерно демонстрируется влияние разнесения на конечную глубину кратера при последовательном ударе. На этой кривой можно выделить три участка. Первый — в области малых значений  $\delta$  — характеризуется уменьшением глубины каверны по сравнению с  $h_0$ , что объясняется взаимодействием ударников при интенсивном торможении первого из них. В диапазоне значений  $\delta$ , характерных для второго участка, наблюдается монотонное увеличение  $h$  до величин  $h_\infty$ . На третьем участке  $h$  не зависит от разнесения ударников  $\delta$ , т.е. процесс соответствует абсолютно независимому взаимодействию с преградой каждого из ударников.

При величине удлинения  $\lambda = 1$  с увеличением разнесения  $\delta$  наблюдается рост глубины каверны, за исключением весьма узкого диапазона малых значений  $\delta$ . Экспериментальные данные согласуются с теоретическими представлениями о характере взаимодействия тел при последовательном ударе.

### 3.4. Моделирование процессов деформирования и откольного разрушения при ударном нагружении пластин

Взаимодействие ударника с преградой конечной толщины является достаточно сложным для численного моделирования процессом, так как наряду с

большими деформациями материалов ударника и преграды возможны различные типы разрушения, характеризующиеся широким разбросом пространственных и временных масштабов, например, выбивание пробки, образование откольных полостей внутри преграды. К тому же различные типы разрушения среды могут протекать на разных стадиях процесса взаимодействия, что существенно осложняет анализ экспериментальных данных. С помощью специального подбора геометрических размеров и физико-механических свойств материалов ударника и преграды удастся выделить отдельные типы разрушения в “чистом” виде, например, удар тонкой пластинкой вызывает откол, закаленный ударник с конической головной частью пластически прокалывает пластину из “мягкого” материала.

Численное моделирование — альтернативный путь, позволяющий “выключить” из рассмотрения те или иные процессы и исследовать только интересные явления. Это, конечно, приближенный подход, но, изучив каждое явление в “чистом” виде, можно переходом от простого к сложному прийти к более полной картине изучаемого процесса, т.е. более адекватно отражать реальность.

Большая часть численных расчетов откольного разрушения проведена в рамках одномерных моделей, которые на основе анализа экспериментальных данных позволяют определять или уточнять феноменологические константы и функции, входящие в ту или иную модель [34—40]. Подобные исследования одномерных моделей и изучение механизмов деформирования и разрушения позволяют определить границы применимости их обобщений на многомерный случай.

В данном разделе представлены численные решения конкретных задач деформирования и разрушения как преград, так и ударников. Рассматриваются процессы деформирования ударника и преграды при малой величине скорости встречи, когда разрушений в материале не возникает. Проведено сравнение численного решения с экспериментальными данными. Приведены решения задач о закритическом откольном разрушении при нагружении преграды по нормали жесткой массой и деформируемой пластиной. Исследовано влияние геометрических размеров ударника и преграды на область разрушения. Показано, что для пластин закритическое откольное разрушение возникает в зоне взаимодействия трех волн разгрузки сжатия вблизи периферии ударника и распространяется к центру преграды. Рассмотрена задача о наклонном ударе пластины по абсолютно жесткой преграде. Данная постановка связана с применением



численного моделирования к проблеме сварки взрывом и, в частности, к вопросу теоретического обоснования нижней границы сварки для металлических материалов, у которых существенное влияние на деформирование оказывают прочностные свойства.

### **3.4.1. Процесс деформирования при соударении пластин**

Прежде чем исследовать процессы разрушения материалов при соударении пластин, необходимо изучить процессы деформирования и распространения волн в пластинах. Задаче об ударе летящей пластины по жесткой или деформируемой преграде повезло в гораздо меньшей степени по сравнению с задачей об ударе стержня, которая привлекает внимание исследователей начиная с пионерской работы Тейлора и до настоящего времени.

Процесс взаимодействия пластин конечного радиуса нашел широкое применение в экспериментальных исследованиях физико-механических свойств материалов [41], где анализ результатов эксперимента проводится на основе одноосно деформированного состояния, поскольку в этом случае остается только одна компонента тензора деформации. Наличие свободных боковых поверхностей приводит к формированию волн разгрузки сжатия, что существенно усложняет волновую картину во взаимодействующих телах и приводит к неоднородному деформированию с искажением первоначальной формы как налетающей, так и покоящейся пластины.

Рассмотрим задачу о взаимодействии двух медных пластин. В расчете использовались следующие параметры меди: плотность  $\rho = 8,9 \text{ г/см}^3$ , модули сдвига  $\mu = 0,46 \text{ Мбар}$  и объемного сжатия  $K = 1,39 \text{ Мбар}$ , предел текучести  $Y_0 = 2,8 \text{ кбар}$ .

Пусть пластина-ударник по нормали налетает на покоящуюся пластину. На рис. 3.22 приведено положение пластин на момент соударения. Скорость налетающей пластины взята из описанного ниже эксперимента.

От поверхности контакта как в ударник, так и в преграду распространяются волны сжатия, а со свободных поверхностей, которых достигает область сжатия, формируются волны разгрузки. Поскольку преграда и ударник выполнены из одного материала, то величина массовой скорости за фронтом волны сжатия равна половине величины начальной скорости налетающей пластины.



После выхода волны сжатия на тыльную поверхность пластины-ударника происходит формирование веера волн разгрузки, в котором осуществляется полное торможение материала в области одноосно деформированного состояния. Поскольку на периферии ударника часть напряженного состояния снята за счет разгрузки через боковую поверхность и радиального течения материала, то в этой области нет полного торможения материала пластины-ударника и движение в направлении удара продолжается даже после прихода волн разгрузки с тыльной стороны ударника. После достижения тыльной поверхности преграды волна сжатия трансформируется в веер волн разгрузки, в которых материал ускоряется практически до величины начальной скорости удара. Однако область одноосно деформированного состояния в преграде имеет гораздо меньшие размеры за счет снятия напряжений сжатия с лицевой стороны. Приход волн разгрузки со стороны ударника и встреча их внутри преграды сформируют область растягивающих напряжений, которые будут ускорять материал преграды, лежащий вблизи контактной поверхности, что приведет к возникновению полости между преградой и ударником в центральной части (рис. 3.23). Поскольку центральная часть пластины-ударника остановилась, а периферийная часть продолжает движение, то ударник приобретает форму опрокинутой тарелки.

Для проверки адекватности результатов численного моделирования были проведены эксперименты по соударению медных пластин [42]. Пластина-ударник (радиус  $R = 2,0$  см, толщина  $H = 0,4$  см) металась продуктами взрыва на медную преграду толщиной  $H = 1,0$  см. Схема эксперимента приведена на рис. 3.24, где 1 — детонатор, 2 — ударник, 3 — заряд ВВ, 4 — преграда, 5 — обойма. Для устранения краевых эффектов в процессе метания ударник без зазора помещался в обойму из того же материала. Преграда покоилась на подставке из дерева.

Обойма устанавливалась под углом  $\beta$  к преграде, чтобы в процессе

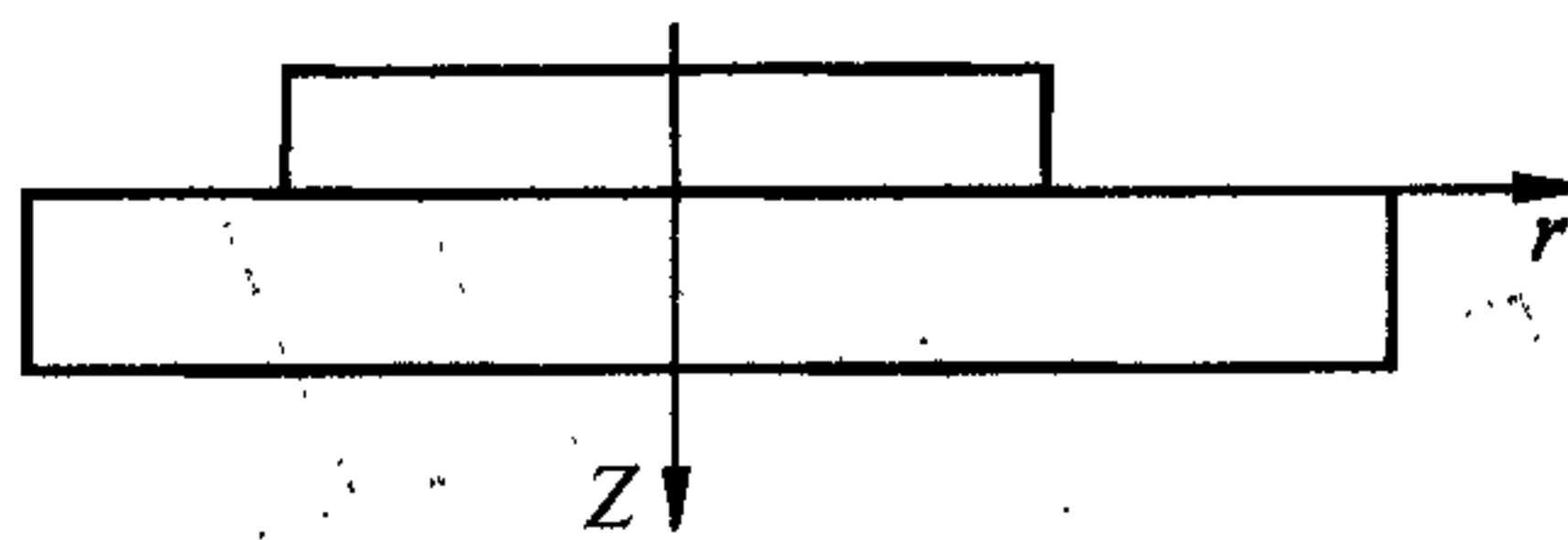


Рис. 3.22. Положение пластин в начальный момент времени.

Поясн. см. в тексте.

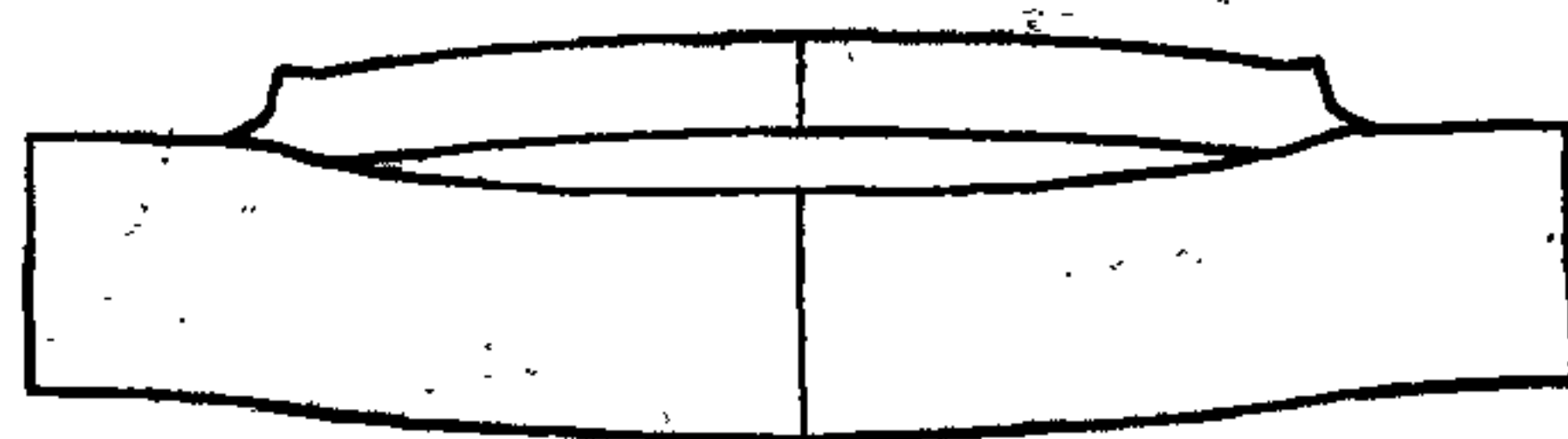


Рис. 3.23. Деформация пластин на момент разделения.

Поясн. см. в тексте.

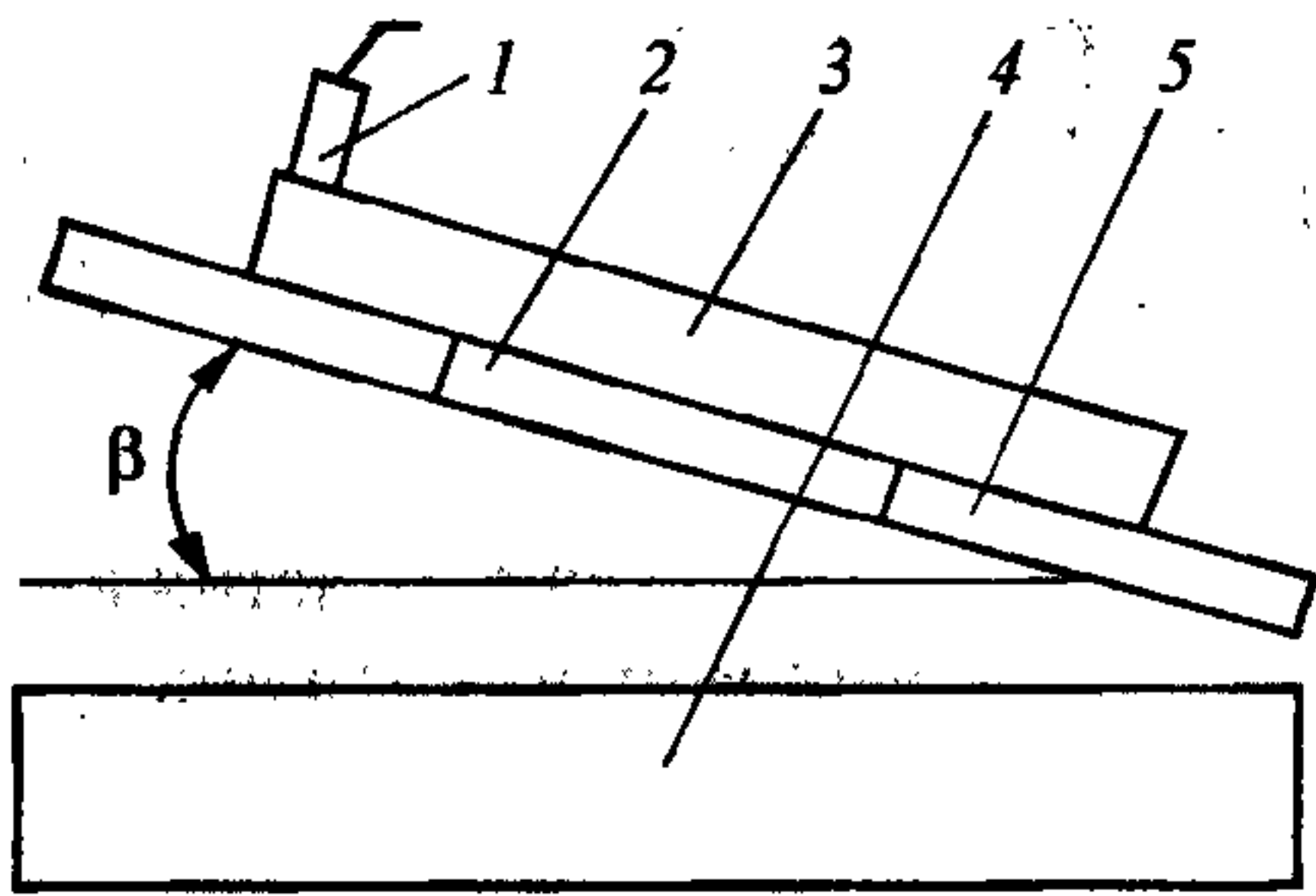


Рис. 3.24. Схема экспериментальной сборки для метания пластины.

Поясн. см. в тексте.

где  $\gamma$  — показатель политропы продуктов взрыва,  $m_{ВВ}$  — масса заряда ВВ на единицу площади пластины-ударника,  $m_y$  — масса единицы площади ударника,  $\delta_0$  — толщина заряда ВВ,  $h$  — расстояние между пластинами. При  $y > 0,5$  с увеличением расстояния между пластинами угол поворота  $\beta$  изменяется незначительно [31], поэтому в данных экспериментах минимальное расстояние между пластинами выбиралось больше  $2\delta_0$ .

Для метания сборки ударник—обойма использовались смеси аммонита 6ЖВ с аммиачной селитрой. Заряд изготовлялся несколько меньших размеров по сравнению с обоймой, что позволяло выделить ударник, так как обойма разворачивалась и оставляла на преграде отпечаток большего диаметра по сравнению с ударником.

С помощью контактных датчиков и частотомера экспериментально измерялась скорость детонации ВВ. По известным значениям угла поворота и скорости детонации находилась величина скорости ударника, которая в нашем случае была равна 228 м/с. После эксперимента ударник и преграда были рассечены и сделаны фотографии.

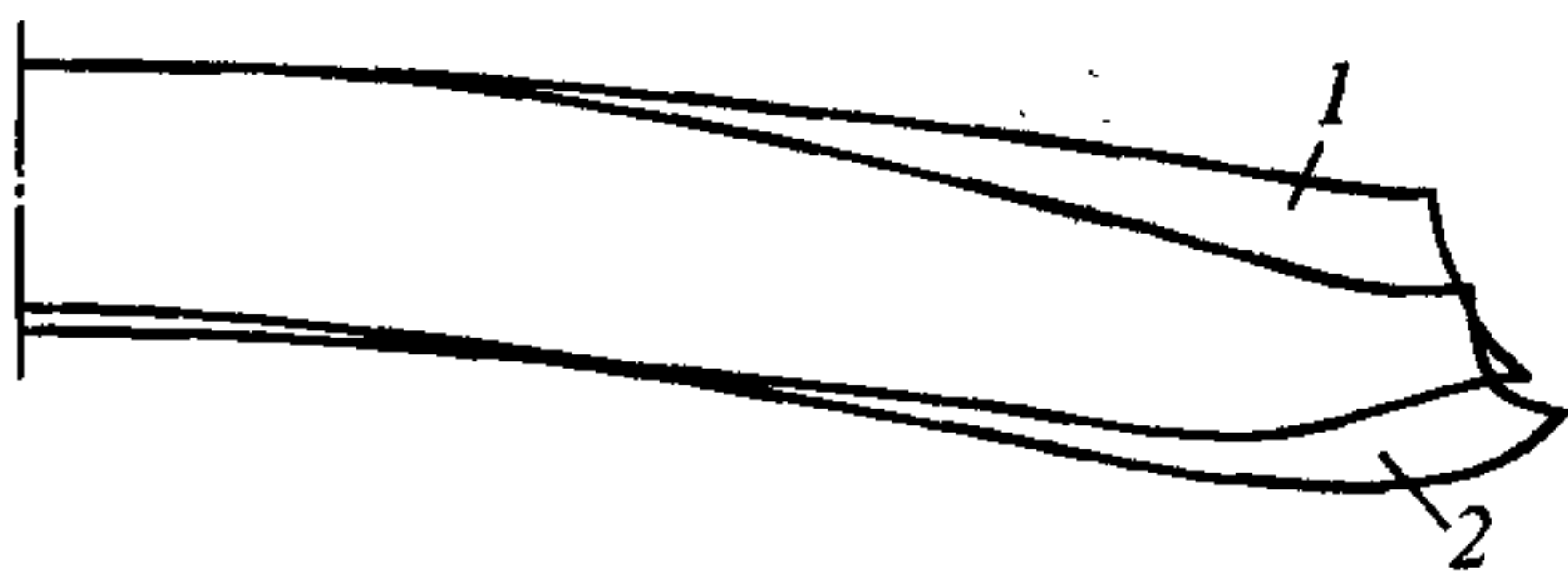


Рис. 3.25. Сравнение поперечного сечения пластин (1 — расчет, 2 — эксперимент).

метания скользящей детонационной волной получить плоский удар. Величина угла рассчитывалась по формулам из работы [43]:

$$\beta = \frac{\pi r [(\gamma + 1)/(\gamma - 1)]^{1/2}}{[2(r + 2,81 + 0,184/y)]},$$

$$U_0 = 2D \sin(\beta/2), \quad r = m_{ВВ} / m_y,$$

$$y = \delta_0 / h,$$

где  $\gamma$  — показатель политропы про-

Сравнение результатов расчета и данных эксперимента приведено на рис. 3.25, где представлены контуры сечений пластин. Из рисунка ясно видно подтверждение предложенного выше механизма деформирования соударяющихся пластин. Некоторые от-



личия форм пластин (расчета и эксперимента) можно отнести на неполноту соответствия условий взаимодействия в расчете и эксперименте.

### **3.4.2. Откольные разрушения материала преграды при нагружении ударом летящего тела**

Для исследования динамических прочностных свойств материалов на разрыв нашла широкое применение схема нагружения изучаемого материала ударом высокоскоростной пластинки. Однако анализ экспериментальных данных проводился для области одноосно деформированного материала. Численное моделирование процессов откольного разрушения в основном представлено одномерными расчетами с различной кинетикой накопления повреждений (см., например, работы [34—37] и библиографию в них). Двумерные расчеты проводились в континуальном приближении [44, 45] и лишь немногие с явным выделением макрополостей разрывов сплошности материала [46—48]. Краевым эффектам в экспериментальном плане посвящена только работа [49]. Сложность моделирования макрополостей заключается в способе локализации разрыва (векторный критерий разрушения) и отслеживании динамики его развития, поскольку приходится адаптировать расчетную разностную сетку, в общем случае, к криволинейным границам разрыва.

Рассмотрим задачу о нагружении упругопластической пластины конечных размеров ударом жесткой массы. Использование в расчете в качестве ударника жесткой массы имеет свои преимущества, так как значительно упрощается решение контактной задачи, не требуется разбиения области, занимаемой жестким телом, на счетные ячейки, что высвобождает память ЭВМ и уменьшает время счета задачи [50—53].

Пусть жесткий ударник (масса  $m$ , радиус  $R_1$ ) по нормали со скоростью  $U_0$  налетает на неподвижную деформируемую преграду (радиус  $R_2$ , толщина  $H$ ). Положение ударника и преграды на момент удара приведено на рис. 3.22.

Формулировка задачи: в любой момент времени  $t > 0$  в области  $D(\mathbf{x}, t)$ , занимаемой преградой, найти функции  $\{ \mathbf{x}(t), U(\mathbf{x}, t), \rho(\mathbf{x}, t), \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t), e(\mathbf{x}, t) \}$ , удовлетворяющие уравнениям упругопластической среды, условию откольного разрушения  $\sigma_1 > \sigma_1^*$  и начальным данным:  $\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x})$ ,  $U(\mathbf{x}, 0) = 0$ ,  $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, 0) = 0$ . При этом:



на свободной от напряжения поверхности реализуются условия  $\sigma_n = \sigma_\tau = 0$ ;

на контактной поверхности преграды с жестким ударником реализуются условия скольжения материала без трения с возможностью свободного отхода.

Так, для сжимающих напряжений будем иметь:  $U(x, t) = U(t)$ ,  $\sigma_\tau = 0$ ,  $\sigma_n < 0$ .

Далее, для замыкания задачи необходимо дополнить систему уравнением движения жесткого ударника под действием сил сопротивления со стороны преграды:

$$m \frac{dU}{dt} = F(t),$$

где вектор силы  $F(t)$  находится интегрированием вектора плотности сил по поверхности контакта с учетом третьего условия  $\sigma_n < 0$  из (3.1.17):

$$F(t) = \int_S \sigma_n ds.$$

Для плоского торца ударника это выражение имеет вид:

$$F(t) = \int_0^{R_1} \sigma_{zz} r dr.$$

В качестве критерия разрушения принята схема мгновенного откола по главному растягивающему напряжению. Направление площадки разрушения не учитывалось, а разрыв сплошности материала проходил только между линиями разностной сетки. Область разрушения в этом случае состоит из набора дискретных разрывов, не связанных между собой, что обусловлено указанным выше ограничением. Однако применение даже столь приближенного подхода позволило выявить некоторые закономерности процесса разрушения и влияние геометрических размеров на область повреждения материала преграды [54, 55].

Все расчеты проведены для преград из материала типа сталь со следующими характеристиками:  $\rho = 7,85$  г/см<sup>3</sup>,  $K = 1,7$  Мбар,  $\mu = 0,8$  Мбар,  $Y = 10,0$  кбар,  $\sigma_1^* = 81,9$  кбар (предел прочности на разрыв  $\sigma_1^*$  взят из работы А. П. Рыбакова [56]),  $U_0 = 960$  м/с. Применимость критерия мгновенного откола для моделирования данных экспериментов обоснована в [57]. Толщина преград для всех расчетных вариантов составляла  $H = 1,0$  см.

Влияние сеточных параметров на профиль волны сжатия — растяжения и

на область разрушения выяснено в расчетах с разными пространственными шагами разностной сетки. Профили максимального главного растягивающего напряжения показаны на рис. 3.26. Сплошной линией изображены профили для шага сетки  $h = 0,05$  см, косым крестом —  $h = 0,0333$  см, а треугольником —  $h = 0,025$  см на три момента времени: 1 —  $t = 1,0$  мкс, 2 —  $t = 1,4$  мкс, 3 —  $t = 1,8$  мкс. Некоторые различия поведения профилей обусловлены тем, что в явной разностной схеме шаг интегрирования по времени выбирается из условия устойчивости счета, поэтому, например, отсчет на момент времени  $t = 1,0$  мкс на самом деле означает для разных величин шагов сетки следующие значения: 1,0059, 1,0143, 1,0047 мкс. В целом же разброс значений напряжения для расчетов с разными шагами разностной сетки не превышает 5 %.

На рис. 3.27 приведено сравнение областей разрушения материала преграды, полученных в расчетах на сетках с различными шагами. Обозначения те же, что и на рис. 3.26. При увеличении числа разностных ячеек в расчетной области число разрывов сплошности материала возрастает, но тенденция в их расположении сохраняется. Таким образом, сеточные параметры необходимо выбирать из соотношения между точностью и продолжительностью времени счета (стоимостью). Для получения общей картины разрушения можно брать не слишком большое число разностных ячеек, например, 10—15 на толщину преграды.

Причину расположения разрывов сплошности материала на криволинейной поверхности следует искать в механике движения и взаимодействия фронтов волн сжатия и их разгрузки со стороны свободных поверхностей. Так, при соударении твердых тел от поверхности контакта внутрь тела распространяется волна сжатия. Взаимодействие волн сжатия со свободными границами тела приводит к формированию волн разгрузки сжатия, при встрече которых обра-

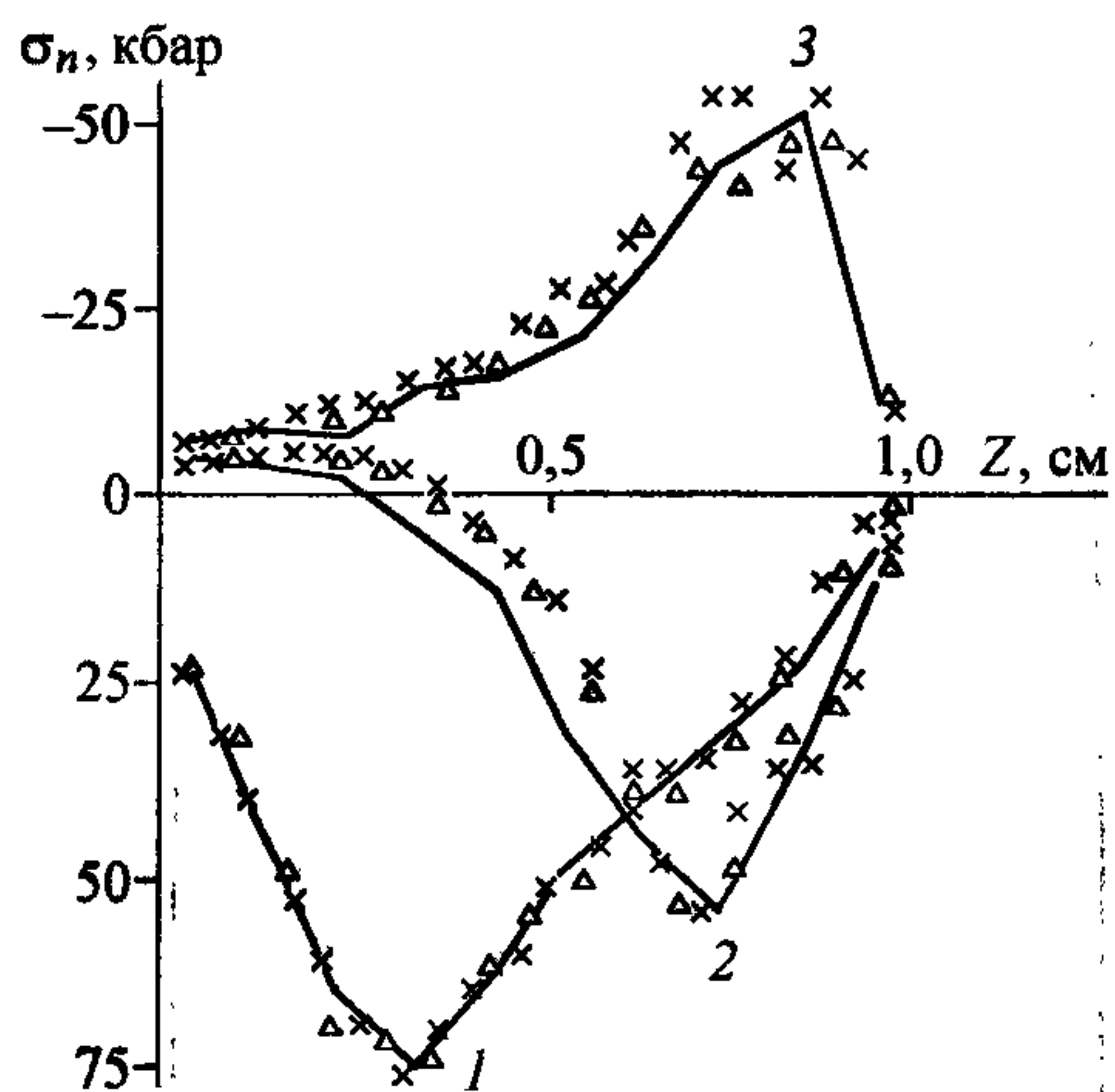


Рис. 3.26. Влияние числа разностных ячеек на профиль волны напряжений при нагружении пластины ударом жесткой массы.

Поясн. см. в тексте.



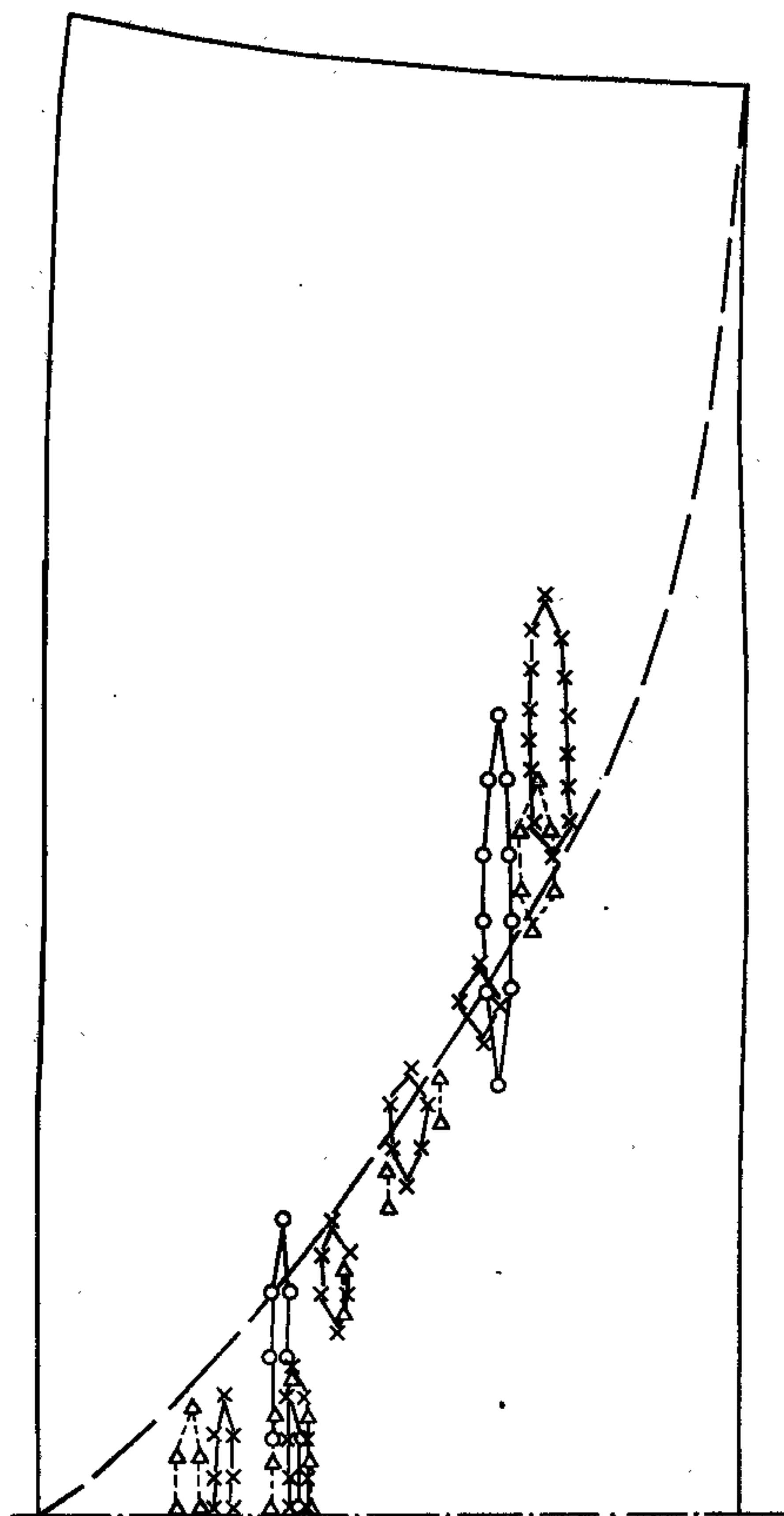


Рис. 3.27. Сравнение числа макро-разрывов и их расположения в зависимости от числа ячеек в счетной области.

Поясн. см. в тексте.

когда фронт волны сжатия достигает тыльной поверхности. В этот момент начинает формироваться фронт волны разгрузки с тыльной поверхности, который встречает тороидальный (в плоском случае — цилиндрический) фронт волны разгрузки с периферии ударника (рис. 3.28).

Наличие волны разгрузки сжатия с периферии ударника хорошо видно на рис. 3.29, где приведено поле изолиний  $\sigma_{zz}$  компоненты тензора напряжений [58, 59].

Взаимодействие трех волн разгрузки сжатия происходит вблизи тыльной поверхности, здесь формируется область растягивающих напряжений несколько раньше, чем в плоскости одноосного деформирования, что может привести к возникновению откольного разрушения в этой области и слиянию его с основ-

зуются области растягивающих напряжений. Если величина растягивающих напряжений достигает предела прочности на разрыв, то происходит нарушение сплошности материала.

В случае нагружения деформируемой преграды ударом жесткой массы профиль волны сжатия имеет почти треугольную форму, т.е. сразу же за сжатием материала преграды на границе контакта начинается торможение жесткого ударника (см. рис. 3.26). С периферии ударника в преграде так же формируется волна разгрузки сжатия за счет свободного движения материала с лицевой стороны преграды. Таким образом, у тыльной поверхности преграды существует область, где происходит взаимодействие фронтов трех волн разгрузки — с лицевой стороны, с тыльной поверхности и с периферии ударника. В акустическом приближении можно построить линию взаимодействия фронтов боковой и тыльной волн разгрузки на фоне волны разгрузки сжатия с лицевой стороны преграды. Пусть  $t$  — момент времени,



ным разрывом сплошности в плоской волне растяжения. Данное явление можно обнаружить в следующем (численном или реальном) эксперименте. Если проводить измерение зависимости величины скорости тыльной поверхности от времени в двух различных по радиусу местах, как это показано на рис. 3.30, то из показаний датчика 2 следует, что откольное разрушение вблизи периферии ударника происходит раньше по времени, чем в центре — датчик 1. Разрыв расположен ближе к тыльной поверхности, так как величина периода колебаний значения скорости меньше, чем в центре. Величина периода колебаний  $T$  значения скорости связана с толщиной откола  $L$  следующим образом:  $T = 2L/c$ , где  $c$  — скорость распространения возмущений в материале преграды. Отметим, что форма профиля зависимости значений скорости от времени качественно соответствует экспериментальным данным (см., например, [60]). Количественно же величина скорости примерно в два раза выше экспериментального значения. Это связано с тем, что жесткий ударник превращает скорость контактной поверхности практически в массовую скорость.

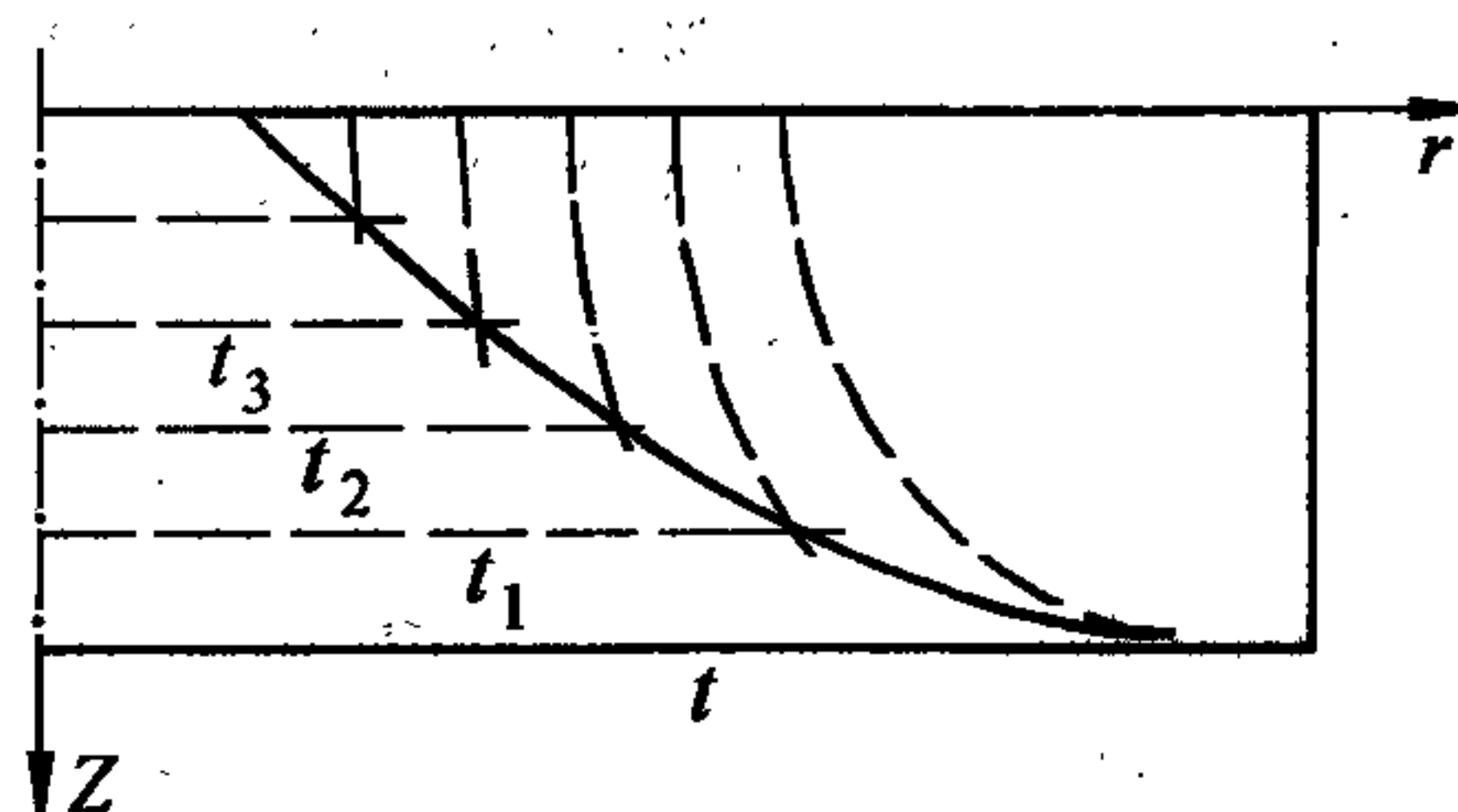


Рис. 3.28. Построение линии взаимодействия трех волн разгрузки для разных моментов времени.

$$t < t_1 < t_2 \dots$$

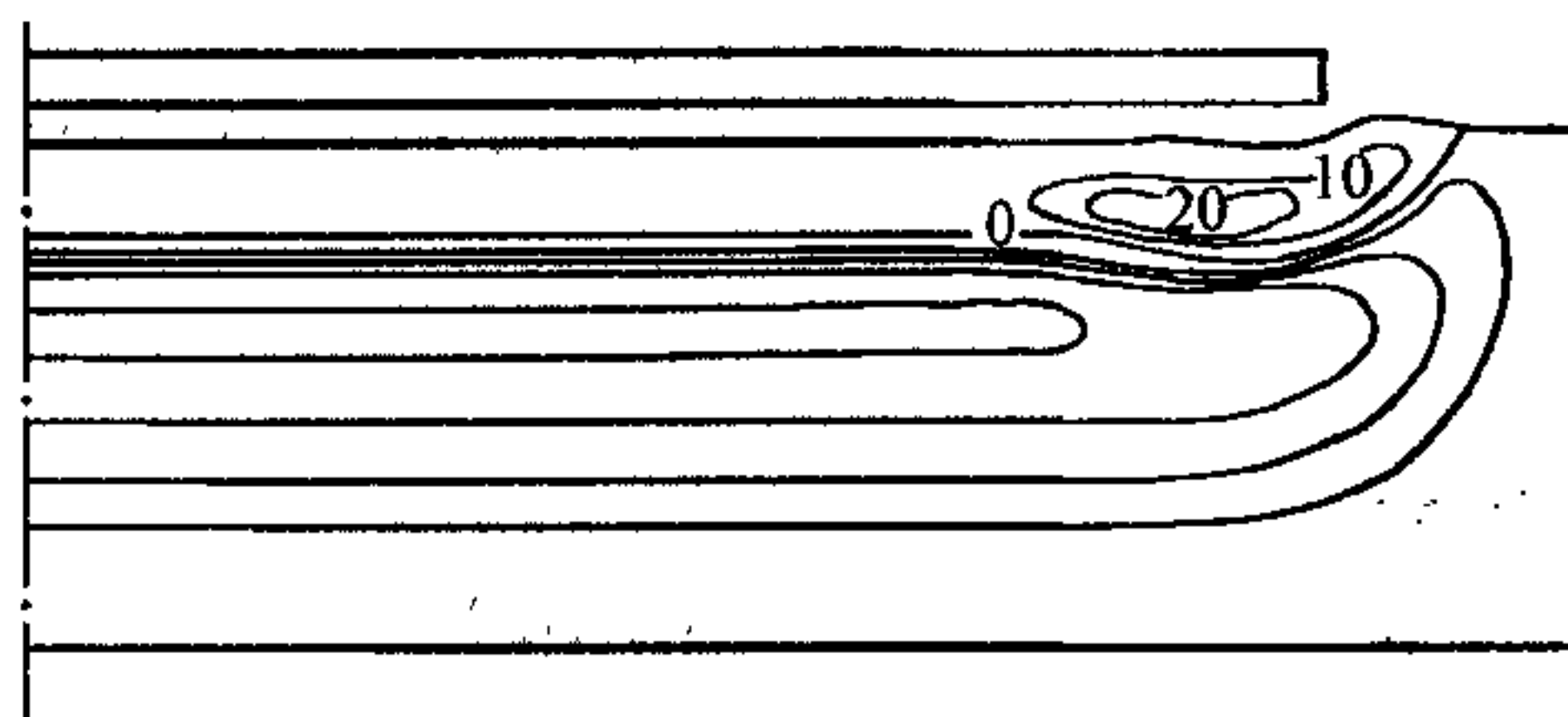


Рис. 3.29. Изолинии напряжений  $\sigma_{zz}$ .

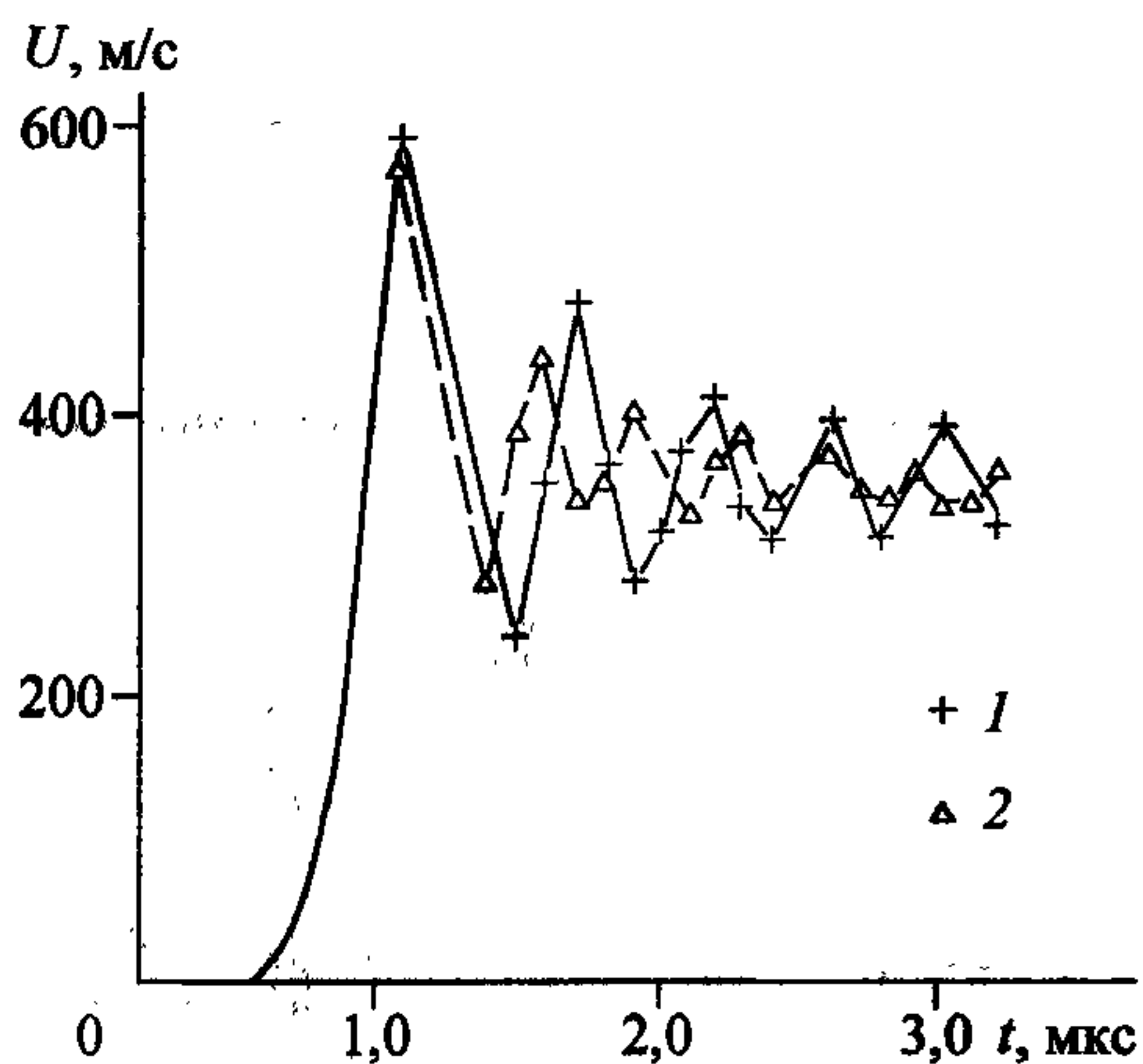


Рис. 3.30. Расчет поведения скорости тыльной поверхности при отколе (1 — в центре, 2 — на периферии пластины).

Влияние радиуса преграды на область разрушения определялось в серии расчетов с уменьшением радиуса преграды в полтора и два раза. Результаты расчетов на момент времени  $t = 5,0$  мкс приведены на рис. 3.31 для всей серии, штрих — линия взаимодействия трех волн нагрузки. Тенденция расположения разрывов сплошности остается неизменной, а радиус плоской части разрыва, естественно, уменьшается пропорционально уменьшению радиуса преграды. Некоторые различия в числе и расположении разрывов объясняются конечной шириной волн сжатия и веера волн разгрузки, а также влиянием разностной сетки, так как фронты волн имеют криволинейную форму.

Исследование влияния радиуса ударника на область разрушения проводилось в серии расчетов с постоянным радиусом преграды, а радиус ударника уменьшался в два и три раза. Результаты расчетов на момент времени  $t = 50$  мкс изображены на рис. 3.32, где штрихом показана линия взаимодействия трех волн разгрузки. Уменьшение радиуса ударника также приводит к сокращению области одноосного деформирования и усложнению структуры области разрушения вблизи оси симметрии.

Таким образом, при использовании в качестве налетающей пластинки жесткой массы был обнаружен интересный факт: макроразрыв сплошности материала в сильных волнах растяжения зарождается в области взаимодействия трех волн разгрузки, а лишь затем происходит откол по всей плоскости в области одноосно деформированного состояния в центральной части преграды. Точность локализации разрывов составляет половину шага разностной сетки

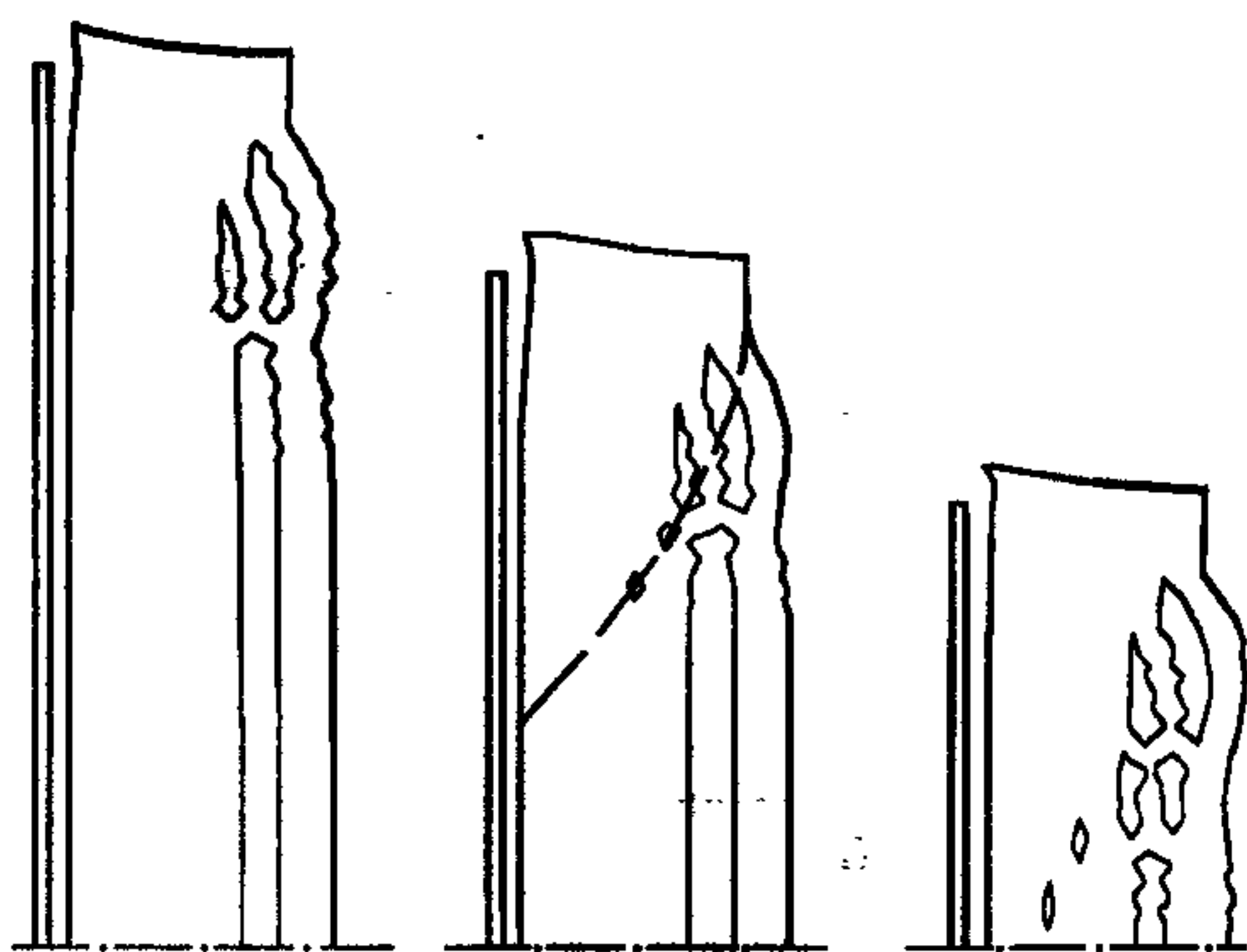


Рис. 3.31. Влияние радиуса мишени пластины на область откольных разрушений.

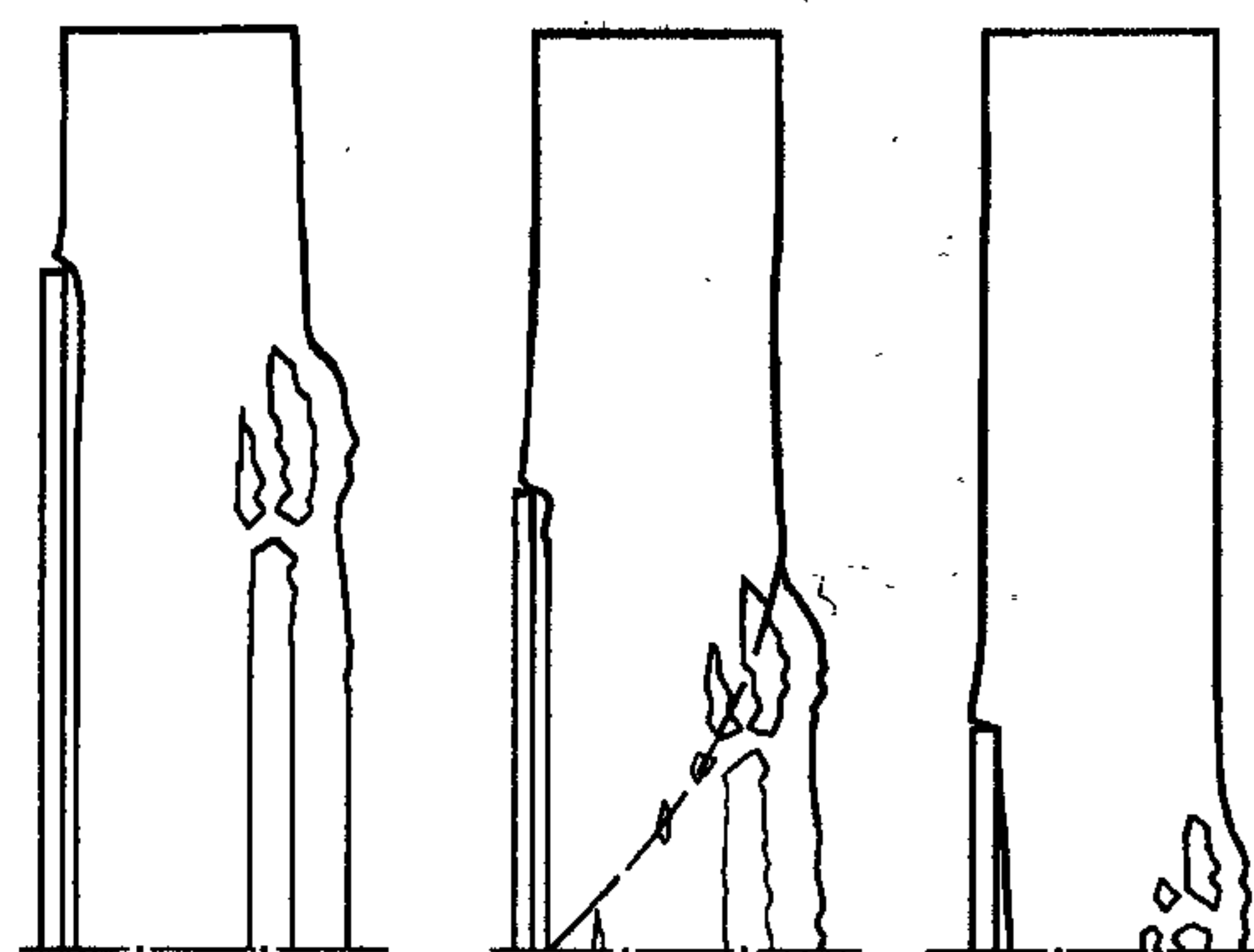


Рис. 3.32. Влияние радиуса налетающей пластины на область откольных разрушений.



по пространству, т.е. даже достаточно грубые сетки позволяют предсказать положение и форму полостей макроразрывов сплошности материала.

Как было показано ранее, наличие свободных поверхностей у соударяющихся пластин конечных размеров оказывает существенное влияние на процесс деформирования. Далее выясняется механизм влияния конечности радиуса пластин на формирование криволинейных разрывов сплошности материала при закритическом откольном разрушении.

Рассмотрим задачу о соударении двух деформируемых пластин конечных размеров для случая аксиальной симметрии. Пусть пластинка (радиус  $R_1$ , толщина  $h_1$ ) с начальной скоростью  $U_0$  налетает по нормали на неподвижную преграду (радиус  $R_2$ , толщина  $h_2$ , причем  $h_2 = (2 + 5)h_1$ ). Начальное положение пластин на момент удара приведено на рис. 3.22. Во всех расчетах использовался материал типа сталь, значения параметров которого даны выше.

Для верификации предложенных векторного критерия откольного разрушения и алгоритма явного выделения полостей макроразрывов сплошности материала проведено численное моделирование одного из экспериментов работы [56].

Пусть стальная пластина толщиной  $h_1 = 0,106$  см, радиусом  $R_1 = 1,2$  см со скоростью  $U_0 = 960$  м/с сталкивается по нормали с неподвижной стальной преградой (радиус  $R_2 = 1,5$  см, толщина  $h_2 = 1,0$  см). От поверхности контакта как в ударник, так и в преграду распространяются волны сжатия. В ударнике со свободной боковой поверхности формируется веер волн разгрузки сжатия, а в преграде — со свободной поверхности на периферии ударника. Волна сжатия в налетающей пластине, достигнув тыльной поверхности, трансформируется в веер волн разгрузки сжатия. Поскольку материалы ударника и преграды одинаковы, то центральная часть ударника, не захваченная веером волн разгрузки с боковой поверхности ударника, останавливается. В силу этого веер волн разгрузки проходит в преграду, “не замечая” поверхности контакта. Таким образом, в центральной части ударника и преграды существует область одноосного деформирования и распространяется импульс конечной длины. С периферии ударника внутрь преграды распространяется тороидальная область растягивающих напряжений, которая сформировалась в результате взаимодействия двух волн разгрузок — с тыльной стороны ударника и со свободной поверхности преграды на периферии ударника.



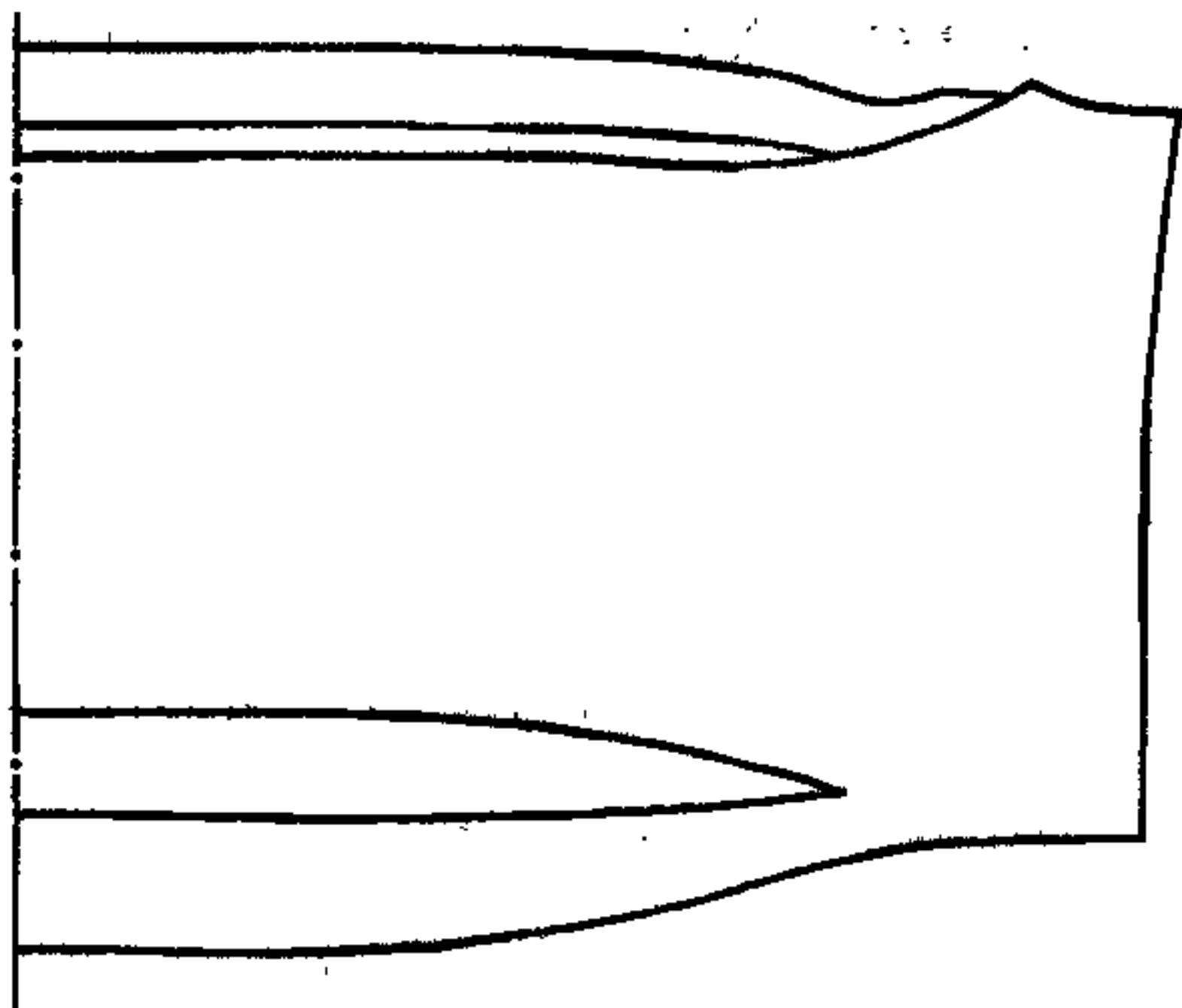


Рис. 3.33. Расчет откольного разрушения ( $U_0 = 960$  м/с,  $h_1 = 0,106$  см,  $h_2 = 1,0$  см).

сторону тыльной поверхности, что облегчает формирование откольной "тарелочки". Результат расчета, иллюстрирующий данное утверждение, показан на рис. 3.33. Толщина откола в центральной части преграды  $h_f = 0,19 \pm 0,033$  см, а в эксперименте [56]  $h_{fe} = 0,1625$  см. Согласие, для расчета на достаточно грубой сетке (15 ячеек по толщине преграды), удовлетворительное.

Пример более сложного откольного разрушения на момент времени  $t = 6,0$  мкс приведен на рис. 3.34. Радиусы соударяющихся пластин одинаковы, а отношение толщин  $h_2 / h_1 = 5$ . В этом случае имеет место более сильное растекание материалов ударника и преграды в радиальном направлении по сравнению с вышеприведенным случаем, где стенка кратера в преграде стесняет движение материала ударника в радиальном направлении. Динамика процесса разрушения такова: в области взаимодействия волн разгрузки с боковой и тыльной

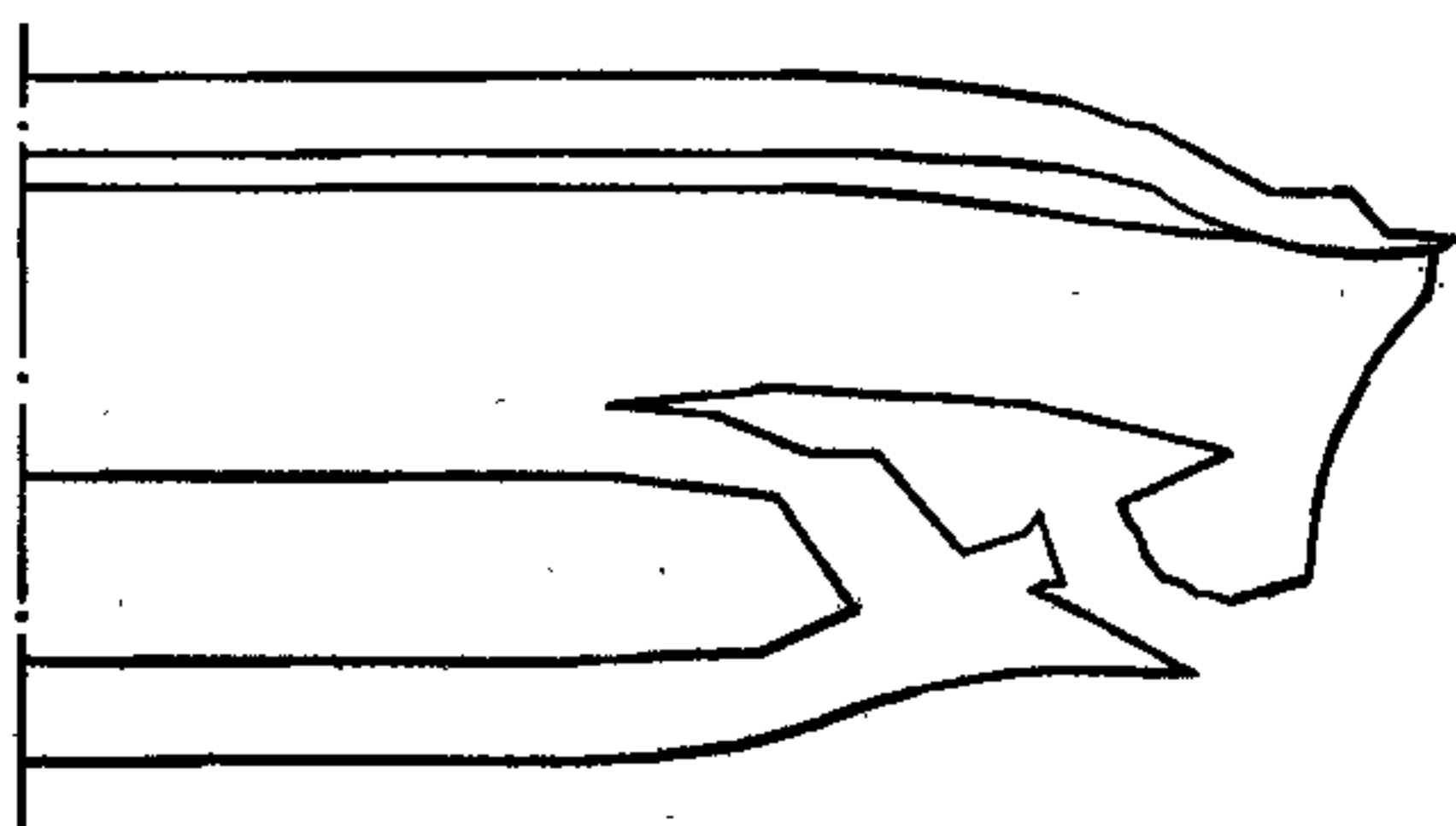


Рис. 3.34. Сложный откол.  
Поясн. см. в тексте.

При выходе волны сжатия на тыльную поверхность преграды и формировании веера волн разгрузки начинается взаимодействие его с областью растягивающих напряжений, что приводит к усилению растягивающих напряжений в этой области и возникновению откольного разрушения, причем процесс разрушения начинается раньше, чем в области одноосного деформирования. Поэтому вблизи тыльной поверхности при критическом режиме имеет место разрыв сплошности материала, направленный в

поверхностей образуется криволинейный разрыв сплошности материала, с берегов которого происходит разгрузка растягивающих напряжений, что препятствует прорастанию прямолинейного разрыва и соединению его с криволинейным разрывом.

Аналогичным явлением остановлено прорастание криволинейного разрыва в

центральную часть преграды, которое привело бы к формированию двойного откола.

На рис. 3.35 приведены результаты численных расчетов соударения стальных пластин ( $R_1 = 0,6$  см,  $h_1 = 0,3$  см,  $R_2 = 1,0$  см,  $h_2 = 0,5$  см) на момент времени  $t = 4$  мкс. Увеличение величины скорости удара с  $U_0 = 600$  м/с (рис. 3.35, а) до  $U_0 = 800$  м/с (рис. 3.35, б) приводит к усложнению области разрушений. Однако положения центральных частей ударников для различных величин скоростей удара практически совпадают, т.е. ударник передает свой импульс преграде полностью, исключение составляет периферийная часть, которая тормозится в меньшей степени из-за радиального растекания. Следует отметить, что материал на периферии ударника значительно деформирован, но поскольку в данном расчете исследуется откол в "чистом" виде, то другие типы разрушения "выключены" из расчета.

Таким образом, показана работоспособность предложенного векторного критерия разрушения, позволяющего локализовать криволинейные и сложные разрывы сплошности материала в сильных волнах растяжения. Расчетная толщина откольной "тарелочки" в центральной части преграды хорошо соответствует экспериментальному значению.

Рассмотрим явление откольного разрушения при нагружении преграды конечной толщины компактными и удлиненными деформируемыми ударниками цилиндрической формы с плоской головной частью. Радиус ударника  $R_1 = 0,5$  см, высота ударника  $H_1$  изменялась от 0,5 до 1,5 см. Начальная скорость  $U_0 = 1000$  м/с. Толщина преграды  $H_2 = 0,5$  см, а ее радиус  $R_2 = 1,5$  см. Во всех расчетах использовался материал типа сталь, параметры которого приведены ранее.

В момент удара от поверхности контакта как в ударник, так и в преграду

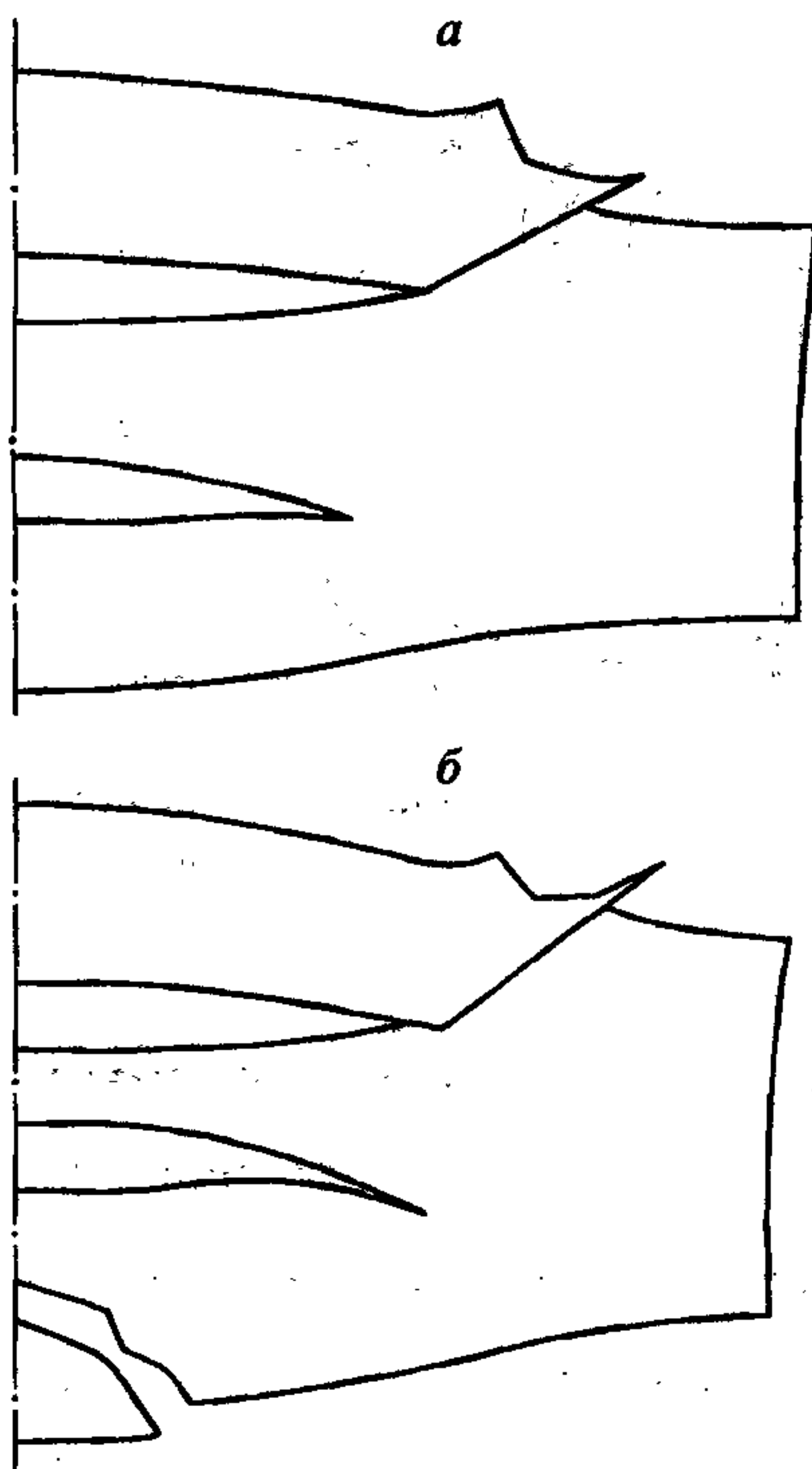


Рис. 3.35. Откол при ударе компактным телом.  
Поясн. см. в тексте.



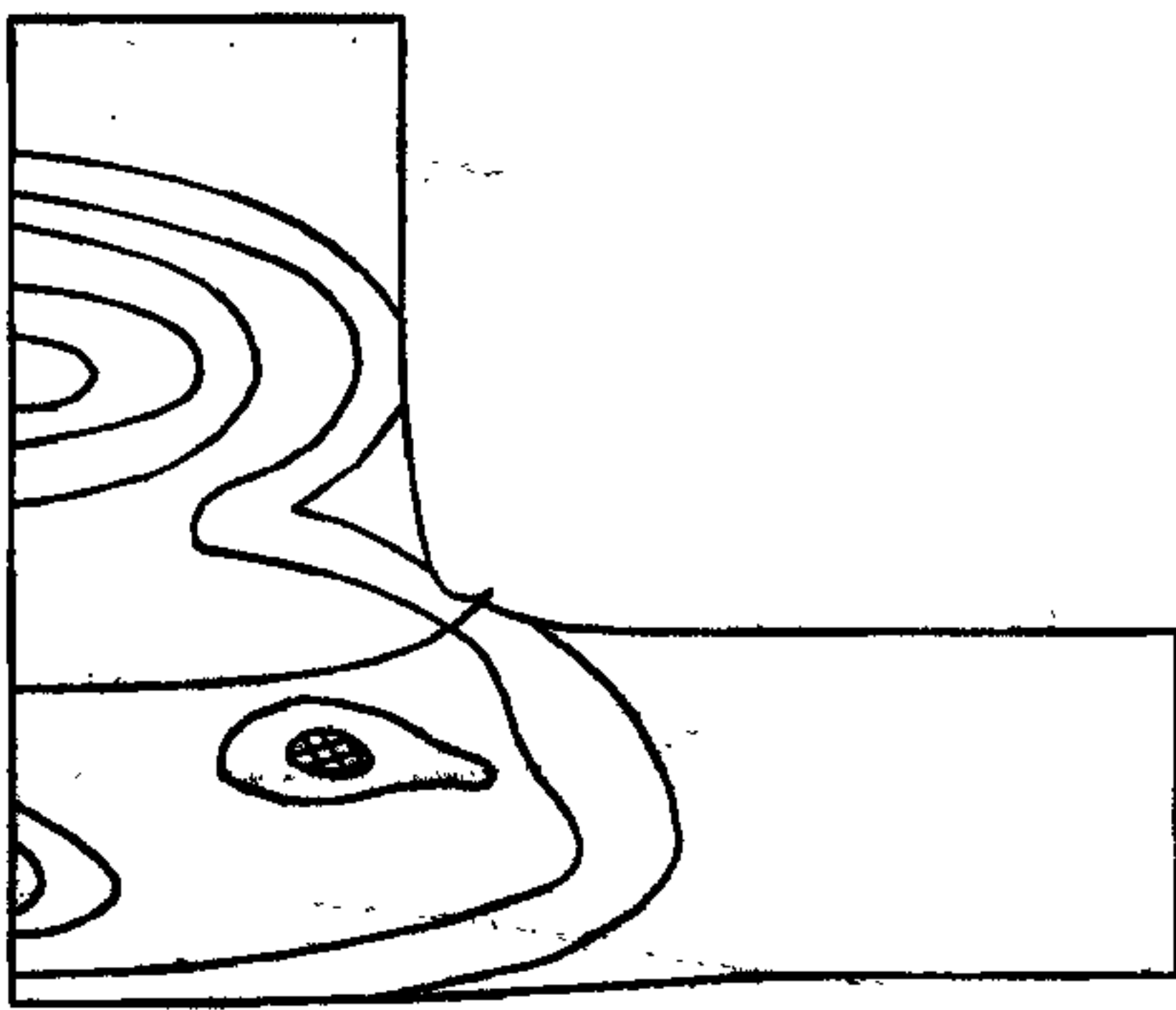


Рис. 3.36. Изобары на момент времени  $t = 1,2$  мкс.

распространяются волны сжатия. В ударнике со свободной боковой поверхностью формируется веер волн разгрузки сжатия, а в преграде — со свободной поверхности на периферии ударника (рис. 3.36).

Для достаточно тонких преград ( $H < R$ ) наблюдается явление открытия и последующего закрытия полости на границе раздела тел, которое связано с нестационарным характером торможения ударника. Поскольку ударник и

преграда из одного материала, то в области одноосного деформирования скорость контактной поверхности  $U_0$  и массовая скорость за фронтом волны сжатия равны половине скорости удара  $U_0$ . При выходе волны сжатия на свободную тыльную поверхность массовая скорость частиц преграды в веере волн разгрузки сжатия практически удвоится. В ударнике же происходит снятие скорости движения в волне сжатия до половины  $U_0$ , а в веере волн разгрузки со свободной тыльной поверхности массовая скорость стремится к нулю, т.е. в области с одноосно деформированным состоянием материал ударника останавливается. При достижении веером волн разгрузки лицевой поверхности преграды происходит разделение контактирующих границ, но не по всей площади, так как наличие боковых свободных поверхностей приводит к искажению од-

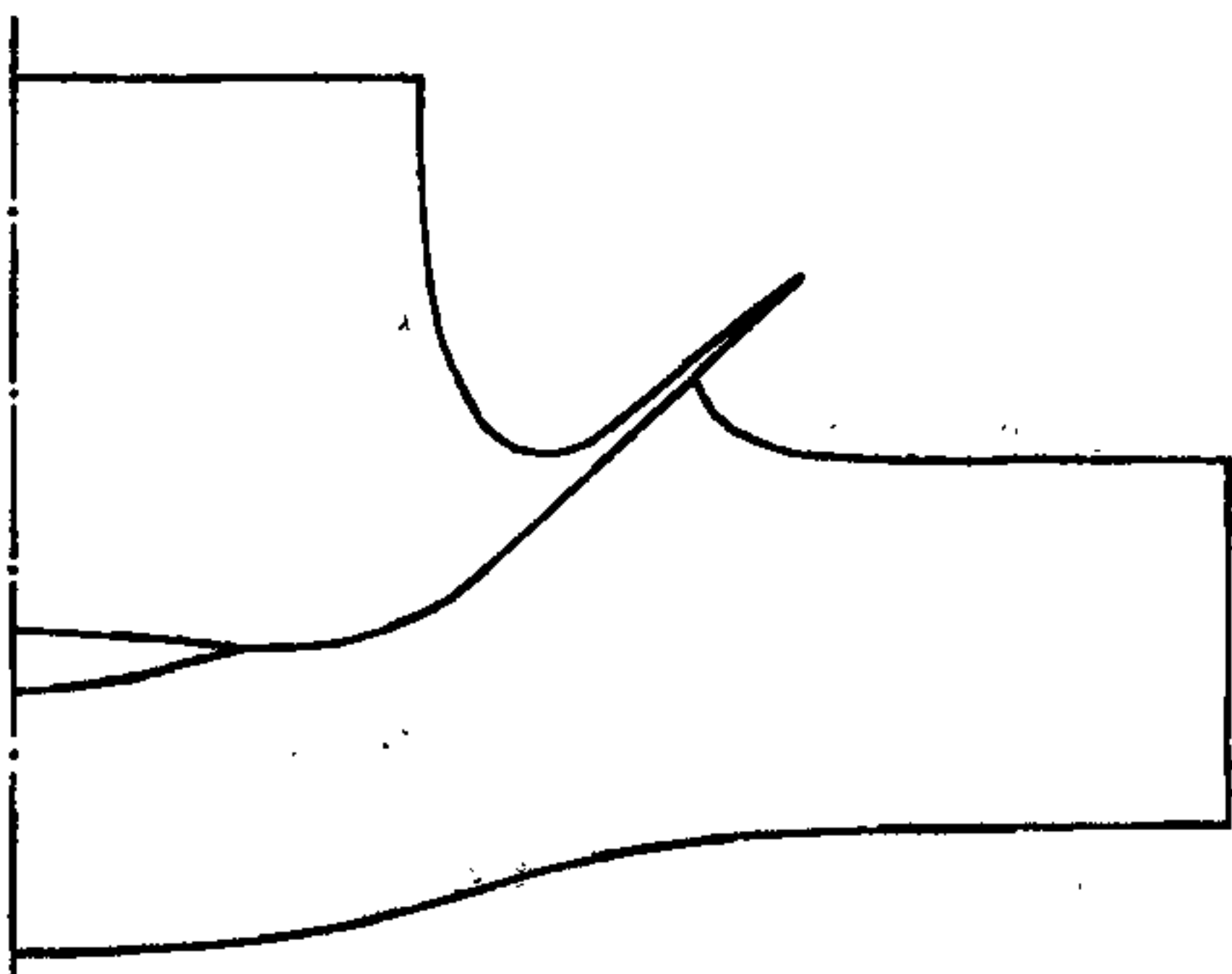


Рис. 3.37. Формирование полости в области контакта тел.  
Поясн. см. в тексте.

ноосно деформированного состояния как в ударнике, так и в преграде. Контакт тел сохраняется по кольцевой поверхности на периферии ударника. Таким образом, формируется полость в центральной части взаимодействующих тел (см. рис. 3.37, где приведено состояние ударника и преграды на момент времени  $t = 5$  мкс).

Закрытие полости обычно наблюдается для достаточно длинных ударников  $H_1 = (2 + 3)H_2$ , когда первая волна сжа-



тия трансформируется боковыми волнами разгрузки в упругую волну, которая не может затормозить движение материала ударника. В этом случае ударник, потеряв часть скорости, продолжает движение, а центральная часть преграды начинает тормозиться за счет наличия сдвиговой прочности и низкоскоростной (практически неподвижной) периферийной части. Полость постепенно закрывается и формируется вторая волна сжатия. Процесс может повториться, но в меньших масштабах, так как волны имеют меньшую амплитуду.

Откольные разрушения могут возникать не только в преграде, но и в ударнике. С этой целью проведена серия расчетов соударения компактного ударника с увеличением его длины  $H_y$  от 0,5 до 1,5 см, радиус и толщина преграды не изменялись, поэтому откольные разрушения в преграде формируются по единому механизму. Откол в ударнике наблюдается только для небольших удлинений (рис. 38, а, б). Увеличение длины ударника до  $H_y = 1,5$  см приводит к смещению времен прихода волн разгрузки и соответственно к ослаблению растягивающих напряжений в области взаимодействия. В этом случае откольных разрушений в ударнике не возникает (рис. 38, в).

Таким образом, показана возможность моделирования закритических откольных разрушений, приводящих к образованию макроразрывов сплошности материала вплоть до отделения фрагментов от преграды.

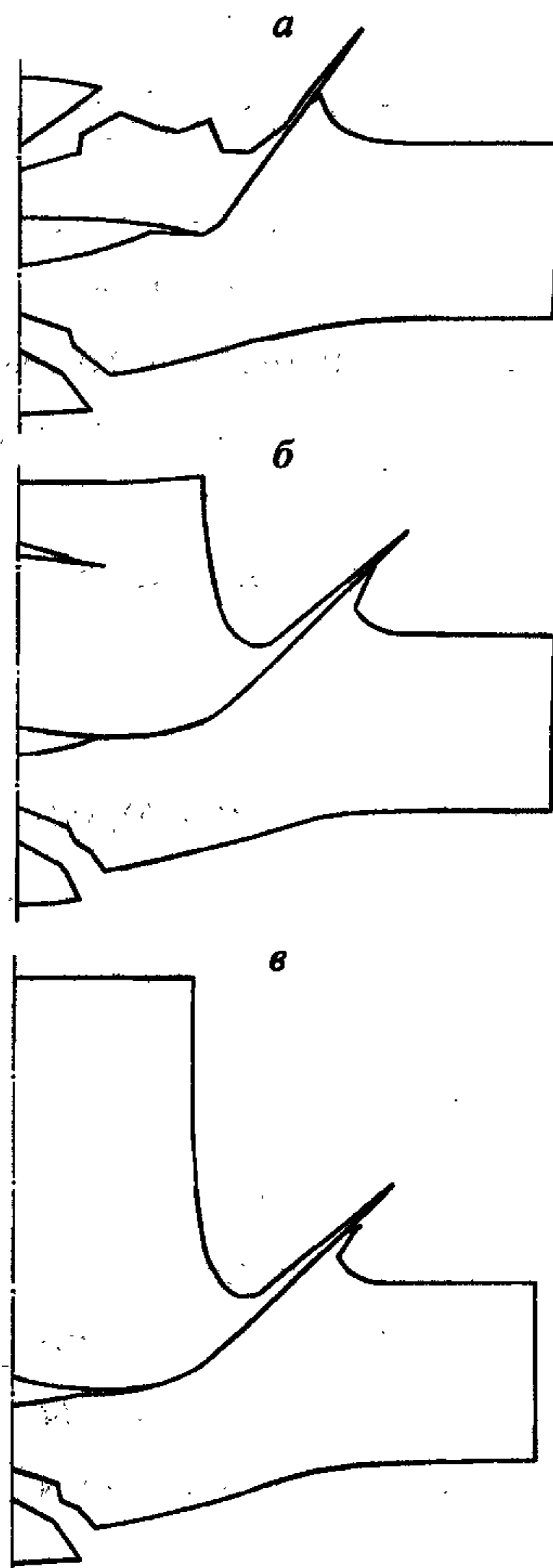


Рис. 3.38. Откольные разрушения при погружении пластины стержнями с разным удлинением (а —  $H_p = 0,5$  см, б —  $H_p = 1,0$  см, в —  $H_p = 1,5$  см).

### 3.4.3. Соударение пластины с абсолютно жесткой преградой под углом

Известно [43], что при косом соударении металлических пластин возможно их прочное соединение. Если разгон пластин осуществляется с помощью взрывчатого вещества, то такое явление принято называть сваркой взрывом.

В общем случае математическое моделирование процесса сварки взрывом является отдельной самостоятельной задачей. Здесь мы рассмотрим лишь один аспект этой проблемы, связанный с определением нижней границы сварки.

Экспериментальные данные показывают, что имеются три параметра, определяющие процесс косого столкновения: скорость столкновения  $U_0$ , угол столкновения  $\gamma$  и скорость точки контактов  $U_k$ . При постоянной скорости точки контакта между этими величинами из геометрических соображений устанавливается простая связь

$$U_0 = U_k \sin \gamma.$$

Поэтому два параметра из трех могут выбираться независимо. Часто представляют результаты экспериментов на плоскости, где в качестве осей координат выбираются начальный угол между пластинами и скорость точки контакта. Точки значений параметров, при которых произошло соединение пластин, помечают знаком плюс, а где не произошло соединение — знаком минус. В этих обозначениях выделяется область, где сварка происходит достаточно стабильно. Однако границу этой области сварки не всегда можно точно определить, так как процесс соединения материалов зависит еще от ряда других условий [43].

В качестве одного из необходимых условий образования прочного соединения при сварке взрывом считается образование струи материала в области точки контакта соударяющихся пластин, что доказано многочисленными экспериментальными данными. С этим фактом связаны гипотезы, на которых основаны теоретические изыскания для определения нижней границы сварки взрывом.

Рассмотрим следующую постановку задачи [61]. Пусть есть две одинаковые пластины, установленные под углом  $2\gamma$  и имеющие одинаковые скорости  $U_0$ , направленные навстречу друг другу перпендикулярно поверхностям. Тогда биссектриса угла будет плоскостью симметрии, и задача сводится к исследованию соударения одной пластины с абсолютно жесткой преградой под углом  $\gamma$ .



На рис. 3.39, 3.40 показаны схемы эксперимента и расчета (толщина пластины  $H = 0,5$  см, ее длина  $L = 2,0$  см). Из гидродинамической теории известно, что в случае модели жидкости в такой постановке всегда должна появляться струя, причем в нее уходит слой жидкости высотой  $\delta = H \sin^2(\gamma/2)$ , где  $H$  — исходная толщина пластины. Поэтому разностная сетка в пластине строилась таким образом, чтобы размер ячеек в слое, контактирующем с преградой,  $h_{\min}$  был меньше  $\delta$ . Высота остальных ячеек увеличивалась по геометрической прогрессии. Всего по толщине выбрано 11 узлов, а по длине — 41 узел. Момент образования струи фиксировался по следующему алгоритму — рассматривалось распределение скорости контактирующих с преградой узлов разностной сетки и если среди всех этих узлов появлялись хотя бы два, в которых знак касательной компоненты скорости менял знак, полагалось, что в этом случае возможно появление струи. Выбор такого критерия основан на классической схеме течения в набегающей на преграду струе жидкости [62]. В потоке существует траектория движения частиц жидкости, разделяющая струю на две части. В точке этой траектории на преграде касательная составляющая скорости равна нулю. Расчеты показали, что для модели жидкости такая ситуация возникает всегда, в то время как для среды с прочностью появление такой точки обусловлено начальной скоростью удара и углом соударения.

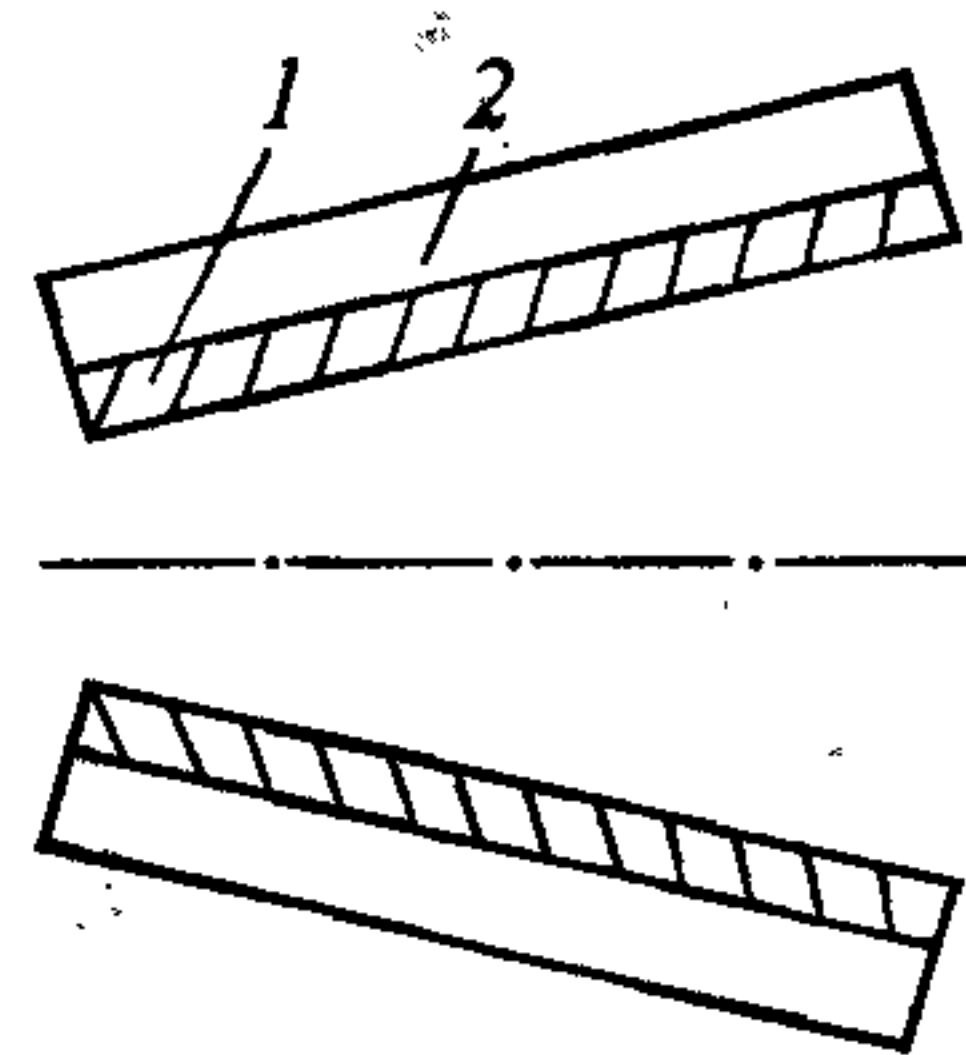


Рис. 3.39. Симметричная схема метания пластин (1 — медь, 2 — ВВ).

Далее, в качестве материала пластины была взята медь с параметрами:  $\rho = 8,9$  г/см<sup>3</sup>,  $K = 1,39$  Мбар,  $\mu = 0,46$  Мбар,  $Y_0 = 3,0$  кбар,  $\gamma = 15^\circ$  и  $U_0 = 200$  м/с. На рис. 3.41 точками показано время образования струи в зависимости от  $h_{\min}$  при нулевом значении предела текучести.

На рис. 3.42 приведены результаты расчетов соударения пластины с пре-

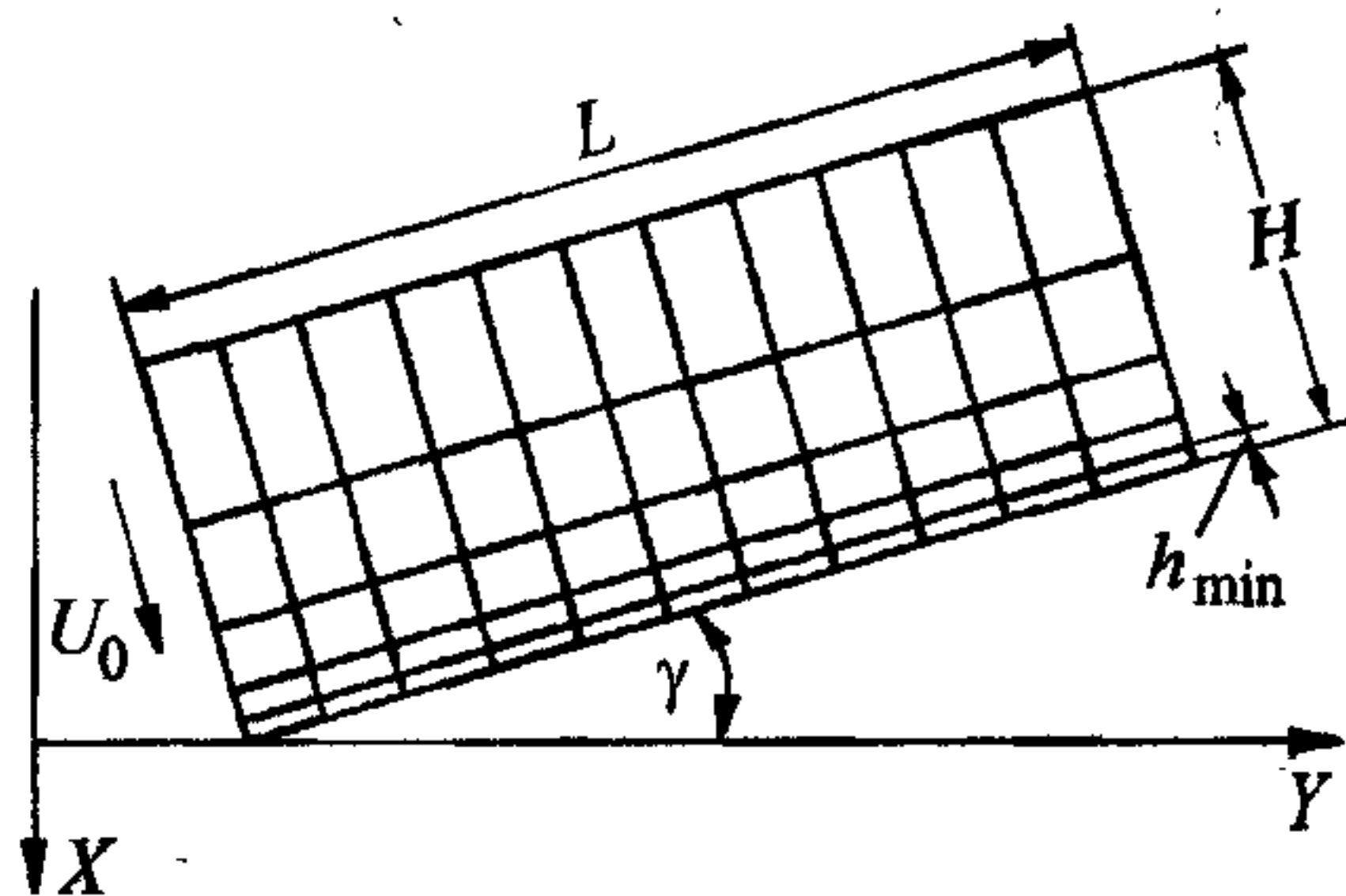


Рис. 3.40. Разностная сетка для расчета косою взаимодействия пластин.

Поясн. см. в тексте.



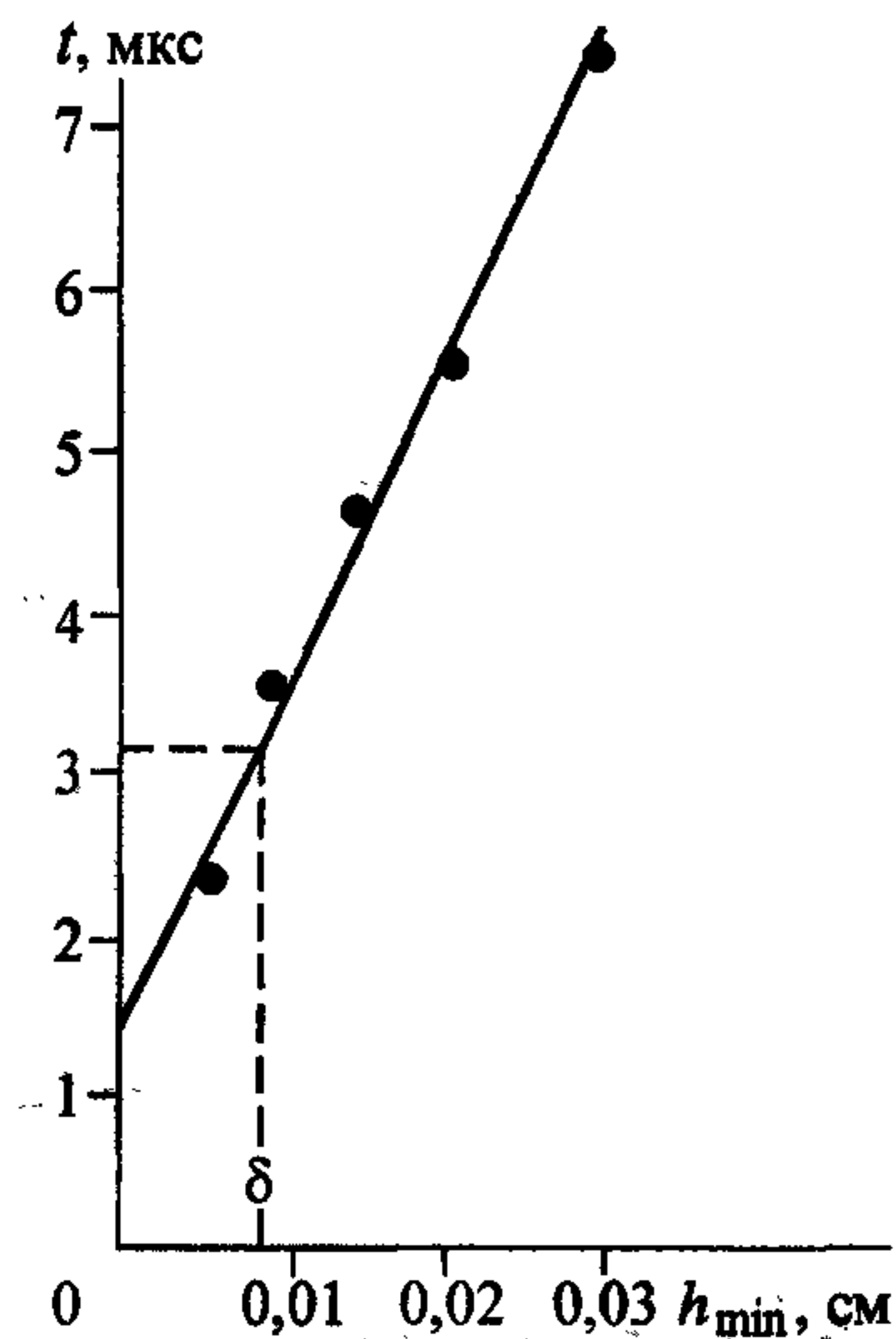


Рис. 3.41. Время образования струи в зависимости от  $h_{\min}$  при  $U_0 = 0$ .

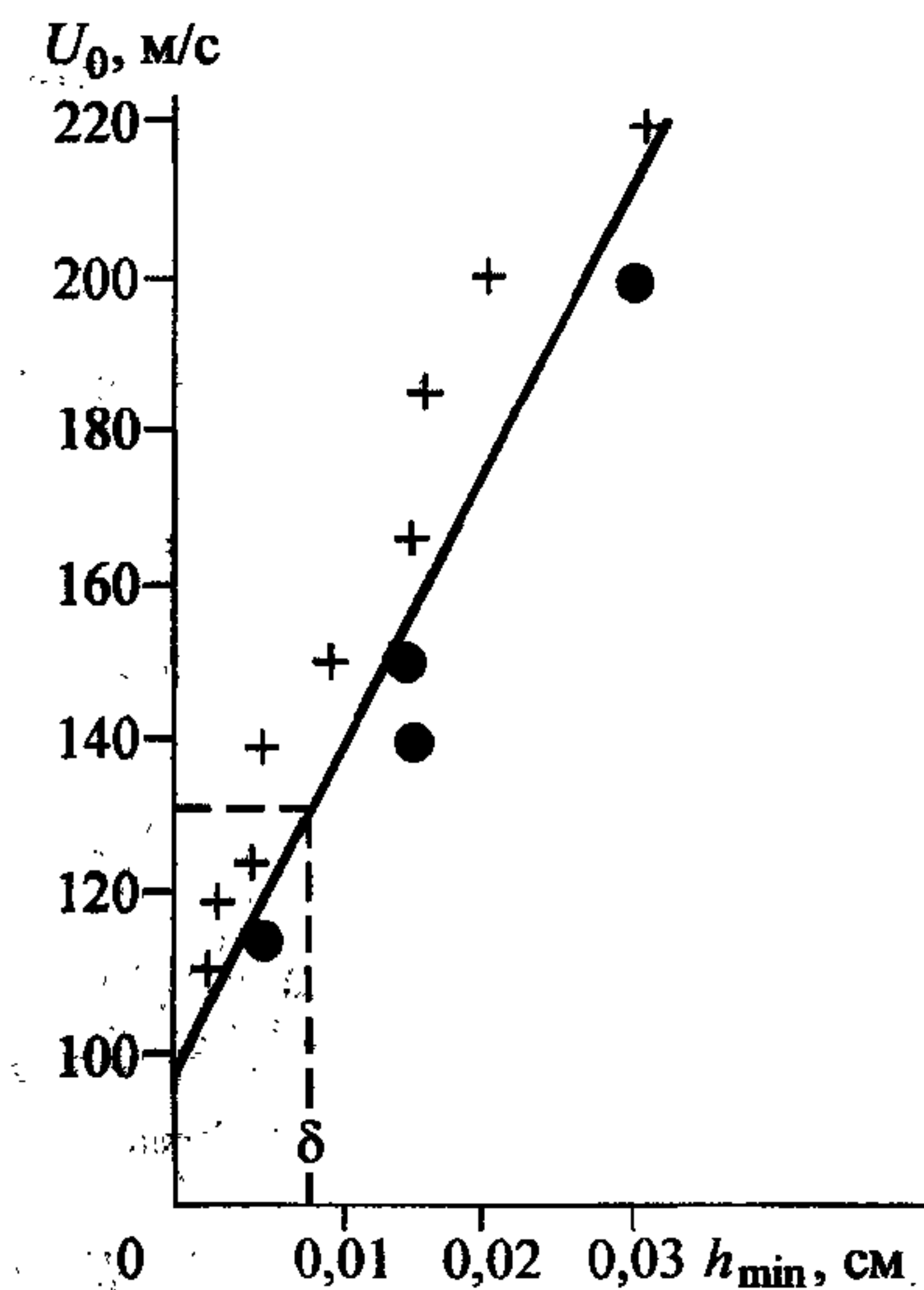


Рис. 3.42. Влияние  $h_{\min}$  на формирование струи для разных скоростей метания. Поясн. см. в тексте.

градой при различных значениях минимального шага  $h_{\min}$  и  $U_0$  при том же угле  $\gamma$ . Знаком + отмечены точки, в которых струя (по описанному выше алгоритму) выделялась. При величинах  $h_{\min}$  порядка  $7\delta$ , из-за больших размеров разностных ячеек, струя не появлялась совсем. Видно, что прямая, разделяющая эти области, стремится к значению  $U_0 = 100$  м/с. Близкие значения предельной скорости соударения были получены в экспериментах [63].

На основании гидродинамической теории в той же работе был предложен критерий для определения нижней границы сварки в виде

$$\gamma = k \sqrt{\frac{H_v}{\rho U_k}}, \quad (3.4.1)$$

где  $H_v$  — микротвердость по Виккерсу, а  $k$  — эмпирический коэффициент. На рис. 3.43 проведены кривые при значениях  $k = 0,6$ ,  $k \approx 1,2$  и  $k \approx 0,93$  и результаты расчетов для различных значений скорости и предела упругости при фиксированном угле  $\gamma = 15^\circ$ . Те же кривые нанесены и на рис. 3.44 для других исходных параметров. Полученное из расчетов значение  $k \approx 0,93$  хорошо согласуется с данными по обработке экспериментов.

Характерное распределение компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$  показано на рис. 3.45 и 3.46. Видно, что с увеличением скорости удара область повышенного давления концентрируется вблизи точки контакта.

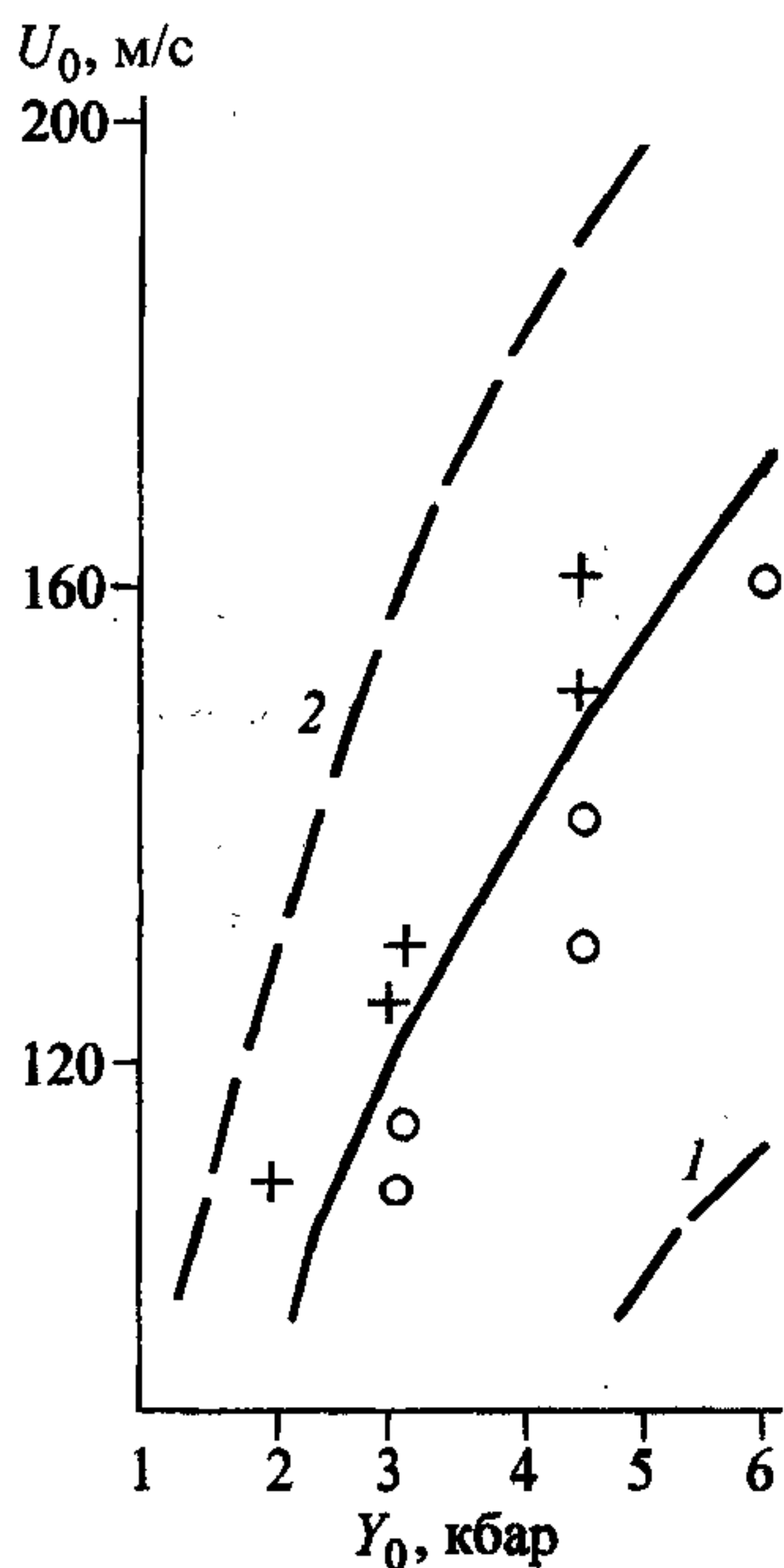


Рис. 3.43. Влияние предела текучести на формирование струи при разных скоростях метания.

Здесь и на рис. 3.44: 1 —  $k = 0,6$ , 2 —  $k = 1,2$ , сплошная линия —  $k \approx 0,93$ .

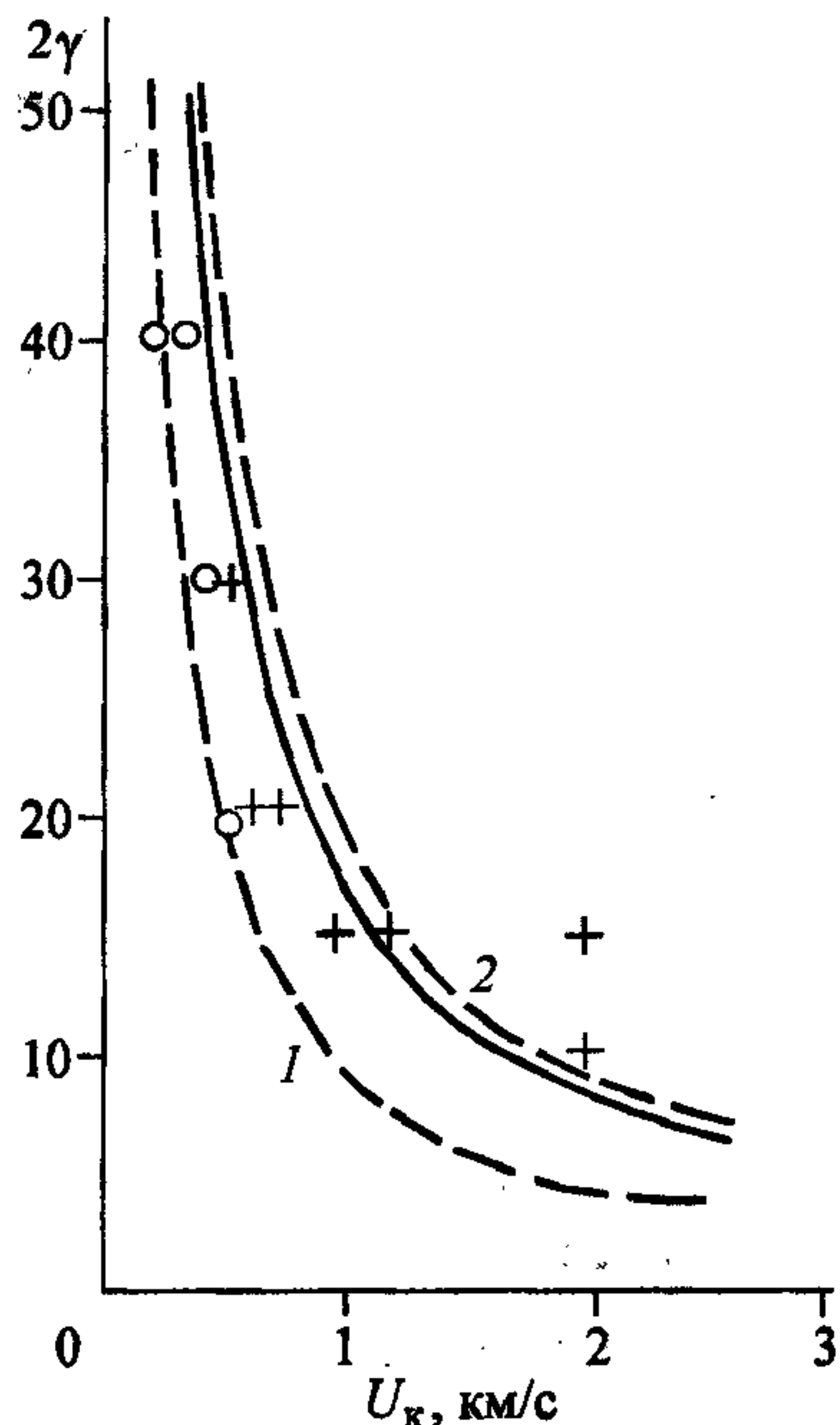


Рис. 3.44. Выбор подгоночного коэффициента по экспериментальным данным.

Недостатком этого критерия является то, что, во-первых, вводится эмпирический коэффициент  $k$ , во-вторых, критерий плохо работает при малых углах соударения, так как возникают трудности с определением скорости точки контакта, которая стремится к бесконечности, когда угол стремится к нулю, и, в-третьих, максимальные напряжения не всегда являются характерным параметром соударения. Более информативным может быть процесс деформирования пластин.

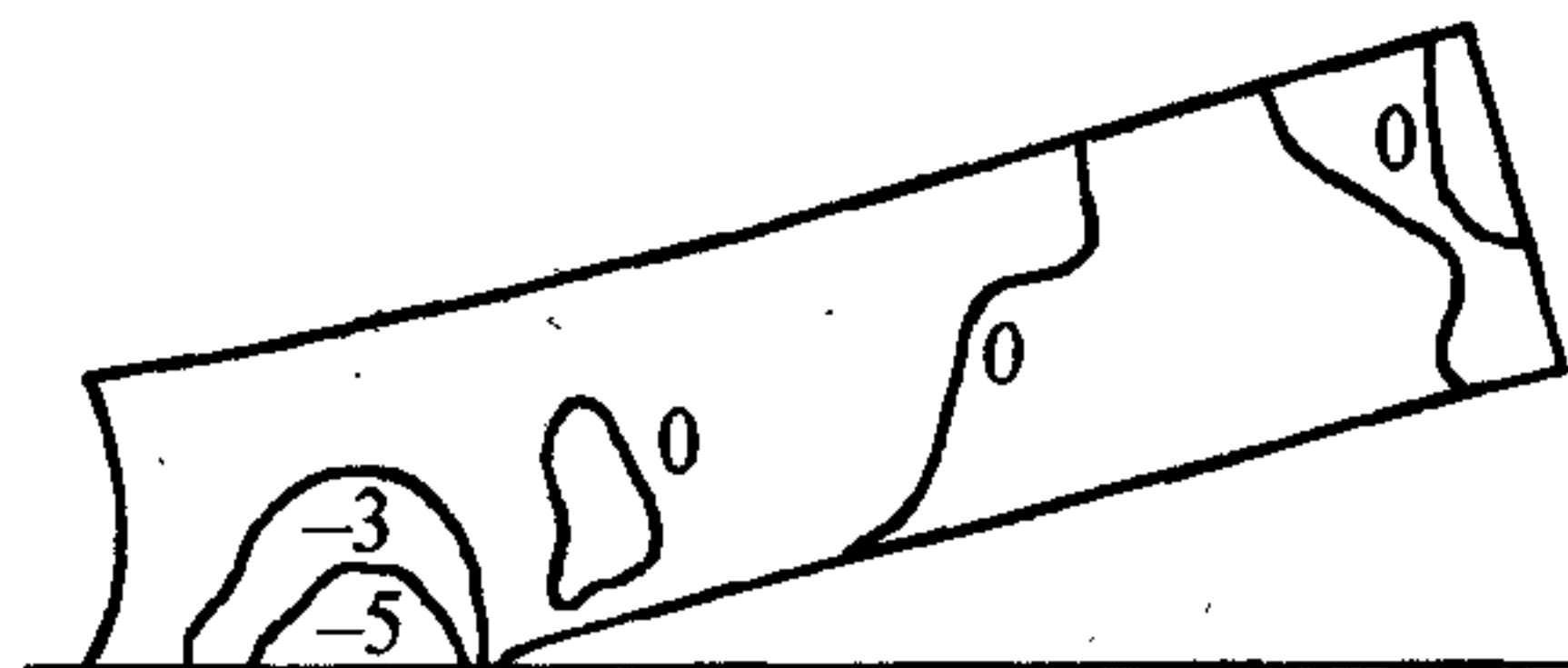


Рис. 3.45. Распределение компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$  ( $U_0 = 115$  м/с).

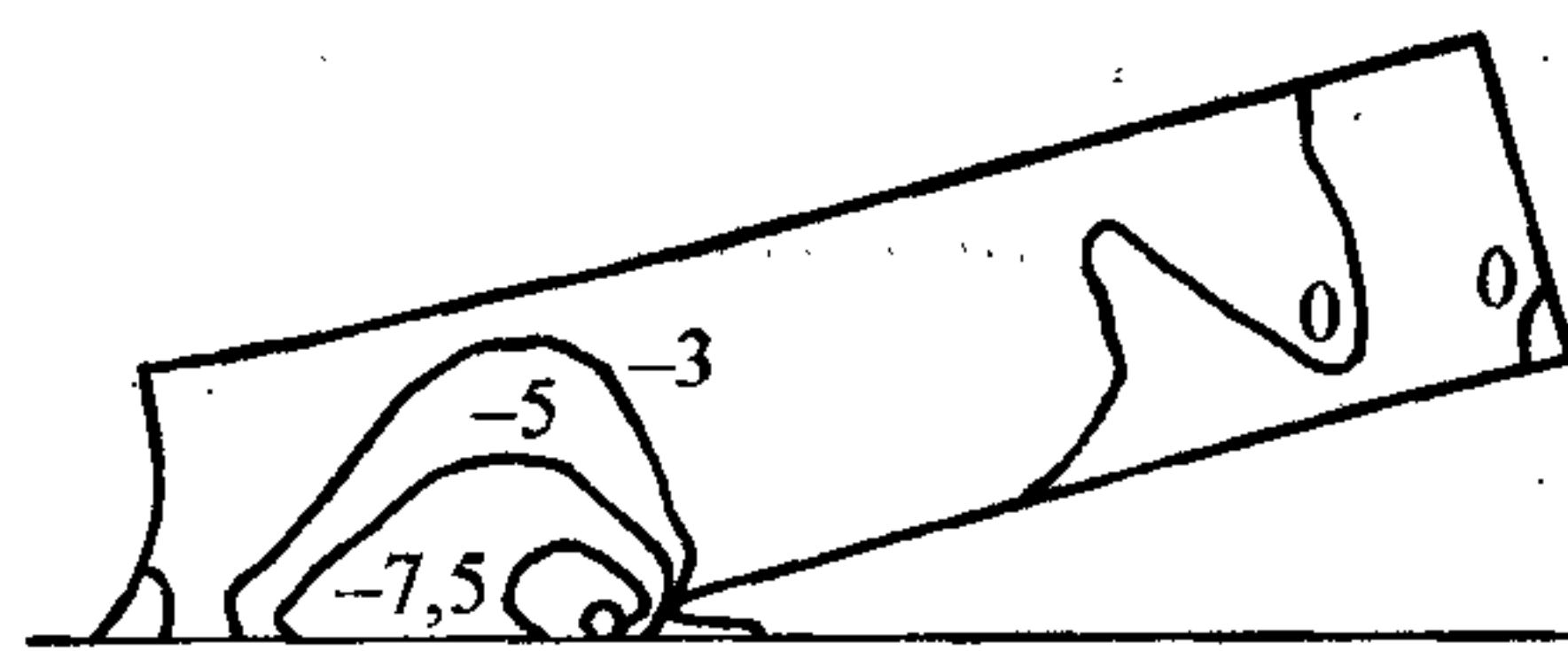


Рис. 3.46. Распределение компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$  ( $U_0 = 150$  м/с).

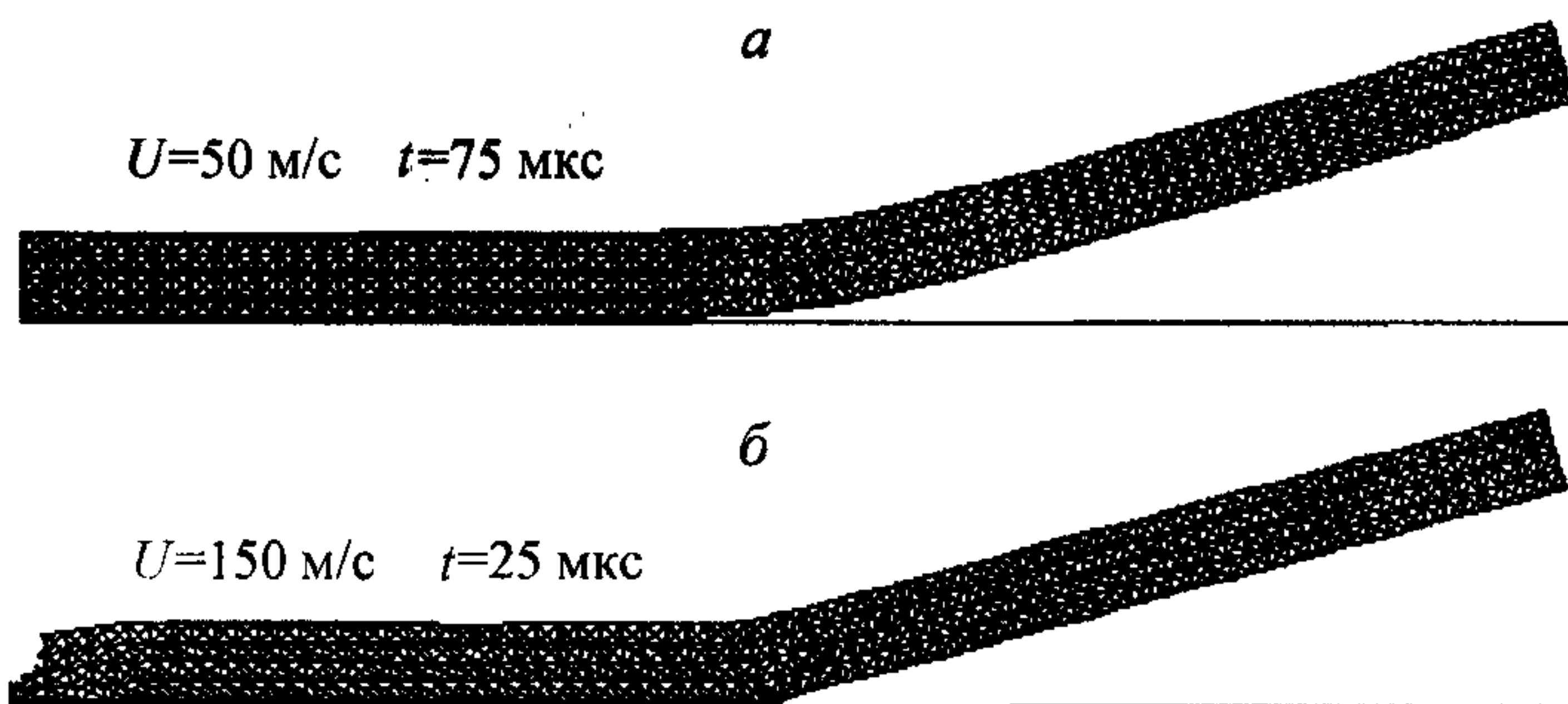


Рис. 3.47. Упругое (а) и пластическое (б) поведение материала пластины в условиях косоугольного соударения (а —  $U = 50$  м/с, б —  $U = 150$  м/с).

В работе [64] на основе анализа результатов расчетов предложен другой критерий определения нижней границы, который имеет простой физический смысл. Расчеты удара длинной медной пластины по преграде при изменении начальной скорости, без детализации деформирования материала вблизи точки контакта, показывают, что до скорости порядка 100 м/с пластина деформируется упруго так, что угол между пластиной и преградой близок к нулю, в силу чего невозможно определить скорость точки контакта. При больших скоростях удара деформирование пластины происходит таким образом, что угол перед точкой контакта становится четко определяемым и равным исходному углу, а скорость точки контакта — постоянной (рис. 3.47).

Исходя из этого результата и на основе простых физических соображений был предложен критерий определения нижней границы сварки взрывом в виде

$$U_0 U_k = 2\tau_s / \rho, \quad (3.4.2)$$

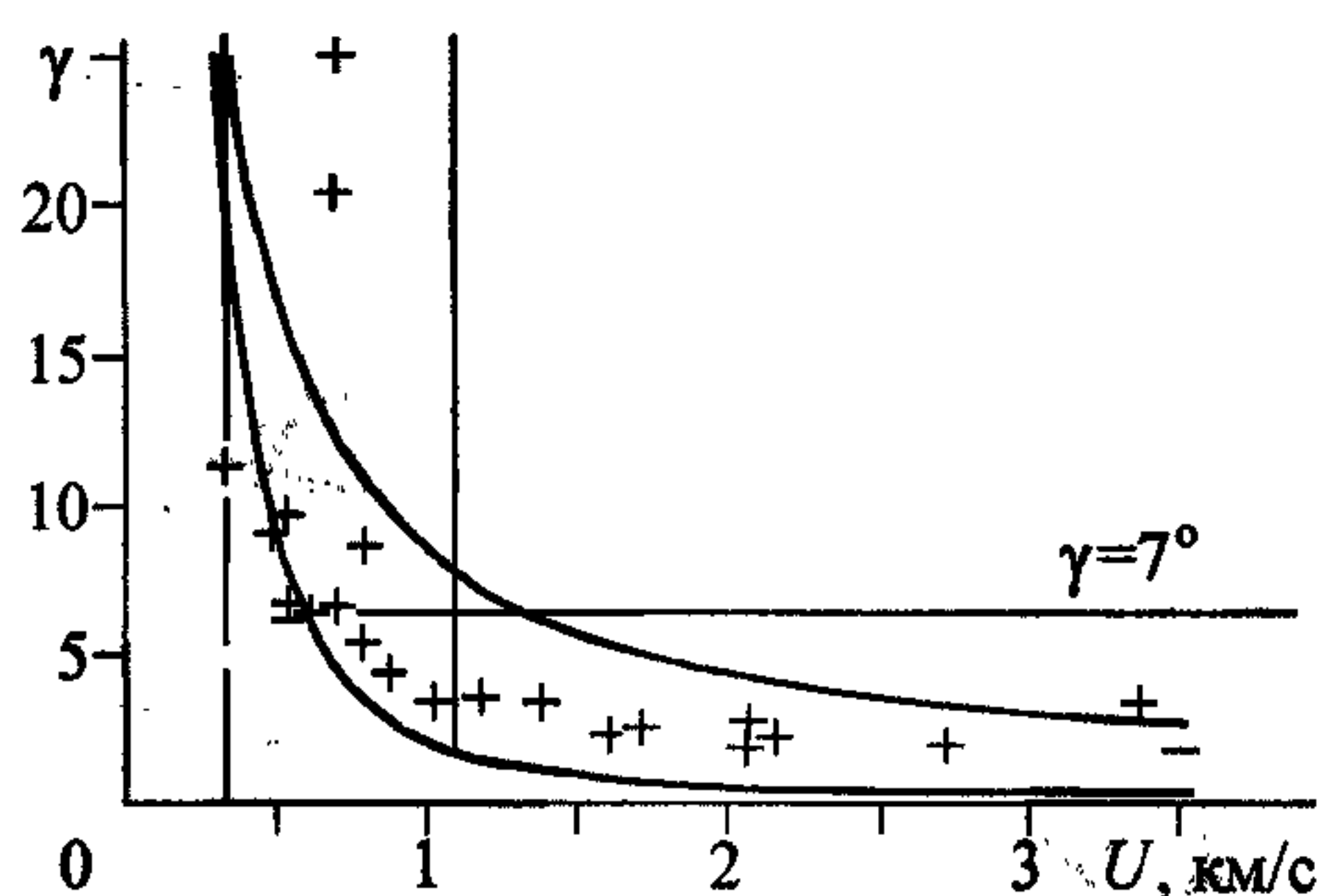


Рис. 3.48. Сравнение нижних критериев сварки взрывом в области малых углов.

Поясн. см. в тексте.

где  $\tau_s$  — предел пластичности материала на сдвиг. На рис. 3.48 в плоскости  $(\gamma, U_k)$  приведены две кривые для меди, вычисленные по первому и второму критериям. Видно, что второй критерий (ф-ла (3.4.2)) (нижняя кривая) лучше согласуется с экспериментальными данными именно в области малых значений угла  $\gamma$ .



### **3.5. Пробитие однослойных и многослойных преград по нормали деформируемым ударником**

Большинство элементов защитных конструкций (пластины бронежилетов, броня боевых машин, различные защитные экраны) являются преградами конечной толщины разной степени сложности. Для проектирования надежных и экономичных конструкций необходимо понимание поведения материалов в широком диапазоне скоростей встречи с налетающими телами и влияния геометрических параметров преград и ударников на процессы их деформирования и разрушения.

Так, в области низких скоростей соударения (порядка 100 м/с) преграды испытывают значительные деформации формы в целом. Увеличение скорости взаимодействия ( $\geq 1000$  м/с) приводит к большей локализации деформаций и возникновению разрушений. В этом случае необходимо рассчитывать формирование и распространение волн напряжений, интерференция которых может приводить к откольным явлениям. Поскольку возникающие локальные напряжения существенно превосходят прочностные свойства материалов, то материалы как преграды, так и ударника, поглощая энергию, переходят в поврежденное состояние, а затем и разрушаются (фрагментируются). За преградой формируется поток осколков из материалов преграды и ударника, а также неразрушенной части ударника.

Далее рассмотрены вопросы моделирования процессов деформирования и разрушения материалов методом свободных элементов (комплекс программ KRUG24) при пробитии преград конечной толщины.

#### **3.5.1. Пробитие преград удлиненным стержнем**

Процесс высокоскоростного удара является своеобразным тестом для проверки моделей и методов расчета поведения материалов в нестационарных условиях. Среди задач соударений исследование процесса пробивания преград удлиненным стержнем занимает особое место и имеет самостоятельное значение. Поэтому для верификации метода расчета проведем моделирование процесса пробития пластины из мягкой стали стержнем из вольфрамового сплава и сравним полученные результаты с результатами работы [19], где приведены данные эксперимента. Толщина пластины  $H = 2,5$  см, диаметр ударника

$D = 1,0$  см, удлинение  $\lambda = L/D = 10$ , величина скорости удара  $U_0 = 1520$  м/с. Расчетные области покрывались комбинированной сеткой: более мелкой, с треугольной ячейкой, в зоне больших деформаций и крупной четырехугольной на периферии.

В качестве начальных условий принимаются:  $\rho_i(z, r, 0) = \rho_{i0}$ ,  $U_i(z, r, 0) = U_{i0}$ ,  $\sigma_{ij}(z, r, 0) = 0$ ,  $e(z, r, 0) = 0$ . Граничные условия:  $\sigma_n = \sigma_\tau = 0$  — на свободных поверхностях, и  $\sigma_n^+ = \sigma_n^-$ ,  $U_n^+ = U_n^-$ ,  $\sigma_\tau^+ = \sigma_\tau^- = 0$  — для сжимающих напряжений на поверхности контакта. Параметры стали и вольфрамового сплава, используемые в расчете, приведены в табл. 3.3.

Моделирование процесса разрушения осуществляется следующим образом. В областях, где превышает хотя бы одно из перечисленных выше предельных значений прочности среды (3.1.20), производится замена материала на материал типа “песок” без внутреннего трения, в котором нет сопротивления на сдвиг и растяжение (поврежденный материал). Если в расчетном элементе с поврежденным материалом параметр разрыхления достигает предельного значения, то материал разрушается (фрагментируется). Данный элемент расчетной сетки замещается одной (или более) дискретной частицей конечной массы и объема, радиус которой (которых) вычисляется из условия вписывания одной или нескольких частиц в ячейку. Масса, импульс и энергия данного элемента распределяются между дискретными частицами. За один шаг по времени только один слой ячеек, окружающий фрагментированный материал, может быть превращен в дискретные частицы, так как считается, что величина скорости фронта волны разрушения не превышает величины скорости распространения возмущения в среде. Таким образом, применение данного алгоритма расчета может в определенных случаях привести к замене каждой ячейки расчетной области дискретными частицами, т.е. к превращению сплошного тела в облако частиц.

Таблица 3.3

Параметры материалов

Материал	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$\mu$ , Мбар	$K$ , Мбар	$Y_0$ , кбар	$\sigma_*$ , кбар	$\epsilon_*$	$\epsilon_\tau^*$	$e^*$ , см <sup>2</sup> /мкс <sup>2</sup>	$\chi^*$ , %
ВНЖ	17,0	1,6	3,113	6,47	40	0,4	0,30	0,050	4
Fe	7,85	0,75	1,83	5,0	70	0,35	0,25	0,047	3



Сравнение результатов данного расчета с результатами расчета из работы [19] приведено на рис. 3.49. Некоторое различие в деформациях преграды связано с отсутствием параметров материалов в работе [19], поэтому в качестве таковых взяты их аналоги. Получено хорошее соответствие результатов. Количественное сравнение расчета с экспериментальными данными по потере массы, скорости и длины ударника приведено в табл. 3.4.

На основании проведенного сравнения результатов можно сделать вывод, что представленные модель и метод расчета позволяют получать решения целого класса практических задач с помощью лагранжевых сеток и дискретных частиц конечного размера.

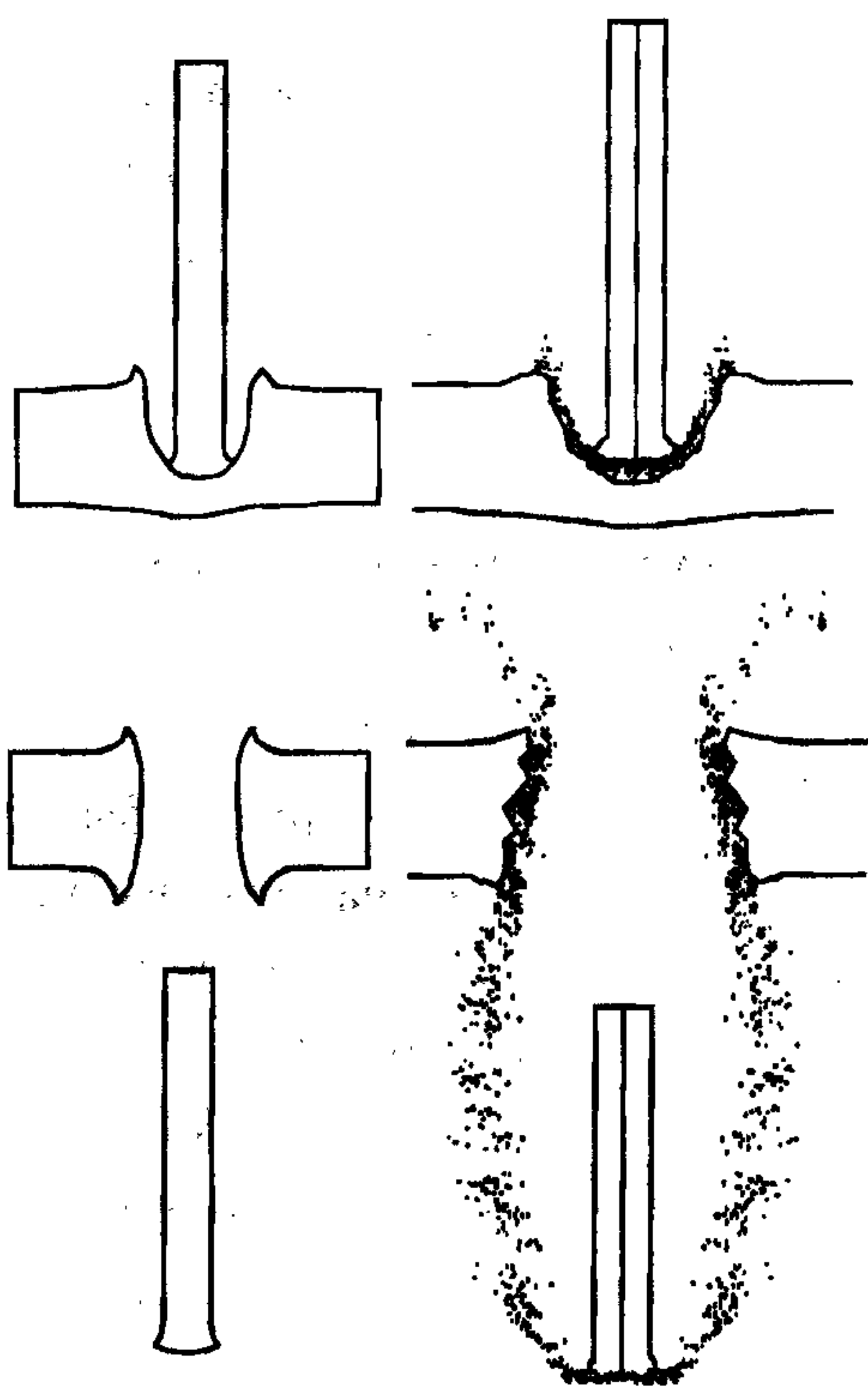


Рис. 3.49. Сопоставление результатов расчета с результатами работы [19] (слева на рисунке).

Таблица 3.4

Сравнение результатов

Источник	$\Delta m/m_0$	$\Delta U/U_0$	$\Delta l/l_0$
Эксперимент	—	0,05	0,24
Работа [19]	0,16	0,02	0,19
Данный расчет	0,28	0,026	0,29

### 3.5.2. Моделирование высокоскоростного удара по преградам компактным телом

Для защиты космических аппаратов от удара частиц техногенного мусора и мелких метеоритов применяются тонкие однослойные и многослойные экраны, при столкновении с которыми налетающая частица, выбивая часть мате-



риала из преграды, разрушается и превращается в облако фрагментов. Взаимодействие высокоскоростной частицы с однородным экраном удается описать в рамках инженерного подхода, однако оценка воздействия облака осколков на защищаемый объект или пробитие разнесенной слоистой преграды вызывает значительные затруднения. Поэтому возникает необходимость численного решения задач такого класса.

Далее рассматриваются численные решения задач о пробитии однослойных и двухслойных разнесенных тонких преград сферической частицей в диапазоне скоростей встречи  $U_y = 2 + 5$  км/с, полученные с помощью программного комплекса KRUG24. Проводится сравнение с экспериментальными данными по форме запреградного облака, скоростям движения осколков в головной части облака и диаметру выбиваемого отверстия в преграде. Получено удовлетворительное соответствие результатов расчета данным эксперимента.

Рассмотрим задачу о высокоскоростном соударении стальной сферической частицы с тонкой стальной преградой в диапазоне скоростей встречи  $U_y = 2 + 5$  км/с, геометрические параметры которых взяты из [65]. При выходе ударной волны на тыльную поверхность преграды формируется волна разгрузки, при взаимодействии которой с боковыми волнами разгрузки возникает область сильных растягивающих напряжений, приводящих к разрушению материалов частицы и выбиваемой части преграды. За преградой образуется облако дискретных частиц, моделирующих разрушенный материал. Однако данные частицы не являются реальными осколками, возникающими в реальном процессе разрушения. Тем не менее данная модель схватывает основные черты формирующегося запреградного облака (рис. 3.50). Начальные параметры стальной частицы и преграды были следующие: диаметр частицы  $d = 10$  мм, толщина преграды  $h = 2$  мм, скорость удара  $U_y = 3,73$  км/с.

На рис. 3.51 показано сравнение расчетных скоростей осколков в головной части облака с данными эксперимента [65]. Получено хорошее соответствие расчетных и экспериментальных скоростей. Различными значками на рис. 3.51 показаны экспериментальные значения скоростей осколков головной части облака для отношений  $h/d = 0,2$  при  $d = 3, 7$  и  $10$  мм в зависимости от скорости налетающей частицы  $U_y$ . Сплошная линия — результаты расчетов по программе KRUG24. Расчетные значения диаметров выбиваемого отверстия в преграде несколько завышены (порядка 10%) по сравнению с экспериментальными данными.

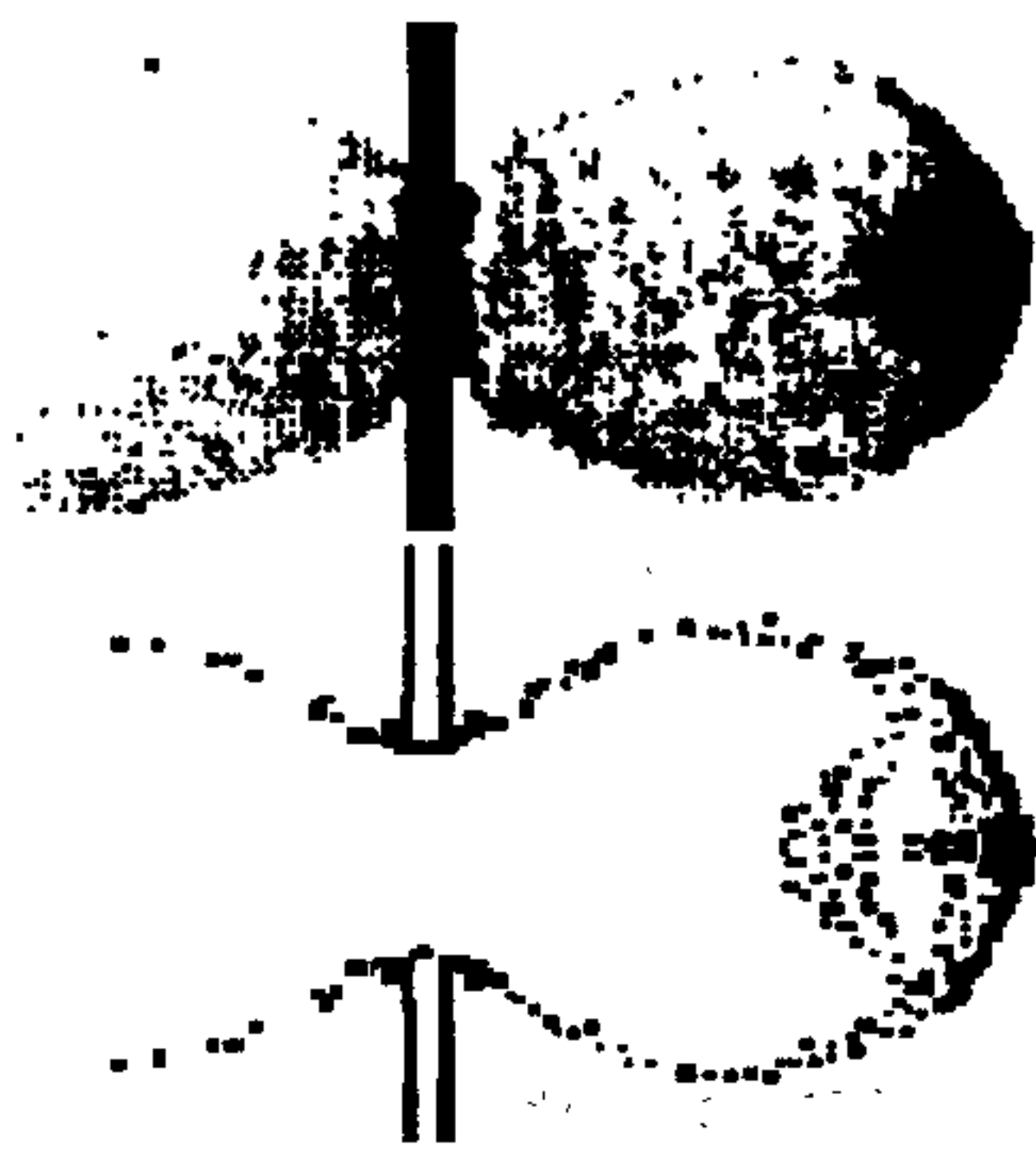


Рис. 3.50. Запреградное облако осколков (сверху — эксперимент [65], внизу — расчет, поперечное сечение),  $t = 13$  мкс.

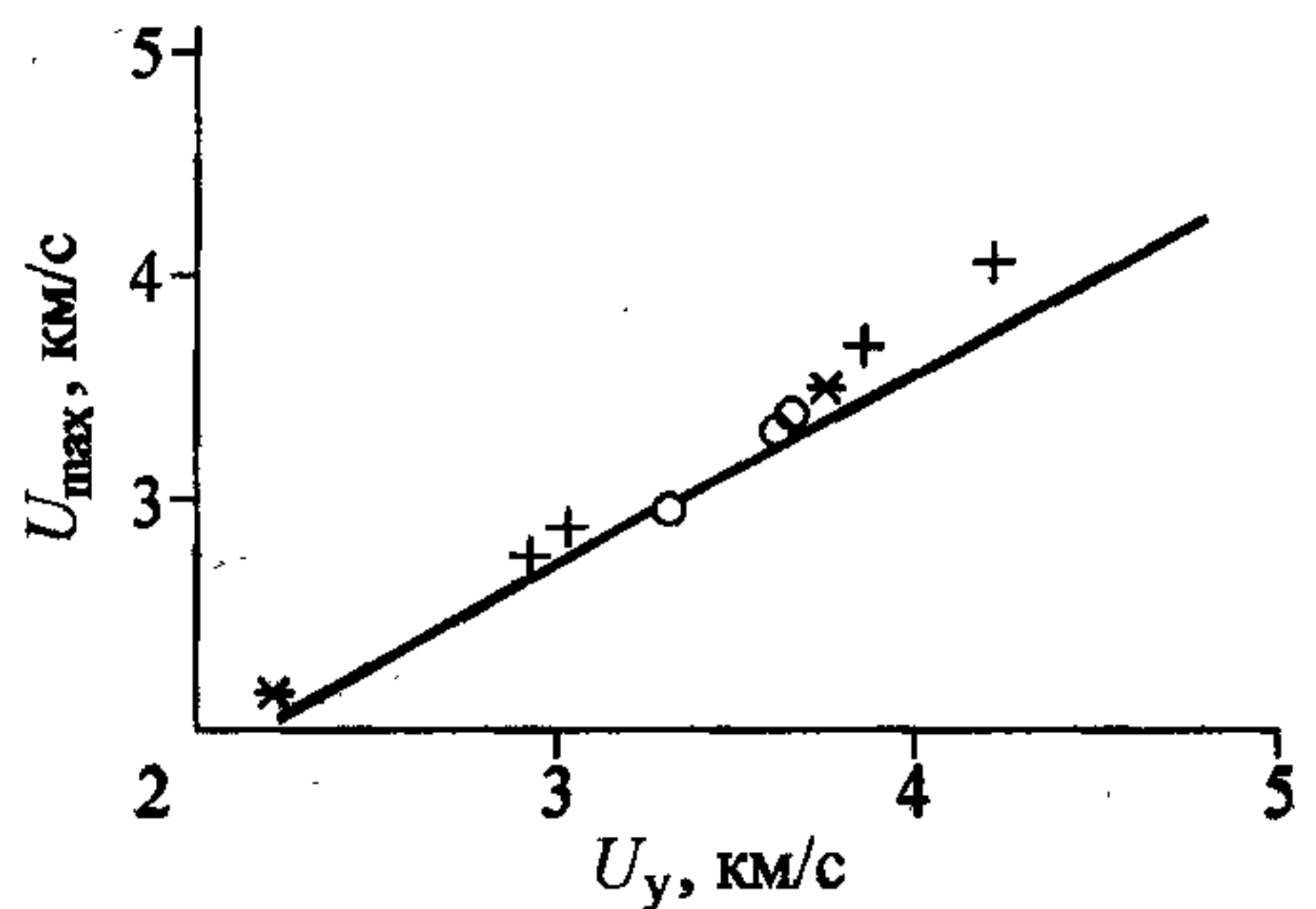


Рис. 3.51. Сравнение скорости лидирующих осколков (сплошная линия) в запреградном облаке с данными различных экспериментов (значки) в зависимости от скорости удара.

Проведены расчеты соударения высокоскоростной частицы с двухслойной разнесенной преградой (пространственное разнесение  $S = (0,5d, d, 2d, 3d)$ ). С увеличением разнесения изменяется структура облака за второй преградой, однако диаметр выбиваемого отверстия во второй преграде практически остается постоянным, т.е. головная часть запреградного облака, сформированного после пробития первой преграды, на таких расстояниях сильно не изменяется, а движется достаточно компактно.

На рис. 3.52 приведен пример расчета пробития стальной сферической частицей стальной преграды из двух разнесенных слоев на момент времени  $t = 10$  мкс. Начальные данные задачи:  $d = 3$  мм,  $h_1 = h_2 = 0,6$  мм,  $S = d$  и  $U_y = 4$  км/с.

Таким образом, показана применимость комплекса программ KRUG24 для решения задач пробития многослойных преград в диапазоне скоростей удара  $U_y = 2 \div 5$  км/с и моделирования процессов взаимодействия запреградного облака с защищаемыми поверхностями.

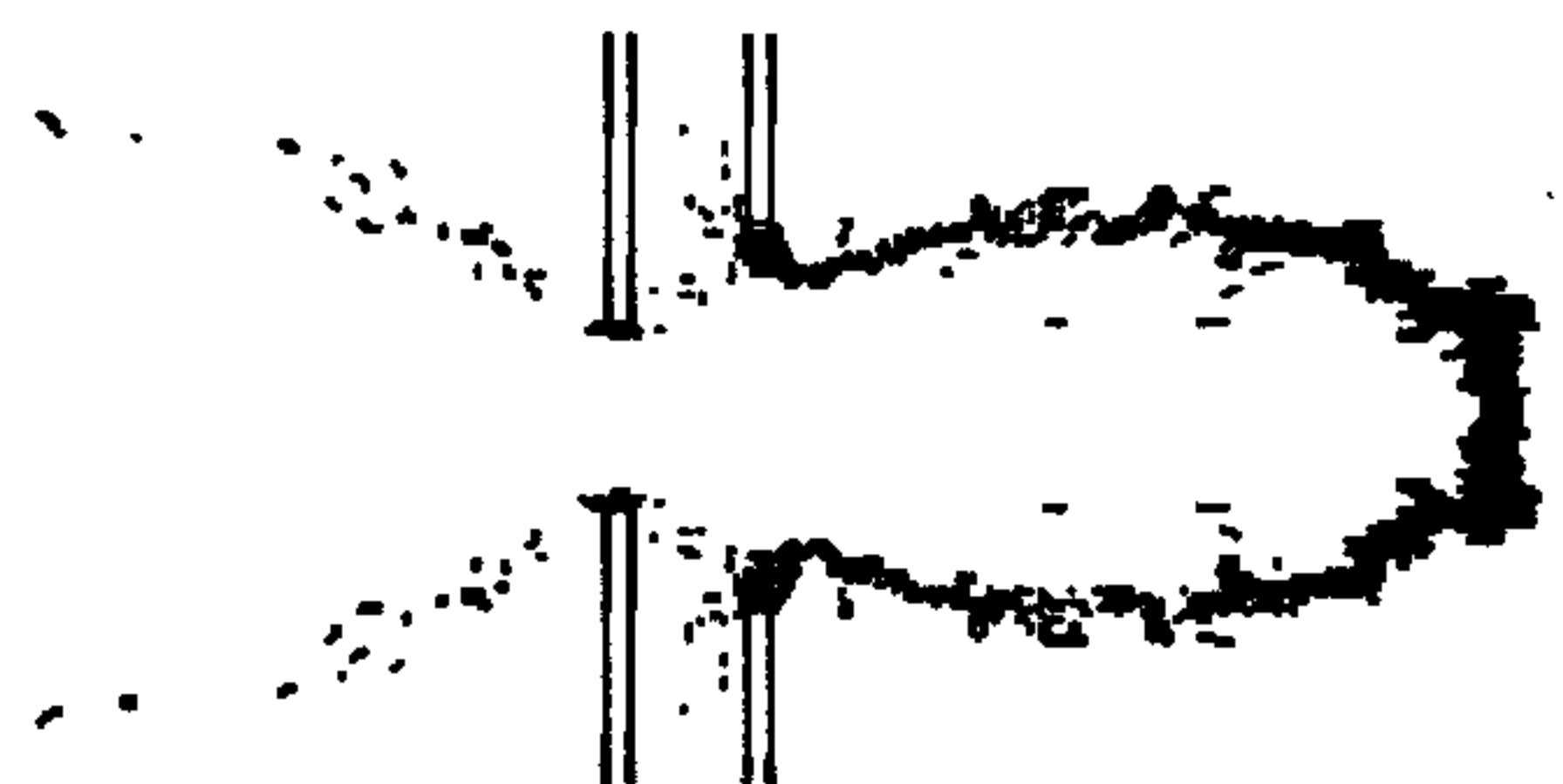


Рис. 3.52. Пробитие стальной сферической частицей стальной преграды из двух разнесенных слоев.

Поясн. см. в тексте.



Разработанный численный алгоритм легко переносится на случай трех пространственных переменных и реализован в виде программного комплекса KRUG34. Численное моделирование процессов соударения деформируемых тел в пространственном случае в первую очередь требует значительных ресурсов ЭВМ по сравнению с двумерными аналогами. Это связано с увеличением числа переменных и количества узлов разностной сетки для приемлемого пространственного разрешения. В результате сравнения 2D и 3D расчетов выяснено, что для определения вектора решения в узле 3D разностной сетки требуется примерно в пять раз больше арифметических операций (процессорного времени), чем при обсчете одного узла в 2D варианте.

Одной из важных проблем при решении пространственных задач является выбор и построение разностной сетки в расчетной области. Преимущество шестигранных ячеек состоит в том, что значительно уменьшается массив искомых величин, определяемый в ячейках. Однако при больших деформациях такие ячейки сильно искажаются и требуется дополнительное демпфирование. На границах контакта сложность построения алгоритма в этом случае связана с тем, что грани ячеек не плоские. Поэтому наряду с шестигранными ячейками большое распространение получили разностные сетки с тетраэдральными ячейками. Построение таких сеток часто основано на разделении расчетной области на шестигранные ячейки, которые далее разбивают на тетраэдры. Минимальное число тетраэдров, которое таким образом можно вписать в шестигранник, равно пяти. При этом естественно встает вопрос о сохранении внутренней симметрии в задаче, которую необходимо в каждом конкретном случае, по возможности, соблюдать. Лучший вариант разбиения получается, если в шестигранник вписывать двадцать четыре тетраэдра, но при этом требуются большой объем оперативной памяти и быстроедействие ЭВМ.

Рассмотрим задачу о влиянии формы компактного ударника на вид отверстия в тонкой преграде при ударе по нормали. Исходные данные для задачи выбраны следующие:

преграда из меди имела длину 2,5 см, ширину 2,5 см и толщину 0,1 см;

стальные ударники — кубик со стороной 0,4 см и цилиндр радиусом 0,23 см, высотой 0,4 см, скорость удара 2 км/с.

На рис. 3.53 приведены результаты трех вариантов расчета. К этому моменту произошло полное пробитие преграды и начинает формироваться преградное облако осколков (см. рис. 3.53, б). В первом случае кубик взаимодей-



ствовал с преградой гранью, во втором — одной из вершин, так что его диагональ была параллельна нормали к преграде, в третьем случае удар осуществлялся торцом цилиндра, ось которого была параллельна нормали. Из рисунков видно, что отверстие в преграде и форма запреградного облака имеют примерно один и тот же вид. Таким образом, при пробивании тонких медных преград по нормали компактными стальными ударниками одинаковой массы при скорости удара 2 км/с вид и размер отверстия мало зависят от формы ударника и начальной ориентации его в пространстве.

В качестве модельной задачи рассмотрим процесс удара со скоростью  $U_0 = 10$  км/с компактного стального тела кубической формы ( $m = 7,85$  г) по нормали к боковой поверхности незаполненной стальной трубы с внутренним радиусом  $R_i = 2,5$  см и внешним  $R_0 = 3,0$  см. Разностная сетка в преграде содержала 27750 элементов, в ударнике — 625 элементов.

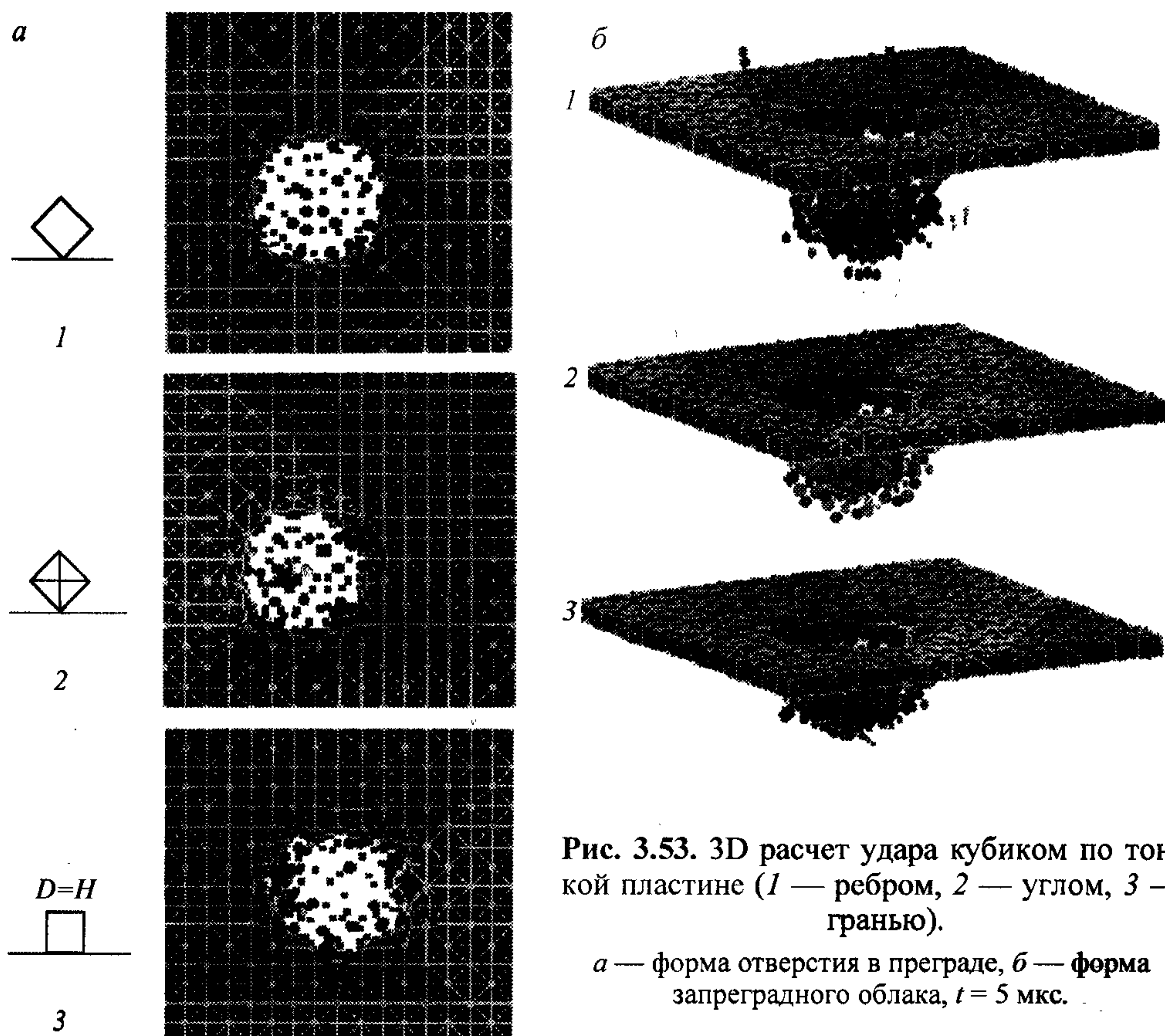


Рис. 3.53. 3D расчет удара кубиком по тонкой пластине (1 — ребром, 2 — углом, 3 — гранью).

*a* — форма отверстия в преграде, *б* — форма запреградного облака,  $t = 5$  мкс.

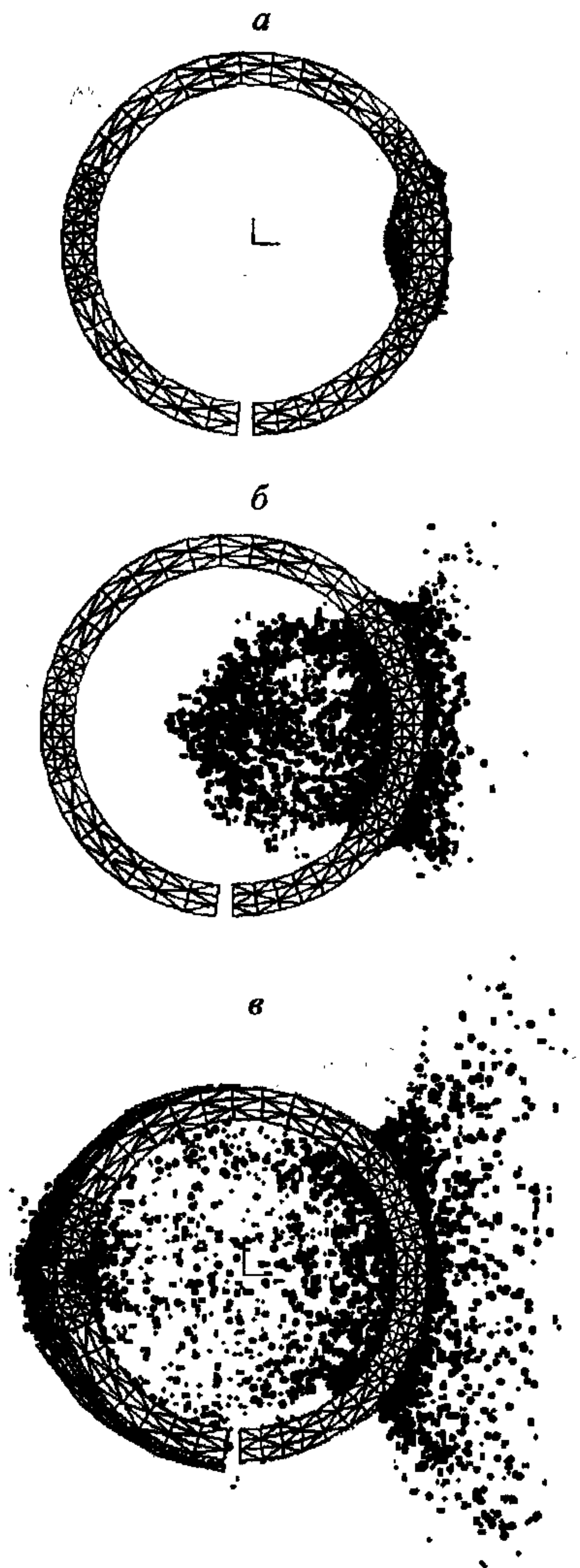


Рис. 3.54. Кинограмма процесса высокоскоростного пробития стальной трубы при поперечном ударе справа.

$t$ , мкс: 1 (а), 5 (б), 13 (в).

Результаты расчетов представлены на рис. 3.54. Разрушение ударника происходит практически с началом взаимодействия. В течение небольшого времени облако фрагментов разлетается в основном в плоскости, перпендикулярной направлению удара. Импульс налетающего тела передается материалу лицевой части стенки трубы, и на последующих стадиях процесса происходит ее разрушение с образованием отверстия. Пробитие лицевой стенки трубы происходит менее чем за одну микросекунду.

В дальнейшем происходит расширение отверстия в радиальном направлении, что обуславливает поток фрагментов разрушенного материала как во внутреннюю часть трубы, так и наружу. Скорость лидирующих частиц внутри трубы составляет величину порядка 6—8 км/с. К моменту времени  $t \approx 13$  мкс поток частиц, образовавшихся при пробитии лицевой части трубы, достигает противоположной внутренней поверхности трубы и производит сквозное разрушение трубы (см. рис. 3.54, в).

### 3.5.3. Пробитие сложных преград низкоскоростным ударником

Рассмотрим далее задачи о взаимодействии ударников со сложными преградами. Использование многослойных преград для защиты от высокоскоростных частиц показало их эффективность по сравнению с монолитными эквивалентными преградами. Тонкие внешние экраны служат для разрушения частиц



на осколки, которые затем воспринимаются последующими слоями защиты [24]. Задача о баллистической стойкости многослойной преграды при малых скоростях ( $100 \div 400$  м/с) исследовалась чаще всего экспериментально.

Теоретические решения строятся в основном на интегральных подходах и содержат много эмпирических констант, для нахождения которых в каждом конкретном случае необходимо проводить серийные эксперименты. Одной из таких работ является [66], где предложен инженерный подход к расчету пробития многослойных преград и приведены достаточно полные экспериментальные данные по прониканию свинцовой пули в алюминиевые преграды. Установлен факт, что для данного типа ударников слоеные преграды без разнесения слоев более эффективны по сравнению с монолитной эквивалентной преградой. Поскольку на поздних стадиях процесса проникания величина скорости ударника приближается к значению баллистического предела, то существенную роль начинают играть изгибные деформации слоев, что приводит к большим деформациям пластин в целом, тогда как слоеная преграда с разнесением слоев уступает по эффективности монолитной, приближаясь к ней при оптимальном выборе толщины слоев.

Для верификации метода расчета в диапазоне низких скоростей удара было проведено моделирование экспериментов по пробитию монолитных и слоеных преград как с разнесением слоев, так и без него. Поскольку в работе [66] не задана форма свинцовой пули, но заданы вес и диаметр, а также упоминается о полусферической головной части, то в расчете взята цилиндрическая пуля с полусферической головной частью. В качестве уравнения состояния для алюминиевых сплавов используется уравнение, приведенное в работе [1], а для свинца — линейное. Поведение алюминиевых сплавов при нагружении считается упругопластическим, а свинца — вязкоупругопластическим. Предельные параметры разрушения для сплавов уточнялись моделированием процесса пробития однослойной преграды толщиной в 1 мм. В качестве характерного параметра верификации выбрана остаточная скорость ударника после пробития такой преграды, поскольку она измерялась во всех экспериментах [66]. Затем обобщались остальные опыты с преградами различной толщины слоев. Поскольку в работе не упоминается о разрушении пули, то считалось, что свинец только деформируется в процессе проникания, не разрушаясь.

Величина скорости пули для расчетов взята 375 м/с как среднее значение, рекомендованное в работе [66]. Начальное положение и разностная сетка в ударнике и преграде показаны на рис. 3.55. Использовалась комбинированная сетка с более мелкими элементами в зоне больших деформаций и разрушений.



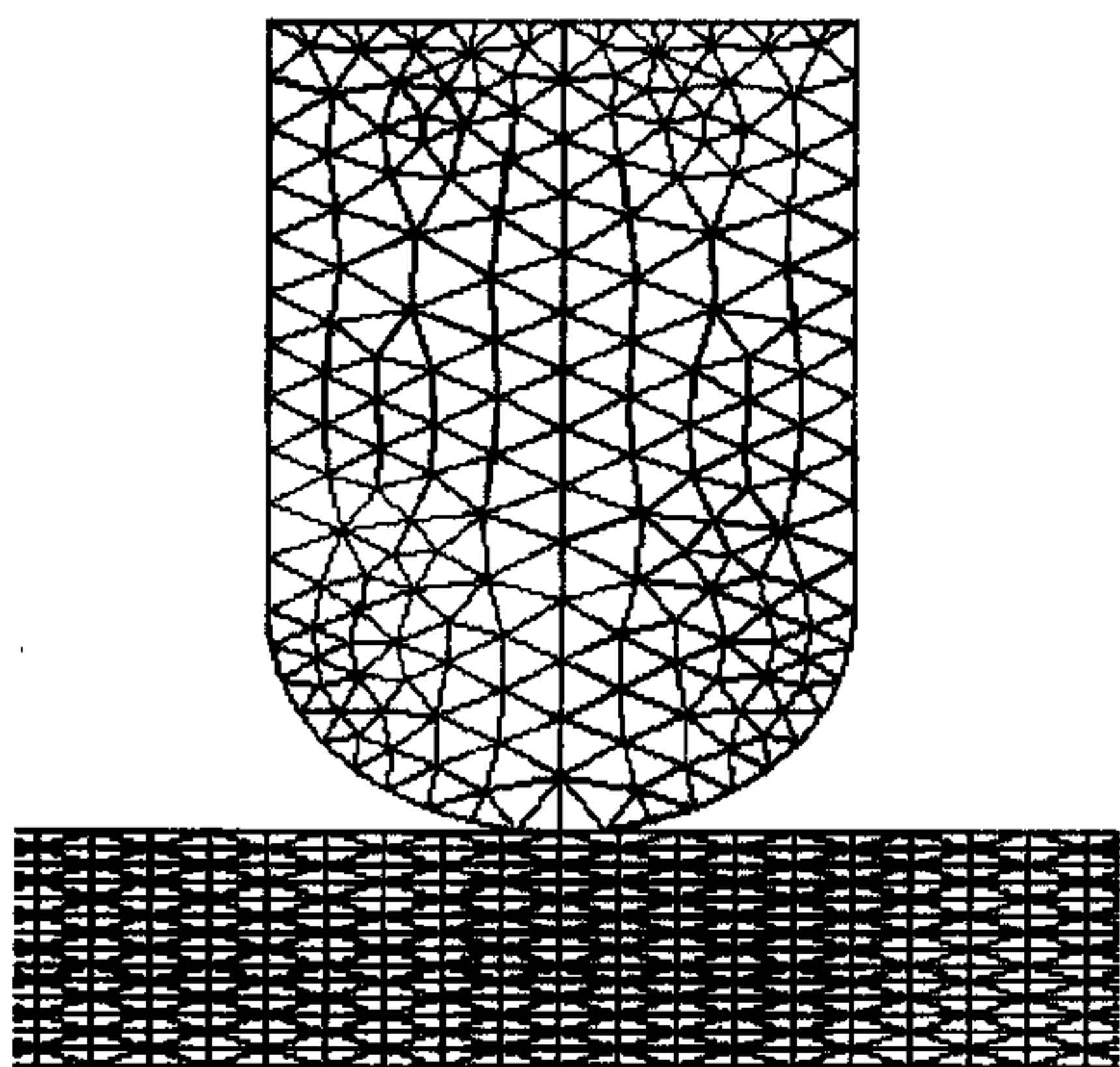


Рис. 3.55. Фрагмент разностной сетки для расчета соударения свинцовой пули с преградами.

Свинцовая пуля имеет массу  $m = 11$  г, радиус  $R = 0,278$  см и сферическую головную часть. Параметры, характеризующие свойства материалов, следующие:

свинец —  $\rho_0 = 11,34$  г/см<sup>3</sup>,  $K = 0,5$  Мбар,  $\mu = 0,057$  Мбар,  $Y_0 = 3,0$  кбар.

алюминиевый сплав 6061-T6 —  $\rho_0 = 2,7$  г/см<sup>3</sup>,  $K = 0,73$  Мбар,  $\mu = 0,246$  Мбар,  $Y_0 = 2,8$  кбар,  $\epsilon_* = 0,4$ ,  $\chi_* = 0,03$ .

При численном решении данной задачи была проведена серия методических расчетов по выяснению влияния сеточных параметров. В этих расчетах установлено, что дальнейшее увеличение числа ячеек разностной сетки не приводит к заметному изменению конечного результата, а только увеличивает длительность счета задачи. Кроме того, выяснено, что при замене разрушенного материала частицами достаточно одной частицы на ячейку.

Как показали расчеты, лучшее согласие с экспериментальными данными по остаточной скорости пули получается при использовании в модели разрушения критерия по предельной деформации. Величина  $\epsilon_*$  находилась в расчетах пробития одной пластины толщиной 1 мм и использовалась в дальнейшем. Следует заметить, что  $\epsilon_* = 0,4$  попадает в диапазон табличных значений предельной деформации на разрыв для алюминиевых сплавов в различных справочниках.

Для анализа были выбраны три конфигурации преграды: монолитная толщиной 3 мм; три пластины толщиной 1 мм, находящиеся в контакте; разнесенная система из трех пластин по 1 мм.

Процесс взаимодействия пули с преградой существенно зависит от типа преграды. Так, разрушение преграды с разнесенными слоями характеризуется тем, что пробитие первого слоя происходит по типу выбивания пробки. Далее пуля с присоединенной пробкой вступает в контакт со следующим слоем, в ко-

тором процесс повторяется. При большом количестве слоев перед пулей накапливаются остатки предыдущих слоев, причем слои, прилегающие к пуле, постепенно разрушаются полностью. В итоге пробития всей преграды пуля выносит впереди себя части слоев. Иллюстрация процесса пробития разнесенной преграды представлена на рис. 3.56 для трех моментов времени.

При взаимодействии пули с монолитной преградой на начальной стадии процесс разрушения локализуется под головной частью пули. В дальнейшем на периферии ударника возникает зона разрушений материала преграды, прорастающая до тыльной поверхности, в результате чего образуется пробка, толщина которой несколько меньше толщины преграды. На рис. 3.57 приведены результаты расчета пробития монолитной преграды на моменты времени  $t = 5, 10$  и  $20$  мкс.

Особенность пробития преграды из трех контактирующих слоев состоит в том, что на начальной стадии процесса взаимодействия разрушение происходит в лицевом слое. Последующие слои значительно деформируются, что приводит к разделению слоев. Разрушение в этих слоях начинается на оси симметрии, где находится область максимальных растягивающих деформаций. Процесс взаимодействия на разные времена для данного случая показан на рис. 3.58.

На рис. 3.59 приведено сравнение результатов расчета с теоретическими и экспериментальными данными работы [66] в координатах  $(\Delta U/U_0, H)$  для сплава 6061-T6. Здесь  $U_0$  — начальная скорость пули,  $\Delta U$  — потеря скорости пули.

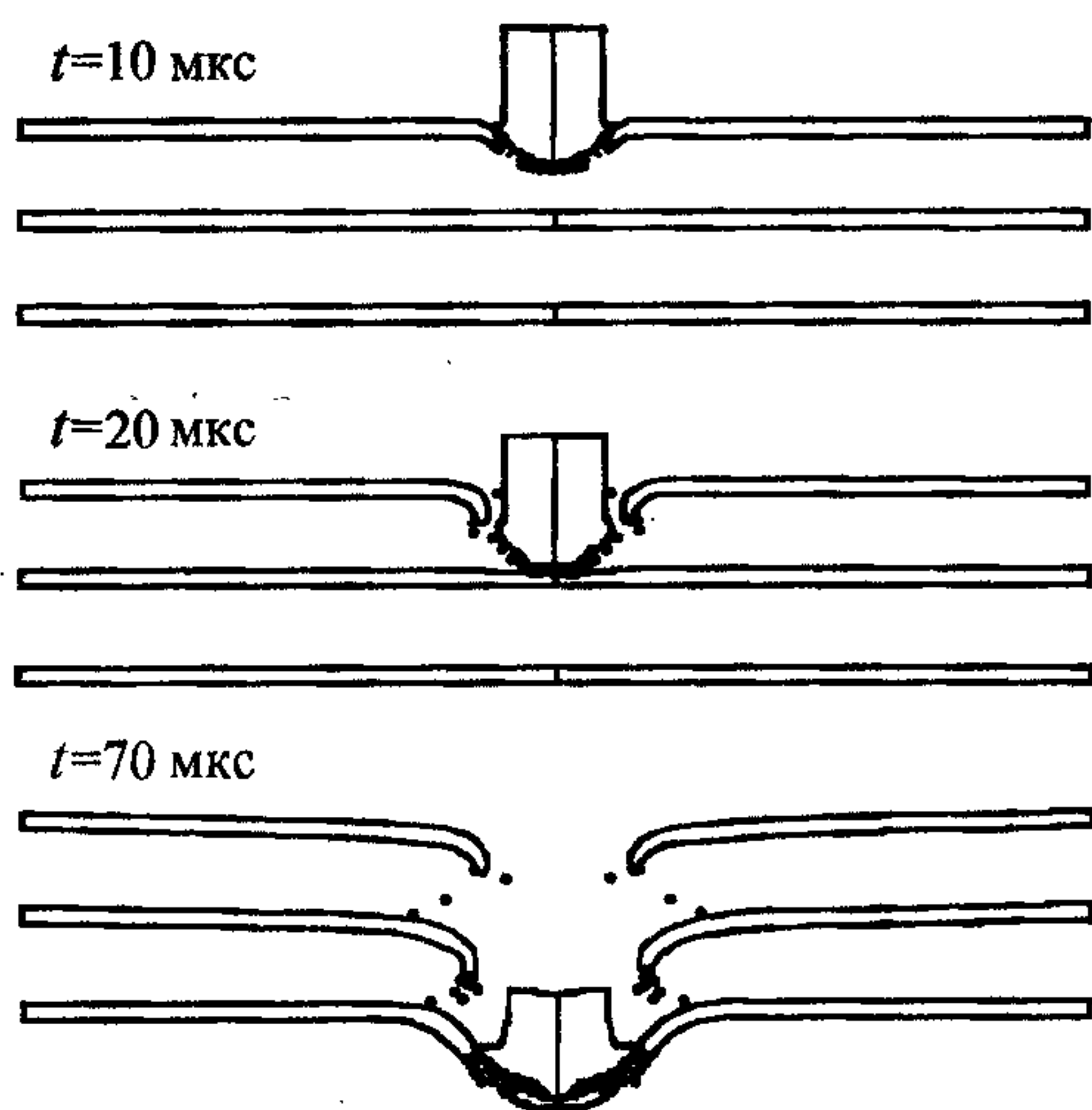


Рис. 3.56. Кинограмма процесса пробития разнесенной преграды.

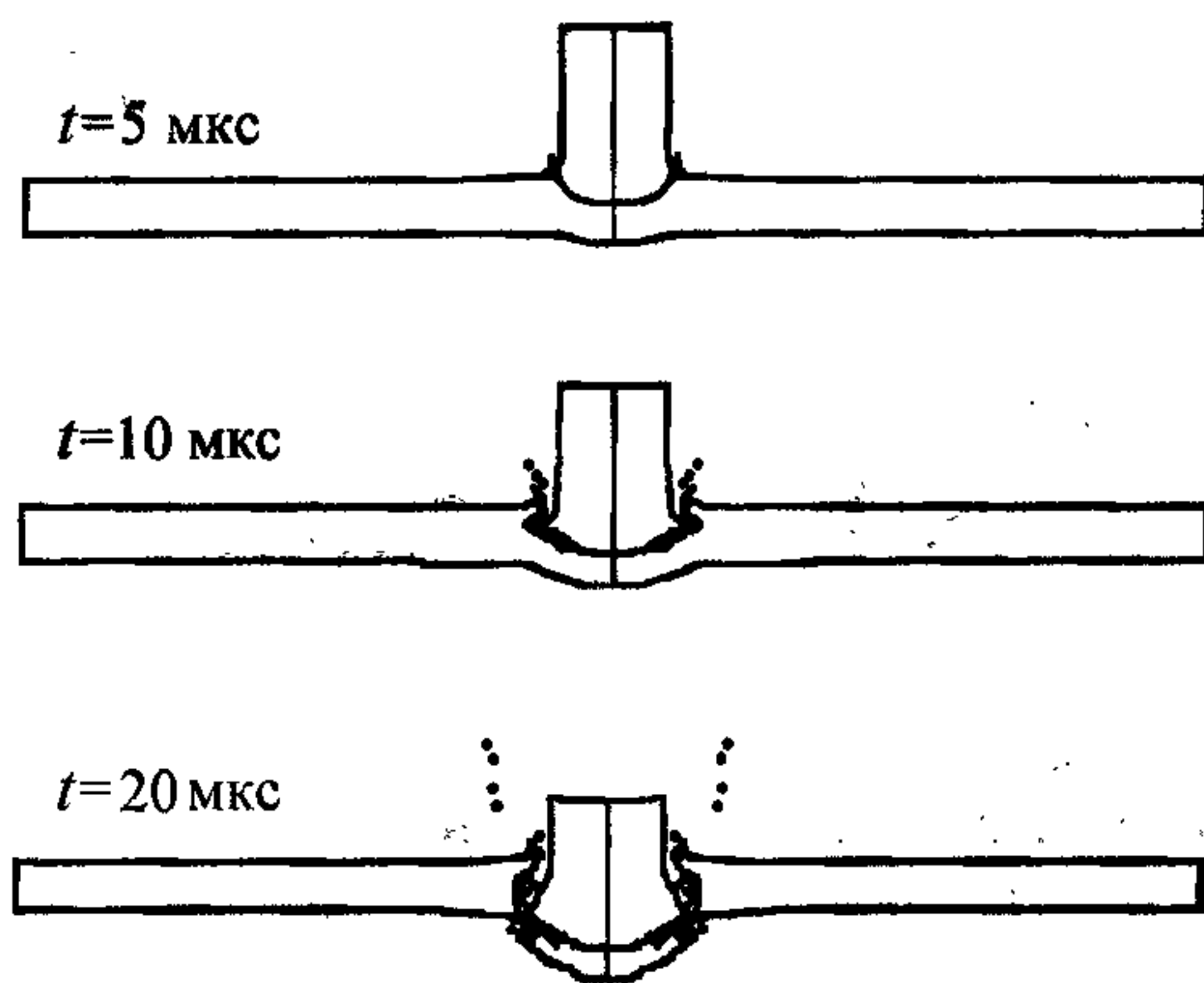


Рис. 3.57. Пробитие монолитной преграды.



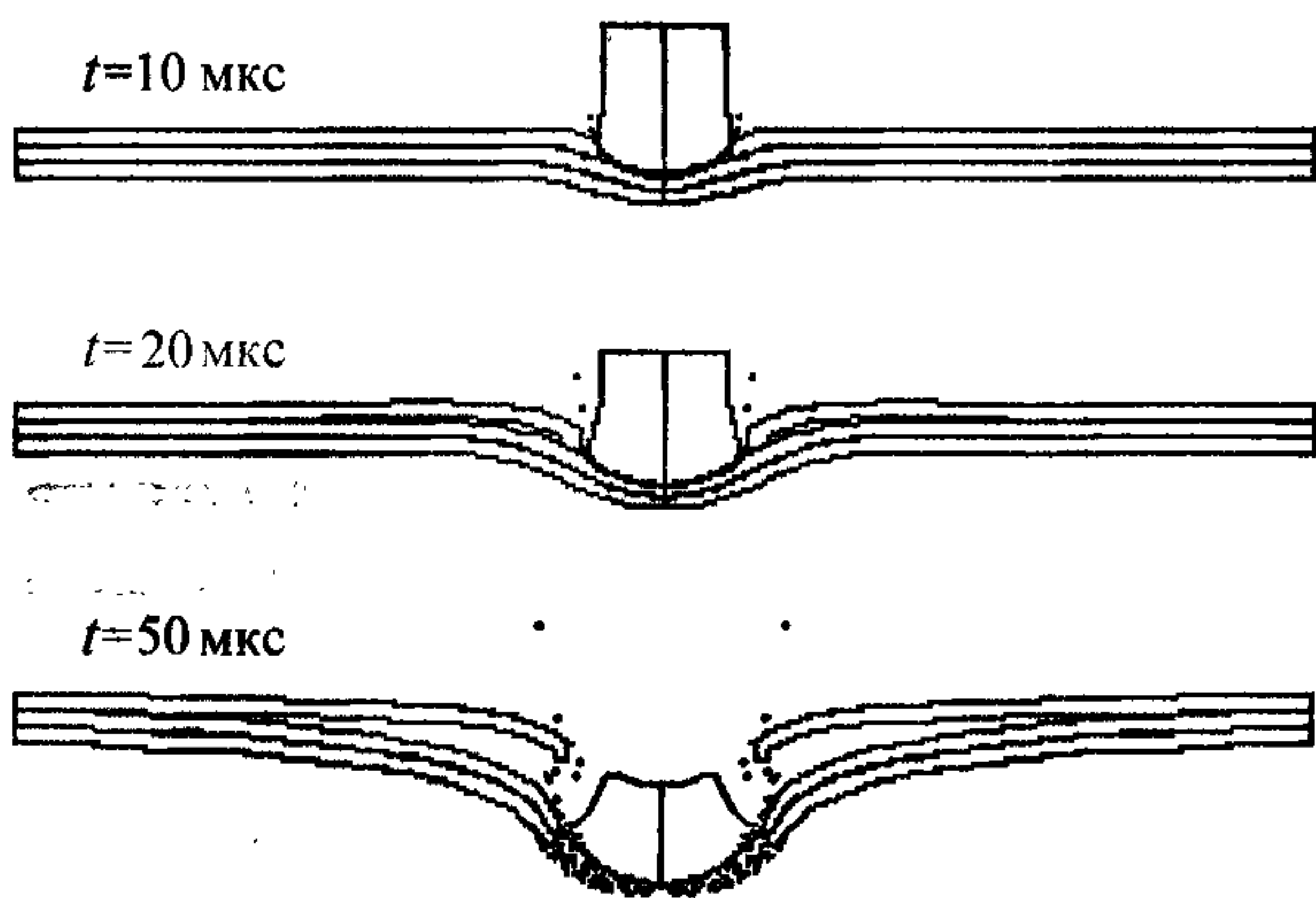


Рис. 3.58. Взаимодействие пули со слоеной преградой.

рименте факт наибольшей стойкости слоеной без разнесения преграды.

Для примера на рис. 3.60 представлено положение ударника и многослойной преграды с разнесенными слоями на момент времени, когда процесс еще не закончился. Общие черты поведения слоев в преградах с разнесением:

диаметр отверстия увеличивается по мере продвижения пули через преграду;

из тонких слоев вырывается часть материала, которая облегает головную часть пули;

при уменьшении скорости подхода пули к данной пластине края пробитого отверстия больше деформируются.

Из приведенных решений следует, что тонкие алюминиевые преграды начинают разрушаться с центральной области, где растягивающие деформации достигают своего предельного значения. С увеличением толщины преграды проис-

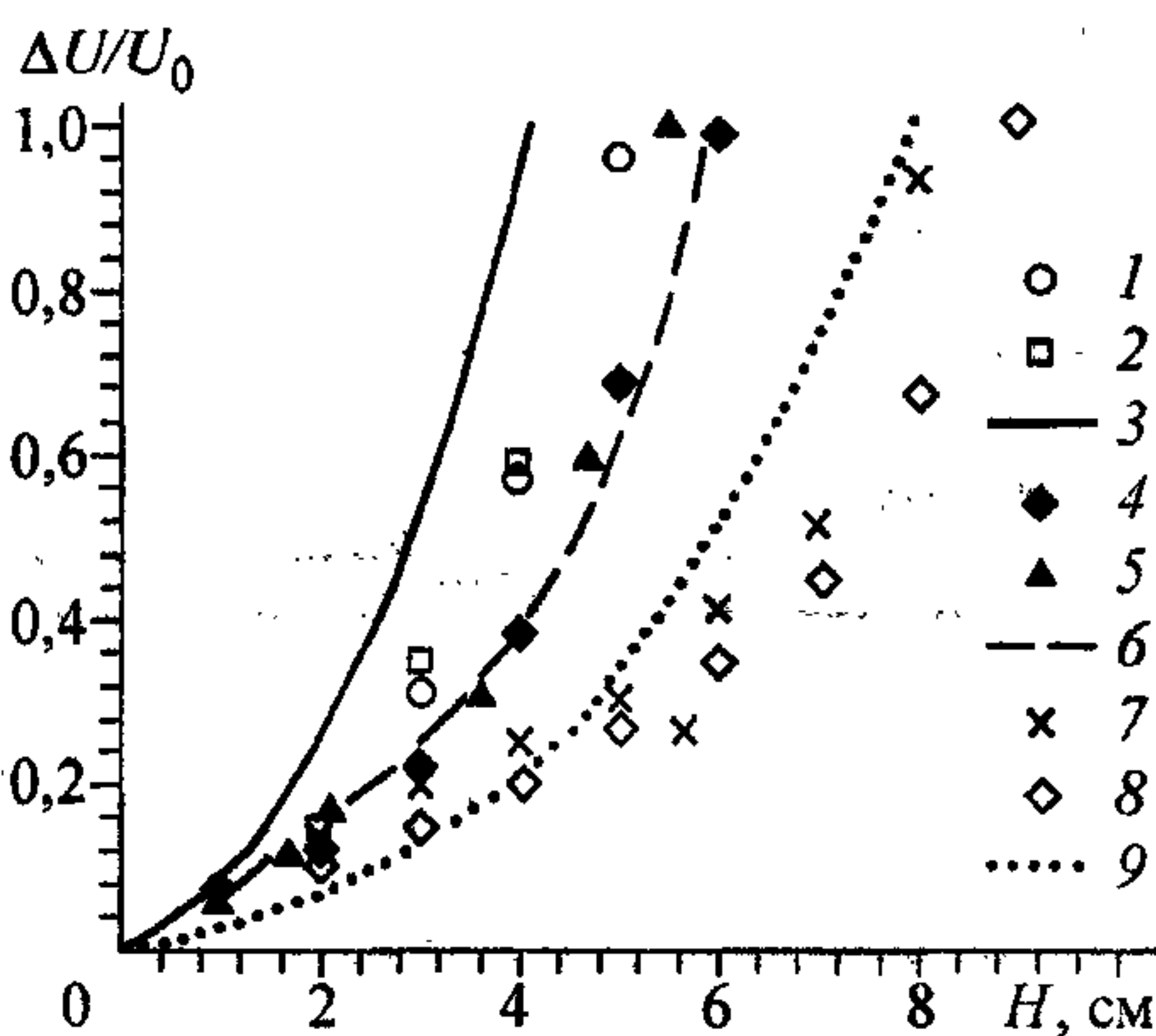


Рис. 3.59. Сравнение результатов расчета (1, 4, 7) с экспериментальными данными (2, 5, 8) [66] и оценками инженерной теории (3, 6, 9).

1—3 — разнесенные слои. 4—6 — монолитная преграда; 7—9 — слоеная преграда без разнесения слоев.

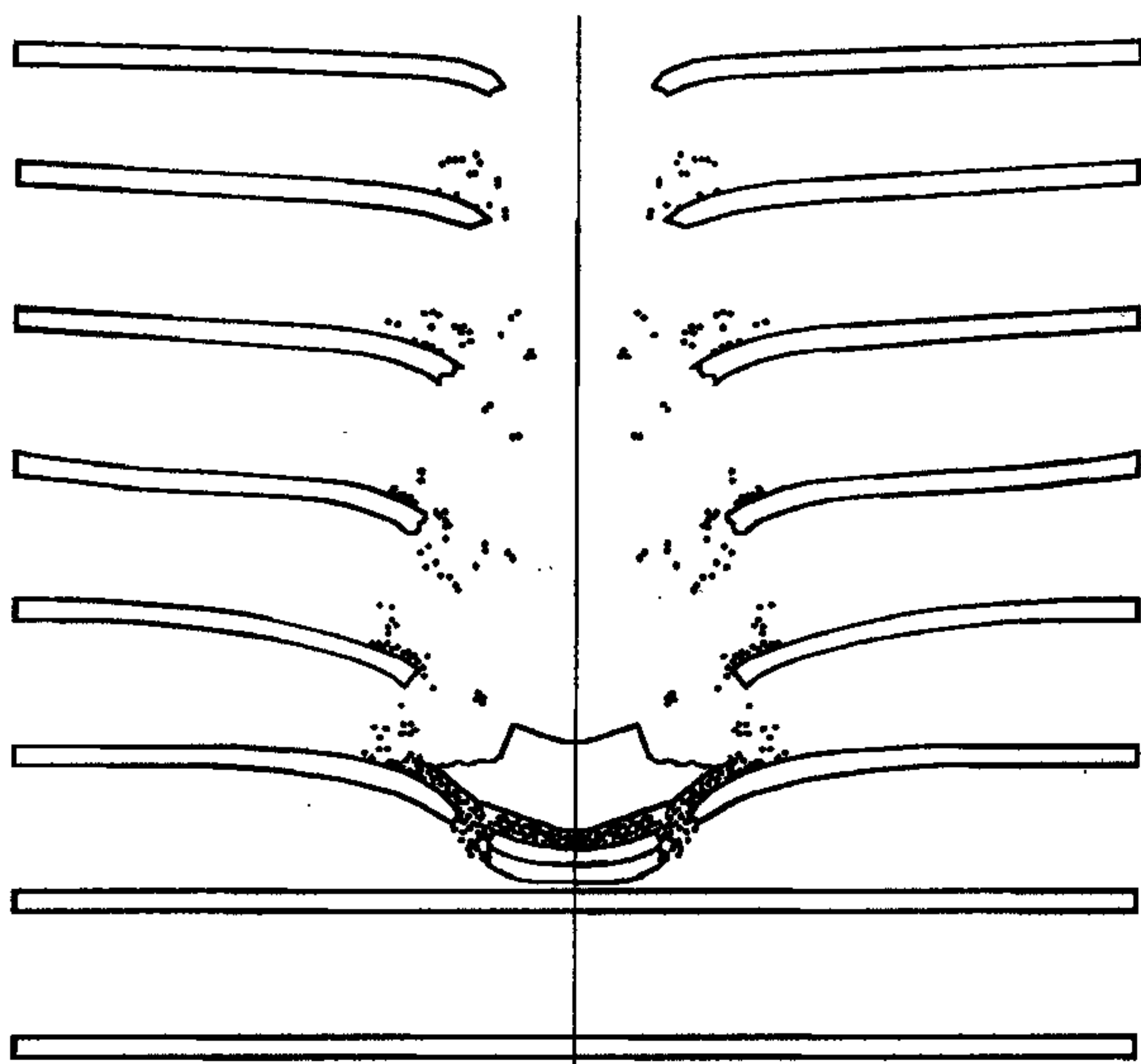


Рис. 3.60. Процесс пробития многослойной разнесенной преграды свинцовой пулей.

ходит смена механизма разрушения на сдвиговой с выбиванием пробки.

#### 3.5.4. Взаимодействие пули с преградами

Полученный в результате экспериментов [66] факт наибольшей стойкости для эквивалентных по толщине преград, состоящих из тонких слоев, справедлив, по-видимому, только для “мягких” ударников. Так, расчет соударения сложного ударника, который моделирует пулю пистолета Макарова и имеет твердый сердечник, со стальными преградами дает другой результат. Вид пули представлен на рис. 3.61. Она состоит из медной оболочки 1 толщиной  $\approx 1$  мм и вставленного в нее стального сердечника 2. Вся эта сборка залита свинцом 3. Параметры соответствующих материалов приведены в табл. 3.5. Строками 4—6 обозначены параметры материалов для преграды.

В качестве начальной бралась штатная скорость  $U_0 = 315$  м/с. Так как не известны условия на контактах между материалами, из которых состоит пуля, то полагалось, что сцепление и трение на этих границах отсутствует. При ударе пули по преграде происходит следующее. Вначале деформируется и разру-



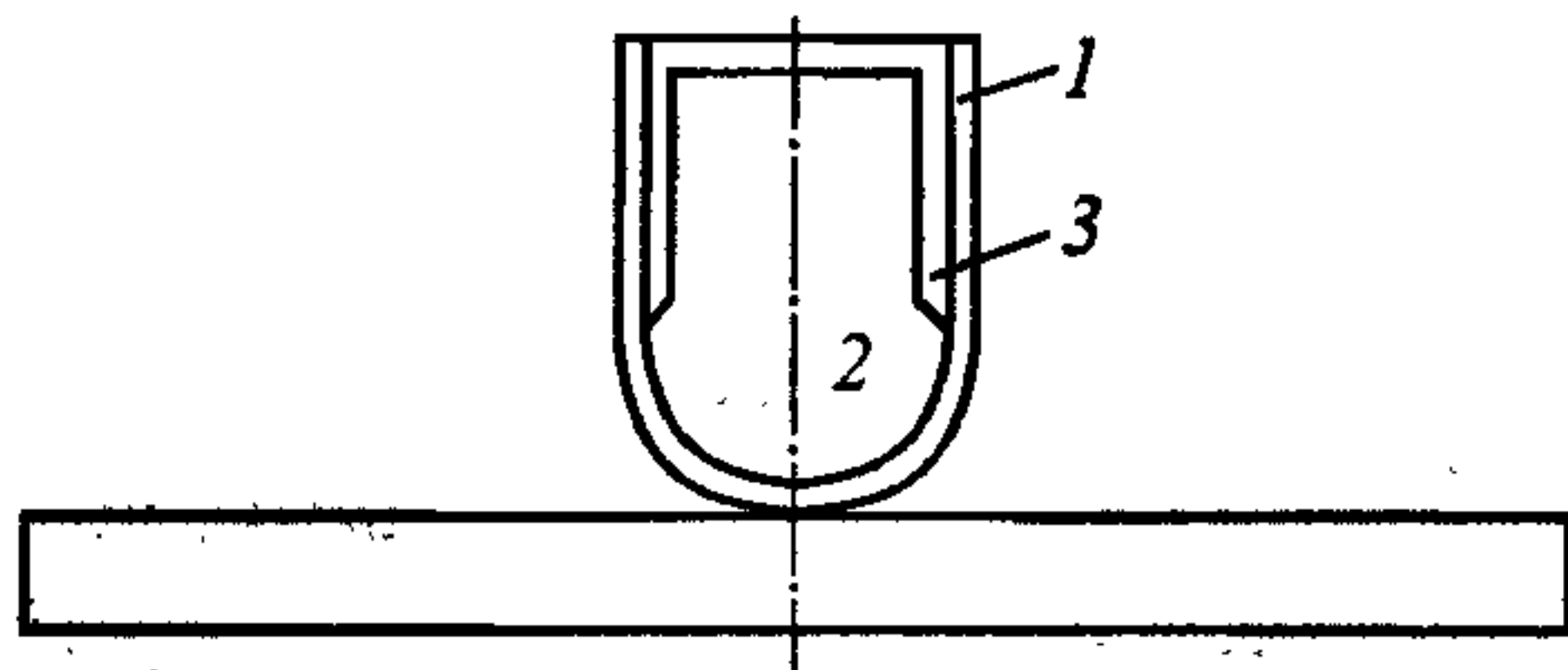


Рис. 3.61. Начальная конфигурация пули с сердечником и преграды.

Поясн. см. в тексте.

шается нижняя часть оболочки, далее оставшаяся часть оболочки расширяется и отходит от сердечника. Свинцовая заливка рвется в верхней части на торце сердечника, сильно деформируется и сползает к преграде. Часть свинца над сердечником остается целой. Сам сердечник практически не деформируется.

Преграды рассматривались двух типов: толщиной 3 мм — сплошная и составная из трех слоев без разнесения. У материала преграды менялись динамический предел текучести и предельная деформация разрушения. Для более твердого материала она выбиралась меньше. Получены следующие результаты. В случае, когда предел текучести материала преграды меньше или равен пределу текучести сердечника (4, 5 в таблице) пуля пробивает монолитную преграду насквозь (рис. 3.62, 3.63). Разрушение преграды происходит как по сдвиговому механизму, так и разрывом тыльных слоев, где растягивающие деформации достигают своего предельного значения. Поэтому выбиваемая пробка имеет значительно меньшую толщину по сравнению с толщиной исходной преграды. Следует отметить, что вдоль преграды движется поток осколков,

Таблица 3.5

Параметры материалов

Номер расчета	Материал	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$\mu$ , Мбар	$K$ , Мбар	$Y_0$ , кбар	$\sigma_*$ , кбар	$\epsilon_*$	$\chi^*$ , %
1	Cu	8,9	0,46	1,39	3,0	—	0,4	3
2	Fe	7,85	0,7	1,8	6,0	70	0,25	3
3	Pb	11,34	0,057	0,5	0,3 <sup>-3</sup>	—	0,8	3
4					5,0		0,35	
5	Сталь	7,85	0,7	1,8	6,0	70	0,25	3
6					9,0		0,20	

сформированный разрушившейся частью оболочки. Несмотря на сквозное пробитие, преграда испытывает большие изгибные деформации.

Аналогичная картина на тот же момент времени получена и для слоистой преграды (рис. 3.64, параметры материала слоев — строка 5 в табл. 3.5). Здесь разрушение преграды под пулей значительно сильнее, чем у монолитной. Поскольку преграда состоит из слоев, то она испытывает большие изгибные деформации слоев по сравнению с монолитной преградой, так как на границах слоев отсутствуют сдвиговые напряжения, увеличивающие жесткость преграды. Отсюда и механизм разрушения — разрыв материала.

Если материал преграды (строка 6) более твердый, чем материал сердечника, то пробития не происходит (рис. 3.65). Однако есть небольшая зона разрушений на тыльной стороне преграды непосредственно под сердечником. Заметим, что в данном случае происходит сползание с сердечника как внешней оболочки, так и свинцовой заливки, разрушение которых формирует поток осколков вдоль преграды.

Особенности процесса взаимодействия пули с данными преградами, в частности стойкость — сопротивление прониканию, хорошо наблюдаются на кривых изменения скорости центра масс сердечника от времени (рис. 3.66). Четко видно, что в последнем случае (4) скорость сердечника (а вместе с ним и всех компонент ударника) уменьшается быстрее всего. При этом следует заметить, что конечная скорость не равна нулю, а соответствует значению примерно

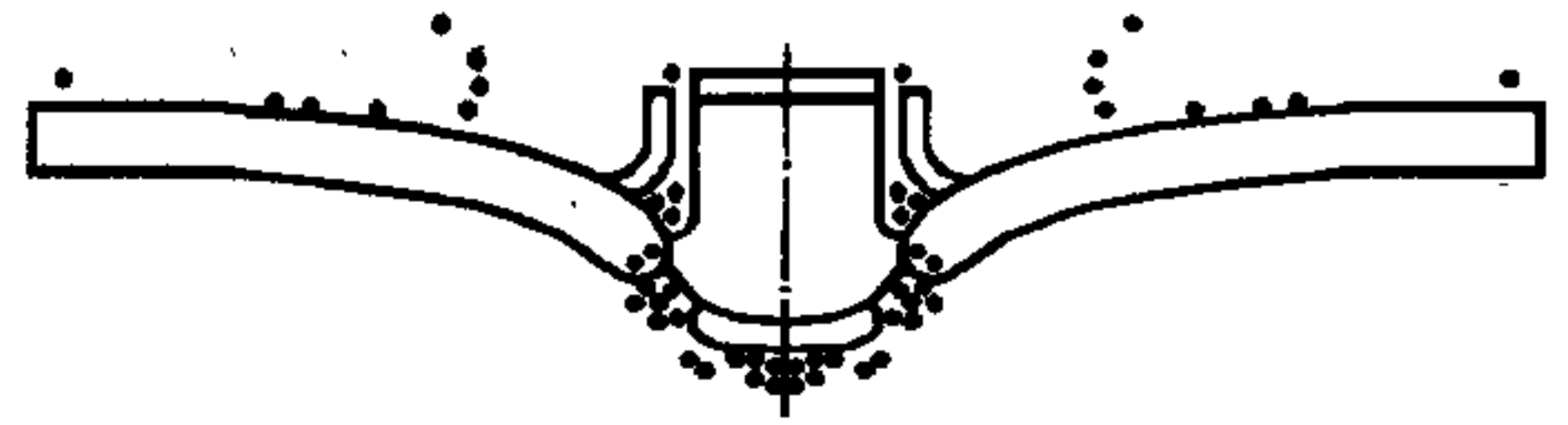


Рис. 3.62. Деформация преграды при пробивании пулей ( $Y_0 = 5,0$  кбар,  $t = 50$  мкс).

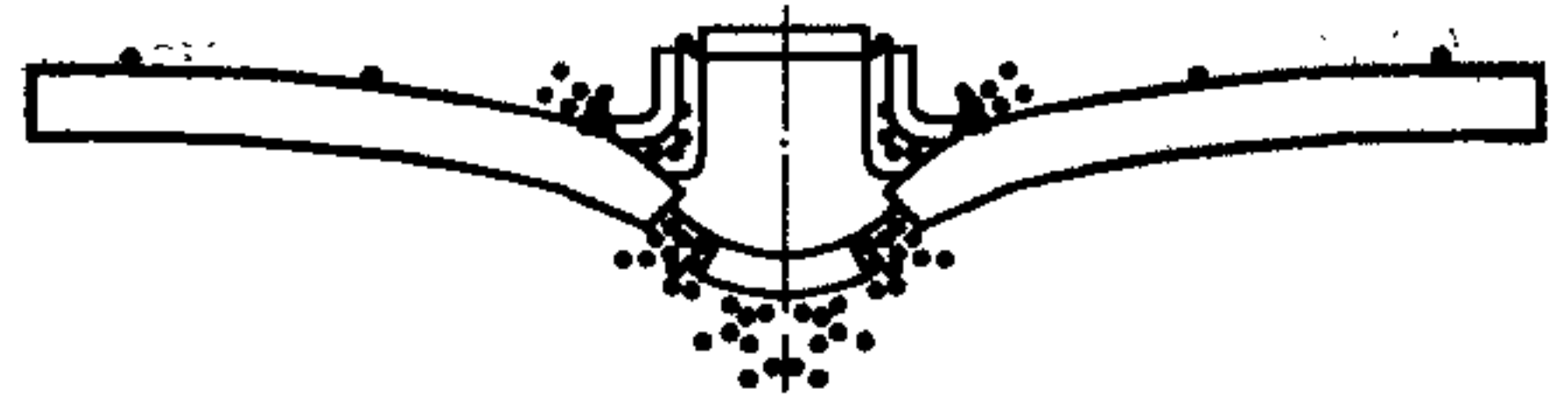


Рис. 3.63. Взаимодействие пули с преградой умеренной твердости ( $Y_0 = 6,0$  кбар,  $t = 50$  мкс).

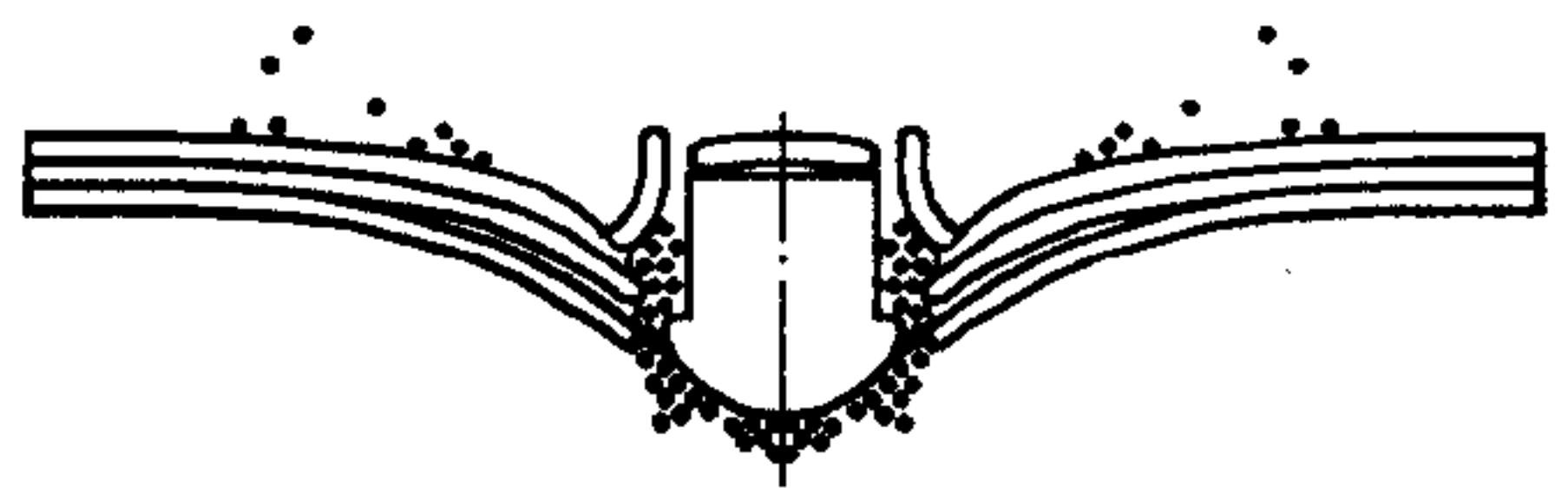


Рис. 3.64. Пробитие слоистой преграды.

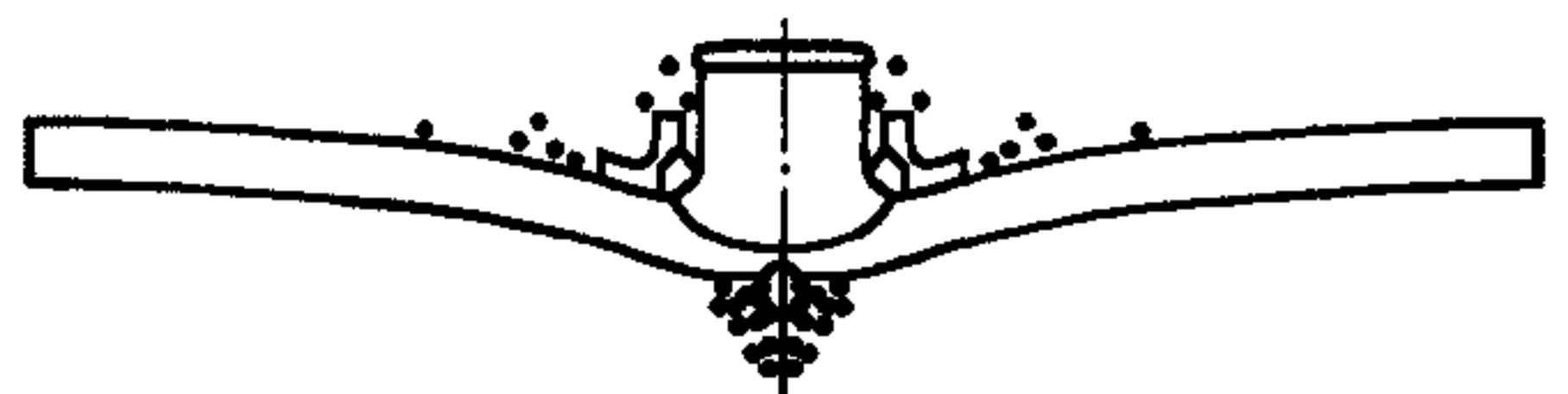
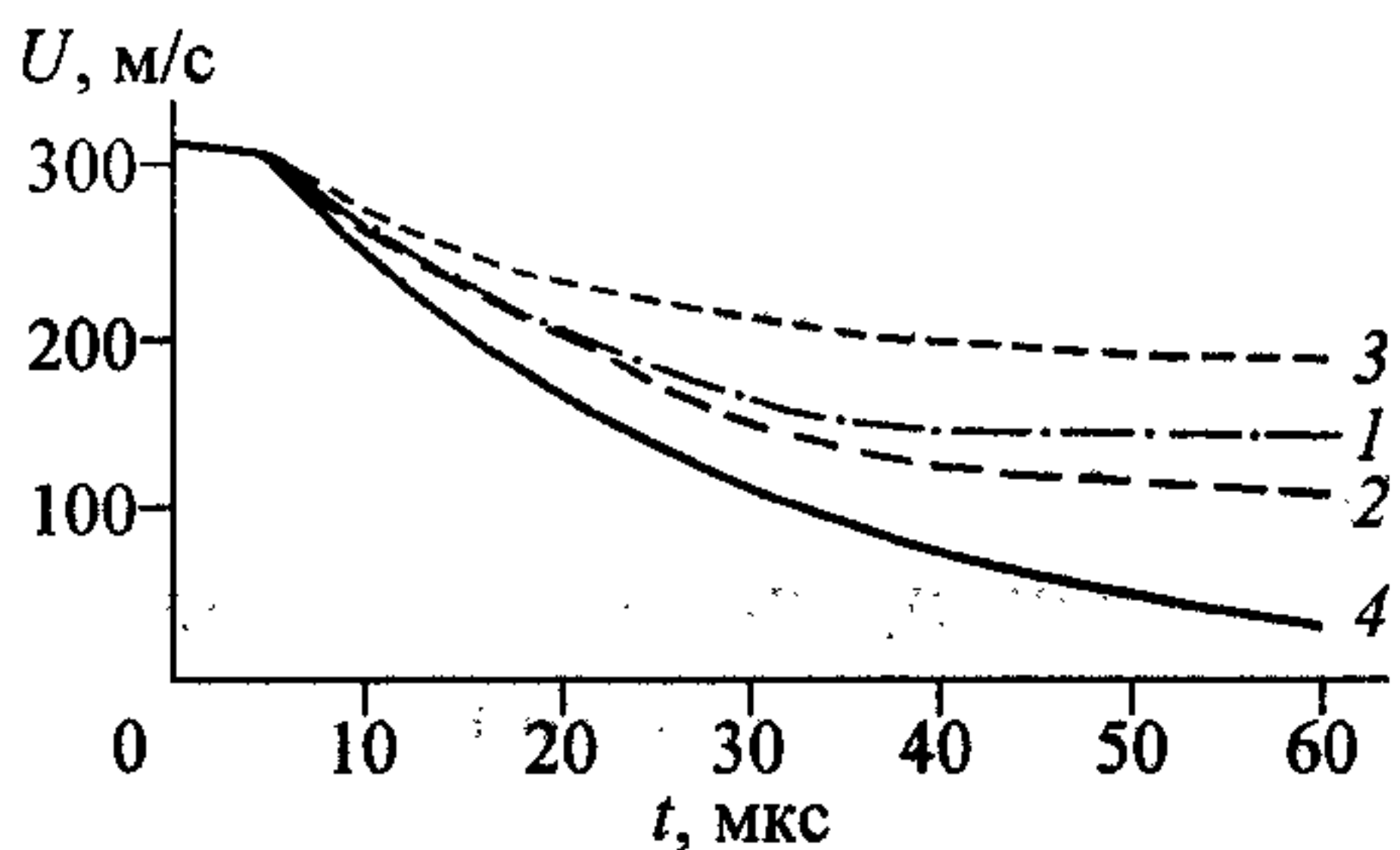


Рис. 3.65. Взаимодействие пули с твердой преградой ( $Y_0 = 9,0$  кбар).





**Рис. 3.66.** Зависимость скорости пули при взаимодействии с преградами от твердости материала.

1 —  $Y_0 = 5,0$  кбар, 2 —  $Y_0 = 6,0$  кбар,  
3 — слоеная преграда, 4 —  $Y_0 = 9,0$  кбар.

звать, какими прочностными свойствами должен обладать материал преграды, чтобы не происходило полное ее пробитие.

20 м/с. С такой средней скоростью продолжают движение пуля вместе с преградой. Меньше всего тормозит ударник слоеная преграда.

Таким образом, против твердых, слабо деформируемых ударников лучшей стойкостью обладают монолитные преграды, обладающие высоким пределом текучести материала. Кроме того, показано, что расчетами по заданным параметрам преграды и скорости ударника, с помощью вычислительного эксперимента можно ука-

## Приложение А

### Алгоритм расчета контактной поверхности с симметричным учетом взаимодействующих грани

Одним из основных моментов численного моделирования процессов взаимодействия твердых тел при лагранжевом подходе является реализация граничных условий на контактной поверхности. Особенно это важно в тех случаях, когда применяется гипотеза упругого представления уравнений Прандтля—Рейсса. В этом случае изменение девиатора тензора напряжений вычисляется через тензор скоростей деформации, поэтому от точности нахождения значений векторов скорости на поверхности контакта будет зависеть точность расчета напряженно-деформированного состояния внутри тел.

Осложняет задачу и то, что на границе контакта, как правило, несогласованные разностные сетки в расчетных областях, так как шаг по пространству зависит от свойств материала и выбирается максимально возможным из условия устойчивости для ускорения решения задачи.

Используя замену распределенных по контактной поверхности сил реакции сосредоточенными силами в узлах разностной сетки, в работе [67] сделана попытка построить симметричный алгоритм расчета поверхности скольжения.

Выделен элементарный акт взаимодействия граничного узла одного тела с ребром ячейки другого тела и получено выражение для вычисления нормальной составляющей вектора силы реакции. Однако автор [67] предлагает использовать это выражение для составления системы линейных уравнений, учитывающей взаимодействие всех узлов на поверхности контакта, что приводит к появлению нефизического эффекта — скорость распространения возмущений вдоль поверхности контакта становится бесконечной.

Поскольку величина скорости распространения возмущения в среде всегда конечна, то влияние от взаимодействия граничного узла одного тела с граничным ребром другого тела должно сказываться только на соседних граничных узлах — это основное требование устойчивости счета по явным разностным схемам. Решение для каждого узла задачи о взаимодействии с соседними узлами другого тела позволяет получить метод расчета поверхности контакта соударяющихся тел, в котором границы тел участвуют симметричным образом [68, 69]. Аналогичный метод расчета независимо был предложен позднее в работе [70].

Перечислим основные допущения, использующиеся для построения симметричного алгоритма расчета контактной поверхности в рамках принятой явной разностной схемы:

- граничные узлы разностной сетки — сосредоточенные массы;
- ребра ячеек — прямолинейные отрезки, соединяющие узлы (в трехмерном случае грани граничных ячеек плоские треугольники);
- распределение скорости вдоль ребер (граней) ячеек — линейное;
- силы реакции сосредоточены в граничных узлах разностной сетки;
- принцип локальности — действие силы реакции граничного узла распространяется только на ближайшее граничное ребро ячейки или узел другого тела.

### **А.1. Двумерный случай**

Конечно-разностный аналог уравнения движения (3.2.11) граничного узла  $k$  для вектора скорости имеет вид

$$\mathbf{U}_k^{n+1} = \mathbf{U}_k^n + \tau \cdot (\mathbf{F}_k^n + \mathbf{R}_k^n) / (2\varphi_k). \quad (\text{А.1})$$

Введем предварительные значения скоростей и координат для граничного узла



$$\mathbf{U}_k^* = \mathbf{U}_k^n + \tau \cdot \mathbf{F}_k^n / (2\phi_k), \quad \mathbf{x}_k^* = \mathbf{x}_k^n + \mathbf{U}_k^* \tau, \quad (\text{A.2})$$

которые совпадают со значениями векторов скорости и координат граничных узлов, лежащих на свободной от напряжений поверхности расчетной области (первый этап расчета).

Для определения проникания узла  $c$  через граничное ребро другого тела  $(a, b)$  используются условия (рис. 3.67):

$$S_{abc} > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \alpha = l_{ap} / l_{ab}, \quad (\text{A.3})$$

где  $S_{abc}$  — площадь треугольника, вычисляется по формуле

$$S_{abc} = |\mathbf{x}_{ac}^* \times \mathbf{x}_{bc}^*| / 2, \quad \mathbf{x}_{ac}^* = \mathbf{x}_a^* - \mathbf{x}_c^*.$$

Здесь  $l_{ij}$  — длина соответствующего индексам отрезка, а точка  $p$  — проекция узла  $c$  на ребро  $(a, b)$ .

Пусть  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали на граничных ребрах. Выберем направление касательного вектора  $\mathbf{t}$  таким образом, чтобы оно совпадало с обходом счетной области против часовой стрелки. Так, для звена  $(a, b)$  компоненты векторов  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{t}$  имеют вид:

$$t_x = (x_b - x_a) / l_{ab}, \quad t_y = (y_b - y_a) / l_{ab}, \quad n_x = -t_y, \quad n_y = t_x. \quad (\text{A.4})$$

Тогда вектор силы реакции для точки  $i$  можно представить в виде разложения на нормальную и касательную составляющие  $\mathbf{R}_i = N_i \mathbf{n} + T_i \mathbf{t}$ , где  $N_i = (\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{n})$ ,  $T_i = (\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{t})$ . Условие равновесия сил и закон сохранения момента сил для нормальных компонент векторов сил реакции дают следующую связь между нормальными составляющими сил реакции в узлах  $a, b, c$ :

$$N_a = -(1 - \alpha) N_c, \quad N_b = -\alpha N_c. \quad (\text{A.5})$$

Далее, из условия непроникания следует, что на момент времени  $t^{n+1}$  необходимо равенство нормальных составляющих векторов скоростей в точке контакта  $p$  на отрезке  $(a, b)$ :

$$U_{nc}^{n+1} = U_{na}^{n+1} (1 - \alpha) + U_{nb}^{n+1} \alpha, \quad (\text{A.6})$$

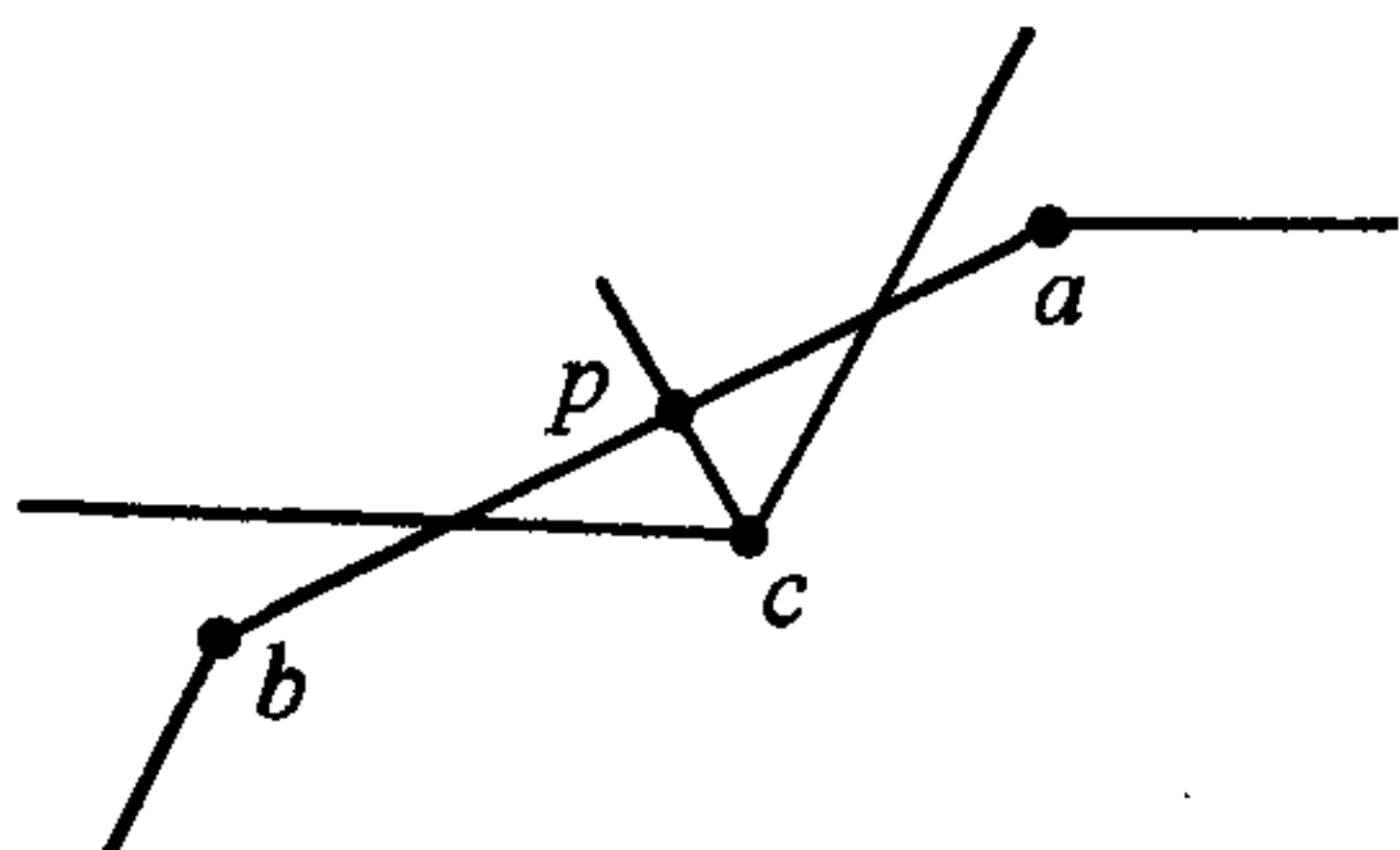


Рис. 3.67. Элементарный акт взаимодействия граничного узла с ребром счетной ячейки другого тела.

где  $U_{ni}^{n+1} = (\mathbf{U}_i^{n+1}, \mathbf{n})$  — проекция вектора скорости на нормаль в точках  $i = a, b, c$ . Подставляя (A.1), с учетом (A.2) и (A.5), в (A.6), после несложных преобразований получим выражение для вычисления нормальной составляющей силы реакции в узле  $c$ :

$$N_c = \frac{U_{na}^* (1 - \alpha) + U_{nb}^* \alpha - U_{nc}^*}{\tau(1/(2\varphi_c) + (1 - \alpha)^2/(2\varphi_a) + \alpha^2/(2\varphi_b))}. \quad (\text{A.7})$$

Нормальные компоненты сил реакций для точек  $a$  и  $b$  определяются из (A.5). Далее проводим коррекцию нормальной компоненты вектора скорости:

$$U_{nc}^{n+1} = U_{nc}^* + \tau N_c / (2\varphi_c). \quad (\text{A.8})$$

Таким образом, для элементарного акта взаимодействия граничного узла одной расчетной области с ребром граничной ячейки другой расчетной области решена задача в случае отсутствия трения на границе контакта.

Для случая скольжения материалов с трением сила реакции будет состоять из двух компонент: нормальной и касательной (сила трения). Вычисление силы трения осуществляется по заданному закону трения  $\Phi(N, T) \leq 0$ . Пусть взаимодействующие узлы имеют предварительные значения касательной составляющей вектора скорости

$$U_{ii}^* = (\mathbf{U}_i^* \cdot \mathbf{t}) \quad (i = a, b, c).$$

Тогда предельное значение силы, которое обеспечит совместное движение этих узлов, найдем по формуле, аналогичной формуле для вычисления нормальной компоненты силы реакции:

$$T_c^* = \frac{U_{ta}^* (1 - \alpha) + U_{tb}^* \alpha - U_{tc}^*}{\tau(1/(2\varphi_c) + (1 - \alpha)^2/(2\varphi_a) + \alpha^2/(2\varphi_b))}. \quad (\text{A.9})$$

Это предельная величина силы трения, которую могут преодолеть движущиеся граничные узлы, имеющие значения касательных компонент вектора скорости  $U_{ii}^*$  ( $i = a, b, c$ ):

Из закона трения  $\Phi(N, T) = 0$  найдем величину силы трения движения  $T_c = f(N_c)$ . Если  $T_c < T_c^*$ , то имеет место скольжение материала и коррекция касательных составляющих вектора скорости выполняется с использованием величины  $T_c$ :



$$U_{tc}^{n+1} = U_{tc}^* + \tau T_c / (2\varphi_c). \quad (\text{A.10})$$

В противном случае касательная составляющая вектора скорости определяется из условия идеального механического контакта:

$$U_{tc}^{n+1} = U_{ta}^* (1 - \alpha) + U_{tb}^* \alpha. \quad (\text{A.11})$$

Используя соотношения (A.1)—(A.10) и обходя границы находящихся в контакте тел в направлении против часовой стрелки, найдем вектора сил реакции для всех узлов, которые проникли через предварительную границу другого тела. По полученным значениям вектора скорости вычислим истинные положения граничных узлов на момент времени  $t^{n+1}$ . Компоненты вектора скорости легко восстанавливаются через нормальные и касательные составляющие

$$U_{xc}^{n+1} = U_{nc}^{n+1} n_x + U_{tc}^{n+1} t_x, \quad U_{yc}^{n+1} = U_{nc}^{n+1} n_y + U_{tc}^{n+1} t_y, \\ x_c^{n+1} = x_c^n + U_{xc}^{n+1} \tau, \quad y_c^{n+1} = y_c^n + U_{yc}^{n+1} \tau. \quad (\text{A.12})$$

Сформулируем основные шаги алгоритма расчета контактной поверхности при наличии силы трения:

проводится вычисление предварительных значений векторов скорости и положений граничных узлов;

определяются граничные узлы, проникшие через предварительные границы других тел, и соответствующие узлы и ребра других тел;

находятся нормальные составляющие векторов силы реакции для данных узлов и ребер;

рассчитываются касательные составляющие векторов силы реакции для отмеченных ранее граничных узлов и ребер;

осуществляется коррекция векторов скорости и вычисляется новое положение границ, имеющих контакт.

В некоторых случаях происходит попадание двух и более узлов на граничное ребро ячейки другой счетной области. Для решения данной задачи найдем вектора положения и скорости центра масс узлов, проникающих через граничное ребро, по формулам

$$\mathbf{x}_{cm} = \sum (\mathbf{x}_i \varphi_i) / \varphi_{cm}, \quad \mathbf{U}_{cm} = \sum (\mathbf{U}_i \varphi_i) / \varphi_{cm}, \quad \varphi_{cm} = \sum \varphi_i.$$

Тогда нормальная составляющая силы реакции, действующая на центр масс, имеет вид

$$N_{cm} = \frac{U_{na}^* (1 - \alpha) + U_{nb}^* \alpha - U_{ncm}^*}{\tau(1/(2\varphi_{cm}) + (1 - \alpha)^2 / (2\varphi_a) + \alpha^2 / (2\varphi_b))},$$

а в узлах  $a$  и  $b$   $N_a = -(1 - \alpha)N_{cm}$  и  $N_b = -\alpha N_{cm}$ . Кинематические условия на скорости узлов —  $U_{ncm}^{n+1} = U_{na}^{n+1}(1 - \alpha_i) + U_{nb}^{n+1}\alpha_i$ . После подстановки значений  $N_a$  и  $N_b$  получим уравнения для нормальной составляющей силы реакции каждого узла  $i$ :

$$\Delta U_{ni}^* = \tau(N_i / \varphi_i + N_{cm}\beta),$$

где

$$\Delta U_{ni}^* = U_{na}^* (1 - \alpha_i) + U_{nb}^* \alpha_i - U_{ni}^*,$$

$$\beta = (1 - \alpha_i)(1 - \alpha) / \varphi_a + \alpha_i \alpha / \varphi_b.$$

Если на поверхности контакта задан закон трения, то проводя выкладки, аналогичные (А.9)—(А.11), с учетом вышеизложенного получим соотношения для расчета касательных составляющих силы трения и вектора скорости.

Таким образом, задача о взаимодействии более чем одного граничного узла с граничным ребром другого тела решена полностью [68].

## **А.2. Трехмерный случай**

Решение динамических задач взаимодействия пространственных тел осуществляется в основном по явным схемам. Широкое распространение получили сетки с шестигранными и тетраэдрическими ячейками. Применение шестигранных ячеек в контактных задачах добавляет сложности в организацию проверки на проникание одного материала через границу другого тела, так как граничные поверхности покрываются сеткой из четырехугольных ячеек, а через четыре узла, в общем случае, нельзя провести плоскость. Разбиение счетных областей на тетраэдрические ячейки позволяет реализовать симметричный алгоритм расчета контактных поверхностей более простым способом.

Пусть счетные области, занимаемые телами, разбиты на тетраэдрические элементы, тогда поверхности тел покрыты плоскими треугольными ячейками. Величины векторов скорости и положения граничных узлов вычисляются, как введено выше (А.1)—(А.2), но в пространственной системе координат. Будем



считать это первым шагом расчета контактной поверхности.

Далее, необходимо провести проверку на проникание граничных узлов одного тела через предварительную границу другого тела и установить соответствие между узлами одного тела и граничными элементами другого, через которые эти узлы проникли. Для устранения перекрытия счетных областей найдется вектора сил реакции  $\mathbf{R}$  и выполняется корректировка значений векторов скоростей, а затем и положений граничных узлов. Это будет второй шаг расчета поверхности контакта.

Ввиду сложности обозначений опустим верхние индексы, относящиеся к временным слоям, и введем номера тел верхним индексом. Далее, предполагая, что рассчитывается контактная граница двух тел, обозначим через  $\mathbf{r}_i^k$  ( $k = 1, 2$ ) проникшие граничные узлы, а через  $S_j^l$  ( $l = 2, 1$ ) граничные элементы, плоскости которых пересекли граничные узлы другого тела. Проекция граничного узла  $\mathbf{r}_i^k$  на плоскость элемента  $S_j^l$  (рис. 3.68) находится из соотношения

$$\mathbf{r}_{ip}^k = \mathbf{r}_i^k - ((\mathbf{r}_{1j} - \mathbf{r}_i^k), \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}.$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали к элементу  $S_j^l$ , который вычисляется с помощью нормированного векторного произведения ребер элемента:

$$\mathbf{n} = ((\mathbf{r}_{2j} - \mathbf{r}_{1j}) \times (\mathbf{r}_{3j} - \mathbf{r}_{1j})) / |(\mathbf{r}_{2j} - \mathbf{r}_{1j}) \times (\mathbf{r}_{3j} - \mathbf{r}_{1j})|.$$

Внутренняя нумерация узлов в граничных элементах  $S_j^l$  осуществляется в направлении против часовой стрелки.

В качестве условий проникания узла  $\mathbf{r}_i^k$  через плоскость элемента  $S_j^l$  используются знак величины  $V$ , вычисляемой по формуле

$$V = ((\mathbf{r}_{2j}^l - \mathbf{r}_{1j}^l) \times (\mathbf{r}_{3j}^l - \mathbf{r}_{1j}^l)) \cdot \mathbf{r}_i^k, \quad (\text{A.13})$$

и

$$0 \leq \alpha_{p\xi} \leq 1, \quad \alpha_{p\xi} = A_{p\xi(j)} / A_j. \quad (\text{A.14})$$

Здесь  $j$  — номер граничного элемента,  $l$  — номер тела,  $\xi = 1, 2, 3$  — номера узлов треугольника,  $p$  — точка пересечения перпендикуляра из точки  $\mathbf{r}_i^k$  на  $S_j^l$ ,  $A_j$  — площадь треугольника  $S_j^l$ ,  $A_{p\xi(j)}$  — площади треугольников, обра-

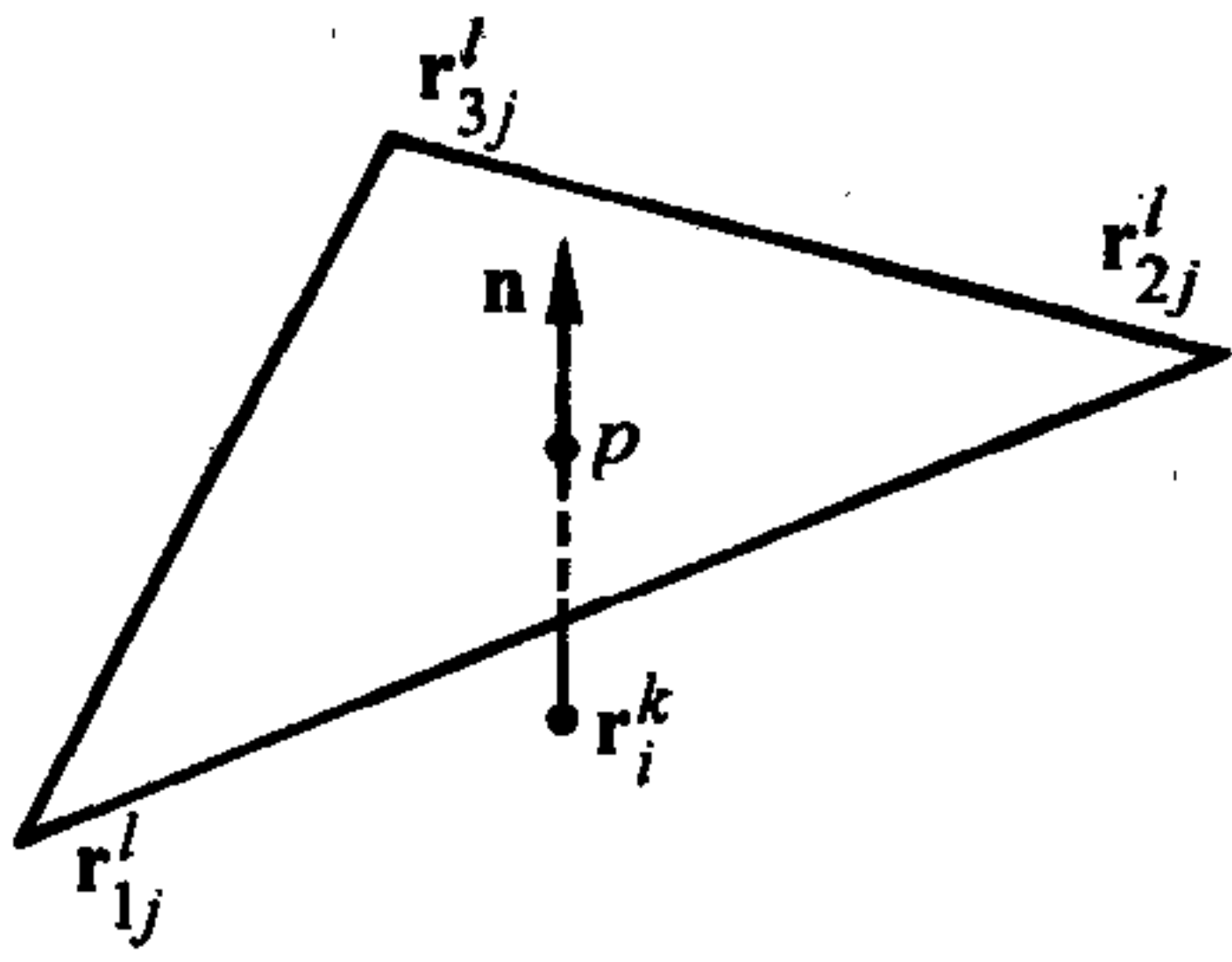


Рис. 3.68. Элементарный акт взаимодействия в 3D случае.

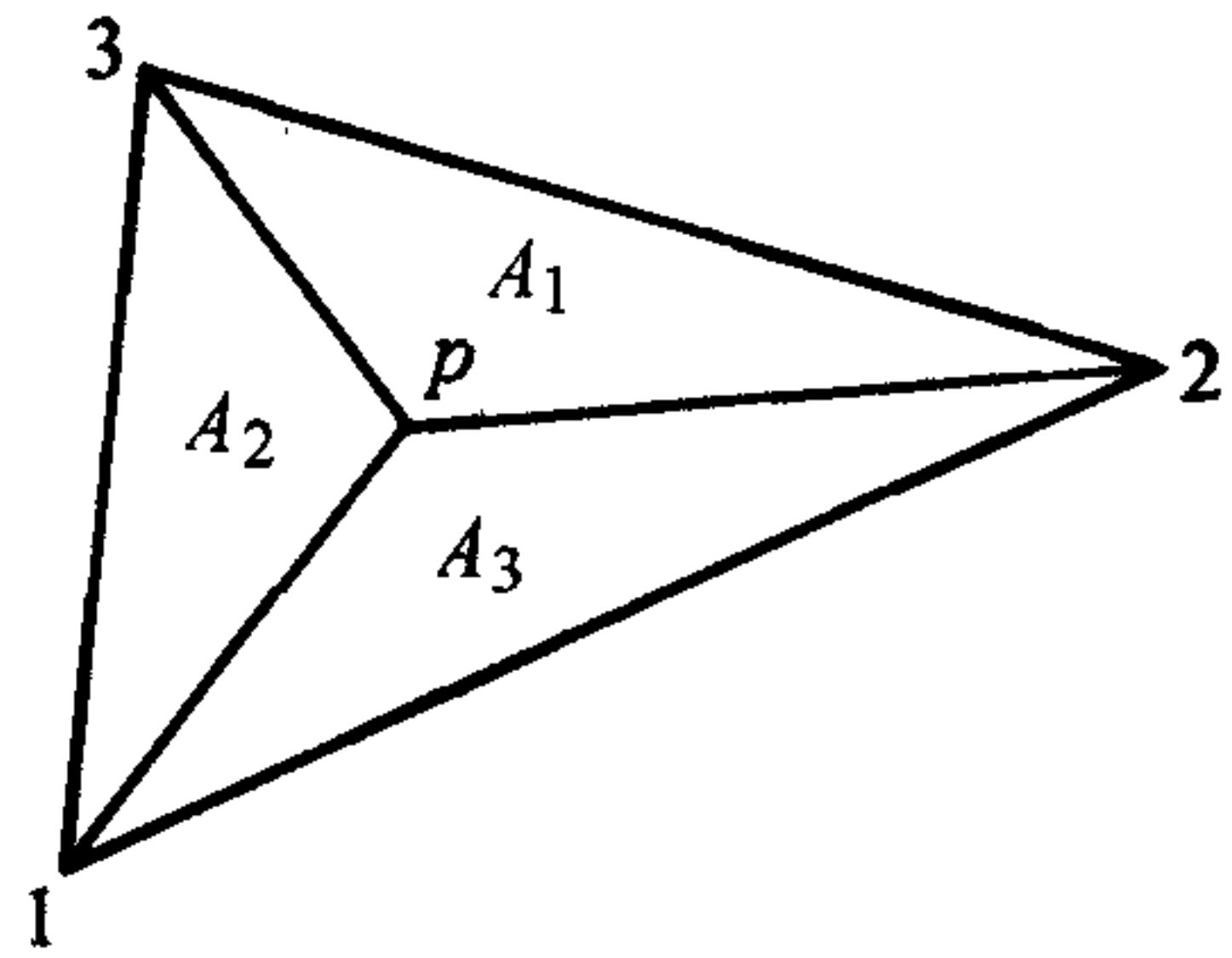


Рис. 3.69. Нумерация треугольников в элементе для определения проникания граничного узла через границу другого тела.

зованных точкой  $p$  и узлами треугольника  $S_j^l$  (рис. 3.69). Условие (A.14) определяет принадлежность проекции  $\mathbf{r}_{ip}^k$  узла  $\mathbf{r}_i^k$  площади элемента  $S_j^l$ .

Как и ранее, представим вектор силы реакции в виде:

$$\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{T}, \quad \mathbf{N} = (\mathbf{R}, \mathbf{n})\mathbf{n},$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к элементу  $S$ . Из условия равновесия нормальных составляющих сил реакции и их моментов на элементе  $S$  получим связь между проекциями сил, действующих на узлы:

$$N_p^k + \sum N_\xi^l = 0, \quad N_\xi^l = -\alpha_\xi N_p^l, \quad (\text{A.15})$$

где коэффициенты  $\alpha_\xi$  определены выше.

Значения векторов скорости для узлов  $i$  на  $(n+1)$ -м временном слое вычисляются через их промежуточные значения  $\mathbf{U}_i^*$  и силы реакций:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^* + \frac{\tau}{2\varphi_i} \mathbf{R}_i, \quad U_{in} = (\mathbf{U}_i, \mathbf{n}), \quad U_{in} = U_{in}^* + \frac{\tau}{2\varphi_i} N_i. \quad (\text{A.16})$$

Из условия непроникания следует равенство нормальных компонент векторов скорости на поверхности контакта, т.е. нормальная составляющая вектора скорости узла  $\mathbf{r}_p^k$  должна быть равна нормальной составляющей вектора скорости в точке проекции  $\mathbf{r}_p^l$ , лежащей в плоскости элемента  $S_j^l$ . При линейном распределении скорости по плоскости элемента в любой произвольной точке на  $(n+1)$ -й момент времени из (A.16) следует равенство



$$U_{pn}^{k*} + \frac{\tau}{2\varphi_p^k} N_p = \sum \alpha_\xi (U_{\xi n}^{l*} + \frac{\tau}{2\varphi_\xi^l} N_\xi). \quad (\text{A.17})$$

С учетом (A.15) из (A.17) получим соотношение для нахождения нормальной компоненты вектора сил реакции  $\mathbf{N}$ :

$$N_p = \frac{U_{sn}^{l*} - U_{pn}^{k*}}{\tau \left( \frac{1}{2\varphi_p} + \sum \frac{\alpha_\xi^2}{2\varphi_\xi} \right)}, \text{ где } U_{sn}^{l*} = \sum \alpha_\xi U_{\xi n}^{l*}.$$

После вычисления вектора нормальной составляющей силы реакции переходим к нахождению касательной компоненты вектора силы реакции, если задан закон трения. В случае отсутствия трения  $T = 0$ , векторы сил реакции в граничных узлах находятся из соотношения  $\mathbf{R} = \mathbf{N}$ , а истинные значения вектора скорости для узла  $\mathbf{r}_p^k$  определяются по (A.16).

Касательная компонента вектора силы реакции  $\mathbf{T}$  определяется трением. Пусть задан закон трения, например закон Кулона, тогда для нахождения касательной составляющей вектора силы реакции используется следующий прием. Вычисляется величина силы, необходимая для того, чтобы остановить взаимное скольжение узлов, обладающих данной относительной скоростью. Проводя действия, аналогичные вышеизложенным, получим выражение для значения этой силы:

$$\mathbf{T} = \mathbf{R} - \mathbf{N}, \quad \mathbf{T}_p^k + \sum \mathbf{T}_\xi^l = 0, \quad \mathbf{T}_\xi^l = -\alpha_\xi \mathbf{T}_p^l,$$

$$U_{it} = U_{it}^* + \frac{\tau}{2\varphi_i} \mathbf{T}_i, \quad U_{pt}^{k*} + \frac{\tau}{2\varphi_p^k} \mathbf{T}_p = \sum \alpha_\xi \left( U_{\xi t}^{l*} + \frac{\tau}{2\varphi_\xi^l} \mathbf{T}_\xi \right),$$

$$\mathbf{T}_p^* = \frac{U_{st}^{l*} - U_{pt}^{k*}}{\tau \left( \frac{1}{2\varphi_p} + \sum \frac{\alpha_\xi^2}{2\varphi_\xi} \right)}, \text{ где } U_{st}^{l*} = \sum \alpha_\xi U_{\xi t}^{l*}, \quad \mathbf{T}_p^* = T_p^* \mathbf{t}, \quad \mathbf{t} = \frac{U_{st}^{l*} - U_{pt}^{k*}}{|U_{st}^{l*} - U_{pt}^{k*}|}.$$

Для закона трения Кулона будем иметь, если  $|T_p^*| > k|N_p|$ , то  $T_p = k|N_p|$ , а вектор  $\mathbf{T}_p = k|N_p| \mathbf{t}$ . В противном случае  $\mathbf{T}_p = \mathbf{T}_p^*$  из (A.21). Здесь  $k$  — коэффициент трения, а  $\mathbf{t}$  — единичный вектор относительной скорости.

Поскольку вычисления векторов сил реакции для каждого граничного узла

$r^k$ , пересекающего плоскость граничного элемента  $S^l$  другого тела, проводятся независимо и единообразно для каждого из взаимодействующих тел, то границы тел учитываются симметрично при построении контактной поверхности.

## Приложение Б

### Алгоритмы реализации численных моделей разрушения

Достаточно интенсивное ударное нагружение преград часто приводит к возникновению нарушений сплошности материала в результате разрушения. Так, при ударе тонкой пластинкой происходит откол. Под откольным разрушением будем понимать образование макроскопической полости внутри материала преграды, которая может быть замкнутой либо выходить на поверхность преграды, а в некоторых случаях возможно отделение тыльной части преграды.

Нагружение тонкой преграды (толщина преграды меньше диаметра ударника) компактным или удлиненным бойком с плоской головной частью обычно приводит к сдвиговому разрушению преграды с образованием отхода (пробки). Под сдвиговым разрушением будем понимать зарождение в результате локализации деформаций на периферии ударника кольцевого разрыва сплошности материала, который прорастает в глубь преграды. При выходе разрыва на тыльную поверхность преграды происходит выделение отхода.

Численное моделирование процессов разрушения можно осуществить несколькими путями. Так, в континуальном подходе определяется область поврежденной среды и корректируется напряженно-деформированное состояние материала в этой области [71—73].

В задачах практики необходимо более подробно проследить за возникновением и развитием процесса разрушения вплоть до разделения тела на отдельные фрагменты. В этом случае применяются два подхода: явное выделение берегов разрыва сплошности материала и введение дискретных частиц вместо разрушенного материала, которые обладают конечным размером, массой, импульсом и взаимодействуют между собой и с границами сплошного материала по заданному закону. Следует отметить, что второй подход является не альтернативой первому, а его развитием, так как для локализации разрыва сплошности материала используются те же кинетические уравнения, описывающие зарождение и развитие микрповреждений.



В данном Приложении рассмотрены две численные модели разрушения, из которых одна основана на локальной перестройке разностной сетки, а другая на замене разрушенного материала дискретными несжимаемыми частицами конечного размера.

### **Б.1. Алгоритм локальной перестройки сетки**

Поскольку используется подход Лагранжа, то узлы разностной сетки будут двигаться вместе со средой. В зонах, где возникают большие деформации, происходит сильное искажение ячеек. Одним из способов устранения в расчетах эффектов, связанных с большими искажениями, является частичная или полная перестройка разностной сетки в расчетной области [74—79]. При этом следует выделить три момента: во-первых, должен быть определен критерий, из которого следует степень искажения разностных ячеек; во-вторых, необходимо задать алгоритм, по которому строится новая сетка; в-третьих, должен быть задан метод пересчета со старой сетки на новую.

Для исследуемого класса задач искажения четырехугольных ячеек сетки, как правило, бывают четырех типов:

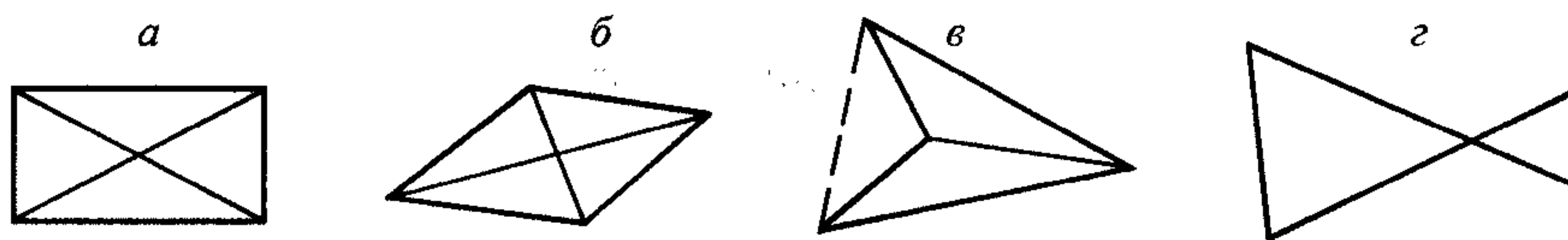
Сжатие или растяжение ячейки приводит к уменьшению или увеличению противоположных сторон ячейки, а отношение длин диагоналей остается равным порядку единицы (рис. 3.70, *а*).

Удлинение происходит в направлении одной из диагоналей четырехугольника, в то время как другая диагональ уменьшается (рис 3.70, *б*).

Контур ячейки деформируется и превращается из выпуклого в невыпуклый (рис. 3.70, *в*).

Происходит перехлест ячейки. В этом случае две точки на одной из сторон четырехугольника меняются местами (рис. 3.70, *г*).

Первые два типа деформаций разностной ячейки вызывают значительное



**Рис. 3.70.** Типы искажения четырехугольных ячеек во время счета.

*а—г* — см. в тексте.

уменьшение шага по времени, и, кроме того, снижается точность расчета. Искажения третьего и четвертого типов, как правило, приводят к тому, что ячейка может вывернуться и площадь ее станет отрицательной. Отмеченные выше случаи искажения разностной сетки являются характерными при расчете в лагранжевых координатах на четырехугольных ячейках в двумерных задачах с плоской и аксиальной симметрией. Однако область больших деформаций, как правило, много меньше всей расчетной области и располагается вблизи границы контакта соударяющихся тел. Эта особенность физического процесса позволяет применить локальную перестройку разностной сетки и причем только в области больших деформаций.

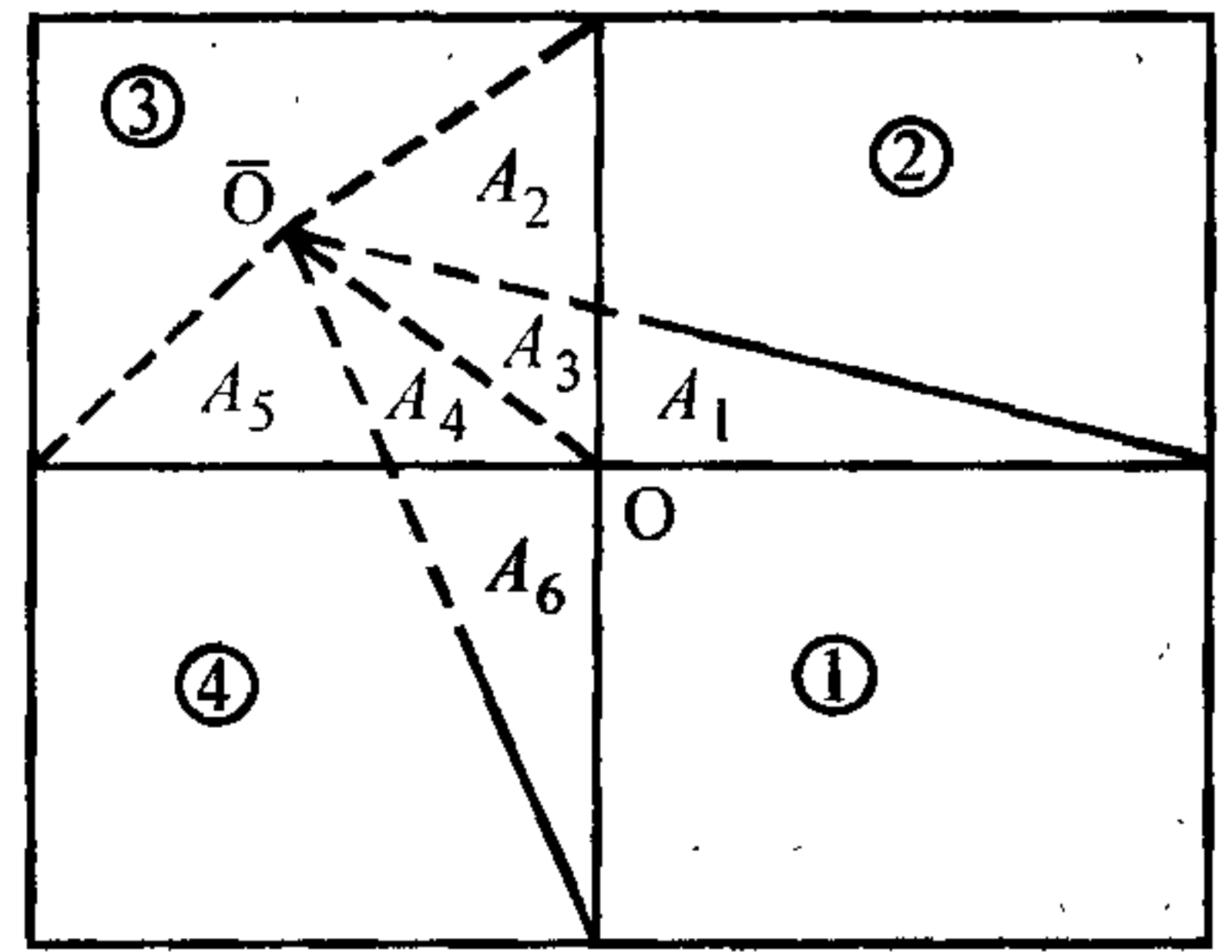


Рис. 3.71. Фрагмент разностной сетки при локальной перестройке.

Цифры в кружках — локальные номера ячеек. Ост. поясн. см. в тексте.

Рассмотрим один из методов пересчета искомых величин со старой разностной сетки на новую. Возьмем часть расчетной области, состоящей из четырех расчетных ячеек (рис. 3.71). Условимся все величины после пересчета обозначать чертой сверху.

Как следует из разностной схемы, в узлах сетки определяются координаты и компоненты вектора скорости. Площадь ячейки  $A$ , масса ячейки  $m$ , объем  $V$ , плотность  $\rho$ , удельная внутренняя энергия  $e$ , гидростатическое давление  $P$ , компоненты девиатора тензора напряжений  $s_{ij}$  отнесены к центрам ячейки. В плоском случае отсутствует окружная компонента тензора напряжений и объем ячейки численно равен площади ячейки  $A$ .

Пусть узел  $O$  переносится в положение  $\bar{O}$  (см. рис. 3.71), тогда образуется шесть треугольников, порядок нумерации которых показан на рис. 3.71. Обозначим площади треугольников через  $\Delta A_i$ . Площади ячеек после перестройки выражаются формулами

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= A_1 + \Delta A_1 + \Delta A_3 + \Delta A_4 + \Delta A_6, & \bar{A}_2 &= A_2 - \Delta A_1 + \Delta A_2, \\ \bar{A}_3 &= A_3 - \Delta A_2 - \Delta A_3 - \Delta A_4 - \Delta A_5, & \bar{A}_4 &= A_4 + \Delta A_5 - \Delta A_6. \end{aligned} \quad (\text{Б.1})$$

В осесимметричном случае необходимо знать объемы ячеек, которые вычисляются аналогично (Б.1) через  $\Delta V_i = \Delta A_i \bar{y}_i$ , где  $\bar{y}_i = 1/3 \sum y_i$ ,  $y_i$  — ради-



альные координаты вершин соответствующего треугольника. Массы ячеек после перестройки также рассчитываются по формулам, аналогичным (Б.1), например,  $\bar{m}_1 = m_1 + \Delta V_1 \rho_2 + (\Delta V_3 + \Delta V_4) \rho_3 + \Delta V_6 \rho_4$ .

Плотность материала в новых ячейках вычисляется через найденные значения масс и объемов  $\bar{\rho}_i = \bar{m}_i / \bar{V}_i$ . Удельная внутренняя энергия пересчитывается через приращения масс, например,  $\bar{e}_1 = [e_1(m_1 - \Delta m_1) + e_4 \Delta m_4] / \bar{m}_1$ .

Следуя логике построения разностных соотношений для аппроксимации уравнений баланса, компоненты девиатора тензора напряжений в новых ячейках вычисляются через приращение площадей, например,

$$\bar{\sigma}_{ij3} = [\sigma_{ij3}(A_3 - \Delta A_3) + \sigma_{ij4} \Delta A_4] / \bar{A}_3.$$

Новые значения компонент вектора скорости определяются из уравнения сохранения импульса  $\bar{\mathbf{u}}_0 \bar{m}_0 = \mathbf{u}_0 m_0$  для перестраиваемого фрагмента разностной сетки. Величины давления и искусственной вязкости рассчитываются на следующем временном слое через новые значения плотности, энергии и соответствующих скоростей.

Поскольку при перестройке разностной сетки происходит передача материала в соседние ячейки, то это необходимо учитывать в уравнениях состояния. Наименьшие искажения скоростных полей и напряженного состояния перестройка вносит в случае небольших градиентов указанных величин.

## **Б.2. Численная модель разрушения I. Алгоритм явного выделения берегов микроскопического нарушения сплошности материала**

К настоящему времени разработаны два способа выделения поверхностей разрыва сплошности материала при численном решении задач разрушения твердых тел. Первый основан на раздвоении узлов разностной сетки в областях возникновения макронарушений сплошности материала. Причем оно может осуществляться либо по заранее введенной линии сдвоенных узлов [47, 48, 80], либо введением дополнительных узлов [81] или линий узлов [82] разностной сетки в процессе счета. Как отмечено в работе [80], возникают определенные трудности при моделировании растущих разрывов сплошности, так как, в общем случае, ориентация разрыва не совпадает с направлением ребер ячеек раз-

ностной сетки. Далее, для введения дополнительных узлов разностной сетки требуется зарезервировать оперативную память ЭВМ и написать дополнительные процедуры счета на изменяющейся сетке.

Другой способ явного выделения берегов разрыва сплошности материала основан на локальной перестройке разностной сетки [46] в области возникновения разрыва, при этом не требуется введение дополнительных узлов сетки. Если в данной ячейке разностной сетки образуется разрыв, то на ее месте строятся два берега разрыва, а ячейка выбрасывается из счета. Ее масса, импульс и прочие характеристики распределяются по соседним ячейкам. На берегах разрыва реализуются граничные условия либо свободной от напряжения поверхности, либо поверхности контакта (в зависимости от ситуации). Так, если берега расходятся, то на них ставятся условия свободной поверхности. При схлопывании берегов разрыва расчет ведется по алгоритму контактной поверхности.

Рассмотрим на примере моделирования закритического откольного разрушения построение берегов макроскопического разрыва сплошности материала произвольной (криволинейной) формы [83]. Пусть в ячейке разностной сетки выполнен критерий разрушения  $\sigma_1 > \sigma_1^*$ . Тогда из системы уравнений

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma_1 n_j, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1$$

найдем компоненты вектора нормали  $\mathbf{n}$  к площадке разрыва. В этом случае необходимо проверить следующее: происходит инициализация разрыва или же его рост, иными словами — все ли ячейки вокруг данной являются “нормальными”. Допустим, что происходит инициализация разрыва сплошности, тогда выполняется следующая последовательность шагов:

1. Находится центр разностной ячейки  $i$  по формуле

$$x_c = 0,25 \sum x_k,$$

где  $k$  — номера узлов ячейки.

2. Определяются точки пересечения площадки разрыва, проходящей через центр ячейки, с ребрами этой ячейки. Пусть точка А лежит на ребре  $(j_1, j_2)$ , а точка В — на ребре  $(j_3, j_4)$ , как показано на рис. 3.72, где приведен фрагмент разностной сетки с данной ячейкой.

3. Узлы разностной сетки  $j_1$  и  $j_2$  переносятся в точку А, а узлы  $j_3$  и  $j_4$  — в точку В. При каждом переносе узла осуществляется пересчет всех ве-



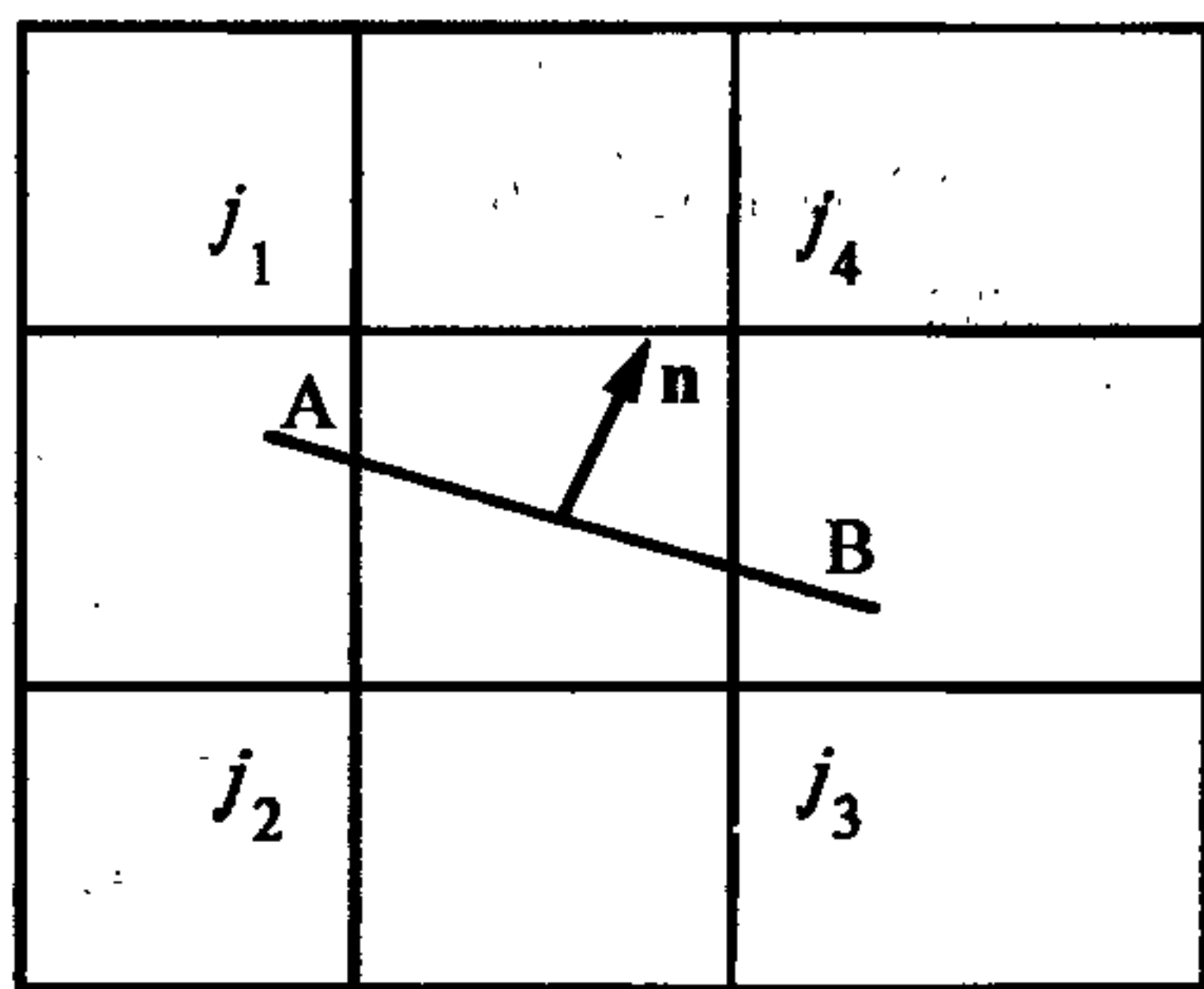


Рис. 3.72. Инициализация макроразрыва  
сплошности материала.

Поясн. см. в тексте.

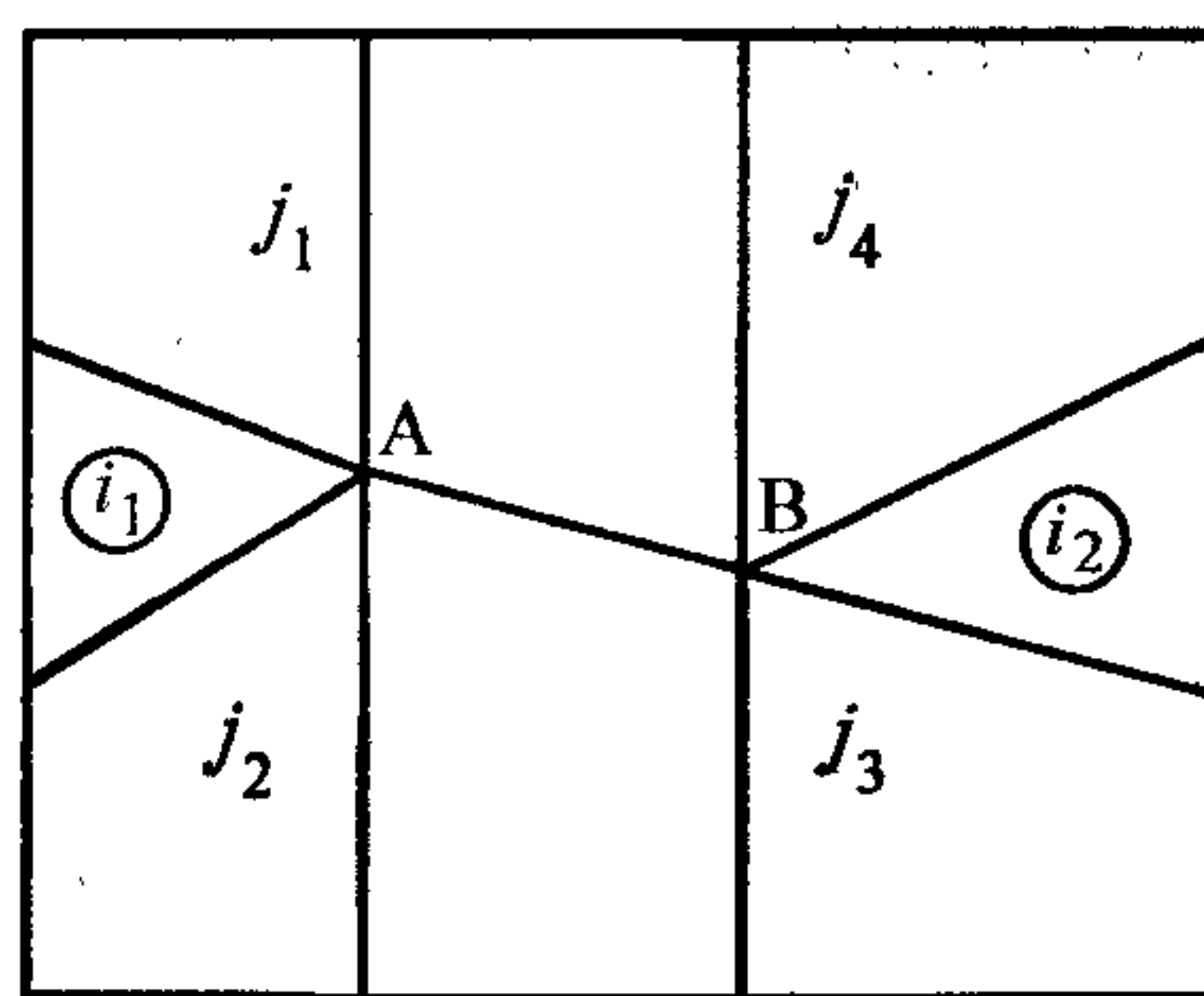


Рис. 3.73. Фрагмент разностной сетки  
после явного выделения макроразрыва  
сплошности материала.

личин, отнесенных как к узлам, так и к ячейкам разностной сетки, входящим в перестраиваемый фрагмент. На рис. 3.73 показан разрыв сплошности в одной ячейке разностной сетки.

Пересчет всех величин, характеризующих состояние материала в ячейках, выполняется по методике локальной перестройки разностной сетки, описанной выше. Величины давления и вязкости рассчитываются на следующем шаге по новым значениям плотности и соответствующих скоростей.

Рассмотрим прорастание разрыва и построение его берегов. Как видно из рис. 3.73, разрыв может распространяться либо в ячейку  $i_1$ , либо в ячейку  $i_2$ , более сложные случаи будут излагаться ниже.

Пусть, для определенности, разрыв прорастает в ячейку  $i_1$ , т.е. в ячейке  $i_1$  выполнен критерий разрушения и найдены значения компонент вектора нормали к площадке разрыва. Тогда построение берегов разрыва осуществляется следующим образом:

1. Из точки А проводится площадка разрыва и находится точка пересечения с ребрами ячейки. Пусть, для определенности, точка пересечения С лежит на ребре  $(j_5, j_6)$ , как показано на рис. 3.74.

2. Узлы  $j_5$  и  $j_6$  переносятся в точку С. Выполняется пересчет всех величин. На рис. 3.75 приведен фрагмент разностной сетки с разрывом в двух ячейках.

Если же площадка разрушения выходит за пределы счетной ячейки  $i_1$ , то построение берегов выполняется в следующей последовательности:

Из точки А проводится площадка разрыва и находится точка пересечения

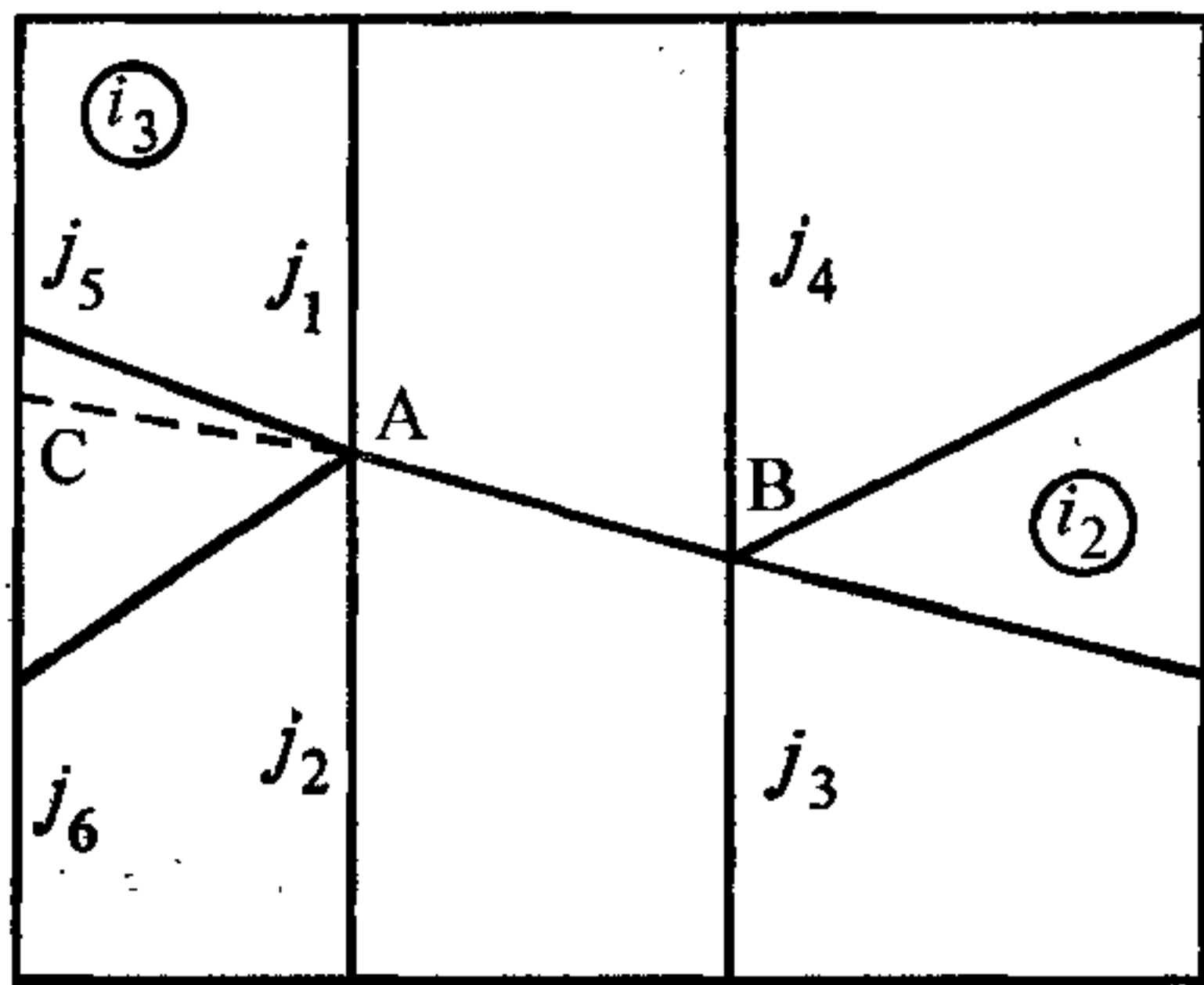


Рис. 3.74. Определение направления роста макроразрыва.

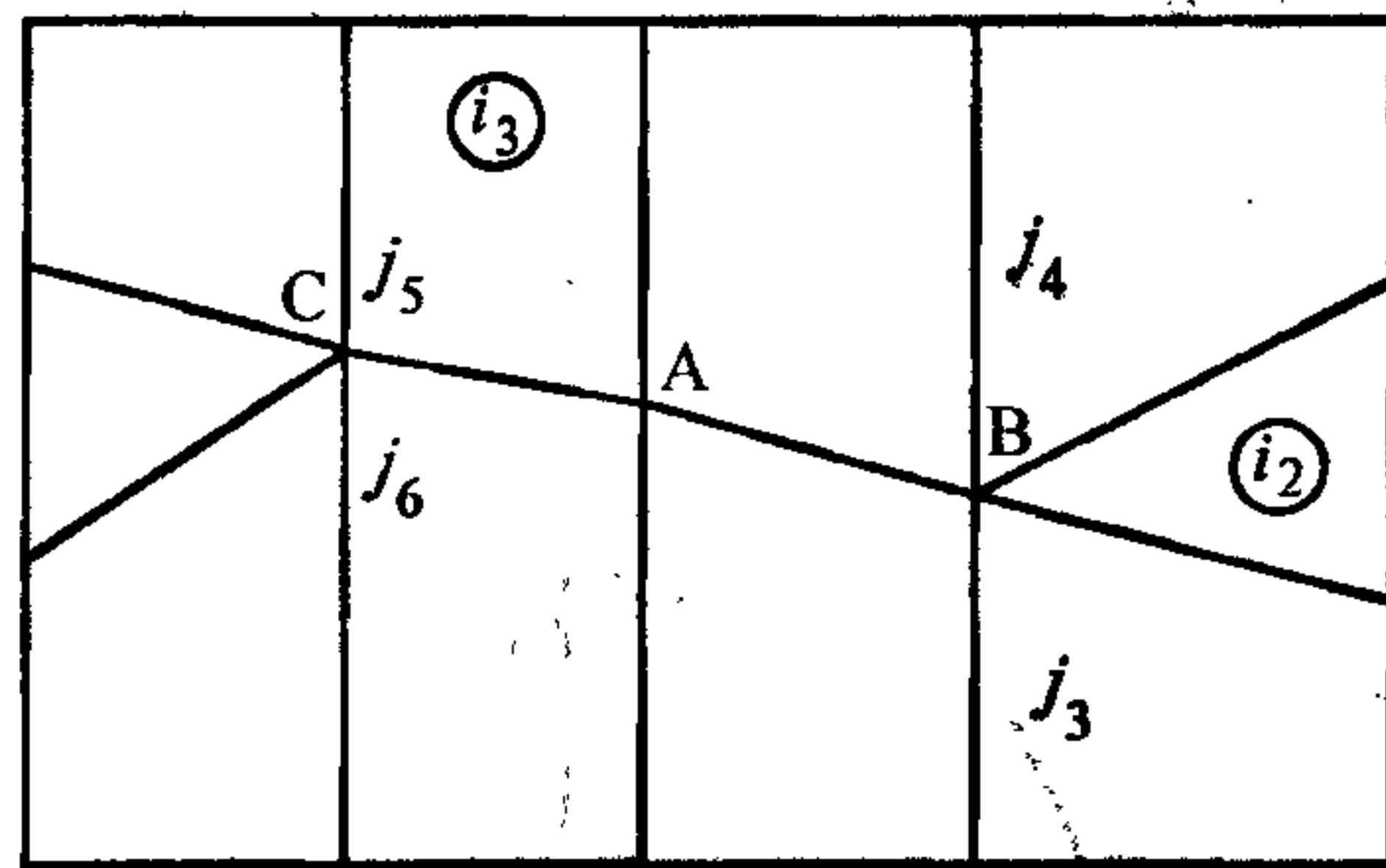


Рис. 3.75. Фрагмент разностной сетки — построено продолжение макроразрыва.

данной площадки с ребрами ячейки  $i_3$ . Возможно два случая: точка пересечения D лежит на ребре  $(j_5, j_7)$  (рис. 3.76); точка пересечения E лежит на ребре  $(j_7, j_8)$ . В первом случае имеем:

2а) узлы  $j_5$  и  $j_7$  переносятся в точку D, а узлы  $j_6$  и  $j_8$  — на середину отрезка (AD). Результат перестройки показан на рис. 3.77;

2б) в противном случае узлы разностной сетки  $j_7$  и  $j_8$  переносятся в точку E, узел  $j_5$  — на середину отрезка (AE), узел  $j_6$  — на середину отрезка  $(j_5A)$ , как показано на рис. 3.78.

Постепенное выполнение критерия разрушения в счетных ячейках позволяет однозначно построить берега макроскопической полости откольного разрушения. Если произойдет выход разрыва на боковую или тыльную поверхно-

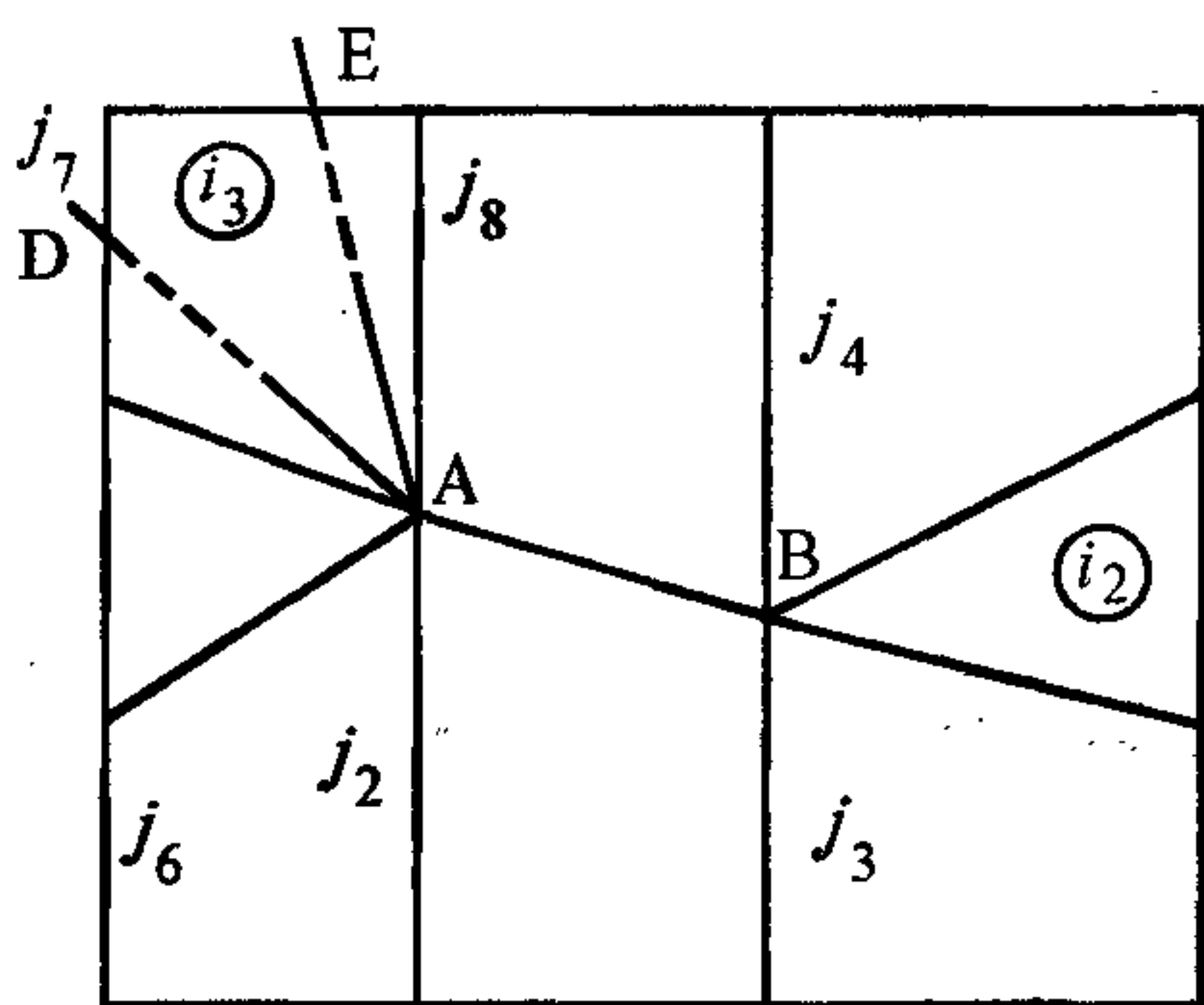


Рис. 3.76. Возможные направления прорастания макроразрыва (через точку D либо через точку E).

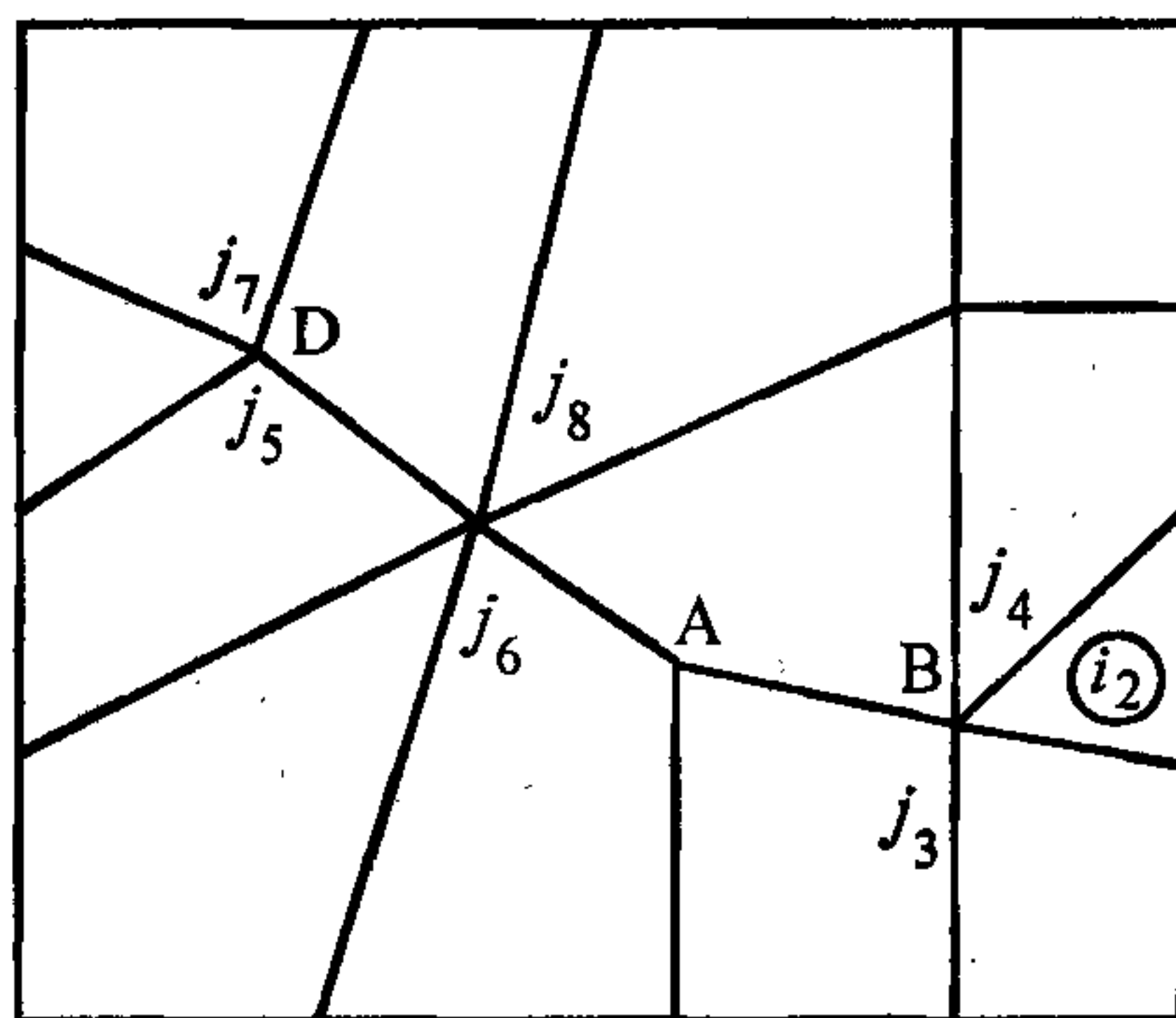


Рис. 3.77. Построение макроразрыва, проходящего через точку D.



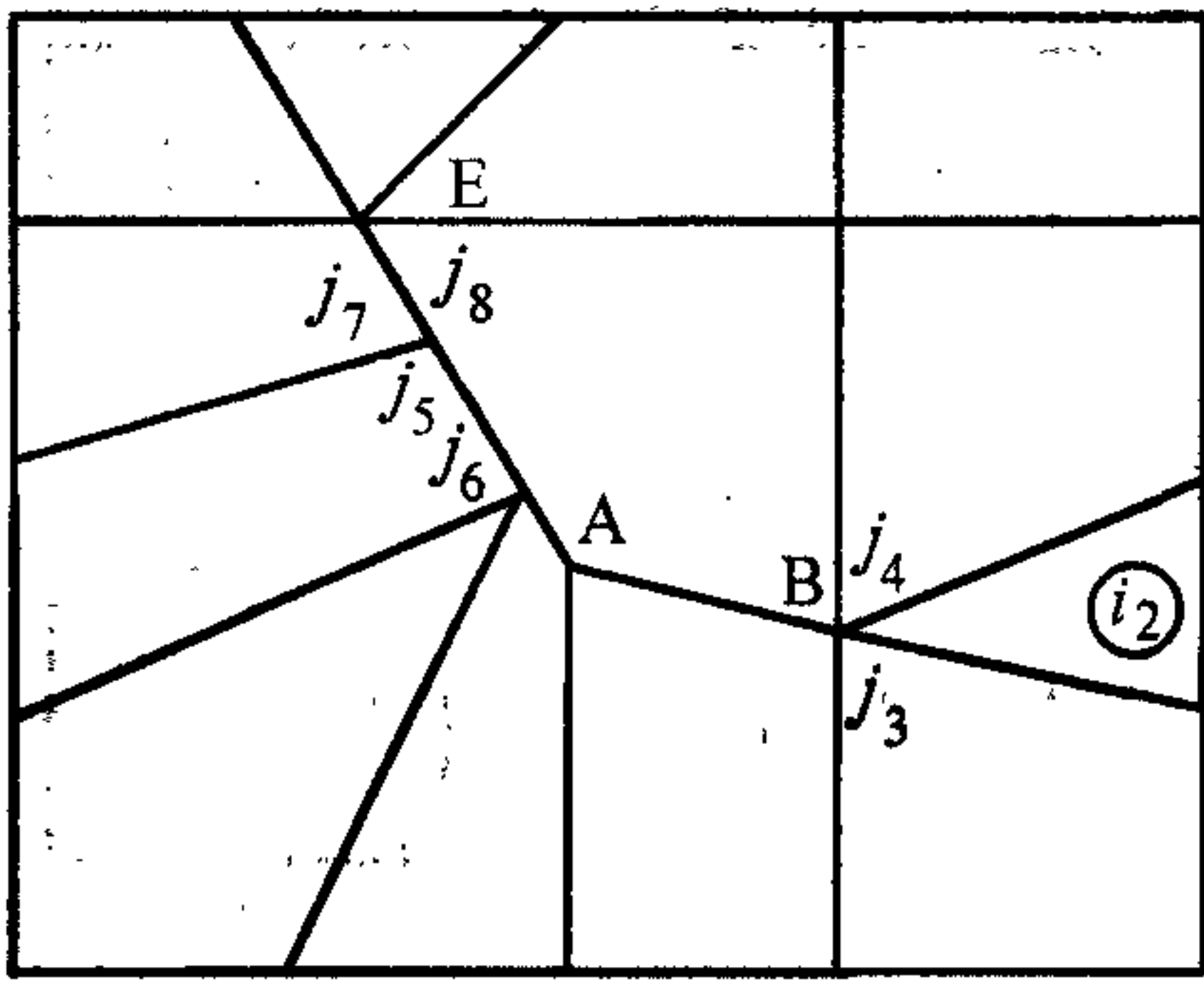


Рис. 3.78. Макроразрыв, проходящий через точку E.

летающей пластины  $U_0 = 700$  м/с, величина откольной прочности  $\sigma^* = 78$  кбар. На рис. 3.79 показано положение пластин на момент времени  $t = 4$  мкс. В результате откольного разрушения произошло отделение с тыльной стороны пластины-преграды части материала в виде “тарелочки”.

2. Пробитие стальной преграды абсолютно жестким бойком цилиндрической формы [84]. Для локализации разрушения материала преграды по сдвиговому механизму применяется критерий разрушения, основанный на работе напряжений на пластических деформациях:

$$W_p = \int s_{ij} d\epsilon_{ij}^p.$$

При достижении величины работы критического значения  $W_p = W^*$  в данном месте среды образуется разрыв сплошности материала, берега которого скользят относительно друг друга. На рис. 3.80 показан процесс прорастания

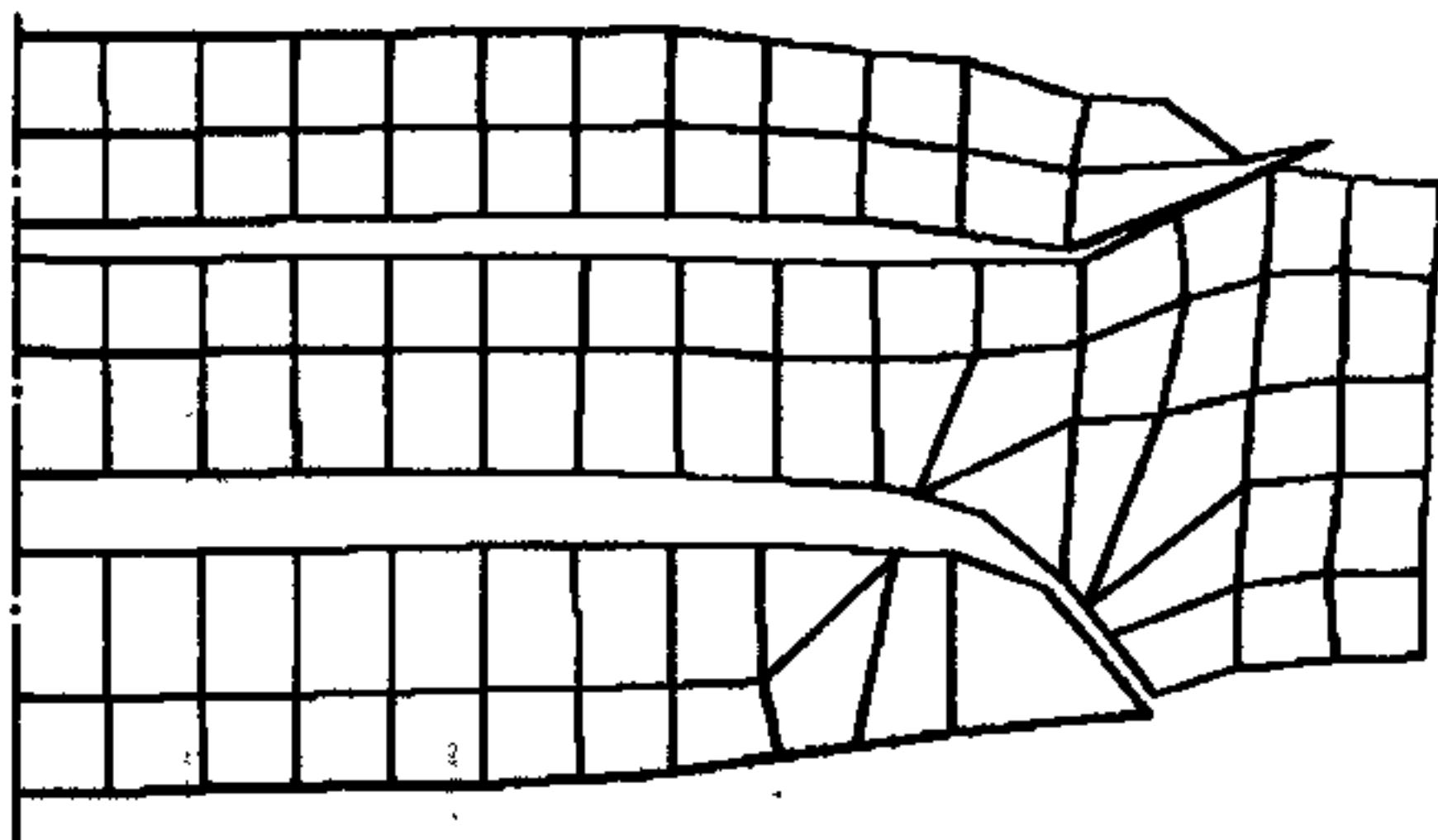


Рис. 3.79. Явно выделена откольная “тарелочка”, возникающая в процессе разрушения.

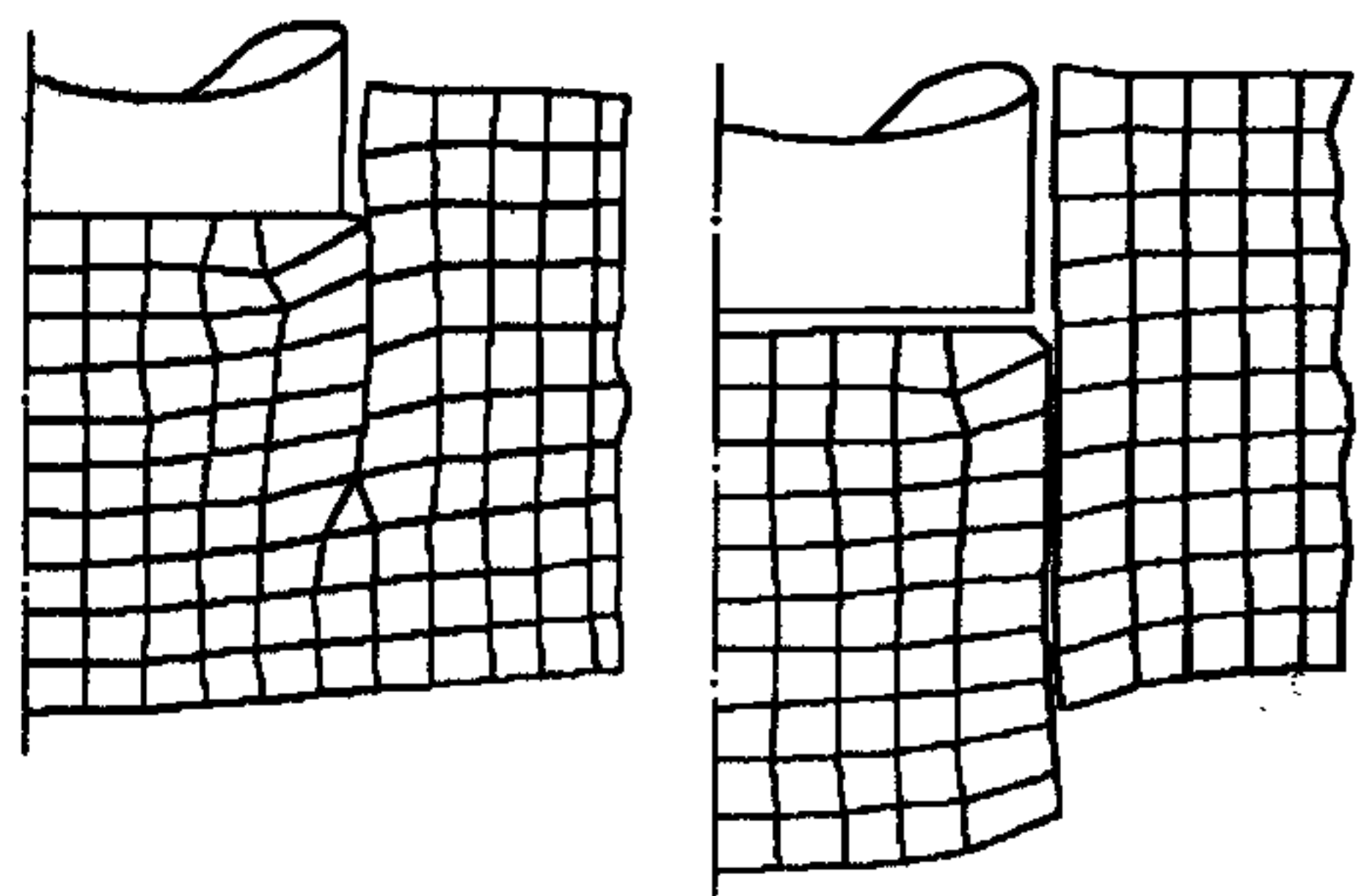


Рис. 3.80. Формирование пробки при сдвиговом разрушении материала преграды.

Поясн. см. в тексте.

кольцевого разрыва сплошности материала с лицевой стороны преграды и выделение отхода. Масса ударника  $m = 50$  г, его радиус  $R = 0,55$  см, величина начальной скорости  $U_0 = 500$  м/с. Преграда — сталь с параметрами  $\rho = 7,85$  г/см<sup>3</sup>,  $K = 1,7$  Мбар,  $\mu = 0,8$  Мбар,  $Y_0 = 10$  кбар,  $W^* = 47$  кДж/кг [85]. Толщина преграды  $H = 1,0$  см.

Отметим достоинства алгоритма:

При выделении берегов макроразрыва сплошности материала нет необходимости во введении дополнительных узлов разностной сетки, т.е. основной алгоритм расчета остается однородным.

Применение векторных критериев разрушения позволяет моделировать достаточно сложные разрывы сплошности материала, вплоть до разделения тела на отдельные части.

Законы сохранения массы при перестройке выполняются точно.

К недостаткам данного алгоритма можно отнести:

Ограничения для построения сильно ветвящихся разрывов.

При моделировании множественного разрушения параллельные разрывы можно построить только в слоях, разделенных хотя бы двумя слоями ячеек, поэтому для достижения необходимой точности нужно применять сетку с малым пространственным шагом.

Несмотря на это, данный алгоритм в силу своей простоты нашел применение в работах и других авторов. Так, с его помощью осуществляется построение разностной сетки в области, содержащей подобласти, границы которых не совпадают с регулярной сеткой [86]. В работе [50] данный алгоритм применялся для построения разрывов тонкой преграды при взаимодействии с пространственным ударником, что говорит о работоспособности идеи явного выделения берегов макроскопических нарушений сплошности материала.

### **Б.3. Численная модель разрушения II. Замена разрушенного материала дискретными частицами**

Выбор критериев разрушения во многом зависит от процесса нагружения и от прочностных свойств материала. Поэтому мы используем не один, а целый набор достаточно простых критериев разрушения. К простым критериям разрушения относятся критерии, в которых используется всего одна константа.



Как правило, эти константы можно найти в справочниках. И хотя они чаще всего определяются в опытах со статическими нагрузками, введение поправочных коэффициентов позволяет использовать их и в случае расчета динамических задач. Эффективность применения простых критериев разрушения будет показана ниже. Следует заметить, что сложные критерии требуют знания или определения большого количества констант, сведения о которых практически отсутствуют.

В каждой ячейке разностной сетки известны следующие величины: текущая плотность материала, тензоры напряжений и скоростей деформации, удельная внутренняя энергия. Координаты скорости отнесены к узлам разностной сетки. Алгоритм расчета реализован таким образом, что если в ячейке расчетной сетки выполнится хотя бы один из критериев (3.1.20), то эта ячейка помечается как поврежденная. Поврежденное состояние характеризуется тем, что материал оказывает сопротивление только объемному сжатию. Частным случаем такого материала может являться среда, у которой уравнение состояния остается прежним, а модуль сдвига равен нулю. Параметр  $\chi$  характеризует способность поврежденной среды оставаться сплошной при объемном растяжении. Если  $\chi > \chi_*$ , то среда считается полностью разрушенной и давление в ней нулевое.

Далее, если ячейка с признаком поврежденного материала находится на границе расчетной области и разрыхление достигает критического, то материал данной ячейки заменяется дискретными частицами, радиус которых вычисляется из условия вписывания одной или нескольких частиц в ячейку. Масса данной ячейки распределяется между дискретными частицами. За один шаг по времени только один слой граничных ячеек может быть превращен в дискретные частицы, так как считается, что величина скорости фронта волны разрушения не превышает величины скорости распространения возмущения в среде. Таким образом, применение данного алгоритма расчета может в определенных случаях привести к замене всех ячеек расчетной области дискретными частицами, т.е. превращению сплошного тела в облако частиц.

Как показано выше, вектор скорости точечной массы определяется из разностного уравнения (как для узла разностной сетки, так и для дискретной частицы)

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\tau} = \frac{\mathbf{F}_i^n + \mathbf{R}_i^n}{2\varphi_i},$$

где  $i$  — номер узла или частицы,  $2\varphi_i$  — масса соответствующей точки,  $\tau$  — шаг интегрирования по времени,  $F_i^n$  — вектор силы от внутренних напряжений,  $R_i^n$  — вектор сил реакций, который равен нулю для внутренних узлов и определяется или задается для граничных.

Рассмотрим наиболее общий случай, когда в расчетной области присутствуют как ячейки разностной сетки, так и дискретные частицы. Будем считать частицы несжимаемыми и взаимодействующими с границами сплошного материала и между собой. Элементарный акт взаимодействия частицы с границей сплошного материала реализован по симметричному алгоритму расчета контактных границ [68].

По известным на момент времени  $t = t^n$  значениям векторов положения  $x_i^n$  и скорости  $U_i^n$  ( $i = a, b, c$ ) дискретной частицы и узлов разностной сетки сплошного материала определяются промежуточные значения векторов координат и скоростей  $x_i^n$  и  $U_i^n$  (рис. 3.81), т.е. значения, вычисленные без учета сил реакции. Если для промежуточных значений координат выполняется условие

$$h = S_{abc} / l_{ab} < r_c,$$

то произошло проникание частицы  $c$  в сплошной материал и необходимо проведение корректировки векторов положения и скоростей для узлов  $(a, b)$  и частицы  $c$ . Здесь  $r_c$  — радиус частицы  $c$ ,  $S_{abc}$  — площадь треугольника, образованного узлами  $(a, b)$  и центром частицы  $c$ ,  $l_{ab}$  — длина звена между узлами  $(a, b)$ ,  $h$  — высота в треугольнике  $\Delta abc$ . При  $h > r_c$  нет взаимодействия частицы  $c$  с границей сплошного материала.

Для проведения корректировки вычисляются компоненты векторов сил реакции, возникающих в результате взаимодействия. При этом определяются и силы трения, если задан закон трения. На узлы  $(a, b)$  и частицу  $c$  действуют силы:

$$R_c = N_c n + T_c t, \quad R_a = -(1 - \alpha) R_c, \quad R_b = -\alpha R_c,$$

где

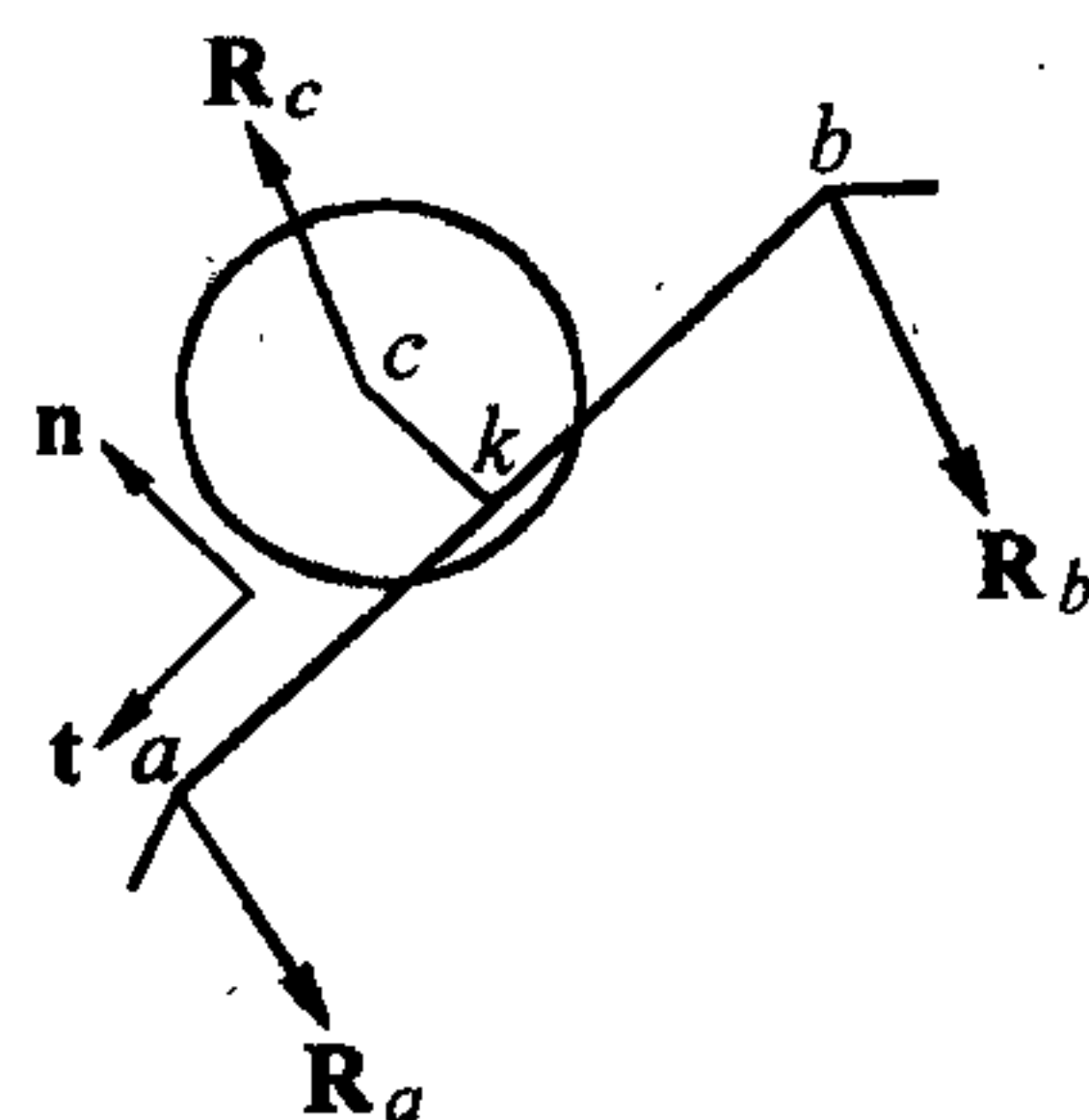


Рис. 3.81. Элементарный акт взаимодействия дискретной частицы с границей сплошной среды.



$$N_c = ((1 - \alpha)U_{na}^* + \alpha U_{nb}^* - U_{nc}^*) / (\tau \varphi^*),$$

$$T_c = ((1 - \alpha)U_{ta}^* + \alpha U_{tb}^* - U_{tc}^*) / (\tau \varphi^*),$$

$$\varphi^* = 1/\varphi_c + (1 - \alpha)^2 / \varphi_a + \alpha^2 / \varphi_b,$$

$$\mathbf{t} = (\mathbf{x}_a^* - \mathbf{x}_b^*) / l_{ab}^*, \quad l_{ab}^* = (\mathbf{x}_a^* - \mathbf{x}_b^*)^{1/2},$$

$$\alpha = l_{ak}^* / l_{ab}^*, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{t}) = 0.$$

Здесь точка  $\mathbf{x}_k^*$  — проекция центра частицы  $c$  на ребро  $(a, b)$ . Величина  $T_c^*$  вычислена из условия идеального механического контакта, т.е. отсутствует скольжение частицы относительно границы сплошного материала. Для закона трения Кулона проверяется соотношение  $|T_c^*| \leq k|N_c^*|$ . Если оно нарушено, то сила трения равна  $T_c = k|N_c^*| \text{sign}(T_c^*)$ , где  $k$  — коэффициент трения. Очевидно, что при  $k = 0$  реализуется процесс скольжения частицы по границе сплошного материала без трения.

Поскольку частицы обладают конечными размерами, то они взаимодействуют не только с границами сплошного материала, но и между собой. Для каждой дискретной частицы известны ее радиус, масса, величины векторов скорости и положения центра частицы.

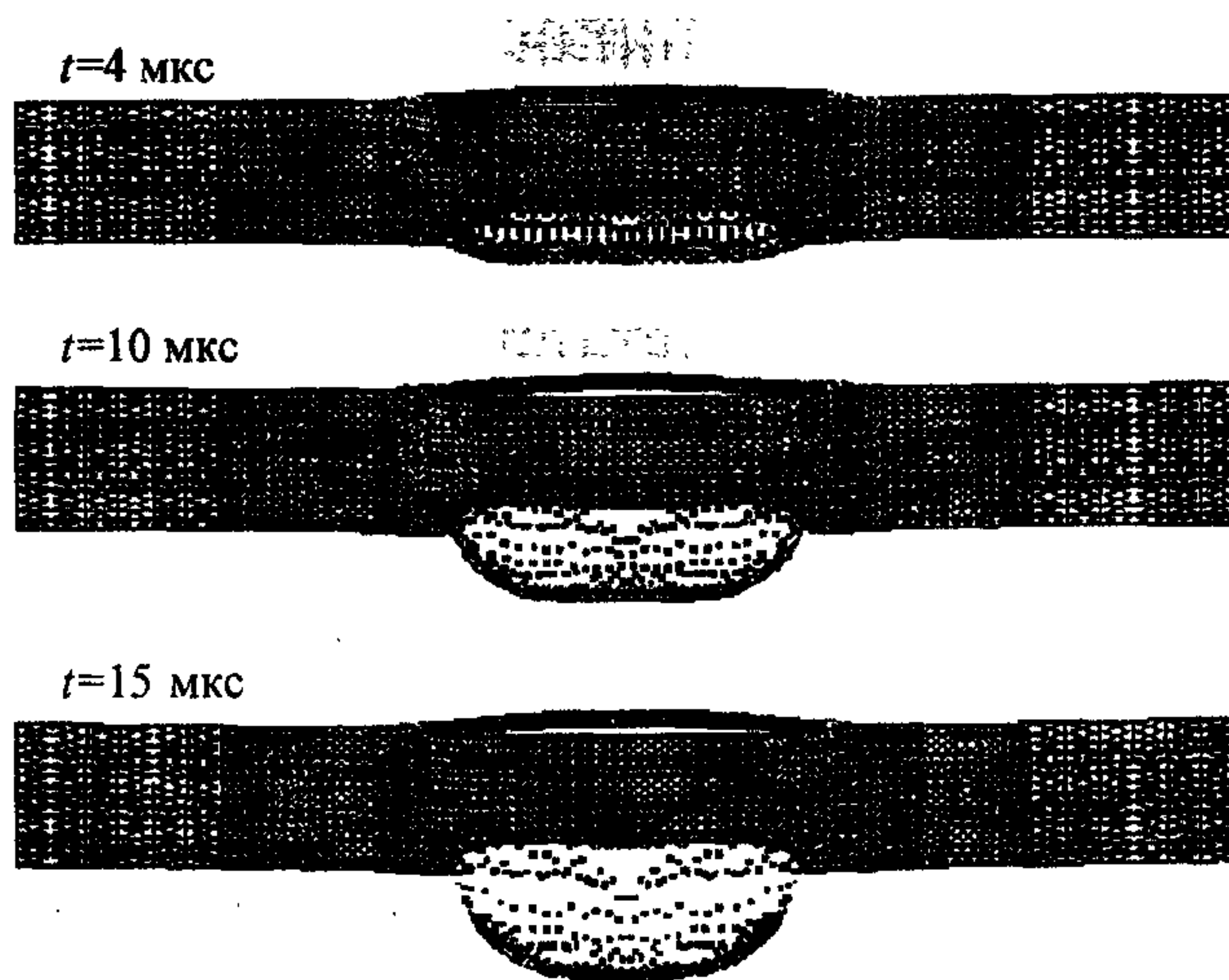
Пусть отрезок  $l_{ij}$  соединяет центры частиц  $i$  и  $j$ . Если  $l_{ij} < r_i + r_j$ , где  $r_i, r_j$  — радиусы частиц, то имеет место контакт между ними. Для вычисления силы реакции необходимо задать закон взаимодействия. По аналогии с вычислением взаимодействия между узлами разностных ячеек сплошного материала выберем закон абсолютно неупругого удара и для частиц. Тогда будем иметь

$$\mathbf{R}_{ij} = (\mathbf{U}_{ii} - \mathbf{U}_{ij}) / (\tau m_{ij}), \quad \mathbf{R}_{ji} = -\mathbf{R}_{ij}, \quad m_{ij} = 1/m_i + 1/m_j,$$

$$\mathbf{U}_{ii} = (\mathbf{U}_i^*, \mathbf{l}_{ij}) \mathbf{l}_{ij}, \quad \mathbf{l}_{ij} = (\mathbf{x}_j^* - \mathbf{x}_i^*) / |\mathbf{x}_j^* - \mathbf{x}_i^*|.$$

Здесь  $\mathbf{x}_i^*$  — вектор промежуточного положения центра частицы;  $\mathbf{U}_{ii}$  — значение проекции вектора скорости на линию, соединяющую центры частиц;  $\mathbf{l}_{ij}$  — единичный вектор вдоль этой линии.

Если между частицами отсутствует трение, то касательная составляющая



**Рис. 3.82.** Процесс формирования откольной “тарелочки”.

Поясн. см. в тексте.

вектора силы реакции равна нулю и проводить коррекцию касательной составляющей вектора скорости не нужно. Для закона трения Кулона вычисления производятся аналогично приведенному выше алгоритму.

Если частица  $i$  взаимодействует с набором частиц, то производится суммирование векторов сил по всему набору. Для других законов взаимодействия между частицами необходимо определить функцию диссипации кинетической энергии.

Для иллюстрации работоспособности предложенного алгоритма выполнены следующие модельные расчеты:

1. Соударение стальных пластин в осесимметричной постановке. Радиус пластины ударника  $R_p = 1,0$  см, ее толщина  $H = 0,07$  см, радиус преграды  $R_r = 3,0$  см, толщина  $H_r = 0,7$  см. Скорость налетающей пластины  $U_0 = 800$  м/с, величина откольной прочности  $\sigma^* = 70$  кбар. На рис. 3.82 показано положение пластин на моменты времени  $t = 4, 10$  и  $15$  мкс. В результате откольного разрушения произошло отделение с тыльной стороны пластины-преграды части материала в виде “тарелочки”;

2. Пробитие алюминиевой преграды жестким стальным бойком цилиндрической формы ( $Y_0 = 20$  кбар). Использовался критерий разрушения по максимальному главному удлинению. На рис. 3.83 показан процесс прорастания



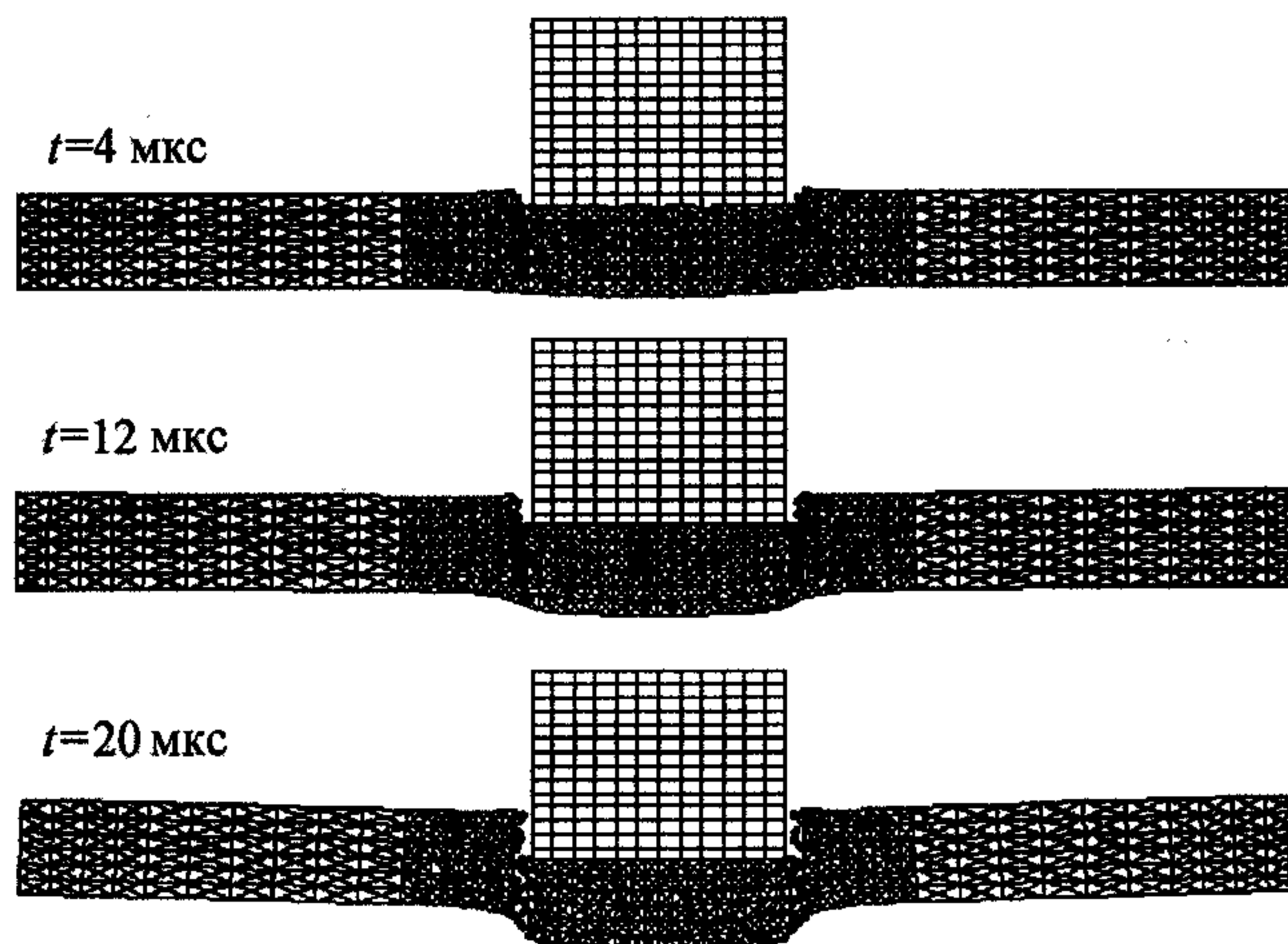


Рис. 3.83. Выбивание пробки из преграды конечной толщины.

кольцевого разрыва сплошности материала с лицевой стороны преграды и выделение отхода. Радиус ударника  $R_p = 0,5$  см, величина начальной скорости  $U_0 = 400$  м/с. Преграда — алюминий с параметрами  $\rho = 2,7$  г/см<sup>3</sup>,  $K = 0,73$  Мбар,  $\mu = 0,248$  Мбар,  $Y_0 = 2,8$  кбар,  $\varepsilon_l = 0,4$ . Толщина преграды  $H_t = 0,5$  см.

### Приложение В

#### Структура данных при программной реализации алгоритма

Допустим, что вся расчетная область разделена на отдельные ячейки. Вычислительный процесс перехода на следующий временной слой состоит из двух этапов. На первом этапе по известному полю скоростей определяется напряженное состояние в ячейках. Затем, исходя из найденного тензора напряжений, вычисляются предварительные значения скоростей и координат узлов, при этом возможно перекрытие ячеек границ ячеек. На втором этапе реализуется выполнение условий непрерывности среды, которое состоит в вычислении сил реакций и истинных скоростей узлов, так чтобы не было нарушения сплошности и граничных условий. Показано [87], что скорости внутренних узлов подчиняются первому условию (3.1.16).

Далее обсуждается структура данных, которая позволяет единым образом организовать вычислительный процесс для решения динамических задач механики сплошной среды в случае одной, двух и трех пространственных переменных.

Если организовывать вычислительный процесс для определения сил, действующих на узлы по уравнениям (3.2.8), т.е. цикл по узлам сетки, то требуется задавать номера ячеек, содержащих этот узел. Однако значения сил в узлах можно найти таким образом, что полной информации о всех номерах ячеек, окружающих данный узел, не потребуется. В этом случае второй шаблон, который задает контур интегрирования для уравнений баланса импульса (см. рис. 3.2), используется только для вывода конечно-разностных соотношений.

Пусть в декартовой системе координат  $\{x_i, (i=1, 2, 3)\}$  задана ограниченная область  $D(x_i, t)$  с границей  $G(x_i, t)$ . В соответствующей счетной области введем конечное множество  $\Omega_n$  узлов разностной сетки  $\{\bar{x}_k, (k=1, 2, \dots, N_1)\}$ . Каждому узлу поставим в соответствие вектор, имеющий две группы компонент:

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{B}_k(\eta_1, \dots, \eta_M, v_1, \dots, v_M, \phi).$$

Здесь  $\{\eta_i\}$  — координаты узла  $\bar{x}_k$ ,  $\{v_i\}$  — его компоненты вектора скорости;  $\phi$  — масса узла  $k$ . Всего вектор  $\mathbf{B}_k$  содержит  $2M+1$  компоненту, где  $M$  — размерность задачи по пространству. Отметим, что узлы могут нумероваться в произвольном порядке.

Выделим из множества  $\Omega_n$  подмножество граничных узлов  $\gamma_n$ . Каждому граничному узлу поставим в соответствие вектор с целочисленными компонентами

$$\mathbf{B}\mathbf{G}_j = \mathbf{B}\mathbf{G}_j(l_1, \psi_1, \dots, \psi_j) \quad (j=1, 2, \dots, N_2),$$

где  $l_1$  — номер граничного узла во множестве узлов  $\Omega_n$ . Параметры  $\psi_i$  могут содержать информацию о типе граничных условий для данного узла, о других телах и о соответствующих граничных узлах этих тел, с которыми может взаимодействовать узел  $j$ . Число параметров зависит от программной реализации граничных условий. Для условий типа (3.1.12)—(3.1.14) наиболее важным будет первый параметр.

Далее введем множество разностных ячеек  $\omega_n$  и каждой ячейке поставим в



соответствие вектор с тремя группами компонент:

$$S_k = S_k(\pi_1, \dots, \pi_S, l_1, \dots, l_L, \xi_1, \dots, \xi_P) \quad (k = 1, 2, \dots, N_3).$$

Первая группа компонент  $\{\pi_i\}$  содержит величины, необходимые для вычисления искомых функций в ячейке. К ним относятся: масса ячейки, текущая плотность, удельная внутренняя энергия, искусственная вязкость, давление, а также компоненты девиатора тензора напряжений, если, например, используется модель упругопластического течения Прандтля—Рейсса, а при моделировании процессов разрушения могут входить величины, связанные с функцией накопления повреждений материала и т.д.

Вторая группа параметров  $\{l_i\}$  содержит  $L$  номеров узлов сетки из множества  $\Omega_n$ , образующих контур данной ячейки. Список  $\{l_i\}$  заполняется в процессе построения ячеек и задается так, чтобы выполнялись заданные условия обхода контуров при интегрировании.

В группу параметров  $\{\xi_i\}$  включены: число  $L$ , характеризующее количество узлов, образующих ячейку, а также различные признаки, характеризующие тип математической модели и состояние среды в процессе расчета.

Порядок расположения векторов  $S_k$  в памяти ЭВМ, как и для векторов  $B_m$  и  $BG_j$ , произвольный. Сформулируем этапы вычислительного алгоритма при переходе с  $n$ -го слоя по времени на  $(n+1)$ -й. На первом этапе потребуется вспомогательное множество векторов  $\{F_i (i = 1, 2, \dots, N_1)\}$ , согласованное с множеством векторов  $B_m$ . Пусть на временном слое  $n$  известны все компоненты векторов  $B_m$  и  $S_k$ , значения компонент векторов  $F_i$  положим нулевыми.

Этап 1. Выберем первый вектор  $S_1^n$ . На основании списка  $\{l_i\}$  присоединим к нему вектора  $B_{l_1}^n, \dots, B_{l_L}^n$ . Вычислим для каждого узла из  $\{l_i\}$  вклад сил из ячейки, образующихся за счет напряжений в этой ячейке так же, как в формулах (3.2.10) или (3.2.15), и добавим их к компонентам векторов  $F_{l_1}, \dots, F_{l_L}$ . В случае осевой симметрии при вычислениях необходимо учесть слагаемые  $\beta_{xi}$ ,  $\beta_{yi}$  и текущую массу узлов по (3.2.9). Для последующих ячеек процедура полностью повторяется. Хотя списки  $\{l_i\}$  для этих ячеек и не совпадают, однако в результате “одномерного” цикла по всем ячейкам ( $k = 1, 2, \dots, N_3$ ) компоненты

векторов будут содержать суммы вида

$$F_i = \sum_k F_{ik}, \quad \varphi_i = \sum_k (Ap)_k / L_k,$$

которые соответствуют суммированию по всем ячейкам, содержащим узел  $i$ .

Окончанием первого этапа будет одномерный цикл по номерам  $i$  от 1 до  $N_1$  для определения промежуточных значений компонент векторов  $\mathbf{V}_k^*$  в соответствии с (3.2.16), т.е. вычисленные в предположении, что границы расчетной области свободные (отсюда и название — метод свободных элементов).

**Этап 2.** На этом этапе проводится вычисление для граничных узлов. Организуется одномерный цикл с использованием векторов  $\mathbf{BG}_j$ , где  $j$  меняется от 1 до  $N_2$ . Выбираем первый вектор  $\mathbf{BG}_1$  и соответствующий его компоненте  $l_1$  вектор  $\mathbf{V}_{l_1}^*$ . Если узел принадлежит части границы, на которой заданы скорости, то заменяем промежуточные значения компонент вектора скорости заданными функциями. Если узел принадлежит границе другого типа, то компоненты скорости на  $(n+1)$ -м слое определяются по формулам (3.2.14), где функции  $R_i$  считаются заданными через граничные условия или вычисляются по (3.2.13). Следующим выбирается вектор  $\mathbf{BG}_2$  и для него процедура повторяется. Результатом этапа (исчерпание списка  $j = 1, 2, \dots, N_2$ ) будет множество векторов  $\mathbf{V}_k$ , где для внутренних узлов, не задействованных в цикле по граничным узлам, полагаем  $\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^*$ , так как для них, из условия сплошности среды, суммарные силы реакций равны нулю.

**Этап 3.** В одномерном цикле вычисляются значения координат узлов на  $(n+1)$ -м временном слое, т.е. имеем множество векторов  $\mathbf{V}_k^{n+1}$ .

**Этап 4.** По векторам  $\mathbf{V}_k^{n+1}$ , вычисленным в “одномерном” цикле по ячейкам, аналогично этапу 1 определяются значения всех компонент векторов  $\mathbf{S}_k^{n+1}$ , таких как плотность, удельная внутренняя энергия, давление и других.

В результате выполнения всех этапов полностью определяются вектора  $\mathbf{V}_k^{n+1}$ ,  $\mathbf{S}_k^{n+1}$  и осуществляется переход на этап 1 для расчета задачи на следующий временной слой.

Описанные этапы, естественно, не исчерпывают процесс вычислений для сложных задач, когда расчетная область может состоять из нескольких подоб-



ластей с переменными границами контакта между ними. В качестве этапов вычислений могут добавляться проверки критериев разрушения, локальные перестройки сетки и т.п. Все эти этапы могут быть сведены к организации одномерных или квазиодномерных циклов. Так, например, для реализации симметричного алгоритма расчета контактных границ, подробно описанного ниже, удобно ввести множество векторов  $\mathbf{BK}_j$ , целочисленные компоненты которых содержат информацию о звеньях границ.

Отметим важные, на наш взгляд, достоинства предлагаемого способа организации данных для решения задач механики сплошной среды конечно-разностными методами.

Связь между множествами векторов  $\mathbf{B}_k, \mathbf{S}_k, \mathbf{BG}_j$  только через списки  $\{l_i\}$  позволяет просто добавлять или удалять узлы и ячейки из этих множеств. Это, в свою очередь, дает возможность строить разностные сетки, хорошо аппроксимирующие произвольные расчетные области.

Организация вычислений в виде одномерных циклов позволяет получать простую по структуре и логике программу, удобную для выполнения на многопроцессорных ЭВМ, а также на ЭВМ с малой оперативной памятью, так как уменьшает количество обменов с внешними запоминающими устройствами.

Все вычисления искомых величин в ячейках проводятся независимо с конечным набором векторов из множества  $\mathbf{B}_m$ , что позволяет использовать для описания поведения материала каждой ячейки свою математическую модель среды. Для этого достаточно иметь набор процедур, реализующих соотношения для разных моделей.

Предлагаемая структура данных позволяет соединять в одной программе расчеты для одно-, дву- и трехмерных задач. При этом меняется только количество параметров в векторах в зависимости от количества координат.

Предлагаемая структура данных позволяет оптимально использовать оперативную память ЭВМ.

Данный подход реализован в ИТПМ СО РАН в виде программных комплексов KRUG24 и KRUG34 для решения задач в случае двух и трех пространственных переменных, которые переданы в эксплуатацию отраслевым КБ и НИИ.

1. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений// Вычислительные методы в гидродинамике/ Под ред. Б. Олдера, С. Фернбаха, М. Ротенберга. — М.: Мир, 1967. — С. 212—263.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966. — 686 с.
3. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. — М.: Изд-во МГУ, 1978. — 87 с.
4. Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях/ Под ред. Н. А. Златина. — М.: Наука, 1974. — 344 с.
5. Витман Ф. Ф., Степанов В. А. Влияние скорости деформирования на сопротивление деформированию металлов при скоростях удара  $10^2$ — $10^3$  м/с// Некоторые проблемы прочности твердого тела. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1959. — С. 207—221.
6. Гулидов А. И. Проникание твердого ударника в деформируемую преграду// Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Мат-лы VI Всесоюз. конф-ции. — Новосибирск, 1980. — С. 59—69.
7. Кондауров В. И., Кукуджанов В. Н. Соударение жесткого цилиндра со слоистой упруго-пластической преградой// Там же. — С. 105—120.
8. Birkhoff G., McDougall D. P., Pugh E. M., Taylor G. Explosives with lined cavities// J. Appl. Phys. — 1948. — V. 19. — P. 563—582.
9. Лаврентьев М. А. Кумулятивный заряд и принцип его работы// УМН. — 1957. — Т. 12, вып. 4. — С. 41—56.
10. Алексеевский В. П. К вопросу о проникании стержня в преграду с большой скоростью// ФГВ. — 1966. — Т. 2, № 2. — С. 99—106.
11. Tate A. A. Theory for the deceleration of long rods after impact// J. Mech. Phys. Solids. — 1967. — V. 15. — P. 387—399.
12. Тейт А. Дальнейшие результаты в теории пенетрации длинных стержней// Механика. — 1970. — № 4. — С. 125—134.
13. Белов Н. Н., Демидов В. Н., Ефремова Л. В. и др. Компьютерное моделирование динамики высокоскоростного удара и сопутствующих физических явлений// Изв. вузов. Физика. — 1972. — № 8. — С. 5—48.
14. Pidsley P. H. A numerical study of long rod impact onto a large target// J. Mech. Phys. Solids. — 1984. — V. 32. — P. 315—333.
15. McGlaun J. M., Thompson S. CTH: a three-dimensional shock wave physics code// Int. J. Impact Engng. — 1990. — V. 10. — P. 351—360.
16. Wilkins M. L. Mechanics of penetration and perforation// Int. J. Engng. Sci. — 1978. — V. 16. — P. 793—807.
17. Jonas G. H., Zukas J. A. Mechanics of penetration: analysis and experiment// Ibid. — 1978. — V. 16. — P. 879—903.
18. Ringers B. E. New sliding surface techniques enable lagrangian code to handle deep target penetration/perforation problems// Lect. Notes Engng. — 1983. — N 3. — P. 36—46.
19. Johnson G. R., Stryk R.A., Holmquist T. et al. Recent EPIC code development for high velocity impact: 3D element arrangement and 2D fragment distributions// Int. J. Impact Engng. — 1990. — V. 10. — P. 281—294.
20. Johnson G. R., Stryk R. A., Dodd J. G. Dynamic Lagrangian computations for solids



- with variable nodal connectivity for several distortions// *Int. J. Numer. Meth. Engng.* — 1986. — V. 23. — P. 509—522.
21. **Belytschko T., Lin J. I.** A three-dimensional impact-penetration algorithm with erosion// *Int. J. Impact Engng.* — 1987. — V. 5. — P. 111—127.
22. **Гладышев А. М., Гулидов А. И., Ковеня В. М. и др.** Взрывное метание, аэродинамика и удар твердого тела. Численный эксперимент// *Моделирование в механике.* — 1991. — Т. 5, № 2. — С. 7—19.
23. **Применение принципов дискретно-континуального представления среды в задачах высокоскоростного взаимодействия тел/ Гладышев А. М., Гулидов А. И., Сапожников Г. А., Фомин В. М., Шабалин И. И.**// *Моделирование в механике.* — 1993. — Т. 7, № 4. — С. 36—51.
24. **Высокоскоростные ударные явления**// Под ред. В. Н. Николаевского. — М.: Мир, 1973. — 528 с.
25. **Динамика удара**/ Под ред. С. С. Григоряна. — М.: Мир, 1985. — 296 с.
26. **Flis W. J.** Advanced algorithms for computer simulation of hypervelocity impact// *Ibid.* — P. 269—275.
27. **Беляков Л. В., Витман Ф. Ф., Златин Н. А.** О процессе соударения деформируемых тел и его моделировании// *ЖТФ.* — 1964. — Т. 34. — С. 519—522.
28. **Holland P. M., Gordon J. T., Menna T. L., Charters A. C.** Hydrocode results for the penetration of continuous, segmented and hybrid rods compared with ballistic experiments// *Int. J. Impact Engng.* — 1990. — V. 10. — P. 241—250.
29. **Charters A. C.** The penetration of rolled homogeneous armor by continuous and segmented rod at high velocity: theory and experiments// *General research corporation technical report CR-87-1008.* — 1986.
30. **Charters A. S., Menna T. L.** Penetration dynamics of rods from direct ballistic tests of advanced armor components at 2—3 km/s// *Int. J. Impact Engng.* — 1990. — V. 10. — P. 93—106.
31. **Naz P., Lehr H. F.** The crater formation due to segmented rod penetration// *Ibid.* — P. 413—425.
32. **Scheffler D. R., Zulas J. A.** Numerical simulation of segmented penetrator// *Ibid.* — P. 487—497.
33. **Витман Ф. Ф., Златин Н. А.** Об одной задаче соударения пластических тел// *Докл. АН СССР.* — 1962. — Т. 146, № 2. — С. 337—339.
34. **Аптуков В.** Модель термоупруговязкопластической повреждаемой среды. Приложение к откольному разрушению// *ФГВ.* — 1986. — Т. 22, № 2. — С. 120—130.
35. **Ахмадеев Н. Х.** Исследование откольного разрушения при ударном деформировании. Модель поврежденной среды// *ПМТФ.* — 1983. — № 1. — С. 158—167.
36. **Фомин В. М., Хакимов Э. М.** Откольные разрушения среды в плоских волнах разрежения. — Новосибирск, 1981. — 32 с. (Препринт/ ИТПМ СО АН СССР; № 1).
37. **Ахмадеев Н. Х., Нигматулин Р. И.** Динамическое откольное разрушение в волнах разгрузки// *Докл. АН СССР.* — 1982. — Т. 266, № 5. — С. 1131—1134.
38. **Волков И. А., Рузанов А. И.** Анализ применимости критериев разрушения при исследовании откола// *Приклад. проблемы прочности и пластичности.* — 1982. — Вып. 20. — С. 30—36.
39. **Рузанов А. И.** Численное исследование откольной прочности с учетом микроповреждений// *Изв. АН СССР. МТТ.* — 1984. — № 5. — С. 109—115.

40. Кукуджанов В. Н., Кузмина В. С. К моделированию откольного разрушения при соударении пластин// Там же. — 1985. — № 3. — С. 99—104.
41. Альтшулер Л. В. Применение ударных волн в физике высоких давлений// УФН. — 1965. — Т. 85. — С. 197—258.
42. Гулидов А. И., Киселев В. В., Шабалин И. И. Численные и экспериментальные исследования процесса отскока при соударении пластин// Числен. методы решения задач теории упруг. и пластич: Матер. X Всесоюз. конф./ ИТПМ СО АН СССР. — Новосибирск, 1988. — С. 65—69.
43. Дерibas А. А. Физика упрочнения и сварки взрывом. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1980. — 221 с.
44. Гриднева В. А., Корнеев А. И., Трушков В. Г. Численный расчет напряженного состояния и разрушения плиты конечной толщины при ударе бойками различной формы// Изв. АН СССР. МТТ. — 1977. — № 1. — С. 146—157.
45. Глушко А. И. Исследование откола как процесса образования микропор// Там же. — 1978. — № 5. — С. 132—140.
46. Гулидов А. И., Фомин В. М., Шабалин И. И. Численное моделирование задачи удара двух тел с учетом разрушения// Численная реализация физико-механ. задач прочности: Тез. докл. — Горький, 1983. — С. 60.
47. Bertolf L. D., Buxton L. D., Thorne V. J. et al. Damage in steel plates from hypervelocity impact. II. Numerical results and spall measurement// J. Appl. Phys. — 1975. — V. 46. — P. 3776—3783.
48. Рузанов А. И., Романычева Л. К., Волков И. А. Построение расчетных моделей и численный анализ разрушения твердых тел при импульсных нагрузках// Механика быстропротекающих процессов. — Новосибирск, 1984. — С. 98—105.
49. Разоренов С. В., Канель Г. И. Критерий отрыва откольного элемента с учетом краевых эффектов// Докл. 4-го Всесоюз. совещания по детонации. — Черногловка, 1988. — Т. 2. — С. 77—83.
50. Киселев А. Б. Численное моделирование в трехмерной постановке наклонного пробивания тонких преград// Численное решение задач волновой динамики/ Мат. исследования. Вып. 108. — Кишинев: Штиинца, 1989. — С. 19—26.
51. Кондауров В. И., Петров И. Б., Холодов А. С. Численное моделирование процесса внедрения жесткого тела вращения в упругопластическую среду// ПМТФ. — 1984. — № 4. — С. 132—139.
52. Петров И. Б., Холодов А. С. Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом// ЖВМиМФ. — 1984. — Т. 24. — С. 722—739.
53. Кондауров В. И., Петров И. Б. Численное исследование процесса внедрения жесткого цилиндра в упругопластическую преграду// Численные методы в механике твердого деформируемого тела/ ИПМ АН СССР. — М., 1984. — С. 115—132.
54. Гулидов А. И., Фомин В. М., Шабалин И. И. Исследование влияния геометрических размеров ударника и преграды на область разрушения// Числен. методы решения задач теории упругости и пластичности/ Матер. VIII Всесоюз. конф./ ИТПМ СО АН СССР. — Новосибирск, 1984. — С. 121—129.
55. Гулидов А. И., Шабалин И. И. Численный алгоритм моделирования закритического откола при соударении пластин// Моделирование в механике. — 1990. — Т. 4, № 4. — С. 11—18.
56. Рыбаков А. П. Отколы в стали при нагружении с помощью листового заряда ВВ и



- удара пластинкой// ПМТФ. — 1977. — № 1. — С. 151—155.
57. Ахмадеев Н. Х., Нигматулин Р. И. Моделирование откольного разрушения при ударном деформировании. Анализ схемы мгновенного откола// Там же. — 1981. — № 3. — С. 120—128.
58. Гулидов А. И., Фомин В. М., Шабалин И. И. Алгоритм перестройки разностной сетки при численном решении задач соударения с образованием трещин// Численные методы решения задач теории упругости и пластичности/ Матер. VII Всесоюз. конф. — Новосибирск, 1982. — С. 182—192.
59. Глушко А. И. Численное исследование полей напряжений при соударении цилиндров// Изв. АН СССР. МТТ. — 1986. — № 2. — С. 104—112.
60. Златин Н. А., Мочалов С. М., Пугачев Г. С., Брагов А. М. Временные закономерности процессов разрушения металлов при интенсивных нагрузках// ФТТ. — 1977. — Т. 16. — С. 1752—1759.
61. Gulidov A. I., Zakharenko I. D., Kiselev V. V. et al. Definition of the boundary of stream-formation under symmetric impact of metal plates// IX Int. Conf. on High Energy Rate Fabrication. 18—22 August 1986. — Новосибирск, 1986. — С. 264—269.
62. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. — М.: Наука, 1973. — 416 с.
63. Дерibas А. А., Захаренко И. Д. Определение предельных режимов соударения, обеспечивающих сварку металлов взрывом// ФГВ. — 1975. — Т. 11, № 1. — С. 151—153.
64. Deribas A. A., Gulidov A. I., Zlobin B. S. et al. On the oblique collisions of the metallic plates at extreme conditions// Proc. of the XIII AIRAPT Int. Conf. on High Pressure Science and Technology. New Delhi; Bombay; Calcutta. 7—11 Oktober 1991. — P. 712—718.
65. Stilp A. J., Hohler V., Schneider E. et al. Debris Cloud Expansion Studies// Int. J. Impact Engng. — 1990. — V. 10. — P. 543—553.
66. Marom I., Bodner S. R. Projectile perforation of multi-layered beams// Int. J. Mech. Sci. — 1979. — V. 21. — P. 489—504.
67. Фукс И. И. Об одном методе численного решения двумерных динамических контактных задач упругопластических тел// Прикл. проблемы прочности и пластичности. — 1976. — Вып. 3. — С. 78—81.
68. Гулидов А. И., Шабалин И. И. Численная реализация граничных условий в динамических контактных задачах. — Новосибирск, 1987. — 37 с. (Препринт/ИТПМ СО АН СССР; №12-87).
69. Гулидов А. И., Шабалин И. И. Расчет контактных границ с учетом трения при динамическом взаимодействии деформируемых тел// Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Матер. IX Всесоюз. конф. — Новосибирск, 1988. — С. 70—75.
70. Иващенко К. Б. Расчет контактных границ в задачах взаимодействия деформируемых тел// Динамические задачи механики сплошной среды: Тез. докл. регион. конф. Дивноморск, октябрь 1988/ КубГУ. — Краснодар, 1988. — С. 59—61.
71. Майчен Дж., Сак С. Метод расчета "Тензор"// Вычислительные методы в гидродинамике/ Под ред. Б. Олдера, С. Фернбаха, М. Ротенберга. — М.: Мир, 1967. — С. 185—211.
72. Seamen L., Curran D. R., Shockey D. H. Computational models for ductile and brittle fracture// J. Appl. Phys. — 1976. — V. 47, N 11. — P. 4814—4826.

73. Curran D. R., Seamen L., Shockey D. A. Dynamic fracture in solids// *Physics Today*. — 1977. — V. 30, N 1. — P. 46—55.
74. Реснянский А. Д., Мержиевский Л. А. Применение метода подвижных сеток в задачах разрушения твердых тел// *Динамика сплошной среды*. — 1984. — Вып. 66. — С. 150—157.
75. Демидов В. Н., Корнеев А. И. Численный метод расчета упругопластических течений с использованием подвижных разностных сеток. — Томск, 1983. — 34 с. — Деп. ВИНТИ. № 2924-83 деп.
76. Гулидов А. И., Фомин В. М. Модификация метода Уилкинса для расчета задач соударения тел. — Новосибирск, 1980. — 23 с. (Препринт/ ИТПМ АН СССР; № 49).
77. Садырин А. И. Алгоритм нерегулярной перестройки плоских треугольных сеток в МКЭ// *Прикл. проблемы прочности и пластичности*. — 1985. — Вып. 31. — С. 8—13.
78. Фонарев А. В. Применение произвольных треугольных разностных сеток к решению задач импульсного деформирования упругопластических тел// *Модели деформирования и разрушения композиционных материалов/ УНЦ АН СССР*. — Свердловск, 1988. — С. 84—89.
79. Horak H. G., Jones E. M., Kodis J. W., Sandford M. T. An algorithm for the discrete rezoning of lagrangian meshes// *J. Comput. Phys.* — 1978. — V. 26, N 3. — P. 277—284.
80. Chen Y. M., Wilkins M. L. Stress analysis of crack problems a three-dimensional, time-dependent computer program// *Int. J. Fracture*. — 1976. — V. 12, N 4. — P. 607—617.
81. Гриднева В. А., Немирович-Данченко М. М. Метод разделения точек сетки для численного расчета разрушения твердых тел/ ТГУ. — Томск, 1983. — 15 с. Деп. ВИНТИ. № 3258-83 деп.
82. Мержиевский Л. А., Реснянский А. Д. Численное моделирование пробивания преград цилиндрическим ударником// *Механика быстропротекающих процессов*. — Новосибирск, 1984. — С. 86—91.
83. Гулидов А. И., Шабалин И. И. Численное моделирование криволинейной трещины откола при соударении пластин// *Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Матер. IX Всесоюз. конф. Саратов, 26—30 июня 1985*. — Новосибирск, 1986. — С. 117—121.
84. Гулидов А. И., Фомин В. М., Шабалин И. И. Численное моделирование разрушения сдвигом// *Механика быстропротекающих процессов*. — Новосибирск, 1984. — С. 48—51.
85. Меньшиков Г. П., Одинцов В. А., Чудов Л. А. Внедрение цилиндрического ударника в конечную плиту// *Изв. АН СССР. МТТ*. — 1976. — № 1. — С. 125—130.
86. Киселев А. Б., Кабак Н. Е. Метод построения расчетных сеток с выделением внутренних контактных границ// *Моделирование в механике*. — 1990. — Т. 4, № 5. — С. 96—110.
87. Гулидов А. И. Организация вычислительного процесса и структура данных при численном решении динамических задач механики деформируемых сред// *Там же*. — 1991. — № 3. — С. 127—141.
88. Евстропьев-Кудреватый В. В., Кожушко А. А., Сапожников Г. А., Фомин В. М. Последовательное соударение ударников с преградой// *Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Матер. XII Всесоюз. конф.* — Новосибирск, 1992. — С. 264—270.



## ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПРОНИКНОВЕНИЯ В МНОГОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

---

### 4.1. О методе верхней оценки предельной нагрузки

Возможность аналитического исследования процесса проникания достигается несколькими путями, важнейший из которых предполагает использование простых математических моделей деформируемого тела, верно отражающих суть явления и позволяющих решать задачи в аналитическом виде. В настоящей главе рассматривается диапазон средних скоростей, который требует учета прочностных свойств материала. Существенное различие в прочностных свойствах ударника и мишени (например, ударник — железо, преграда — бетон, грунт и т.п.) позволяет выделить достаточно представительный класс задач, в котором можно не учитывать деформацию ударника, т.е. считать его абсолютно твердым.

Основной задачей в проблеме проникания абсолютно твердого тела в деформируемую преграду является определение  $P$  — силы сопротивления преграды. Известная сила сопротивления позволяет проинтегрировать уравнение движения в осесимметричном случае (удар по нормали):

$$m\ddot{h} = -P,$$

где  $m$  — масса ударника,  $h$  — глубина проникания, и определить глубину проникания ударника в зависимости от начальных условий:

$$h|_{t=0} = 0, \dot{h}|_{t=0} = v_0,$$

где  $v_0$  — скорость соударения.

В качестве модели твердого тела применяется модель идеального несжимаемого жесткопластического материала, позволяющая описывать большие пластические деформации. Относительно правомерности использования этой модели в анализе проникания можно высказать следующие обоснования. На фоне больших деформаций их упругие составляющие составляют малую часть от пластических, так что ими можно пренебречь и рассматривать среду как же-

сткопластическую. В твердом теле энергия расходуется на изменения объема, формы (сдвиг), кинетической энергии. Относительно неглубокое проникание и наличие свободных поверхностей (лицевой и тыльной) у преграды не позволяет развиваться большим объемным сжатиям. Гипотеза о несжимаемости материала отражает лишь то обстоятельство, что работа, затрачиваемая на всестороннее сжатие материала, много меньше работы, затрачиваемой на сдвиг, т.е. на формоизменение. Естественно, что тот же самый материал в условиях стесненной деформации потребует учета объемного сжатия, т.е. гипотеза о несжимаемости станет неприемлемой.

Определение предельных нагрузок, т.е. таких нагрузок, при которых начинается процесс деформирования в жесткопластическом материале, является достаточно сложной задачей. Однако в этой модели существуют две предельные теоремы, позволяющие получить верхнюю и нижнюю оценки действительной предельной нагрузки. Особенно простым является построение верхней оценки, базирующейся на уравнении равновесия в форме Лагранжа (основного энергетического тождества), в рамках модели Сен-Венана—Мизеса (модель Прандтля—Рейсса, в которой пренебрежено упругими деформациями) [1]:

$$\int_S P_{ni}^k v_i dS = \tau_s \int_V H^k dv + \sum_{k=1}^N \tau_s \int_{S_k} \left| [v_\tau^k] \right| dS_k. \quad (4.1.1)$$

Здесь  $S$ ,  $V$  — граничная поверхность и объем деформируемого тела;  $P_{ni}^k$  — компоненты вектора усилий на  $S$ ;  $v_i$  — компоненты вектора скорости на  $S$ ;  $\tau_s$  — предел текучести материала;  $H^k = \sqrt{2\xi_{ij}^k \xi_{ij}^k}$  — интенсивность скоростей деформаций сдвига, где  $\xi_{ij}^k = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^k}{\partial x_i} \right)$  — компоненты тензора скоростей деформаций,  $v_i^k$  — компоненты кинематически допустимого поля скоростей;  $S_k$  — поверхности разрыва касательной составляющей вектора скорости  $v_\tau^k$  на этой поверхности;  $[v_\tau^k] = v_\tau^{k+} - v_\tau^{k-}$  — скачок касательной составляющей скорости.

В правой части этого интегрального равенства стоят величины, вычисляемые по кинематически допустимому полю скоростей (КДПС). Поле скоростей называется кинематически допустимым, если оно удовлетворяет уравнению неразрывности (условию несжимаемости)



$$\operatorname{div} \vec{U}^k = 0,$$

всем граничным условиям для скоростей и условию сплошности среды.

Теорема о верхней оценке утверждает, что неизвестные предельные усилия  $P_{ni}^k$ , вычисленные из интегрального уравнения по КДПС, оценивают действительные предельные усилия сверху.

Задача, таким образом, сводится к заданию поля скоростей, наиболее точно описывающему кинематику процесса. Неоценимую помощь в правильном описании процесса деформирования преграды оказывают опытные данные натуральных экспериментов и лабораторное моделирование процесса (например, [2]).

Построение нижней оценки предельной нагрузки гораздо сложнее, поскольку требует для напряжений удовлетворения системе трех уравнений в частных производных (уравнения равновесия Коши), всех граничных условий для напряжений. При этом в жестких зонах напряжения не должны удовлетворять условию пластичности.

Ниже будут построены верхние оценки предельных нагрузок для конкретных задач [3, 4]. Следует заметить, что поскольку при этом сила сопротивления получится выше действительной, постольку расчетная глубина проникания будет оцениваться снизу, т.е. определяться с запасом.

#### **4.2. Внедрение ударника с клиновидной головной частью в полуплоскость**

Пусть ударник шириной  $2a$  с клиновидной частью с углом раствора  $2\beta$  вдавливается в жесткопластическую полуплоскость. Начальный этап внедрения был исследован Р. Хиллом [5] и др.

Пусть головная часть ударника полностью внедрена в полуплоскость на глубину  $y$  (рис. 4.1). Форма выдавленной части среды для определения среднего давления методом верхней оценки существенной роли не играет, так как среда невесома, а также из-за кинематики движения в области BDEFB.

Для простоты принимается, что ударник идеально гладкий. Среда разделяется на четыре зоны, в каждой из которых задается поле течения.

Треугольник ABC движется в направлении AC как жесткое тело со скоростью  $v_1$ . В секторе CBD с углом раствора  $\beta$  и радиусом  $z$  траектории точек параллельны дуге CD и все точки имеют одну и ту же величину скорости. Об-

ласть BDEFB движется как жесткое целое в направлении DE со скоростью  $v_4$ . Среда, лежащая правее линии ACDE, неподвижна.

Частицы  $\triangle ABC$  перемещаются параллельно AC. Достигая BC, они изменяют направление и движутся параллельно дуге CD. Дальнейшее изменение направления не происходит, так как  $BD \perp DE$  (по построению). На рис. 4.2 приведен годограф скорости. Необходимо определить скорости в каждой из зон.

Пусть ударник движется вниз с единичной скоростью. Тогда условие несжимаемости дает:

$$1 \cdot a = z \cdot v_4$$

или

$$v_4 = a/z.$$

Из  $\triangle OAB$  (см. рис. 4.2) по теореме синусов:

$$\frac{v_1}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin \pi/4}$$

или

$$v_1 = \sqrt{2} \sin \beta.$$

Из  $\triangle OBC$  следует:

$$v_3 = v_1 \sin \gamma, \quad v_2 = v_1 \cos \gamma$$

или

$$v_2 = \sqrt{2} \cos \gamma \cdot \sin \beta, \quad v_3 = \sqrt{2} \sin \gamma \cdot \sin \beta.$$

Так как  $v_3 = v_4$  (см. рис. 4.1), то

$$z = \frac{a}{\sqrt{2} \sin \beta \sin \gamma}. \quad (4.2.1)$$

Необходимо определить длины отрезков AC, BC, CD, DE. Из обозначения следует, что  $BD = BC = z$ . Длина дуги CD равна  $CD = z \cdot \beta$ .

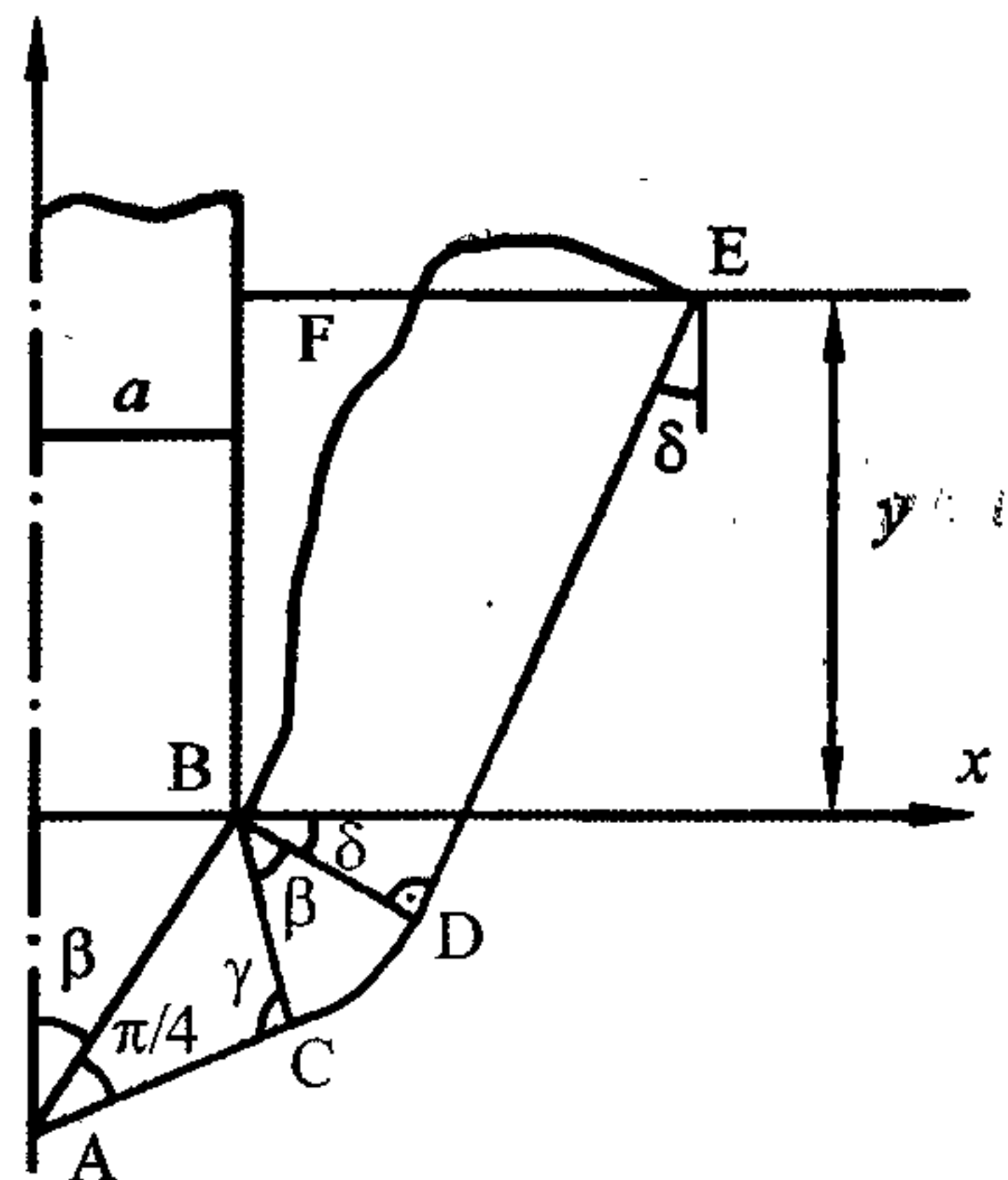


Рис. 4.1. Геометрическая картина процесса соударения ударника с деформируемой преградой.

Пояснения см. в тексте.

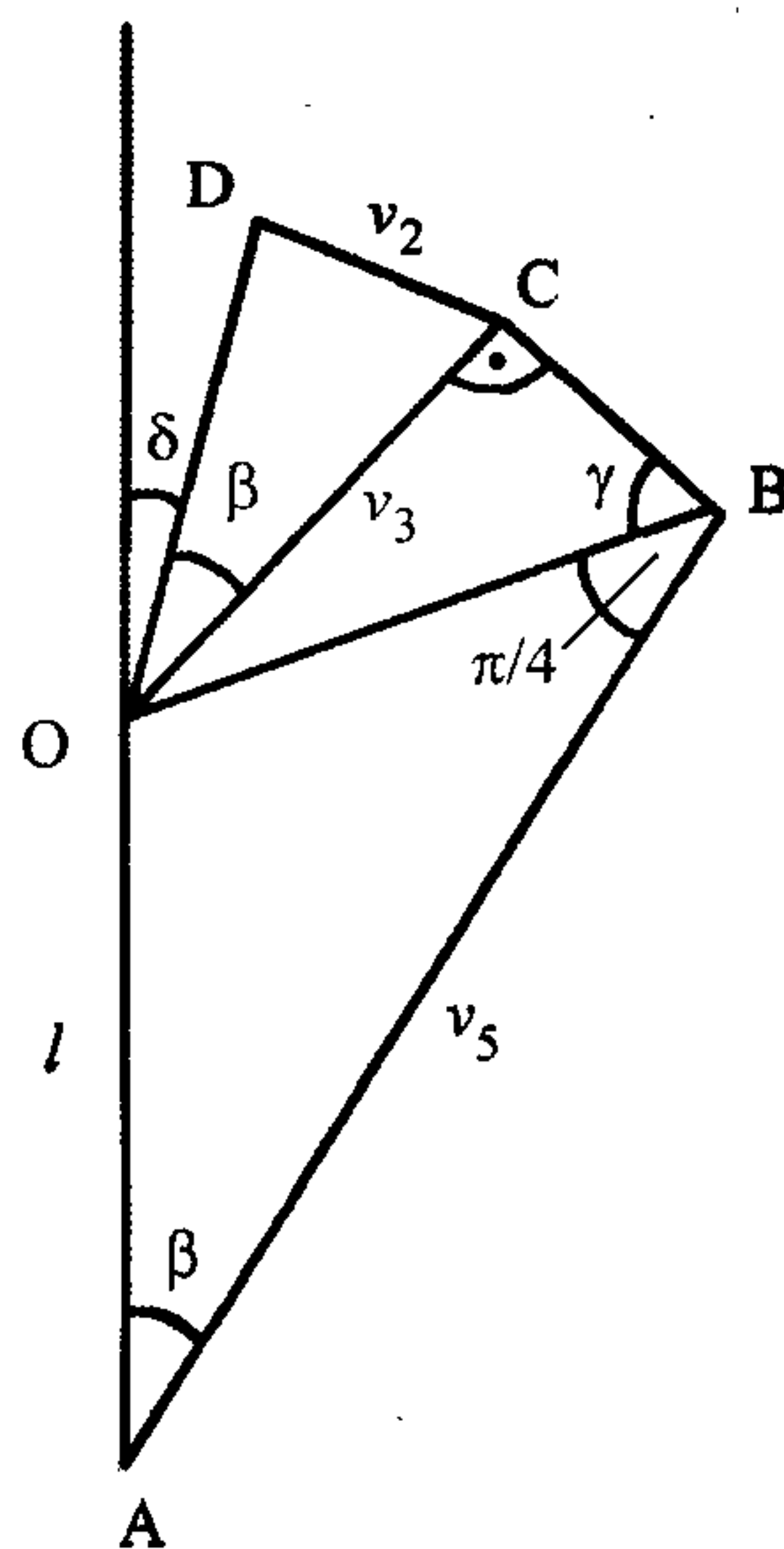


Рис. 4.2. Внедрение плоского штампа с клиновидным заострением в полуплоскость (годограф скорости).



Из  $\triangle ABC$  находится длина отрезка  $AC$

$$\frac{AC}{\sin(3\pi/4 - \gamma)} = \frac{BC}{\sin \pi/4}$$

или

$$AC = \sqrt{z^2 - A^2} + A,$$

где

$$A = a / (\sqrt{2} \sin \beta).$$

Из рис. 4.1 следует, что

$$ED = z \cdot \operatorname{tg} \delta + y / \cos \delta.$$

С другой стороны, угол  $\delta$  связан с углом  $\gamma$ :  $\delta = \gamma - \pi/4$ . Тогда с помощью (4.2.1) определяется длина отрезка

$$ED = z \frac{A - \sqrt{z^2 - A^2}}{A + \sqrt{z^2 - A^2}} + y \frac{\sqrt{2}z}{A + \sqrt{z^2 - A^2}}.$$

Теперь можно составить выражение для верхней оценки с учетом того, что зоны  $ABC$  и  $BDEFB$  жесткие, следовательно, затрата мощности на внутреннюю деформацию в этих зонах равна нулю и мощность затрачивается только на сдвиг этих зон относительно друг друга:

$$\frac{P_n^k}{\tau_s} \cdot 1 \cdot a = v_1 \cdot AC + v_2 \cdot BC + v_3 \cdot CD + (v_3 \beta) \cdot BC + v_4 \cdot ED.$$

Здесь член  $(v_3 \beta) \cdot BC$  учитывает мощность, затраченную внутри сектора  $B CD$  (представим себе, что сектор  $B CD$  состоит из многих треугольников).

Если подставить в последнюю формулу значения скоростей и отрезков, то получится выражение

$$\frac{P_n^k a}{\tau_s \sqrt{2} \sin \beta} = 2\sqrt{z^2 - A^2} + A + 2A \cdot \beta + A \frac{A - \sqrt{z^2 - A^2}}{A + \sqrt{z^2 - A^2}} + \sqrt{2}A \frac{y}{A + \sqrt{z^2 - A^2}}.$$

Минимизируя по  $z$ , находим минимальное значение давления (рис.4.3)

$$\frac{P_n^k}{\tau_s} = 2\beta - 2 + 4\sqrt{1 + y/a \cdot \sin \beta}.$$

При  $y = 0$  получается давление, данное В. В. Соколовским [6]

$$\frac{P_n}{\tau_s} = 2\beta + 2.$$

Пусть  $\beta = \pi/2$  (ударник с плоским основанием), тогда

$$\frac{P_n}{\tau_s} = \pi - 2 + 4\sqrt{1 + y/a}.$$

При  $y=0$  это совпадает с результатом Прандтля [1]. Авторы работы [7], также применяя метод верхней оценки, получили следующую формулу для штампа с плоским основанием:

$$\frac{P_n^k}{\tau_s} = 3 + 2\sqrt{2}\sqrt{2 + y/a}.$$

Приведенные в этом параграфе решения до глубины внедрения порядка 4,88 дают меньшее предельное давление, чем давление, определяемое последней формулой.

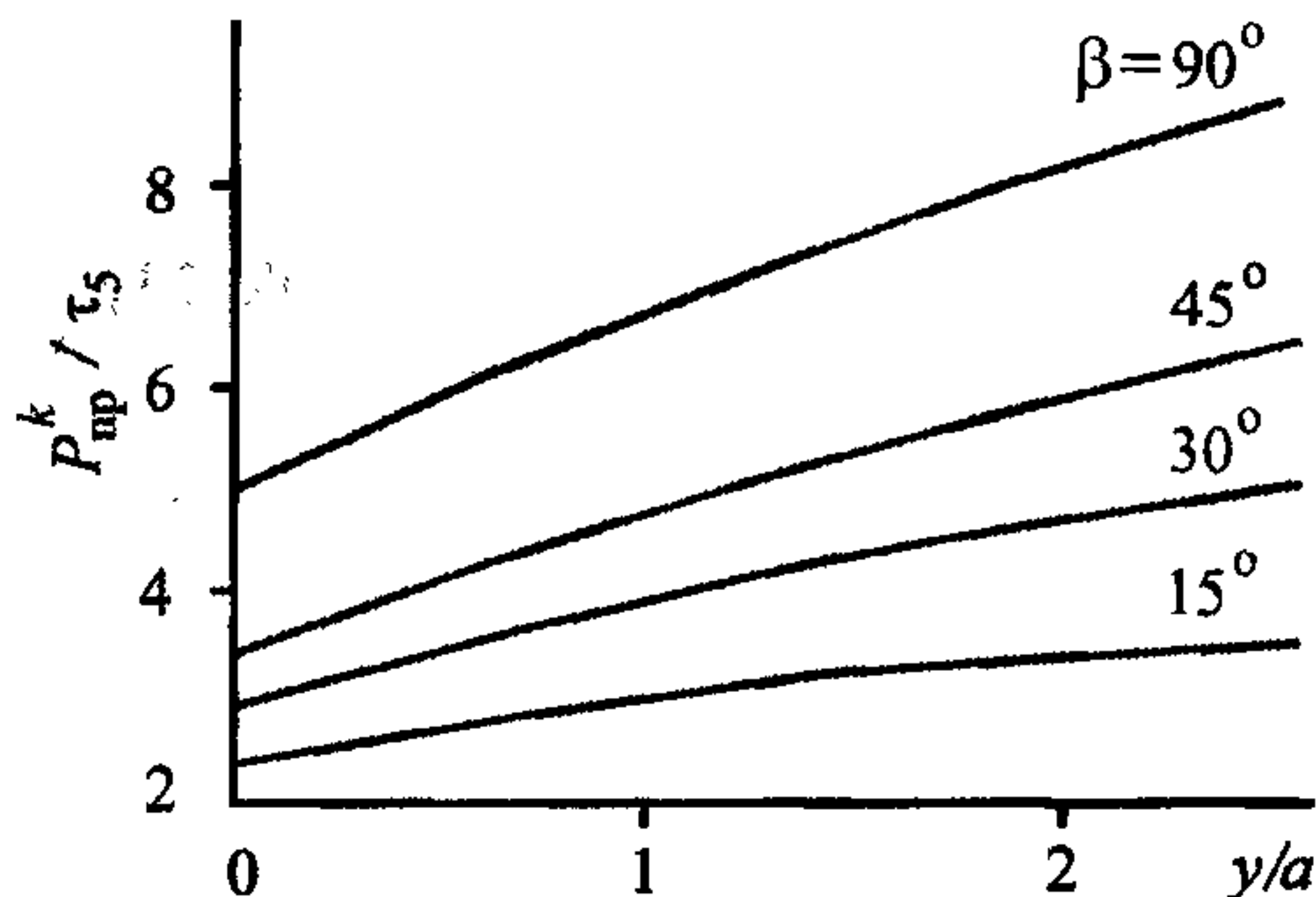


Рис. 4.3. Зависимость предельного давления от глубины проникания для разных углов  $\beta$ .

#### 4.3. Внедрение цилиндра с конической головной частью в полупространство

Рассматривается внедрение гладкого абсолютно жесткого цилиндра с конической головной частью с углом раствора  $2\beta$  в жесткопластическое полупространство (рис. 4.4).

Полупространство разделяется на три зоны:

Зона I — зона пластической деформации.

Зона II — движется как жесткое целое со скоростью  $v_1$ .

Зона III — неподвижная.

Скорость движения частиц зоны II определяется из условия несжимаемости среды:

$$\pi v_0 l^2 \sin^2 \beta = \pi v_1 l^2 (\sin^2 \gamma - \sin^2 \beta)$$

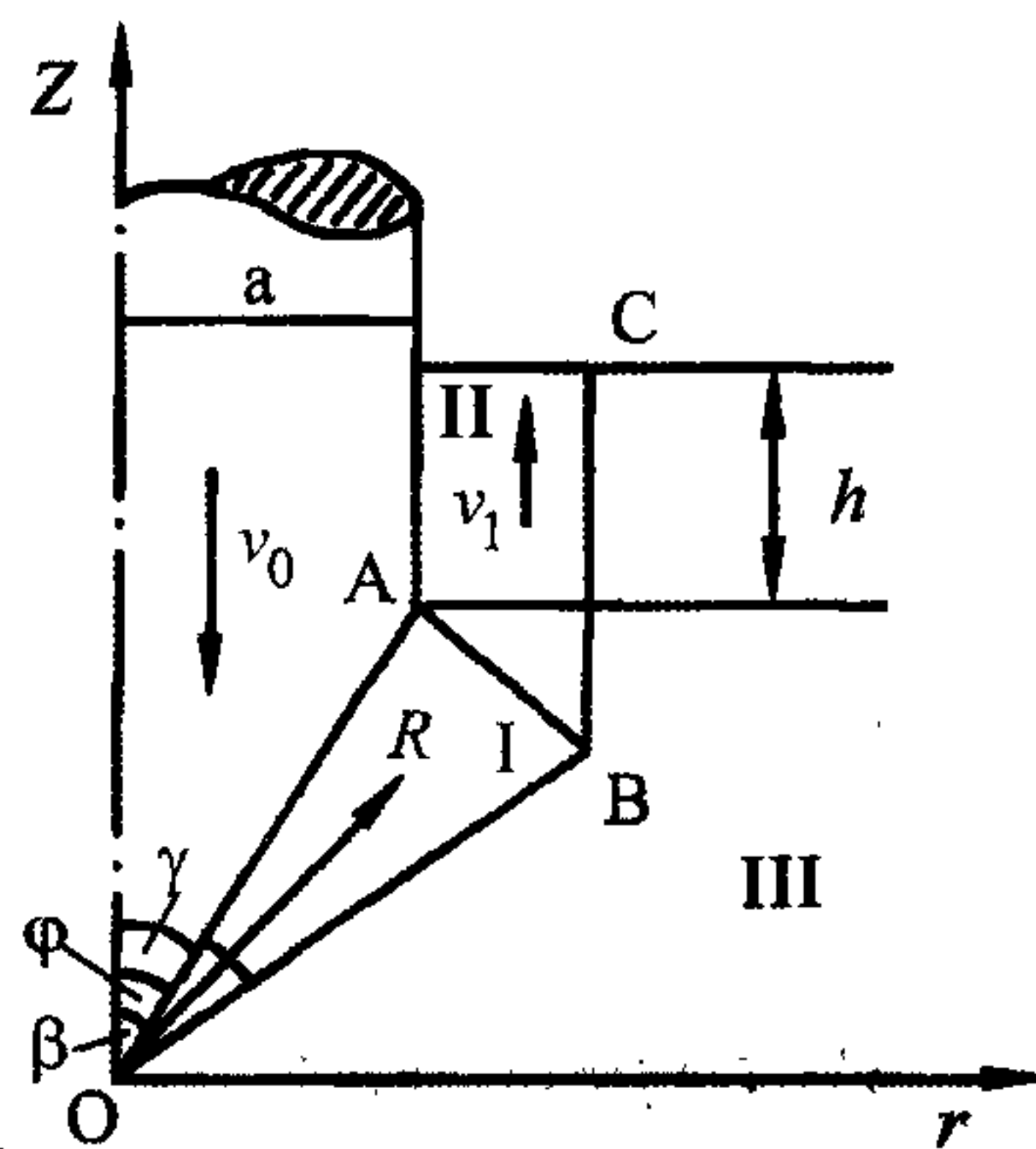


Рис. 4.4. Внедрение цилиндра с конической головной частью в полупространство.

Пояснения см. в тексте.



или

$$v_1 = v_0 \frac{2 \sin^2 \beta}{\cos 2\beta - \cos 2\gamma}.$$

Здесь  $l$  — длина образующей конуса, которая связана с радиусом цилиндра  $a$  формулой

$$a = l \sin \beta.$$

Таким образом, в зоне II имеем следующие компоненты скорости:

$$v_r = 0, \quad v_z = v_0 \frac{2 \sin^2 \beta}{\cos 2\beta - \cos 2\gamma}.$$

Для определения скорости в зоне I вводится сферическая координатная система  $R, \varphi, \theta$ . Начало координат — на вершине конуса.

Рассматриваемая задача — осесимметричная, так как скорости не зависят от угла  $\theta$ . Тогда в сферической координатной системе условие несжимаемости имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u_R}{\partial R} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + 2 \frac{u_R}{R} + \frac{u_\varphi}{R} \operatorname{ctg} \varphi = 0. \quad (4.3.1)$$

Предполагается, что вдоль оси  $R$  скорость не меняется:

$$u_R = u_R(\varphi), \quad u_\varphi = u_\varphi(\varphi).$$

В этом случае уравнение (4.3.1) легко интегрируется:

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + 2u_R + u_\varphi \operatorname{ctg} \varphi = 0$$

или

$$\frac{1}{\sin \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\varphi \sin \varphi) = -2u_R. \quad (4.3.2)$$

Вдоль АВ нормальная составляющая скорости непрерывна:

$$u_R = v_1 \cos \varphi. \quad (4.3.3)$$

Интегрирование (4.3.2) с учетом (4.3.3) дает

$$u_\varphi = \frac{1}{\sin \varphi} \left( c_1 + \frac{v_1}{2} \cos 2\varphi \right).$$

Постоянная интегрирования  $c_1$  определяется из условия  $u_\varphi(\gamma) = 0$ . Тогда

$$u_\varphi = \frac{v_1}{2 \sin \varphi} (\cos 2\varphi - \cos 2\gamma).$$

Таким образом, компоненты скорости в зоне I равны:

$$u_R = 2v_0 \frac{\sin^2 \beta \cos \varphi}{\cos 2\beta - \cos 2\gamma}, \quad u_\varphi = v_0 \frac{\sin^2 \beta}{\cos 2\beta - \cos 2\gamma} \cdot \frac{\cos 2\varphi - \cos 2\gamma}{\sin \varphi}.$$

Скорости деформаций определяются формулами

$$\xi_R = \xi_{R\theta} = \xi_{\varphi\theta} = 0,$$

$$\xi_\varphi = \frac{1}{R} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_R}{R},$$

$$\xi_\theta = \frac{u_R}{R} + \frac{u_\varphi}{R} \operatorname{ctg} \varphi,$$

$$\xi_{R\varphi} = -\frac{u_\varphi}{R} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Интенсивность скорости деформаций сдвига равна

$$H = \frac{2v_0}{R} \frac{\sin^2 \beta \sin^2 \gamma}{\cos 2\beta - \cos 2\gamma} \cdot \frac{\sqrt{4 - 3 \sin^2 \varphi}}{\sin^2 \varphi}. \quad (4.3.4)$$

Вычислим мощность, затраченную на пластическую деформацию в зоне I:

$$\frac{A_1}{\tau_s} = 2\pi \int_0^l \int_\beta^\gamma H R^2 \sin \varphi \, d\varphi \, dR. \quad (4.3.5)$$

Выражение (4.3.5) интегрируется с учетом (4.3.4):

$$\frac{A_1}{\tau_s} = 2\pi v_0 l \frac{\sin^2 \beta \sin^2 \gamma}{\cos 2\beta - \cos 2\gamma} \cdot I,$$

где

$$I = \ln \left[ \frac{\sqrt{4 - 3 \sin^2 \beta} + 2 \cos \beta \cdot \sqrt{4 - 3 \sin^2 \gamma} - 2 \cos \gamma}{\sqrt{4 - 3 \sin^2 \beta} - 2 \cos \beta \cdot \sqrt{4 - 3 \sin^2 \gamma} + 2 \cos \gamma} \right] + \sqrt{3} \ln \frac{\sqrt{3} \cos \gamma + \sqrt{4 - 3 \sin^2 \gamma}}{\sqrt{3} \cos \beta + \sqrt{4 - 3 \sin^2 \beta}}.$$

Определим мощность, затраченную на сдвиг вдоль линии разрыва скорости АВ (или  $R = l$ ):



$$\frac{B_1}{\tau_s} = 2\pi \int_{\beta}^{\gamma} \|\mathbf{v}_{\tau}\|^2 \sin \varphi d\varphi,$$

где разрыв скорости

$$[\mathbf{v}_{\tau}] = v_1 \sin \varphi + u_{\varphi}.$$

После интегрирования находим

$$\frac{B_1}{\tau_s} = 4\pi v_0 l^2 \frac{\sin^2 \beta \sin^2 \gamma}{\cos 2\beta - \cos 2\gamma} (\gamma - \beta).$$

Мощности, затраченные на сдвиг вдоль линий разрыва скорости OB и BC, равны соответственно:

$$\frac{B_2}{\tau_s} = 2\pi v_0 l^2 \frac{\sin^2 \beta \sin \gamma \cos \gamma}{\cos 2\beta - \cos 2\gamma},$$

$$\frac{B_3}{\tau_s} = 4\pi v_0 l^2 \frac{\sin^2 \beta \sin \gamma}{\cos 2\beta - \cos 2\gamma} \left( \frac{h}{l} + \cos \beta - \cos \gamma \right).$$

Теорема верхней оценки дает

$$\frac{P_p^k}{\tau_s} = \frac{2 \sin \gamma}{\cos 2\beta - \cos 2\gamma} \left[ (l + 2\gamma - 2\beta) \sin \gamma + 2 \left( \frac{h}{a} \sin \beta + \cos \beta \right) - \cos \gamma \right].$$

Для данной глубины внедрения  $h$  минимизируется среднее давление  $P_{np}/\tau_s$  по параметру  $\gamma$

$$\frac{d}{d\gamma} \left( \frac{P_p^k}{\tau_s} \right) = 0$$

и получается трансцендентное уравнение относительно  $\gamma$ .

На рис. 4.5 приведено минимизированное давление при  $\beta = 30^\circ$  для разных глубин внедрения  $h$ . Давление растет с увеличением глубины внедрения.

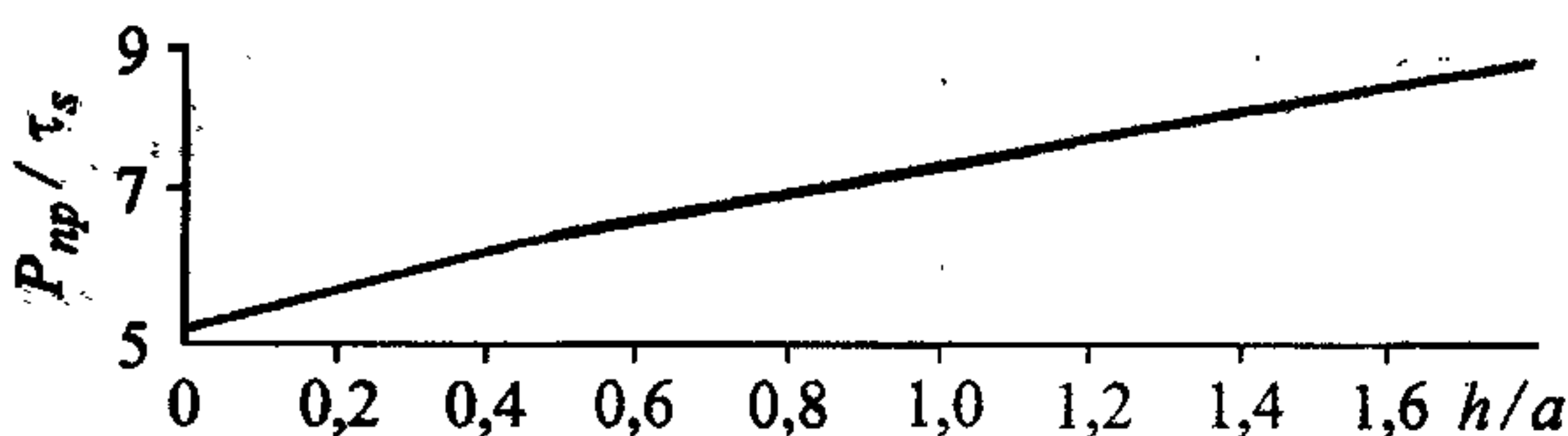


Рис. 4.5. Изменение предельного давления с глубиной проникания.

#### 4.4. Пробивание плиты гладким тупым цилиндром

Пусть в плиту конечной толщины  $L$  ударяется со скоростью  $v_0$  гладкий круговой цилиндр с плоским основанием радиуса  $a$ . Требуется определить глубину проникания цилиндра или его скорость на выходе при пробивании плиты. Для решения задачи необходимо найти силу сопротивления как функцию глубины погружения, толщины преграды и скорости соударения.

Решение задачи состоит из нескольких этапов. На первом строится решение, не учитывающее влияние тыльной поверхности плиты, как это было бы при проникании ударника в полубесконечную преграду. На последующих этапах необходим учет влияния конечности преграды.

На первом этапе предлагается следующее КДПС — среда разбивается на три зоны (рис. 4.6), в каждой из которых компоненты вектора скорости в цилиндрических координатах описываются следующим образом:

$$\text{зона 1: } v_r^{(1)} = v_0 \frac{r}{2l}, \quad v_z^{(1)} = -v_0 \frac{z}{l},$$

$$\text{зона 2: } v_r^{(2)} = v_0 \frac{a^2}{2l} \cdot \frac{1}{r}, \quad v_z^{(2)} = v_0 \frac{l_1}{l(\xi^2 - 1)},$$

$$\text{зона 3: } v_r^{(3)} = 0, \quad v_z^{(3)} = v_1 = \text{const.}$$

Частицы зоны 3 движутся как жесткое целое, среда при этом не деформируется. Предложенная кинематика отражает опытный факт о каналобразном течении частиц среды при проникании ударника в полубесконечную преграду. Размеры этого канала пока никак не фиксируются и входят в описание КДПС в качестве свободных параметров:  $l$  — расстояние от дна ударника до дна канала,  $b = a\xi$  — радиус канала,  $l_1$  — положение кривой BC. Траектории частиц преграды в зонах 1 и 2 разворачиваются в сторону свободной поверхности и в зоне 3 частицы поднимаются вверх с одинаковой по-

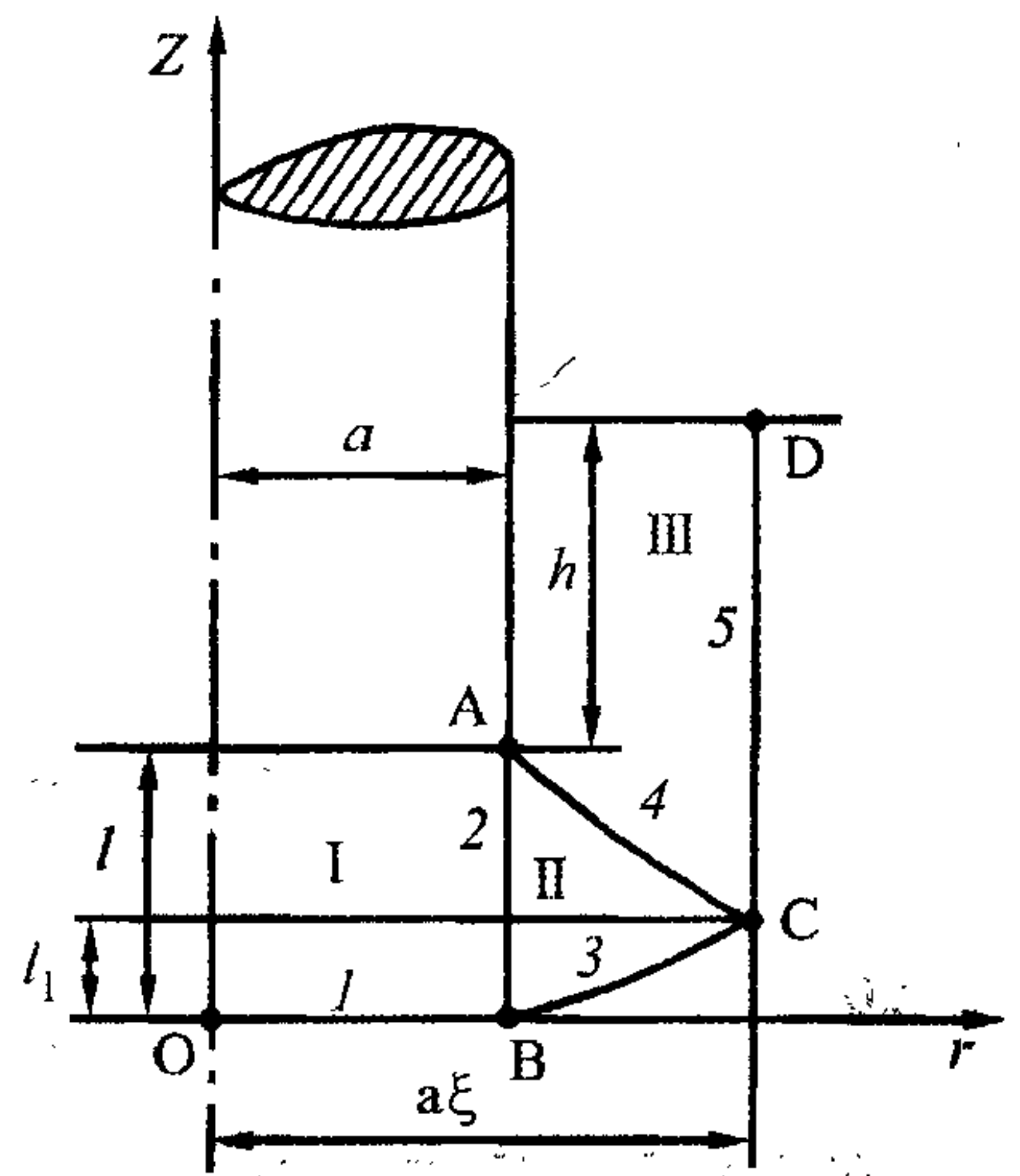


Рис. 4.6. Геометрическая картина процесса проникания кругового цилиндра с плоским основанием в плиту конечной толщины.

Поясн. см. в тексте.



стоянной скоростью  $v_1$ . Форма канала определяется кривой OBCD. Вне канала среда неподвижна (жесткая область).

Нетрудно видеть, что данное КДПС удовлетворяет уравнению несжимаемости

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

и всем граничным условиям. Величина  $v_1$  определяется из условия несжимаемости — закона сохранения массы

$$v_0 \pi a^2 = v_1 \pi (b^2 - a^2)$$

и равна

$$v_1 = v_0 \frac{a^2}{b^2 - a^2} = \frac{v_0}{\xi^2 - 1}$$

Линии АВ и ВС являются линиями разрыва скоростей. Уравнения этих линий определяются из условия сплошности среды — условия непрерывности нормальной составляющей скорости при переходе через линию разрыва. Так кривая АС описывается уравнением

$$z = \frac{l - l_1}{a^2 (\xi^2 - 1)} (a^2 \xi^2 - r^2) + l_1,$$

а ВС —

$$z = \frac{l_1}{\xi^2 - 1} \left( \frac{r^2}{a^2} - 1 \right).$$

По заданному полю легко определяются компоненты тензора скоростей деформаций

$$\text{зона 1: } \xi_r = \frac{1}{2l}, \quad \xi_\theta = \frac{1}{2l}, \quad \xi_z = -\frac{1}{l},$$

$$\text{зона 2: } \xi_r = -\frac{a^2}{2lr^2}, \quad \xi_\theta = \frac{a^2}{2lr^2}, \quad \xi_z = 0,$$

$$\text{зона 3: } \xi_r = \xi_\theta = \xi_z = 0,$$

откуда интенсивности скоростей деформаций  $H$  для соответствующих зон есть

$$H^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{l}, \quad H^{(2)} = \frac{a^2}{lr^2}, \quad H^{(3)} = 0.$$

Здесь и далее положено  $v_0 = 1$ , поскольку  $v_0$  везде входит множителем.

Мощность поверхностных усилий (левая часть уравнения (4.1.1)) легко вычисляется в предположении о равномерном распределении давления под ударником с учетом его гладкости и условий на свободной поверхности полупространства

$$\int_s p_{ni}^k v_i ds = P^k \pi a^2.$$

Правая часть уравнения (4.1.1) представляет собой полную мощность работы, затрачиваемой на пластическую деформацию и смещение материала по линиям разрыва скоростей 1—5 (нумерация приведена на рис. 4.6):

$$W = \sum_{i=1}^3 A_i + \sum_{j=1}^5 B_j.$$

Объемные  $A_i$  и поверхностные  $B_j$  интегралы достаточно просто вычисляются. Опуская очевидные выкладки, можем сразу выписать

$$A_1 = \tau_s \sqrt{3} \pi a^2,$$

$$A_2 = \tau_s \frac{\pi a^2}{\xi^2 - 1} (\xi^2 \ln \xi^2 - \xi^2 + 1),$$

$$A_3 = 0,$$

$$B_1 = \tau_s \frac{\pi a^3}{3l},$$

$$B_2 = \tau_s \pi a \left( t + \frac{2l_1}{\xi^2 - 1} \right),$$

$$B_3 = \tau_s \frac{\pi a}{t} \left[ a^2 (\xi - 1) + \frac{4l_1^2 (\xi^3 - 1)}{3(\xi^2 - 1)^2} \right],$$

$$B_4 = \tau_s \frac{\pi a}{l} \left[ a^2 (\xi - 1) + \frac{4(l - l_1)^2 (\xi^3 - 1)}{3(\xi^2 - 1)^2} \right],$$

$$B_5 = \frac{\tau_s 2\pi a \xi (h + l - l_1)}{\xi^2 - 1}.$$

Таким образом, из уравнения (4.1.1) получаем следующее выражение для трехпараметрического семейства предельных нагрузок, действующих на проникающий ударник:



$$\frac{P^k}{\tau_s} = \frac{\xi^2}{\xi^2 - 1} \ln \xi^2 + l + \frac{2}{\xi^2 - 1} (l_1 + \xi h + \xi l - \xi l_1) + \frac{4}{(\xi^2 - 1)} (\xi^3 - 1)(l - 2l_1) + \sqrt{3} - 1 + \frac{6\xi - 5}{3l}$$

В этом выражении величины  $l, l_1, h$  являются безразмерными, отнесенными к радиусу проникающего цилиндра.

Из этого семейства для каждого значения  $h$  (глубины, на которую проник ударник) следует выбрать минимальное значение

$$P_p^k = \min_{\xi, l, l_1} P^k,$$

которое и будет верхней оценкой действительной предельной нагрузки. При этом для каждого значения  $h$  определяются величины  $\xi, l, l_1$ , доставляющие минимум  $P^k$ , т.е. геометрические размеры канала течения, который не будет фиксированным, а будет изменяться в зависимости от глубины погружения ударника.

Минимизация  $P^k$  методом покоординатного спуска представлена кривой 1 на рис. 4.7.

Следующим этапом построения решения является задание КДПС, учитывающего влияние тыльной поверхности плиты. Предлагается два поля скоростей. Одно из них двухпараметрическое (рис. 4.8):

$$\text{зона 1: } v_r = 0, \quad v_z = \frac{1}{\xi^2},$$

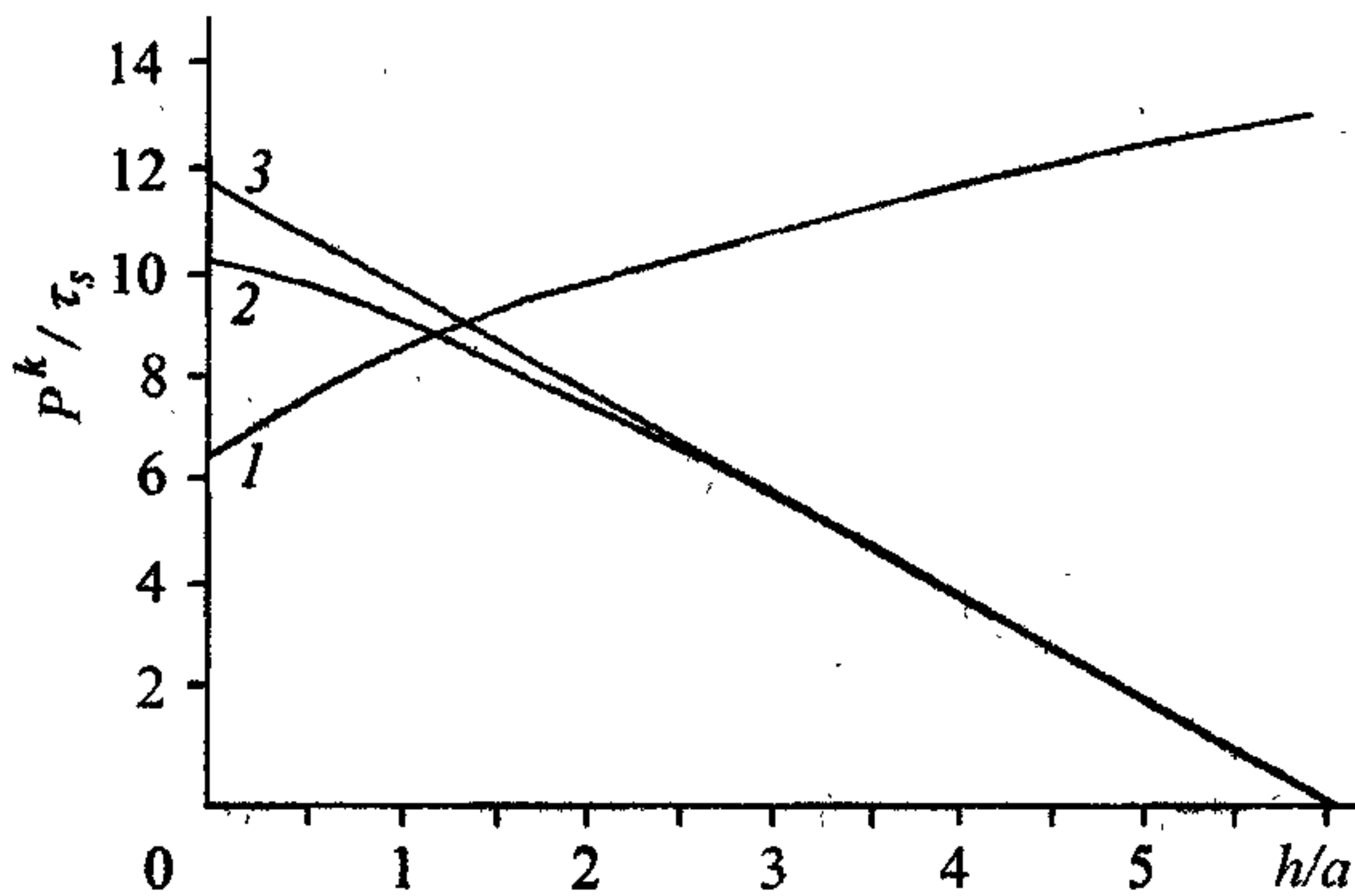


Рис. 4.7. Зависимость предельной нагрузки от глубины проникания.

Поясн. см. в тексте.

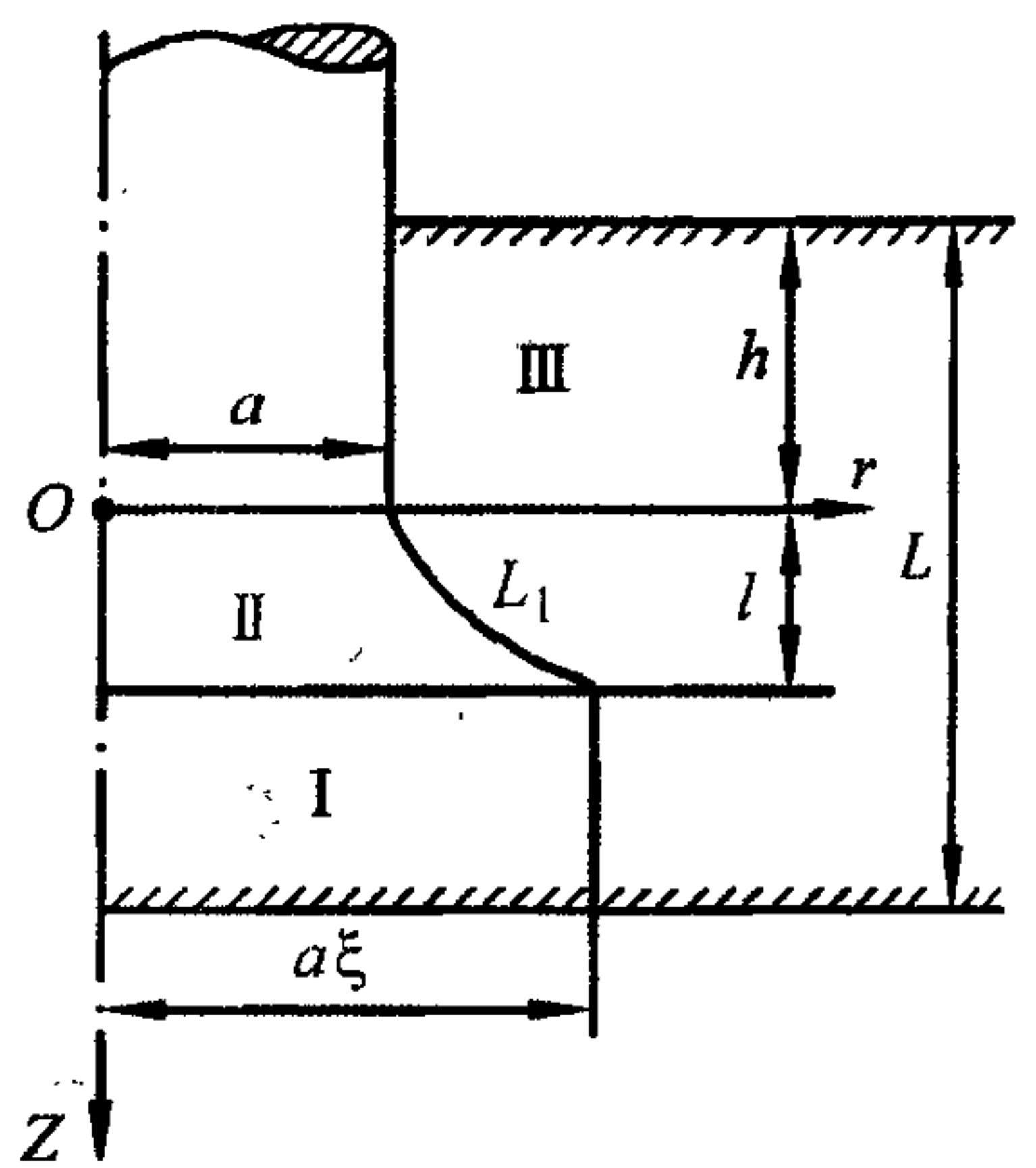


Рис. 4.8. Картина процесса проникания кругового цилиндра с учетом влияния тыльной поверхности плиты.

$$\text{зона 2: } v_r = \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2} \cdot \frac{r}{l}, \quad v_z = 1 - \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2} \cdot \frac{z}{l};$$

зона 3: неподвижна.

Уравнение линии разрыва  $L_1$  поля течения определяется из условия сплошности среды

$$z = \frac{\xi^2 l}{\xi^2 - 1} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right).$$

Интенсивности скоростей деформаций сдвига для зон 1 и 2:

$$H^{(1)} = 0, \quad H^{(2)} = \frac{\sqrt{3}}{l} \cdot \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2}.$$

Мощность работ, затрачиваемых на пластическую деформацию и на смещение вдоль линий разрыва скоростей  $L_1, L_2, L_3$ , есть

$$A_1 = 0,$$

$$A_2 = \tau_s 2\sqrt{3}\pi a^2 \ln \xi,$$

$$B_1 = \tau_s \frac{\pi}{3} a^3 \frac{(\xi^2 - 1)(\xi^3 - 1)}{\xi^2 l} + \tau_s \frac{4}{3} \pi a l \frac{\xi^3 - 1}{\xi(\xi^2 - 1)},$$

$$B_2 = \tau_s \frac{\pi a^3}{3 l} \xi(\xi^2 - 1),$$

$$B_3 = \tau_s 2\pi a \frac{L - h - l}{\xi}.$$

Формула двухпараметрического семейства предельных нагрузок для безразмерных величин имеет вид

$$\frac{P^k}{\tau_s} = 2\sqrt{3} \ln \xi + \frac{(\xi^2 - 1)(\xi^3 - 1)}{3\xi^2} \frac{1}{l} + \frac{4}{3} \frac{\xi^3 - 1}{\xi(\xi^2 - 1)} l + \frac{\xi}{3} (\xi^2 - 1) \frac{1}{l} + \frac{2}{3} (L - h - l).$$

Для фиксированных  $L$  и  $h$  минимизация  $P^k$  по  $\xi, l$  определяет верхнюю оценку  $P_p^k$  и сами параметры  $\xi, l$ . Расчет  $P_p^k$  для  $L = 6a$  представлен линией 2 на рис. 4.7.

Второе КДПС на этом этапе является константным и описывает выдавливание из плиты жесткой пробки диаметром, равным диаметру проникающего цилиндра, движущейся со скоростью цилиндра (рис. 4.9).



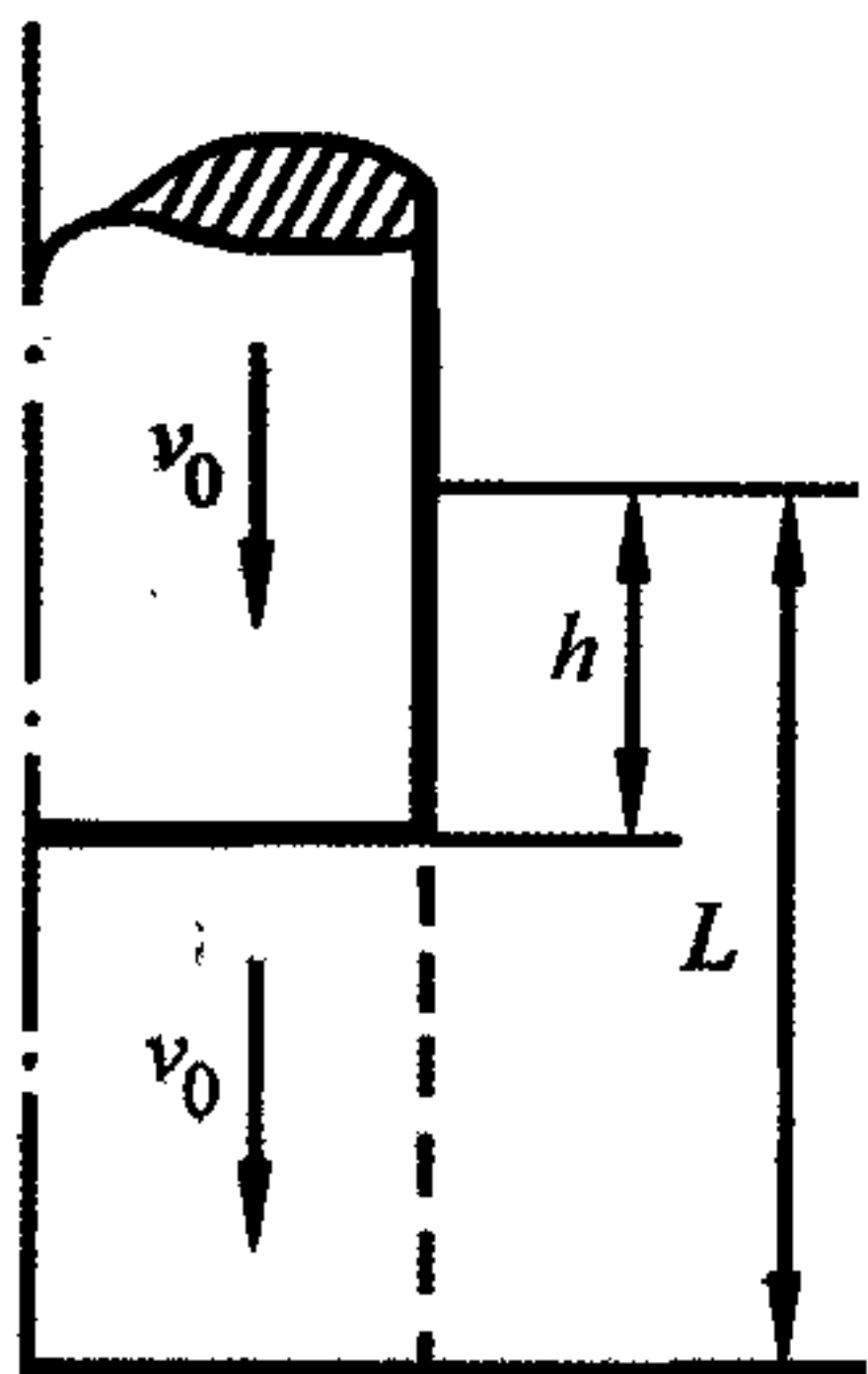


Рис. 4.9. Картина процесса проникания цилиндра с выдавливанием жесткой пробки.

Предельное давление в этом случае выписывается элементарно:

$$\frac{P_p^k}{\tau_s} = 2(L - h)$$

и представляет собой прямую линию 3 на рис. 4.7.

Таким образом, каждому КДПС отвечает своя зависимость  $P_p^k(h)$ . Фиксированной глубине  $h$  соответ-

ствуют три предельных усилия, из которых нужно выбрать минимальное. Абсцисса пересечения кривых 1 и 2 является глубиной, на которой проникающий ударник начинает “чувствовать” тыльную поверхность пластины. Материал преграды перестает выдавливаться в сторону лицевой поверхности и начинает смещаться на тыльную поверхность. Пересечение кривой 2 и прямой 3 определяет глубину, начиная с которой происходит выдавливание пробки.

Минимальное из возможных предельных усилий будет описывать сопротивление среды для определенной глубины проникания (см. рис. 4.7). При этом вид общей зависимости  $P_p^k(h)$  будет зависеть от толщины плиты  $L$ . Для относительно тонких плит первый этап внедрения может вообще отсутствовать (кривая 1 целиком лежит выше кривой 2), т.е. ударник сразу “почувствует” конечность преграды.

Следует отметить возможность обобщения предложенного алгоритма на случай учета изменения кинетической энергии в основном энергетическом ра-  
венстве (4.1.1) и на случай многослойных преград [8—10].

#### 4.5. Проникание осесимметричных ударников под углом в преграду

Проникание ударника под углом требует решения трехмерной задачи и, как следствие, применения численных методов. Проблема решения задач становится весьма сложной, поскольку требует весьма значительного объема памяти и быстродействия ЭВМ. Имея в виду указанные трудности, вполне естественно уделить внимание приближенным методам расчета. Эти методы не следует противопоставлять точным (численным) методам. Наряду с точными

методами должны существовать экспресс-методы анализа, которые в состоянии дать приближенную картину процесса проникания при минимальных мощностях используемых ЭВМ. Прямым перебором возможных вариантов с помощью приближенных методов можно получить оптимальные параметры проектируемого ударника, геометрии преграды, начальных условий взаимодействия, которые впоследствии можно уточнить с применением точных численных методов расчета. Кроме того, использование приближенных методов не требует привлечения высококвалифицированных программистов, что обуславливает их широкое использование инженерами-расчетчиками в конструкторской практике.

Задачу о взаимодействии ударника с преградой можно сформулировать так: найти траекторию движения ударника в преграде и его ориентацию вплоть до полной остановки или при выходе из преграды по заданным начальным условиям взаимодействия (скорость, угол подлета, угол атаки) при известной геометрии преграды.

Рассматривается плоскопараллельное движение. Траектория движения ударника определяется интегрированием системы уравнений движения

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad J\ddot{\phi} = M,$$

где  $F_x, F_y$  — компоненты главного вектора сил, действующих на ударник;  $M$  — момент сил;  $\ddot{\phi}$  — угловое ускорение;  $m, J$  — масса и момент инерции ударника соответственно.

Задача, таким образом, сводится к нахождению  $F_x, F_y, M$ , которые можно получить при известном распределении усилий по поверхности ударника. Суть предлагаемого приближенного метода состоит в замене трехмерного решения суперпозицией одномерных решений [11]. Ударник представляется как бесконечный набор шаров, совокупность центров которых образует ось симметрии ударника (рис. 4.10).

Головная часть ударника представляет набор шаров переменного радиуса, цилиндрическая часть — шаров одинакового радиуса. Давление в

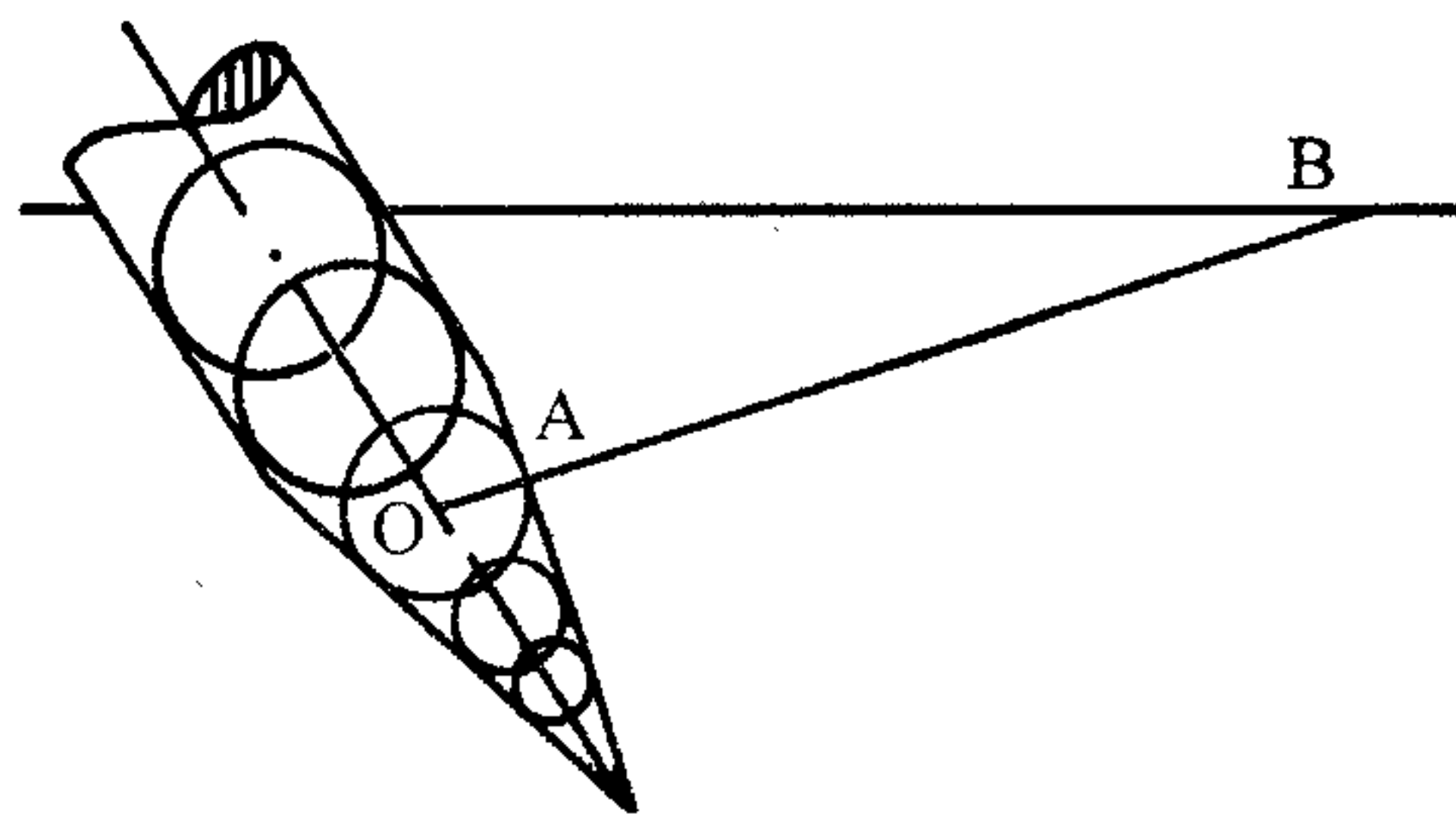


Рис. 4.10. Проникание осесимметричного ударника под углом в деформируемую преграду.

Поясн. см. в тексте.



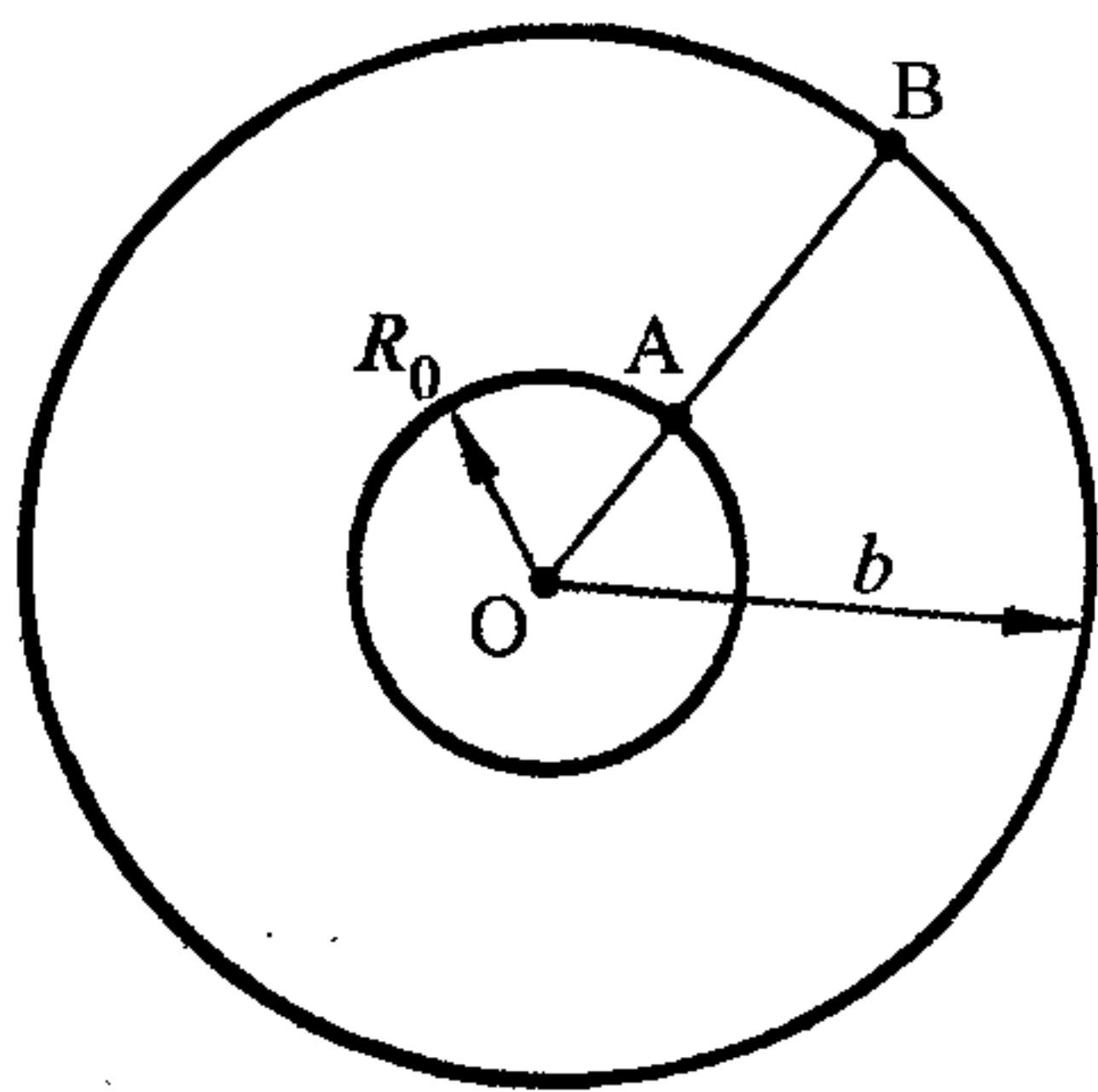


Рис. 4.11. Зона распространения деформаций по сечению, перпендикулярному оси симметрии ударника.

Поясн. см. в тексте.

каждой точке боковой поверхности ударника отождествляется с давлением на внутреннюю поверхность полого шара (или внутреннюю поверхность сферической полости), полученным из решения одномерной задачи о расширении полости или шара от нулевого радиуса до радиуса  $OA$  (рис. 4.11), где  $OA$  — расстояние от оси симметрии ударника до точки поверхности ударника,  $OB$  — расстояние от оси симметрии до свободной поверхности преграды. Отрезок  $OB$  ортогонален боковой поверхности ударника в точке  $A$ . Таким образом, каждой точке боковой поверхности можно поставить в соответствие ко-

нечный полый шар или сферическую полость в безграничной среде (в случае  $OB \rightarrow \infty$ ). Для различных точек размеры шаров или полостей будут, вообще говоря, различными, т.е. давление на соответствующие точки поверхности ударника тоже будет различным. Главный вектор и главный момент сил, действующих на проникающий ударник, найдутся интегрированием давления по всей поверхности ударника. Известные на каком-либо шаге  $\vec{F}$  и  $M$  позволяют проинтегрировать уравнения движения ударника и вычислить его новое положение, скорости (центра масс и угловую) на следующем шаге. Решение проводится вплоть до полной остановки ударника или до момента его выхода из преграды.

Численное интегрирование следует проводить с учетом следующих ограничений:

1. Необходимо следить за изменяющимся расстоянием от поверхности ударника до свободной поверхности преграды (лицевой или тыльной в случае преграды конечной толщины). Нужно учитывать искривление свободной поверхности, т.е. вычислять величину  $OB$  с учетом подъема свободной поверхности, что нетрудно делать, имея в виду несжимаемость материала преграды.

2. В точках поверхности ударника, скорость которых направлена внутрь ударника (это возможно при его вращении в плоскости падения), давление берется нулевым, так как в этом случае отсутствует взаимодействие с преградой.

Построим решение одномерной сферической задачи о расширении полости в несжимаемой упругопластической среде.

Уравнения движения и неразрывности в сферических координатах имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) = 0.$$

В пластической области  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  связаны условием пластичности Треска

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2\tau_s,$$

в упругой — выполняется закон Гука

$$H = \mu \Gamma$$

( $H$  — максимальное касательное напряжение,  $\Gamma$  — главный сдвиг,  $\mu$  — упругий модуль сдвига).

Объемные деформации отсутствуют как в пластической, так и в упругой области деформирования.

Граничные условия:

1) на границе, расширяющейся от нулевого радиуса полости, задается скорость

$$u|_{r=R_0} = \dot{R}_0; \quad (4.5.1)$$

2) внешняя поверхность шара свободна от напряжений

$$\sigma_r|_{r=b} = 0 \quad (4.5.2)$$

(в случае безграничной среды  $b \rightarrow \infty$ );

3) на неизвестной упругопластической границе  $R_c$  выполняются условия непрерывности скоростей и напряжений

$$[u] = [\sigma_r] = [\sigma_\theta] = 0. \quad (4.5.3)$$

Начальное условие

$$R_0|_{t=0} = 0.$$

С учетом несжимаемости ( $\rho = \text{const}$ ) уравнение неразрывности легко интегрируется:



$$u = \frac{\lambda(t)}{r^2}, \quad (4.5.4)$$

где  $\lambda(t)$  в силу первого условия (4.5.3) одинакова для упругой и пластической областей и определяется с помощью (4.5.1):

$$\lambda(t) = \dot{R}_0 R_0^2.$$

В пластической области уравнения движения с учетом (4.5.4) дают выражение

$$\sigma_r^p = 4\tau_s \ln r + \rho \left( -\frac{\dot{\lambda}}{r} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{\lambda}^2}{r^4} \right) + C(t),$$

где  $C(t)$  — произвольная пока функция времени.

Перемещения  $w$  определяются из условия несжимаемости

$$r^3 = (r+w)^3 - R_0^3,$$

которое для упругой зоны ( $w \ll r$ ) дает

$$w^e = \frac{1}{3} \cdot \frac{R_0^3}{r^2}.$$

Компоненты тензора деформаций при этом легко вычисляются:

$$\varepsilon_r^e = \frac{\partial w^e}{\partial r} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{R_0^3}{r^3},$$

$$\varepsilon_\theta^e = \frac{w^e}{r} = \frac{1}{3} \cdot \frac{R_0^3}{r^3}.$$

Касательное напряжение

$$\frac{\sigma_\theta^e - \sigma_r^e}{2} = \mu (\varepsilon_\theta^e - \varepsilon_r^e) = \mu \frac{R_0^3}{r^3},$$

подчиненное при  $r = R_c$  условию пластичности, позволяет связать  $R_c$  с размером полости  $R_0$  в виде:

$$R_c^3 = R_0^3 \cdot \frac{E}{3\tau_s} = R_0^3 \frac{\mu}{\tau_s}.$$

Напряжение  $\sigma_r^e$  с учетом интеграла (4.5.4) и граничного условия (4.5.2) принимает вид

$$\sigma_r^e = \frac{4}{3} \mu R_0^3 \left( \frac{1}{b^3} - \frac{1}{r^3} \right) + \rho \left[ \dot{\lambda} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{r} \right) + \frac{\lambda^2}{2} \left( \frac{1}{r^4} - \frac{1}{b^4} \right) \right],$$

где внешний радиус шара  $b$  определяется из условия несжимаемости

$$b^3 = b_0^3 + R_0^3$$

( $b_0$  — начальный размер шара).

Условие непрерывности при  $r = R_c$  позволяет найти последнюю неизвестную в задаче функцию  $C(t)$ , определить  $\sigma_r$  на границе расширяющейся полосты и выписать

$$P = -\sigma_r^p \Big|_{r=R_0} = \frac{4}{3} \tau_s \left[ 1 + \ln \left( \frac{R_c}{R_0} \right)^3 \right] - \frac{4}{3} \tau_s \left( \frac{R_c}{b} \right)^3 + \rho \left[ \dot{\lambda} \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{b} \right) - \frac{\lambda^2}{2} \left( \frac{1}{R_0^4} - \frac{1}{b^4} \right) \right]. \quad (4.5.5)$$

Следует подчеркнуть, что формула (4.5.5) справедлива для любых значений  $b$ . Если размер пластической зоны  $R_c$  превышает  $b$ , то в (4.5.5) следует положить  $R_c = b$ , что соответствует отсутствию зоны упругих деформаций.

В случае безграничной среды ( $b \rightarrow \infty$ ) формула (4.5.5) упрощается и приводится к виду

$$P = \frac{4}{3} \tau_s \left( 1 + \ln \frac{\mu}{\tau_s} \right) + \rho \left( \frac{3}{2} \dot{R}^2 + \ddot{R}_0 R_0 \right). \quad (4.5.6)$$

Два первых слагаемых определяют влияние прочности на сопротивление прониканию и представляют собой статическую составляющую силы сопротивления. Вторая группа слагаемых обусловлена динамикой процесса. Из (4.5.6), в частности, видно, что скорость снаряда играет существенную роль в определении силы сопротивления в том случае, если величины  $\tau_s$  и  $\rho \dot{R}_0^2$  близки по порядку. При очень больших скоростях, когда  $\rho \dot{R}_0^2 \gg \tau_s$ , роль прочности преграды незначительна и сила сопротивления в основном определяется динамическими составляющими. Формула (4.5.6) позволяет, таким образом, расшифровать часть коэффициентов в эмпирическом законе для силы сопротивления

$$F = Av^2 + Bv + C$$



и оценить границы применения статической и динамической формулировок задач проникания.

Следует отметить, что предложенный метод определения давления на проникающий снаряд позволяет рассчитать силу сопротивления при любом очертании носовой части снаряда. Не представляет принципиальных затруднений определить давление на носовую часть в форме оживала [12].

Изложенный алгоритм достаточно простым и вполне очевидным образом обобщается на случай многослойных преград, составленных из различных материалов. В этом случае решение трехмерной задачи строится как суперпозиция одномерных задач о расширении многослойного шара. На рис. 4.12 представлена схема расчета для трехслойной преграды.

Пусть рассматривается шар, состоящий из  $N$  слоев. Из условий несжимаемости и непрерывности скорости следует справедливость интеграла (4.5.4) для всего шара.

В пластических зонах из уравнения движения при условии пластичности Треска находим напряжения

$$\sigma_{rk}^p = 4\tau_{sk} \ln r - \rho_k \frac{\dot{\lambda}}{r} + \rho_k \frac{\lambda^2}{2r^4} + C_k(t),$$

а в упругих зонах напряжения  $\sigma_{rk}^e$  имеют вид

$$\sigma_{rk}^e = -\frac{4}{3}\mu_k \frac{R_0^3}{r^3} - \rho_k \frac{\dot{\lambda}}{r} + \rho_k \frac{\lambda^2}{2r^4} + g_k(t) \quad (k=1, \dots, N),$$

где произвольные функции  $C_k(t)$ ,  $g_k(t)$  определяются из граничных условий и условий непрерывности  $\sigma_r$  при переходе через границы раздела слоев и упру-

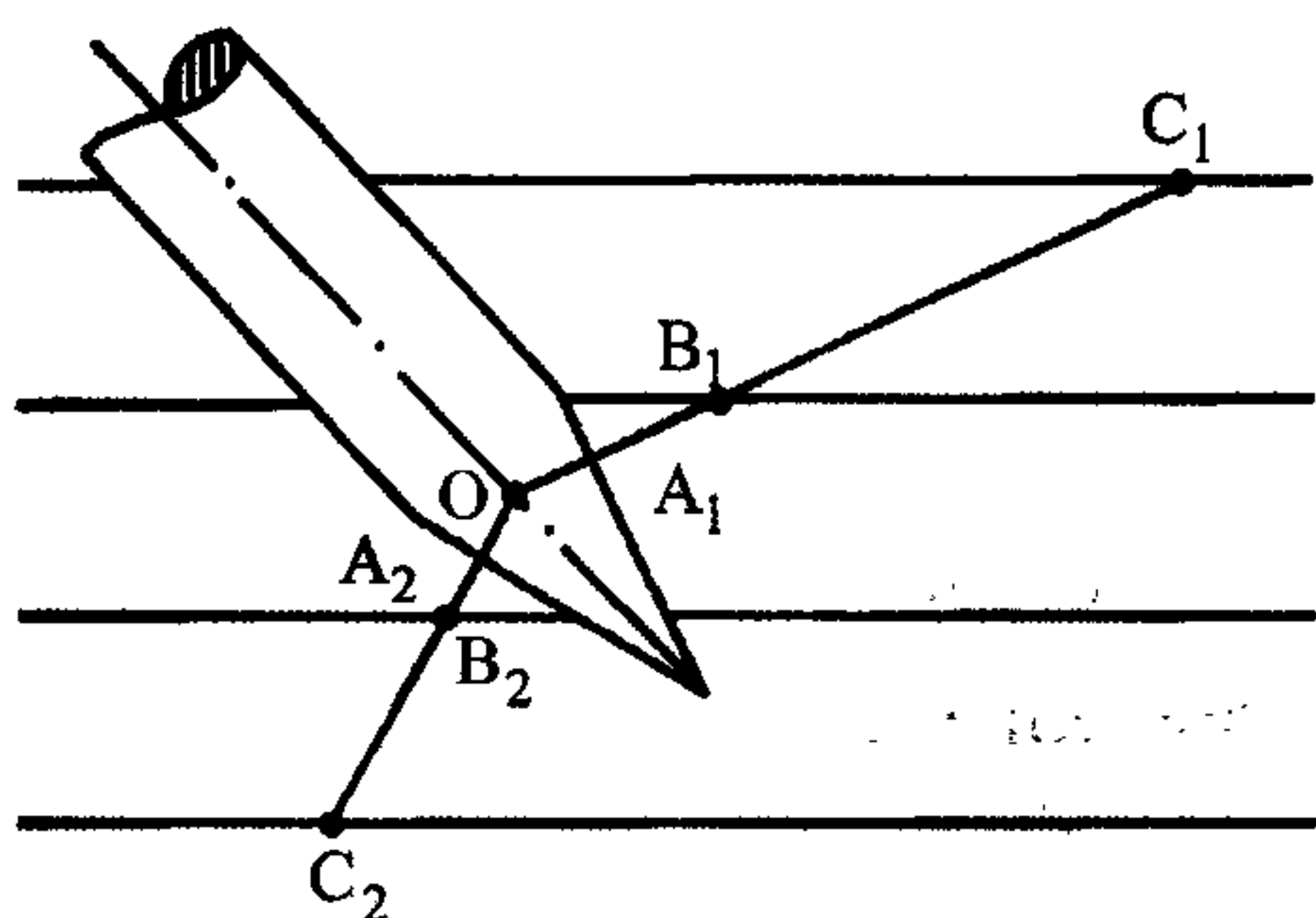


Рис. 4.12. Проникание снаряда в трехслойную преграду.

Поясн. см. в тексте.

гопластические границы. В силу того, что свойства слоев разные, в каждом из них, вообще говоря, может существовать упругопластическая граница  $R_{ck}$ :

$$R_{ck}^3 = \frac{\mu_k}{\tau_{sk}} R_0^3,$$

так что в результате может получиться набор чередующихся зон упругости и пластичности. Условий

непрерывности  $\sigma_r$  на  $R_k$  будет  $N$  штук (по числу слоев).

Условия непрерывности  $\sigma_r$  на границах слоев вместе с граничным условием на внешней поверхности шара (или на бесконечности) доставят еще  $N$  условий. Совокупность  $2N$  условий позволит определить  $2N$  функций  $C_k(t)$ ,  $g_k(t)$  и вычислить искомое значение  $\sigma_{r1}^p(R_0)$ , т.е. напряжение на поверхности ударника в соответствующей точке.

При вычислении  $\sigma_{r1}^p(R_0)$  необходимо следить, чтобы  $R_{ck}$  не выходили за границы слоев, в противном случае  $R_{ck}$  нужно полагать равным либо внутренней, либо внешней границе слоя, что отвечает отсутствию зон пластичности или упругости в соответствующем слое.

На рис. 4.13 изображены последовательные положения клина при пробивании слоя конечной толщины:  $v = 100$  м/с, угол подлета  $60^\circ$ . На начальном этапе видна тенденция разворота ударника в сторону лицевой поверхности, однако по мере погружения ударник начинает "чувствовать свободную" тыльную поверхность, изменяет свою траекторию и выходит через тыльную поверхность.

На рис. 4.14—4.16 представлены результаты расчетов взаимодей-

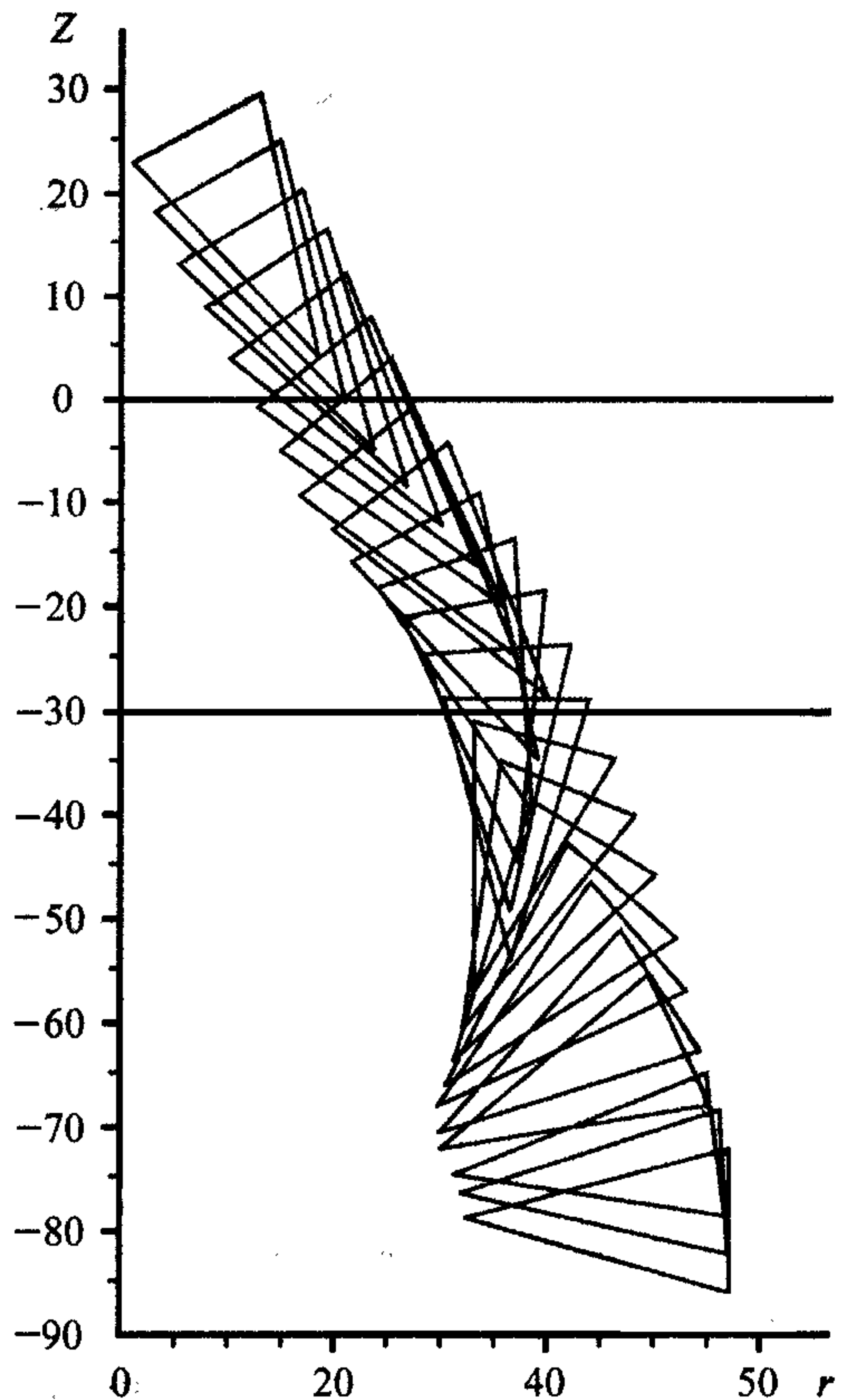


Рис. 4.13. Проникание клина в преграду конечной толщины.

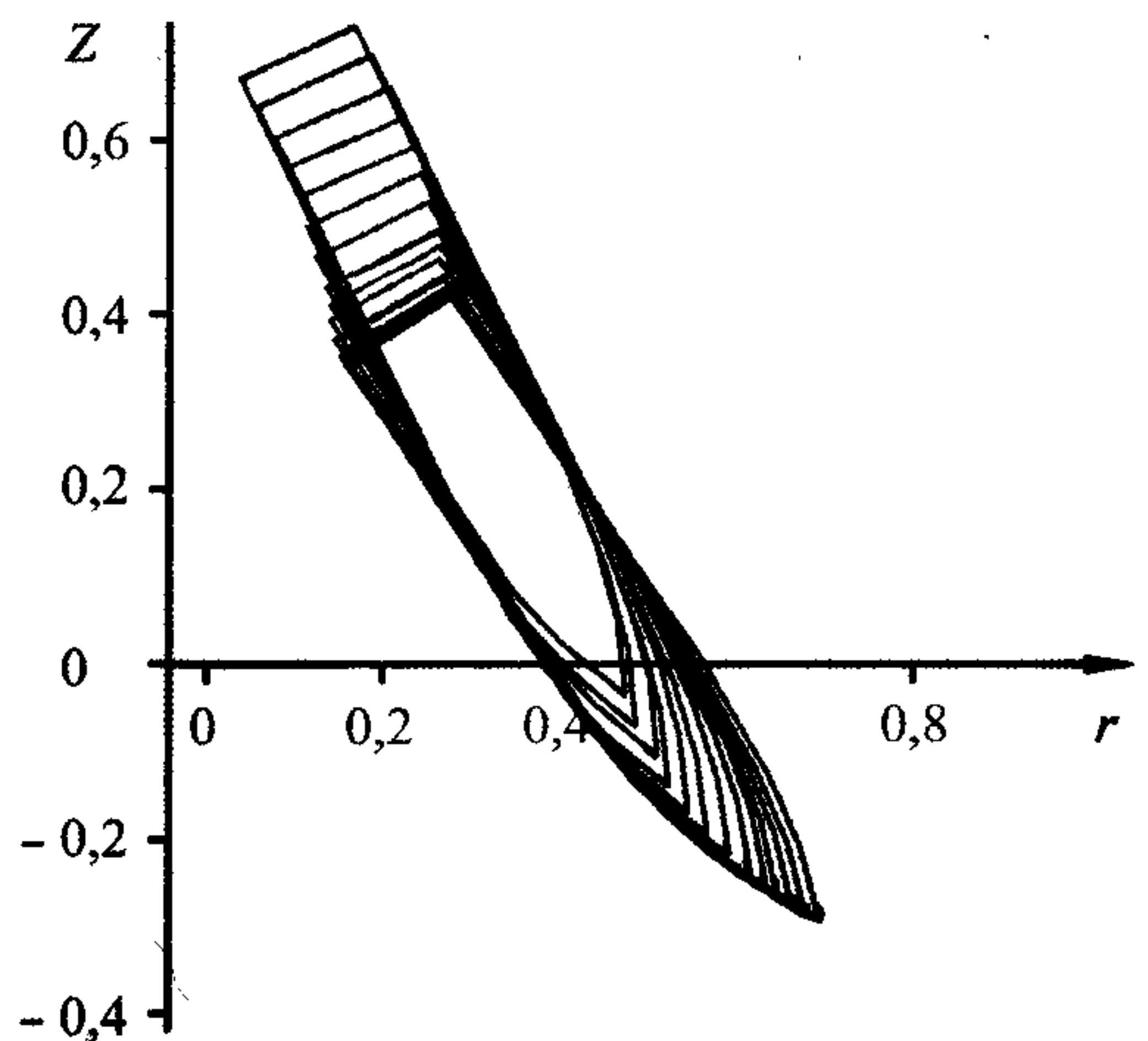


Рис. 4.14. Проникание цилиндрического ударника с овальной носовой частью в бетонную преграду при  $v_0 = 186$  м/с, угол подлета  $65^\circ$ .

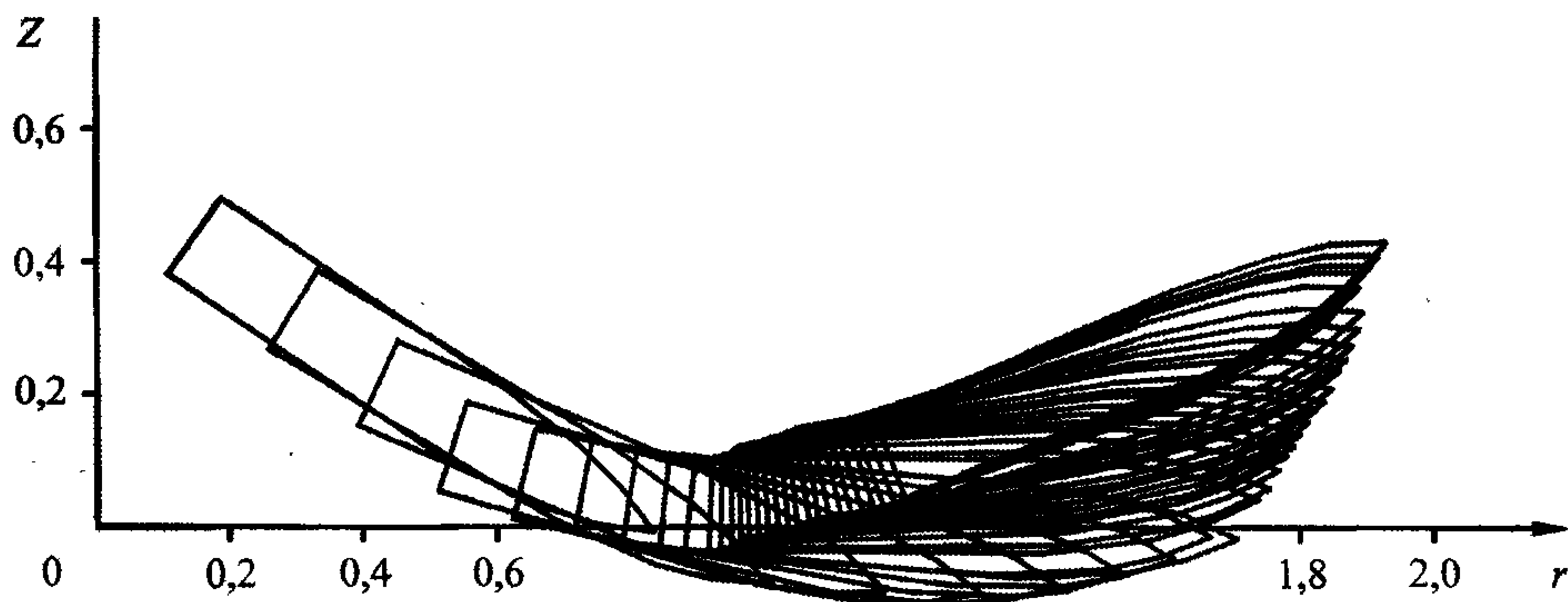


Рис. 4.15. Рикошет цилиндрического ударника с овальным заострением при  $v_0 = 250$  м/с, угол подлета  $35^\circ$ .

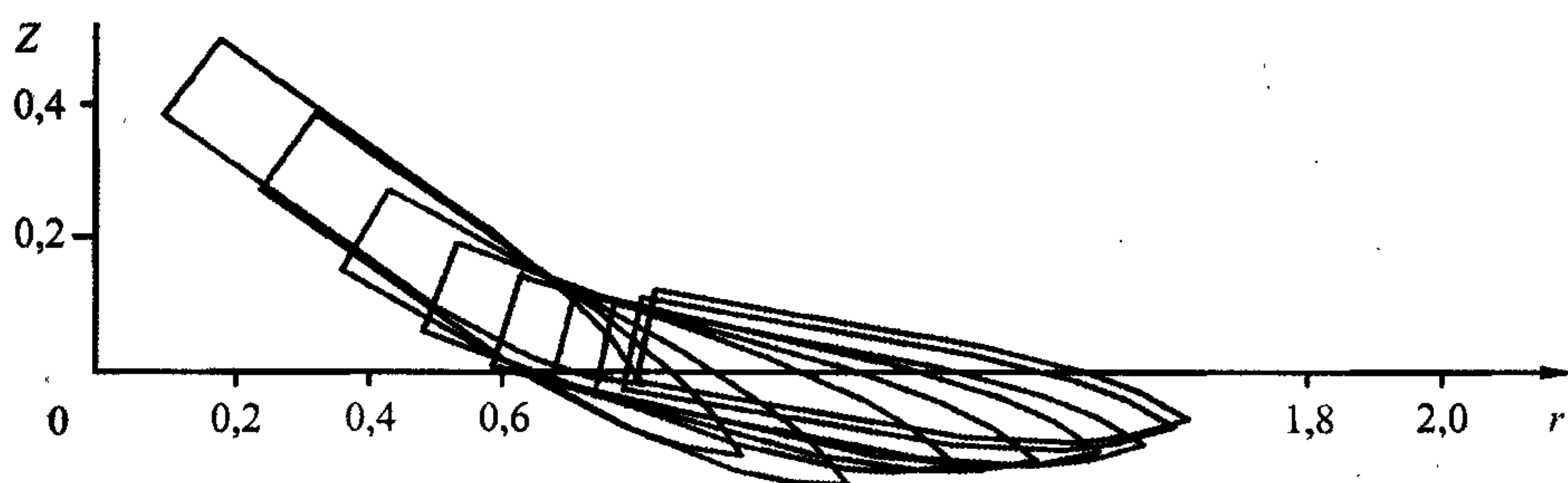


Рис. 4.16. Застревание цилиндрического ударника с овальным заострением при  $v_0 = 350$  м/с, угол подлета  $36^\circ$ .

ствия цилиндрического ударника с овальным заострением с бетонной преградой. На каждом рисунке изображено положение ударника через равные промежутки времени.

#### 4.6. Масштабный эффект в задаче о пробивании пластины жестким ударником

Пробивание пластин жестким ударником сопровождается выколом — тыльным разрушением пластины в момент, когда головная часть ударника еще находится внутри пластины. Учет тыльного разрушения представляется совершенно необходимым в конкретных расчетах, поскольку влияет на прогноз пробития (или не пробития) преграды при заданной начальной скорости ударника. Описание тыльного разрушения позволяет выявить роль масштабного эффекта, т.е. правильно пересчитывать результаты при изменении масштаба процесса [13].



В [14] предложен алгоритм расчета тыльного выкола хрупкой (упругой) пластины при высокоскоростном ударе, основывающийся на учете зоны трещин. В настоящей работе эта идея используется для решения задачи о пробитии упругопластической пластины при низкоскоростном ударе.

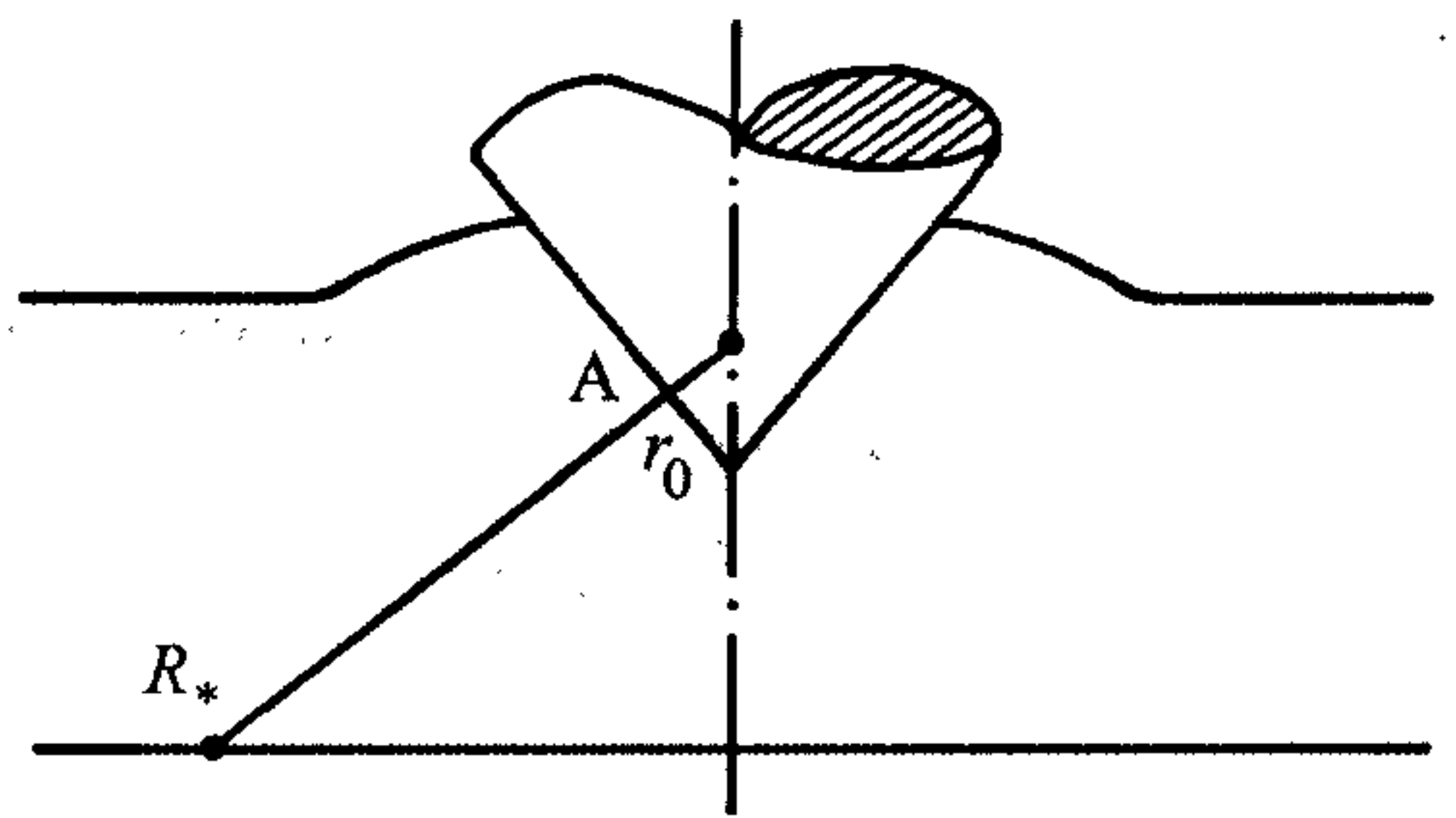


Рис. 4.17. Проникание ударника с коническим заострением в пластину конечной толщины.

Пусть ударник с коническим или оживальным заострением проникает в пластину по нормали (рис. 4.17). Согласно алгоритму, давление на ударник в произвольной точке  $A$  отождествляется с давлением на внутреннюю границу толстостенного шара  $r_0 \leq r \leq R$ , расширяющегося от нулевого радиуса. Предполагается, что при расширении шара возникают три зоны деформирования:

- 1) зона пластических деформаций  $r_0 \leq r \leq R$ ;
- 2) зона радиальных трещин  $R_C \leq r \leq r_+$ ;
- 3) упругая зона  $r_+ \leq r \leq R$ .

Границы зон пластичности  $R_C$  и зоны трещин  $r_+$  заранее неизвестны и определяются в процессе решения.

Рассматривается низкоскоростное проникание, поэтому не учитывается влияние инерционных членов на напряженное состояние шара.

В пластической зоне материал подчиняется условию пластичности Треска с “зубом” текучести (рис. 4.18):

$$\sigma_\theta^p - \sigma_r^p = 2\tau_{s2}$$

( $r, \theta, \varphi$  — сферические координаты;  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\varphi$  — напряжения), которое позволяет проинтегрировать уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\frac{\sigma_r^p - \sigma_\theta^p}{r} = 0$$

и получить выражение

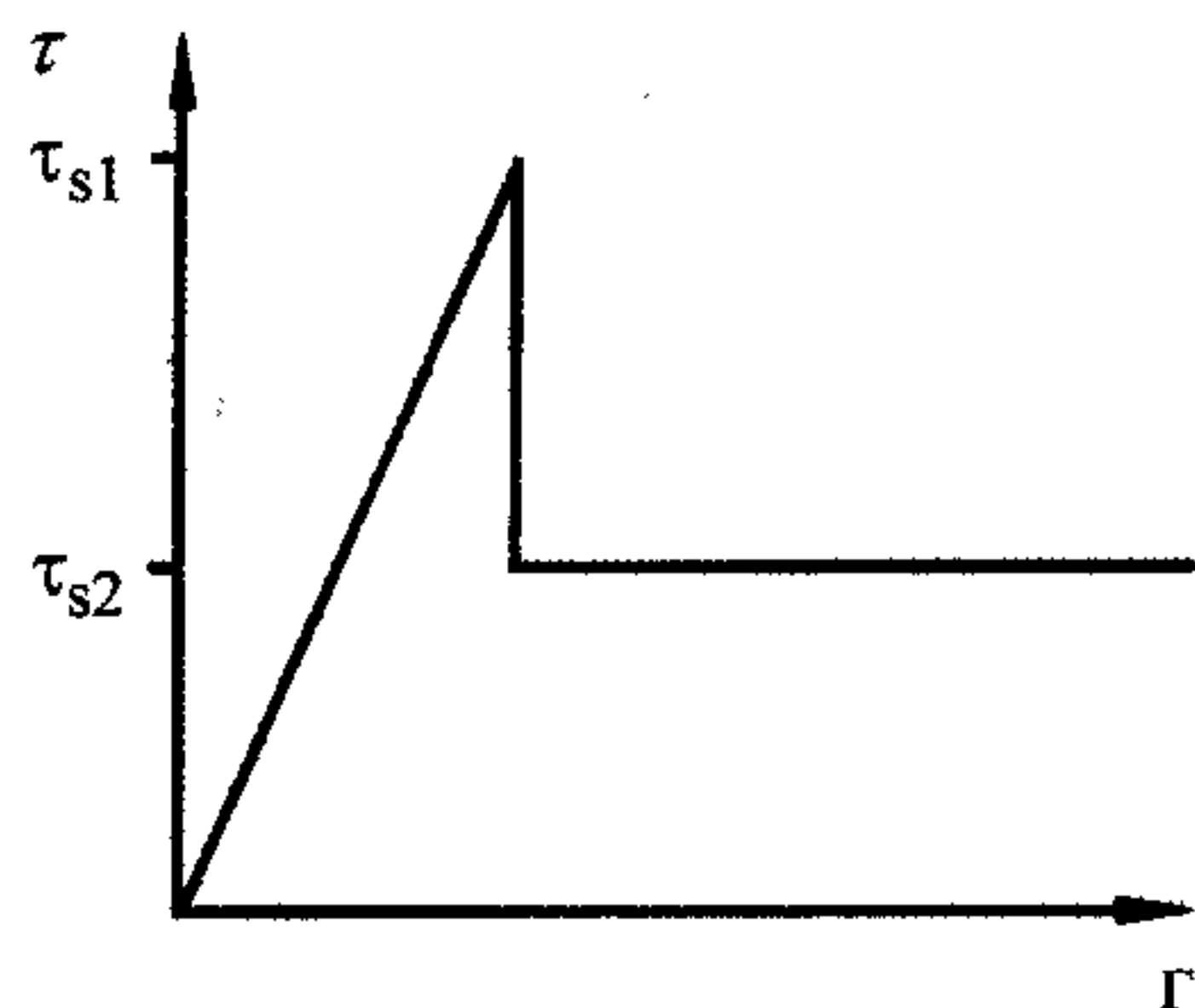


Рис. 4.18. Закон пластичности Треска с “зубом” текучести.

$$\sigma_r^p = 4\tau_{s2} \ln r + \ln C$$

(C — произвольная постоянная).

Индексы “p”, “t” и “e” относятся к зонам пластичности, трещин и упругой зоне соответственно.

Зона радиальных трещин предполагается столбчатой, т.е. состоящей из не взаимодействующих между собой стержней со свободными боковыми поверхностями ( $\sigma_\theta^t = 0$ ). Уравнение равновесия при этом легко интегрируется и с учетом граничного условия

$$-\sigma_r^t(R_C) = 2\tau_{s1}$$

дает

$$-\sigma_r^t = 2\tau_{s1} \frac{R_C^2}{r^2}.$$

Используется условие непрерывности  $\sigma_r$  при  $r = R_C$ , находим

$$-\sigma_r^p = 2\tau_{s1} + 4\tau_{s2} \ln \frac{R_C}{r}.$$

Задача определения напряжений в упругой среде не является статически определимой, поэтому нужны выражения для перемещений. Поскольку шар расширяется от нулевого радиуса, смещения в окрестности внутренней полости конечны, деформации большие и использование линейного тензора деформаций неправомерно. Примем материал несжимаемым, что оправдывается наличием двух свободных поверхностей (лицевая и тыльная поверхности пластины), препятствующих образованию областей объемного сжатия. Перемещения в зоне пластических деформаций и в зоне трещин определяются непосредственно из условия несжимаемости или (что то же самое) из условия равенства объемов, заключенных между фиксированными сферами:

$$\frac{4}{3}\pi(r-w)^3 = \frac{4}{3}\pi(r^3 - r_0^3),$$

откуда смещение  $w$  есть

$$w(r) = r - \sqrt{r^3 - r_0^3}.$$

В упругой зоне деформации принимаются малыми, и условие несжимаемости

$$\varepsilon = \frac{dw^i}{dr} + 2 \frac{w^i}{r} = 0$$

позволяет записать

$$w^i = \frac{A}{r^3}$$

(A — произвольная постоянная).

Уравнение равновесия при этом легко интегрируется и с учетом граничного условия  $\sigma_r^i(R) = 0$  имеем:

$$-\sigma_r^i = 4\mu A \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right).$$

Учитывая условие непрерывности  $\sigma_r$  на границе  $r = r_+$ , находим постоянную A, что дает окончательно для  $\sigma_r$  формулу вида:

$$-\sigma_r^e = 2\tau_{s1} \frac{R_C^2 r_+}{1 - \frac{r_+^3}{R^3}} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right).$$

Для определения неизвестных пока величин  $R_C$  и  $r_+$  имеются два условия. Непрерывность  $w$  при  $r = r_+$

$$r_+ - \sqrt{r_+^3 - r_0^3} = \frac{\tau_{s1}}{2\mu} \cdot \frac{R_C^2}{1 - \frac{r_+^3}{R^3}} \cdot \frac{1}{r_+}$$

и энергетический критерий роста трещин [14]. Энергия, выделяющаяся при вариации  $r_+$  (рост  $r_+$ ), приравнивается к энергии, необходимой для роста трещин (приращения поверхности трещин при вариации  $r_+$ ). Выделяющаяся энергия равна половине работы внешних сил [15], поэтому

$$\frac{1}{2} 4\pi R_C^2 \cdot |\sigma_r^p(R_C)| \cdot \Delta U^p(R_C) = n_1 r_+ \Delta r_+ 2\gamma$$

( $\gamma$  — эффективная поверхностная энергия,  $n_1$  — число растущих трещин) или

$$\frac{4\pi R_C^2 \tau_{s1}}{n_1} \cdot \frac{1}{r_+} \cdot \frac{\partial U^p(R_C)}{\partial r_+} = 2\gamma$$

— окончательное выражение для определения величины  $r_+$ .



Неустойчивость зоны трещин возникает тогда, когда производная левой части последнего уравнения по  $r_+$  равна нулю (в зоне устойчивости она отрицательна). Дифференцируя левую часть по  $r_+$ , подставляя значения  $R_C$  и  $r_+$ , вычисленные ранее, можно установить знак получившегося выражения. Если выражение отрицательно, то трещины устойчивы, можно вычислить давление на боковую поверхность ударника. Если же оно положительно, то трещины неустойчивы — происходит тыльный выкол и в соответствующих точках ударника давление полагается равным нулю.

Изложенный алгоритм реализован на ПЭВМ. Результаты расчетов показали, что отношение к  $r_0$  критического внешнего радиуса шара  $R_0$ , при превышении которого шар сохраняет прочность, растет пропорционально  $r_0^{1/2}$ , т.е.

$$\frac{R_0}{r_0} = C_1 r_0^{1/2},$$

где  $C_1$  — постоянная, зависящая от механических характеристик преграды. Последняя формула описывает масштабный эффект в задаче.

Таким образом, учет зоны трещин позволяет количественно описать масштабный эффект при пробивании упругопластической пластины и прогнозировать разрушение.

Полученные в этой главе новые аналитические решения задач о проникании заостренного штампа, тупого и острого цилиндров позволяют эффективно исследовать задачи пробития преград конечной толщины при нормальном ударе.

Предложенное математическое моделирование процесса взаимодействия осесимметричного ударника с преградой позволило описать трехмерный удар и пробитие многослойных пластин.

Изложенные алгоритмы реализованы в виде программ для ПЭВМ, позволяющих рассчитывать траекторию движения ударника в преграде, перегрузки, действующие на него, скорость выхода и т.п. в зависимости от достаточно произвольных начальных условий — скорости соударения, угла падения, угла атаки вращения в плоскости падения. Время счета в среднем составляет 10—15 мин.

Расчеты позволяют описать картину ударного взаимодействия и получить полные физические следствия. Сравнение с опытными данными и численными

расчетами доказывает допустимость предлагаемых подходов к решению задач проникания и правомерность их применения в инженерных расчетах.

#### Литература к главе 4

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969. — 420 с.
2. Бабаков В. А., Каримов И. М. Вдавливание плоского штампа в пластическую среду// ФТПРПИ. — 1978. — №1. — С. 30—35.
3. Каримов И. М. Двумерные задачи о внедрении твердых тел в пластическую среду: Автореферат канд. дисс. — Новосибирск, 1982.
4. Бабаков В. А., Каримов И. М. О верхней оценке анализа проникания ударника в деформируемую среду// ФТПРПИ. — 1987. — № 2. — С. 46—51.
5. Хилл Р. Математическая теория пластичности. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 408 с.
6. Соколовский В. В. Теория пластичности. — М.: Высш. школа, 1969. — 608 с.
7. Kawata K., Shioya T. Tokё дайгаку утю коку кэнкюсё хококу// Bull. Inst. Space and Aeronaut. Sci. Univ. Tokyo. — 1974. — V. 10, N 4b. — P. 829—834.
8. Бабаков В. А., Каримов И. М. Приближенный метод расчета проникания ударника в пластическую среду// Динамика многофазных сред. Вып. 83/ ИГиЛ СО АН СССР. — 1987. — С. 3—10.
9. Парашкевова Л. Р. Высокоскоростное проникание жесткого пуасона в многослойную плиту конечной толщины// Прикл. механика. — 1991. — № 9. — С. 120—125.
10. Володина Е. Н. Проникание жесткого индентора в слоистую преграду// ФТПРПИ. — 1992. — № 6. — С. 47—51.
11. Бабаков В. А., Шабунин Е. В. Об одном методе расчета движения пневмопробойника в деформируемой среде// Там же. — 1987. — № 1. — С. 105—110.
12. Шабунин Е. В. Расчет проникания ударников со сложной формой// Там же. — 1992. — № 6. — С. 43—47.
13. Бабаков В. А., Зиновьев А. Д. Масштабный эффект в задаче о пробивании пластины жестким ударником// Там же. — 1993. — № 5. — С. 18—21.
14. Войтишек Я. В., Слепян Л. И. Гидродинамическая модель пробивания хрупкой пластины// ФТПРПИ. — 1985. — № 3. — С. 31—35.
15. Слепян Л. И. Механика трещин. — Л.: Судостроение, 1981. — 296 с.



## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ВЗРЫВНОМ НАГРУЖЕНИИ

---

### 5.1. Анализ проблемы

Численное моделирование процессов деформирования и разрушения при взрывном нагружении подразумевает решение следующего круга вопросов.

Во-первых, это вопрос выбора математической модели среды, на которую направлено воздействие взрыва. Модель среды, претендующая на достаточно полное описание процессов, происходящих в материале под действием интенсивных динамических нагрузок, должна учитывать, вообще говоря, необратимый характер деформирования, зависимость от скоростей деформаций, возможность описания процессов накопления повреждений в материале, их развития, слияния, образования магистральных трещин вплоть до разрушения тела с разделением его на отдельные части. Не имея здесь возможности подробно остановиться на моделях твердых деформируемых сред, которые используются при численном моделировании динамических задач, отметим только, что наиболее просто учесть многие из процессов, сопровождающих взрывное и ударное нагружение тел, позволяет подход, основанный на введении так называемых внутренних или структурных параметров [1] в модели сред дифференциального типа. В качестве таких параметров принимаются либо некоторые усредненные характеристики внутренней структуры материала, либо некоторые макропараметры, ответственные за те или иные эффекты, наблюдаемые в макроэкспериментах. Эволюция внутренних параметров описывается простыми кинетическими уравнениями, как правило, обыкновенными дифференциальными. В качестве внутренних параметров используются, например, плотность дислокаций, тензор поврежденности, тензор микронапряжений. Этот подход оказался очень продуктивным при описании динамики разрушения материалов. А использование термодинамических принципов механики сплошной среды позволяет построить корректные модели сред с внутренними параметрами состояния, описывающие взаимосвязанные процессы деформирования, разрушения, тепловые процессы (см. [2—9] и приведенную там библиографию).



Во-вторых, это собственно моделирование взрыва, т.е. физико-химических и механических процессов превращения взрывчатого вещества (ВВ) в расширяющиеся продукты детонации, воздействующие на окружающую среду и элементы конструкций. Моделированию взрыва посвящено большое число работ, отметим здесь только некоторые монографии [10—15].

В-третьих, выбор известного или создание нового численного метода, позволяющего вести расчеты с большими деформациями, формоизменением, разрушением. Этим вопросам посвящены, в частности, обзоры [2, 16].

И, наконец, четвертый круг вопросов — собственно численные решения конкретных задач, получение результатов, их анализ, сопоставление с экспериментами и уточнение моделей.

Из многообразия прикладных проблем, в которых исследуется воздействие взрыва на элементы конструкций, выделяются следующие два класса модельных задач, в той или иной степени учитывающих главные, определяющие факторы.

1. Воздействие взрыва на пластины, которое широко применяется для создания сверхвысоких динамических давлений, упрочнения и сварки взрывом, штамповки и т.п. [17—23]. Кроме того, задача воздействия взрыва на пластину, наряду с задачей плоского соударения пластин, наиболее часто используется для получения констант моделей сред путем сопоставления данных физических экспериментов по отколам с результатами численных экспериментов [3, 6, 7, 20, 21].

2. Взрывное расширение оболочек, их дробление и разлет осколков под воздействием взрыва заряда ВВ, заполняющего внутренний объем оболочки. Эксперименты с системами ВВ — оболочка открывают широкие возможности для исследования свойств ВВ, их продуктов детонации, вопросов механики разрушения. Этот метод, наряду с исследованием соударения пластин, позволяет осуществить наблюдаемый процесс развития больших деформаций при высокоскоростном деформировании, механизмов разрушения. Подробный анализ работ, посвященных поведению цилиндрических металлических оболочек под действием взрыва заряда ВВ, находящегося внутри оболочки, дан в обзоре [24], а также в более поздних исследованиях [25—34]. Работа [35] посвящена экспериментальному методу взрывного сжатия цилиндрических металлических оболочек, позволяющему определить характеристики материала в широком диапазоне скоростей деформаций, в частности, рассчитать динамическую вязкость.

Объектом исследования в работах [24—35] являлись достаточно толстые оболочки, как правило, цилиндрические. Так, стандартные осколочные цилиндры, используемые в экспериментах [25, 28, 31—34] для исследования дробления материалов оболочек и метательных свойств ВВ, имеют относительную толщину стенок  $1/10$ ,  $1/8$ ,  $1/6$ . Однако в последнее время появилась потребность в исследовании динамического деформирования и фрагментации под действием взрывной нагрузки очень тонкостенных конструкций (контейнеров), относительная толщина стенок которых составляет от  $1/100$  до  $1/1000$ . К таким конструкциям относятся топливные баки ракет, другие элементы конструкций летательных аппаратов. Их взрывное разрушение на околоземных орбитах приводит к засорению космического пространства частицами самых разных размеров, которые, ввиду космических скоростей движения, представляют серьезную опасность для космических аппаратов [36].

Рассмотрим подходы к решению задач динамического деформирования и разрушения таких тонкостенных конструкций.

## 5.2. Моделирование однородной фрагментации тонкостенных цилиндрических и сферических оболочек

**Физико-математическая постановка задачи.** Задача решается при следующих предположениях относительно геометрии и свойств материала конструкции, характера нагружения [37—39]:

1. Контейнер моделируется цилиндрической или сферической оболочкой.
2. Оболочка тонкая:  $h/r \ll 1$  ( $h$  — толщина,  $r$  — радиус оболочки).
3. Воздействие взрыва моделируется давлением  $P = P(t)$ , зависящим от времени и равномерно распределенным по внутренней поверхности оболочки. Характерное время действия нагрузки  $\tau \gg h/a_0$  ( $a_0$  — скорость звука в материале оболочки).
4. Материал оболочки — упруговязкопластический, процесс деформирования — адиабатический.
5. В качестве критерия начала разрушения принимается критерий предельной удельной диссипации [6, 7].
6. Считается, что разрушение оболочки происходит за счет расхода упругой энергии, накопленной в оболочке на момент  $t = t_*$  начала разрушения; ра-



ботой внешних сил за время разрушения пренебрегается; откольные разрушения не рассматриваются [40, 41].

В силу первых трех предположений задача деформирования тонкой оболочки в первом приближении может быть рассмотрена как одномерная цилиндрическая или одномерная сферическая. Тогда уравнение движения имеет вид

$$\rho \dot{v} = \frac{P(t)}{h} - \alpha \frac{\sigma_\theta}{r}, \quad (5.2.1)$$

где  $\rho$  — текущая плотность;  $v$  — радиальная скорость;  $r$  — текущее значение радиуса оболочки;  $\sigma_\theta$  — кольцевое усилие (среднее по толщине оболочки напряжение); точка над символом означает материальную производную по времени; в (5.2.1) и далее  $\alpha = 1$  соответствует цилиндрическому случаю,  $\alpha = 2$  — сферическому.

Скорость кольцевой деформации определяется как

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \frac{v}{r},$$

другие деформации отсутствуют ввиду тонкости оболочки.

Уравнение закона сохранения массы имеет вид  $\dot{\rho}/\rho = -\alpha \dot{\varepsilon}_\theta$ , откуда следует

$$\rho = \rho_0 \exp(-\alpha \varepsilon_\theta). \quad (5.2.2)$$

Уравнения состояния упруговязкопластического материала берутся в форме Пэжины [42]:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{S}_{ij} + \frac{S_{ij}}{2\mu} \frac{\sqrt{S_{ij}S_{ij}} - \sqrt{\frac{2}{3}}J_0}{\sqrt{S_{ij}S_{ij}}} H\left(\sqrt{S_{ij}S_{ij}} - \sqrt{\frac{2}{3}}J_0\right). \quad (5.2.3)$$

Здесь  $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij}/3$  — девиатор тензора скоростей деформаций;  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij}/3$  — девиатор тензора напряжений,  $\sigma = \sigma_{kk}/3$ ;  $\mu$  — модуль сдвига;  $\eta$  — динамическая вязкость материала;  $J_0$  — статический предел упругости при простом растяжении;  $H(X)$  — единичная функция Хевисайда. Кроме того, считается, что скорости деформаций могут быть разложены на упругие и пластические и пластическое течение несжимаемо:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad \dot{\varepsilon}_{kk}^p = 0. \quad (5.2.4)$$

Поскольку в одномерном цилиндрическом случае



$$\sigma_\theta = \sigma + S_\theta, \quad \sigma_z = \sigma + S_z, \quad \sigma_r = \sigma + S_r = 0, \quad S_\theta + S_r + S_z = 0, \\ \dot{\epsilon}_\theta = \dot{\epsilon}_\theta^e + \dot{\epsilon}_\theta^p, \quad \dot{\epsilon}_z = \dot{\epsilon}_z^e + \dot{\epsilon}_z^p = 0, \quad \dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_r^e + \dot{\epsilon}_r^p = 0, \quad \dot{\epsilon}_\theta^p + \dot{\epsilon}_z^p + \dot{\epsilon}_r^p = 0,$$

а в одномерном сферическом случае

$$\sigma_\theta = \sigma + S_\theta, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta, \quad \sigma_r = \sigma + S_r = 0, \quad 2S_\theta + S_r = 0, \\ \dot{\epsilon}_\theta = \dot{\epsilon}_\theta^e + \dot{\epsilon}_\theta^p, \quad \dot{\epsilon}_\varphi = \dot{\epsilon}_\theta, \quad \dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_r^e + \dot{\epsilon}_r^p = 0, \quad 2\dot{\epsilon}_\theta^p + \dot{\epsilon}_r^p = 0,$$

уравнения (5.2.2), (5.2.4) приводятся к виду

$$\dot{S}_\theta = \frac{1}{\alpha} \frac{4}{3} \mu \dot{\epsilon}_\theta - \frac{\mu}{\eta} S_\theta \frac{|S_\theta| - \frac{1}{\alpha} \frac{2}{3} J_0}{|S_\theta|} H\left(|S_\theta| - \frac{1}{\alpha} \frac{2}{3} J_0\right), \quad (5.2.5) \\ \sigma_\theta = \alpha \frac{3}{2} S_\theta.$$

Для удельных (на единицу массы) упругой энергии  $E$  и механической диссипации  $D$  имеем уравнения

$$\dot{E} = \alpha \frac{\sigma_\theta}{\rho} \dot{\epsilon}_\theta^e, \quad \dot{D} = \alpha \frac{\sigma_\theta}{\rho} \dot{\epsilon}_\theta^p.$$

Удельная внутренняя энергия  $U = E + D$ .

Скорости упругой и пластической деформаций вычисляются по формулам

$$\dot{\epsilon}_\theta^e = \frac{\dot{S}_\theta}{2\mu} + \alpha \frac{\dot{\epsilon}_\theta}{3}, \quad \dot{\epsilon}_\theta^p = \dot{\epsilon}_\theta - \dot{\epsilon}_\theta^e. \quad (5.2.6)$$

Критерий начала разрушения оболочки — критерий предельной удельной диссипации, которая для принятой модели среды сводится к механической диссипации:

$$D = \alpha \int_0^{t_*} \frac{\sigma_\theta}{\rho} \dot{\epsilon}_\theta^p dt = D_* \quad (5.2.7)$$

( $D_*$  — константа предельной удельной диссипации, определяемая с использованием экспериментов по откольному разрушению при плоском соударении пластин [6]).

Ожидаемое число фрагментов  $\langle N \rangle$ , на которое разрушится оболочка, находится из баланса упругой энергии деформаций и работы по отрыву материала. Для цилиндрической оболочки уравнение баланса имеет вид

$$\rho_0 (\pi d_0 h) E_* = \gamma h \langle N \rangle,$$

где  $\gamma$  — удельная энергия, которая расходуется на образование единицы свободной поверхности,  $E_*$  — плотность накопленной упругой энергии на момент  $t = t_*$ ,  $d_0$  — начальный диаметр оболочки. Тогда для цилиндрической оболочки число фрагментов будет равно

$$N = \left[ \pi \frac{\rho_0 d_0 E_*}{\gamma} \right] \quad (5.2.8)$$

(квадратной скобкой обозначена целая часть числа).

Для получения формулы для числа фрагментов сферической оболочки необходимо сделать еще одно дополнительное предположение.

Примем, что все фрагменты имеют одинаковый размер (характерную площадь внешней поверхности фрагмента  $s$ , рис. 5.1) и отношение площади  $s$  к квадрату полупериметра  $p$  контура, ограничивающего эту поверхность, постоянно:

$$k = \frac{s}{p^2} = \text{const.}$$

Далее в расчетах коэффициент формы  $k$  принимается равным 0,2 (для сравнения: в случае квадрата  $k = 0,25$ , правильного треугольника —  $k = \sqrt{3}/9 \approx 0,19$ , круга —  $k = 1/\pi \approx 0,32$ ).

Тогда для расчета среднего числа фрагментов сферической оболочки получается следующая система уравнений:

$$k = \frac{s}{p^2}, \quad hp\gamma \langle N \rangle = \pi d_0^2 h \rho_0 E_*, \quad s \langle N \rangle = \pi d_0^2.$$

Отсюда находим число фрагментов  $N$  в случае однородного разрушения сферической оболочки:

$$N = \left[ \pi k \left( \frac{\rho_0 d_0 E_*}{\gamma} \right)^2 \right]. \quad (5.2.9)$$

Начальная скорость разлета осколков  $v_0$  считается равной радиальной скорости расширения оболочки в момент начала разрушения:

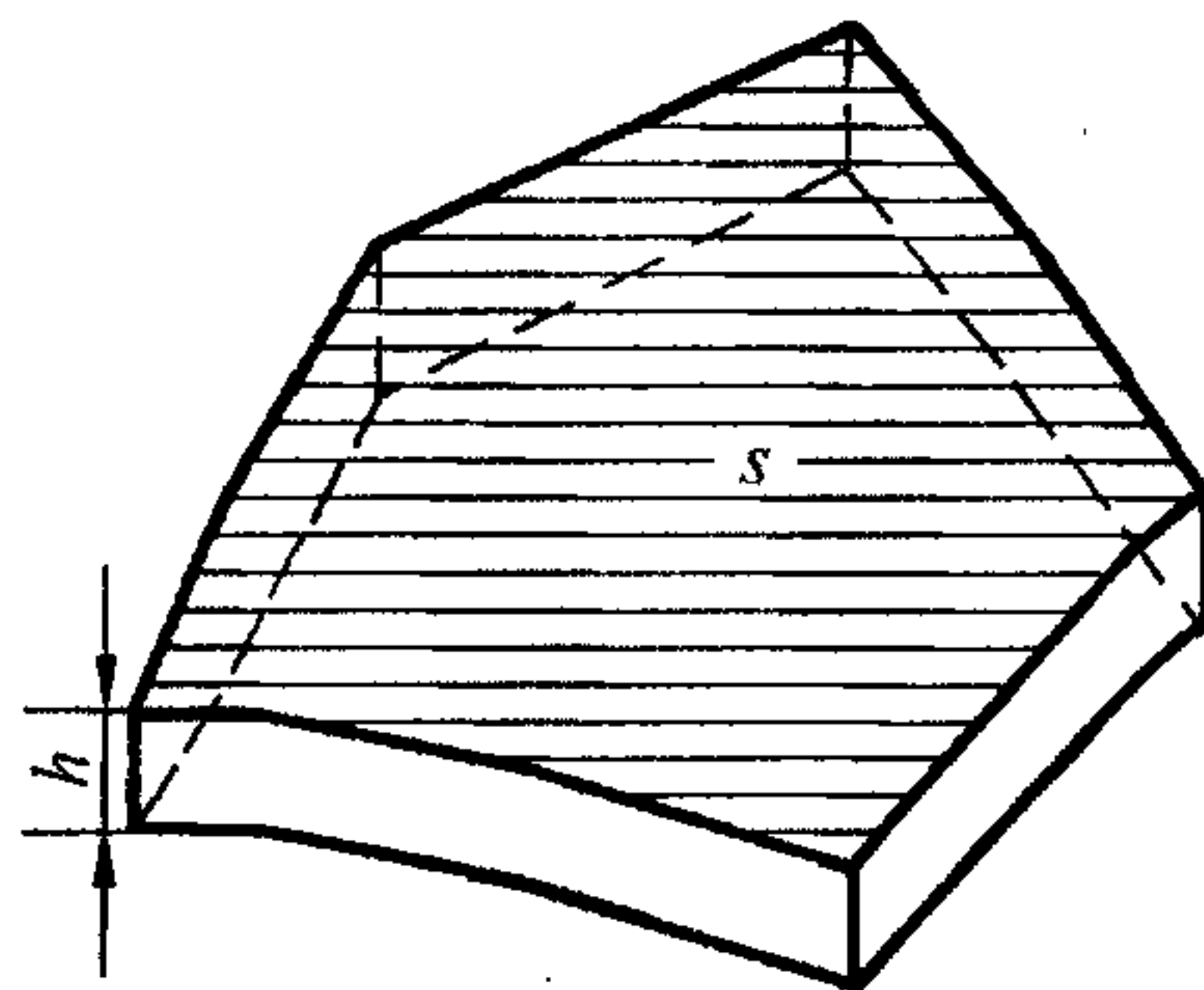


Рис. 5.1. Фрагмент сферической оболочки.

$$v_0 = v|_{t=t_0}$$

Метод расчета. Расчет по предлагаемой модели производится следующим образом. В момент  $t = 0$  ставится начальное условие:

$$v = v^0 = 0, \quad \rho = \rho^0 = \rho_0, \quad r = r^0 = r_0, \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 = 0, \\ P = P^0 = P_0, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^0 = 0, \quad D = D^0 = 0, \quad E = E^0 = 0$$

(верхние индексы указывают на число шагов по времени  $\Delta t$ ). Численно интегрируя уравнения движения (5.2.1) в момент  $t = 0$ , определим скорость оболочки  $v^{1/2}$  в момент  $t = \Delta t/2$  (шаг  $\Delta t$  выбирается так, чтобы хорошо аппроксимировать задаваемую зависимость давления на оболочку  $P = P(t)$ ):

$$v^{1/2} = v_0^{-1/2} + \frac{\Delta t}{\rho^0} \left( \frac{P^0}{h} - \alpha \frac{\sigma_\theta^0}{r_0} \right)$$

( $v^{-1/2} = v^0 = 0$ ). Затем по скорости  $v^{1/2}$  производится расчет новых значений радиуса  $r^1 = r^0 + v^{1/2} \Delta t$ , скорости деформации  $\dot{\varepsilon}_\theta^{1/2}$  и деформации  $\varepsilon_\theta^1$ :

$$\dot{\varepsilon}_\theta^{1/2} = 2v^{1/2}/(r^0 + r^1), \quad \varepsilon_\theta^1 = \varepsilon_\theta^0 + \dot{\varepsilon}_\theta^{1/2} \Delta t.$$

Из закона сохранения массы (5.2.2) находится плотность в момент  $t = \Delta t$ :  $\rho^1 = \rho_0 \exp(-\varepsilon_\theta^1)$ . Интегрируя уравнение состояния (5.2.5), получаем

$$S_\theta^1 = S_\theta^0 + \frac{1}{\alpha} \frac{4}{3} \mu \dot{\varepsilon}_\theta^{1/2} \Delta t - \frac{\mu}{\eta} \Delta t S_\theta^0 \frac{|S_\theta^0| - \frac{1}{\alpha} \frac{2}{3} J_0}{|S_\theta^0|} H \left( |S_\theta^0| - \frac{1}{\alpha} \frac{2}{3} J_0 \right),$$

$$\sigma_\theta^1 = \alpha \frac{3}{2} S_\theta^1.$$

Затем, с использованием (5.2.6), производится расчет скоростей упругой и пластической деформаций

$$(\dot{\varepsilon}_\theta^e)^{1/2} = \alpha \frac{\dot{\varepsilon}_\theta^{1/2}}{3} + \frac{S_\theta^1 - S_\theta^0}{2\mu\Delta t}, \quad (\dot{\varepsilon}_\theta^p)^{1/2} = \dot{\varepsilon}_\theta^{1/2} - (\dot{\varepsilon}_\theta^e)^{1/2},$$

упругой энергии и диссипации



$$E^1 = E^0 + \alpha \frac{\sigma_\theta^1 + \sigma_\theta^0}{\rho^1 + \rho^0} (\dot{\epsilon}_\theta^e)^{1/2} \Delta t, \quad D^1 = D^0 + \alpha \frac{\sigma_\theta^1 + \sigma_\theta^0}{\rho^1 + \rho^0} (\dot{\epsilon}_\theta^p)^{1/2} \Delta t.$$

Далее проверяется выполнение критерия разрушения (5.2.7). Если он не выполняется ( $D^1 < D_*$ ), переходим к следующему шагу по времени и рассчитываем все параметры при  $t = 2\Delta t$  и так далее. Если в некоторый момент  $t = n\Delta t$  критерий (5.2.7) выполняется ( $D^1 \geq D_*$ ), то по формуле (5.2.8) или (5.2.9) рассчитывается число фрагментов  $N$ , на которое разрушится оболочка, и их начальная скорость разлета  $v_0 = v^{n-1/2}$ .

**Результаты расчетов.** Основные расчеты были проведены для оболочек с диаметром  $d_0 = 3$  м и толщиной  $h = 0,003$  м из дюралюминия:  $\rho_0 = 2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu = 27,6$  ГПа,  $\eta = 10$  кПа/с,  $J_0 = 0,29$  ГПа,  $\gamma = 400$  кДж/м<sup>2</sup>,  $D_* = 30$  кДж/кг. Внутреннее давление на оболочку вычисляется по формуле

$$P(t) = \frac{P_0}{(1 + t/\tau)^3},$$

где  $P_0$  — начальное давление на оболочку,  $\tau$  — характерное время действия нагрузки. Некоторые из результатов расчетов приведены в таблицах 5.1 и 5.2 и на рис. 5.2, 5.3.

Таблица 5.1

**Результаты расчета однородной фрагментации тонкостенной цилиндрической оболочки**

$P_0$ , ГПа	$\tau$ , мс	$N$	$l/h$	$v_0$ , м/с	$t_*$ , мс	$(\epsilon_\theta^p)_*$	$I_*$ , кПа·с
0,01	1,0	979	3,21	439	1,640	0,207	4,28
0,01	10,00	990	3,13	1057	0,951	0,189	8,31
0,01	100,00	992	3,17	1148	0,904	0,186	8,92
0,1	0,10	980	3,21	541	0,996	0,196	4,95
0,1	1,00	1026	3,06	2539	0,277	0,145	9,40
0,1	10,00	1044	3,01	3080	0,242	0,137	23,30
1	0,01	980	3,21	547	0,899	0,194	4,95
1	1,00	1242	2,53	7481	0,063	0,085	57,70
1	100,00	1268	2,48	7903	0,061	0,083	60,80
10	0,01	1181	2,66	6096	0,043	0,079	47,70
10	0,10	2009	1,56	18203	0,018	0,048	141,00
10	1,00	2213	1,42	21114	0,017	0,046	164,00

**Результаты расчета однородной фрагментации тонкостенной  
сферической оболочки**

$P_0$ , ГПа	$\tau$ , мс	$N \cdot 10^{-3}$	$l/h$	$v_0$ , м/с	$t_*$ , мс	$(\epsilon_\theta^p)_*$	$I_*$ , кПа·с
0,01	10,00	1097	1,52	597	0,688	0,0402	6,23
0,01	100,00	1097	1,52	653	0,660	0,0402	6,53
0,1	1,00	1098	1,51	2021	0,205	0,0400	15,50
0,1	10,00	1100	1,51	2409	0,187	0,0401	18,20
1	0,01	1098	1,52	447	0,415	0,0402	4,95
1	10,00	1257	1,41	7632	0,057	0,0366	56,50
5	0,01	1099	1,51	3105	0,078	0,0398	21,40
5	0,10	1670	1,23	12390	0,026	0,0273	93,30
5	1,00	1919	1,15	15104	0,023	0,0252	113,00
10	0,01	1173	1,47	6145	0,040	0,0357	47,50
10	0,10	2294	1,05	18170	0,017	0,0221	137,00
10	1,00	2613	0,97	20999	0,016	0,0210	157,00

Введены обозначения:  $(\epsilon_\theta^p)_*$  — накопленная пластическая деформация на момент  $t = t_*$ ;  $l$  — характерный размер фрагмента (для цилиндрической оболочки  $l = \pi d_0 / N$ , для сферической —  $l = 2d_0 \sqrt{\pi k / N}$ ),  $I_*$  — импульс приложенной нагрузки:

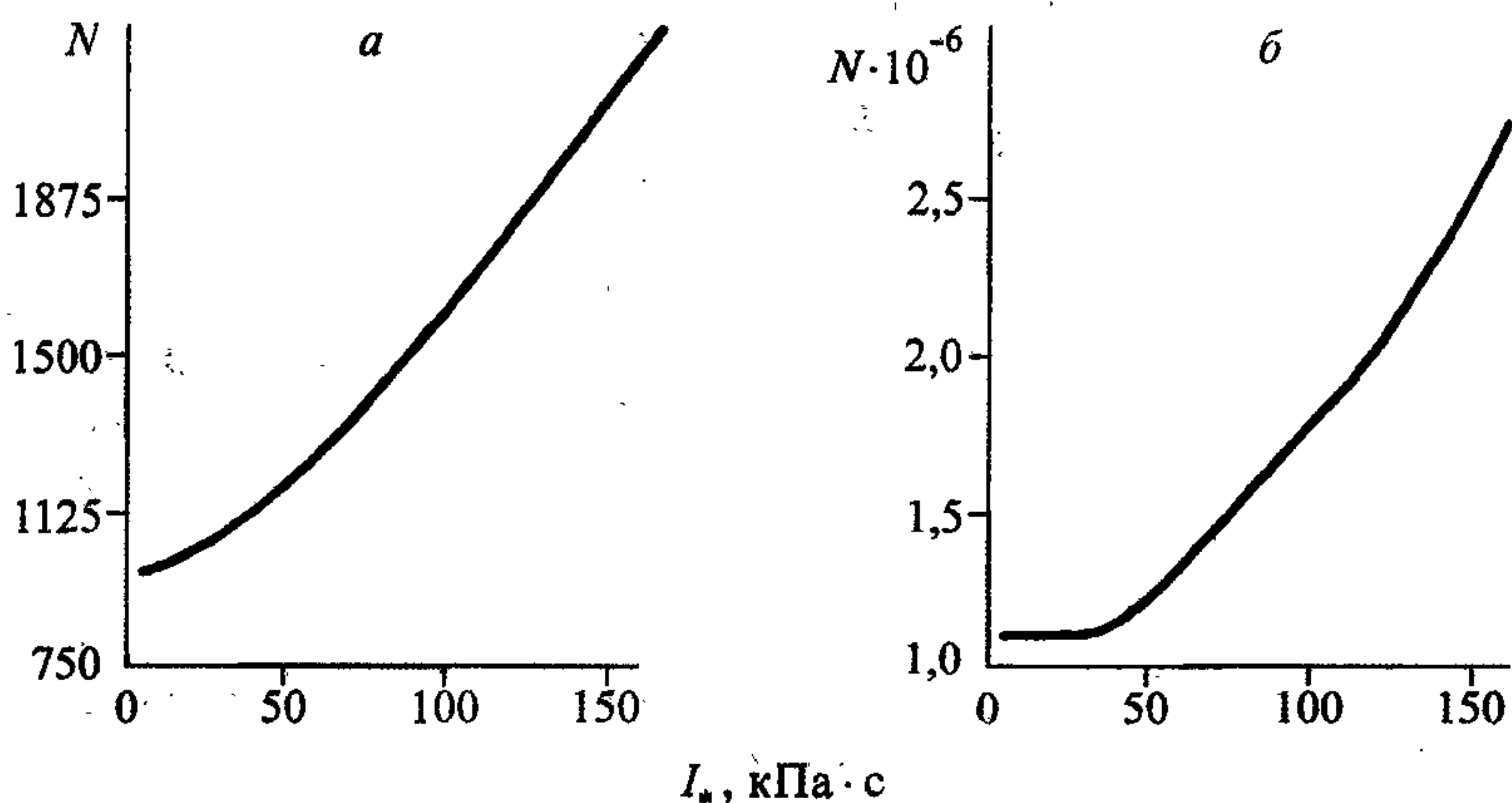


Рис. 5.2. Зависимость числа фрагментов от импульса приложенной нагрузки.  
а — цилиндрическая оболочка; б — сферическая оболочка.

$$I_* = \int_0^{t_*} P(t) dt.$$

Из расчетов видно, что число фрагментов  $N$  сильно зависит от характера приложенной нагрузки  $P = P(t)$ : растет с увеличением интенсивности нагрузки  $P_0$  и ее длительности  $\tau$ . В рамках данной постановки задачи этот результат является следствием чувствительности материала к скорости пластической деформации (динамический предел текучести, равный в модели Пэжины

$$J = J_0 + 2\eta \sqrt{3 \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p / 2},$$

в рассматриваемых случаях равен  $J = J_0 + 3\alpha\eta |\dot{\epsilon}_\theta^p|$ ). С увели-

чением  $P_0$  и  $\tau$  уменьшаются пластические деформации в оболочке, накопленные на момент начала разрушения  $t = t_*$ . Импульс  $I_*$ , переданный оболочке к моменту  $t = t_*$ , определяет число осколков  $N$  и наоборот: по числу осколков  $N$  можно определить переданный оболочке импульс  $I_*$ . Это хорошо видно из рис. 5.2, где приведены графики зависимости  $N$  от  $I_*$ . Расчетные точки, полученные при различных комбинациях  $P_0$  и  $\tau$ , ложатся на единые кривые. Аналогичная картина имеет место и для зависимости начальной скорости разлета фрагментов  $v_0$  от  $I_*$ . Причем единая зависимость (см. рис. 5.3) описывает случаи как цилиндрической, так и сферической оболочки. Зависимости  $N$  от  $I_*$  и  $v_0$  от  $I_*$  близки к линейным; лишь при малых  $I_*$  наблюдается нелинейный участок.

Сравним теперь результаты расчетов с известными из литературы экспериментами и теоретическими работами по фрагментации оболочек.

Исследованию фрагментации металлических, в основном стальных, цилиндрических оболочек (колец) посвящено много работ ([25—29, 43—47] и др.). В теоретических работах, исходя из различных предположений о механизмах деформирования и разрушения, получены формулы для среднего числа осколков. Эти формулы из [24, 25, 43—46] имеют общую структуру:

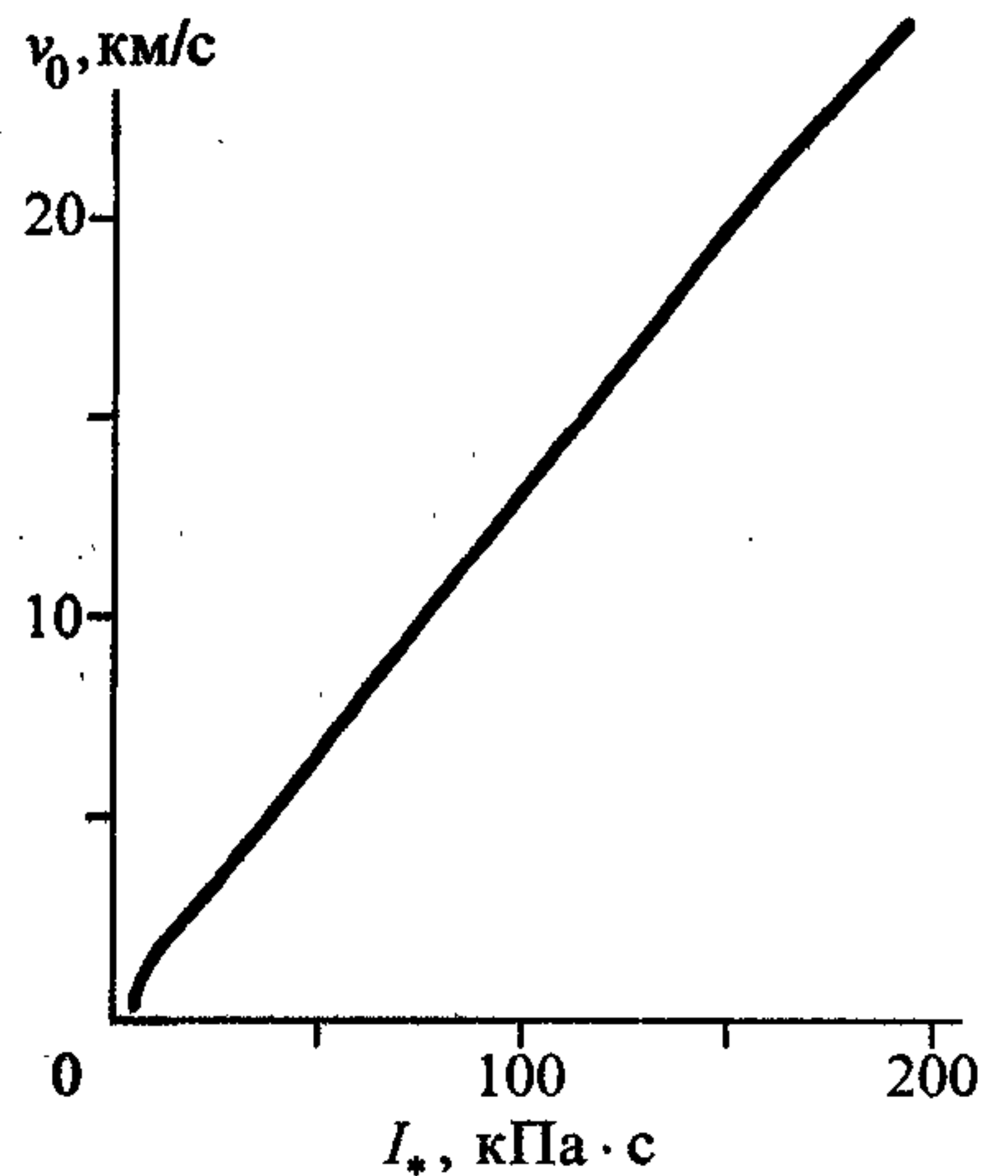


Рис. 5.3. Зависимость начальной скорости разлета от импульса приложенной нагрузки.



$$N \sim \frac{\pi d_0 v_0}{Lc}. \quad (5.2.10)$$

Здесь  $L$  — некоторый характерный линейный размер кольца (толщина, радиус и т.п.),  $c$  — характерная величина скорости. Так, например, формула из [44], как показано в [24], может быть представлена в виде

$$N = \pi v_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{6J_0 \varepsilon_f}},$$

а из [45] — в виде

$$N = \frac{2\pi v_0}{v_c} \left( v_c = \int_0^{\varepsilon_f} \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}} d\varepsilon \right),$$

где  $\varepsilon_f$  — критическая деформация,  $v_c$  — критическая скорость удара.

Линейная зависимость числа фрагментов от радиальной скорости цилиндра (5.2.10) подтверждается рядом экспериментов [28].

В [29] получена другая (квадратичная) зависимость числа фрагментов  $N$  от скорости разлета  $v_0$ :

$$N = 3\pi \left( \frac{1}{2} J_0 d_0 + \eta v_0 \right)^2 (2d_0 E_0 \gamma)^{-1}. \quad (5.2.11)$$

Здесь  $E_0$  — модуль Юнга, материал считается вязкопластическим, критическая деформация мала  $\varepsilon_f \ll 1$ , работа по разрушению материала совершается за счет накопленной упругой энергии.

Эксперименты (трубы стальные  $h/d_0 = 0,021—0,025$ ), приведенные в [29], удовлетворительно описываются этой формулой. Из них следует, что ширина осколков в 2—8 раз больше их толщины, что согласуется с результатами настоящей работы (см. табл. 5.1).

Зависимость числа фрагментов от скорости  $v_0$  (5.2.8), (5.2.9) не такая явная, как (5.2.10) или (5.2.11). Однако из результатов расчетов видно, что в обоих случаях (цилиндрическая и сферическая оболочки) при малых импульсах нагрузки  $I_*$  зависимости близки к квадратичным, а при больших  $I_*$  — к линейным (см. рис. 5.2, 5.3 и табл. 5.1, 5.2).

В [26, 27] приводятся результаты экспериментов по расширению вследст-

вие взрыва как цилиндрических, так и сферических оболочек из разных материалов. Проанализированы различные критерии разрушения на предмет их использования в практических расчетах. Показано, что принятый в настоящей работе критерий [40, 41] (предположение б) дает хорошие результаты.

**Выводы.** Таким образом, представленные простые модели позволяют оценить число фрагментов и их начальную скорость разлета при разрушении упруговязкопластических тонкостенных контейнеров простой геометрии (цилиндрической и сферической форм) в результате воздействия кратковременной внутренней нагрузки. Число фрагментов определяется накопленной в оболочке упругой энергией, в качестве критерия разрушения используется критерий предельной удельной диссипации.

### 5.3. Моделирование фрагментации тонкостенных сферических оболочек с учетом распределения фрагментов по массе

Рассмотрим теперь задачу о деформировании и разрушении сферической оболочки, отказавшись от предположения о том, что все фрагменты разрушения имеют одну и ту же массу [47].

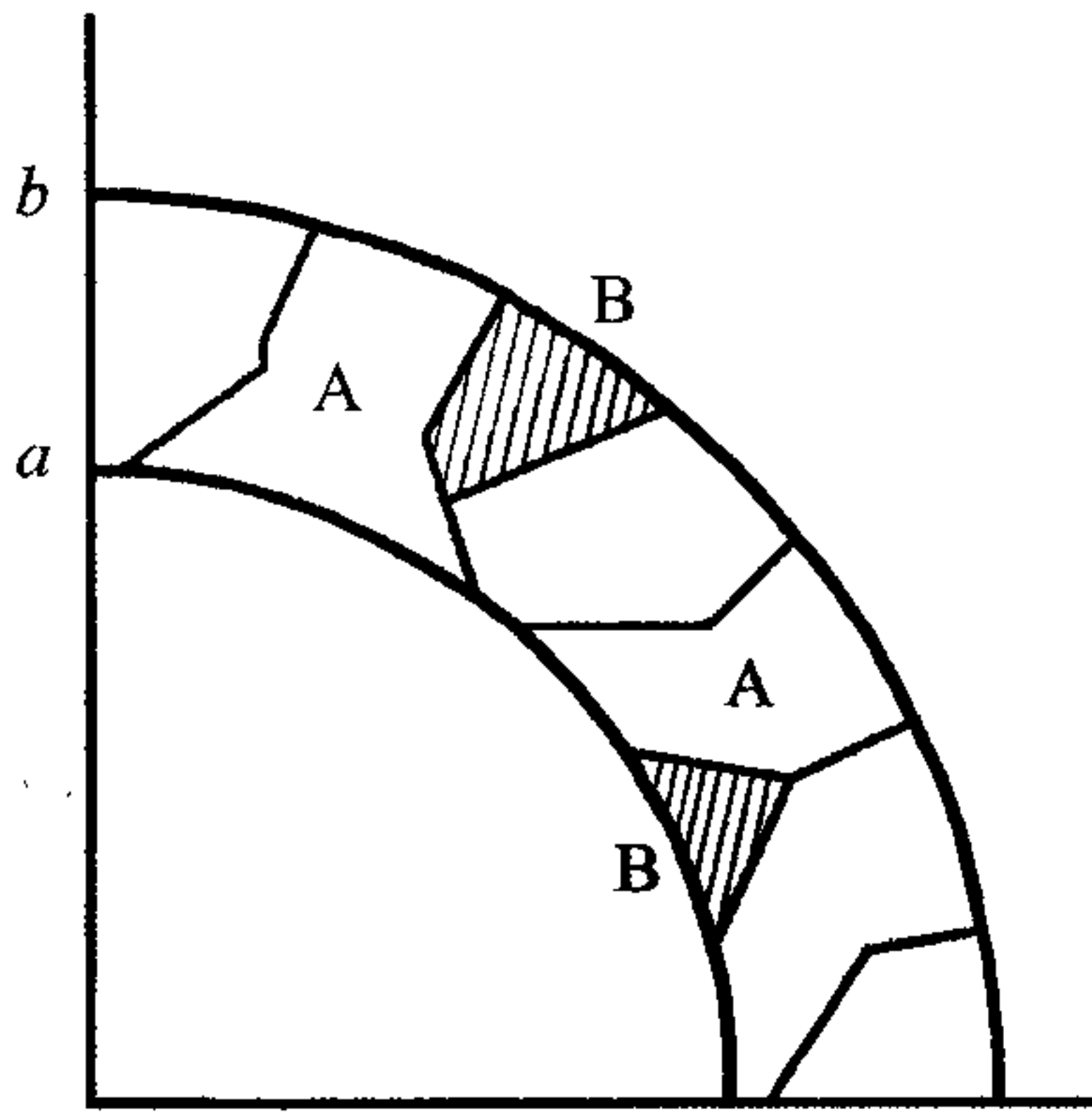
**Расчет числа фрагментов.** Для описания распределения фрагментов по массе при взрывном дроблении оболочек чаще всего используется распределение Вейбулла [48], которое является частным случаем общих вероятностных представлений [31—33]:

$$N(< m) = N_0 \left[ 1 - \exp \left( - \left( \frac{m}{m_*} \right)^\Lambda \right) \right]. \quad (5.3.1)$$

Здесь  $N(< m)$  — число осколков с массой, меньшей  $m$ ;  $N_0$  — общее число осколков с массой, большей нуля (теоретическая константа);  $m_*$  — характеристическая масса распределения;  $\Lambda$  — показатель качества фрагментации.

При  $\Lambda > 1$  распределение (5.3.1) — одномодальное с модой  $M = m_* (1 - 1/\Lambda)^{1/\Lambda}$ , при  $\Lambda = 1$  оно превращается в экспоненциальное, при  $0 < \Lambda < 1$  — имеет асимптотой ось ординат. Величина  $N_0$  конечна при  $\Lambda > 1$ , а при  $0 < \Lambda \leq 1$   $N_0 = +\infty$  [31].

Как показано в [31—33], одномодальное распределение (5.3.1) удовлетво-



**Рис. 5.4.** Схема двумодальной фрагментации тонкостенных сферических оболочек.  
 А — крупные осколки; В — мелкие осколки.

рительно описывает спектры разрушения металлических цилиндрических оболочек средней толщины ( $h/r \approx 0,1$ ). Еще лучшие результаты дает предложенное в [31] двумодальное гипервейбулловское распределение, которое включает в себя две морфологические совокупности: крупные осколки типа А, содержащие обе поверхности оболочки (внутреннюю и внешнюю), и сопутствующие более мелкие осколки В, содержащие одну из поверхностей (рис. 5.4). В нашем случае оболочки очень тонкие:  $h/r \approx 0,001$ .

Поэтому, по всей видимости, можно ограничиться одномодальным распределением

(5.3.1) и считать, что все осколки содержат как внутреннюю, так и внешнюю поверхность оболочки, что косвенно подтверждают эксперименты [49], проведенные на таких тонких оболочках.

Пусть площадь внешней начальной “лагранжевой” поверхности фрагмента равна  $s$ , внутренняя его поверхность также равна  $s$  (ввиду тонкости оболочки), а площадь боковой поверхности —  $2ph$ , где  $p$  — полупериметр контура  $s$ . Масса фрагмента  $m = \rho_0 hs$ , поэтому распределение по массам (5.3.1) можно переписать в виде распределения по площадям  $s$  фрагментов:

$$N(< s) = N_0 \left[ 1 - \exp \left( - \left( \frac{s}{s_*} \right)^\Lambda \right) \right], \quad (5.3.2)$$

где  $s_* = m_* / \rho_0 h$  — характеристическая площадь осколка.

Число фрагментов с площадями  $s' \leq s \leq s''$  будет

$$N(s' \leq s \leq s'') = N_0 \left[ \exp \left( - \left( \frac{s'}{s_*} \right)^\Lambda \right) - \exp \left( - \left( \frac{s''}{s_*} \right)^\Lambda \right) \right].$$

Предположим теперь, что из всего спектра осколков оболочки с площадями  $0 < s < \pi d_0^2$  можно выделить  $K$  ансамблей фрагментов с площадями  $s_1, s_2, \dots, s_K$ :



$$s_{\min} < s_1 < s_2 < \dots < s_K < s_{\max},$$

где  $s_{\min}$  и  $s_{\max}$  — некоторые минимальная и максимальная возможные площади фрагментов. И пусть в ансамбль фрагментов с площадью  $s_1$  попали все фрагменты с площадями  $s_{\min} \leq s \leq 0,5(s_1 + s_2)$ , в ансамбль фрагментов с площадями  $s_2$  — фрагменты с площадями  $0,5(s_1 + s_2) \leq s \leq 0,5(s_2 + s_3)$  и т.д. до ансамбля фрагментов с площадью  $s_K$ , в который попали осколки с площадями  $0,5(s_{K-1} + s_K) \leq s \leq s_{\max}$ .

Вместо распределения (5.3.2) будем в дальнейшем использовать распределение

$$N(< s) = N_0 \left[ 1 - \exp\left(-\left(\frac{s - s_{\min}}{s_*}\right)^\Lambda\right) \right], \quad s_{\min} \leq s \leq s_{\max}. \quad (5.3.3)$$

Тогда число фрагментов ансамбля  $s_j$  ( $j = 1, 2, \dots, K$ ) будет

$$N_j = N_0(\beta_j - \beta_{j+1}), \quad \beta_j = \exp\left(-\left(\frac{0,5(s_{j-1} + s_j) - s_{\min}}{s_*}\right)^\Lambda\right), \quad j = 1, 2, \dots, K. \quad (5.3.4)$$

Здесь принято считать  $s_0 = 2s_{\min} - s_1$ ,  $s_{K+1} = 2s_{\max} - s_K$ .

Систему  $K$  уравнений (5.3.4) для расчета числа фрагментов ансамблей можно дополнить следующими двумя уравнениями:

$$\sum_{j=1}^K s_j N_j = \pi d_0^2, \quad (5.3.5)$$

$$\sum_{j=1}^K \gamma h p_j N_j = \pi d_0^2 h \rho_0 E_* k_E. \quad (5.3.6)$$

Уравнение (5.3.5) означает, что суммарная площадь внешней поверхности фрагментов в точности равна площади поверхности оболочки, а уравнение (5.3.6) означает, что накопленная в оболочке на момент  $t = t_*$  упругая энергия  $\pi d_0^2 h \rho_0 E_*$  ( $E_* = E|_{t=t_*}$ ) расходуется на создание поверхностей разрушения. В уравнении (5.3.6) введен коэффициент расхода упругой энергии на создание поверхностей разрушения  $k_E$  ( $0 < k_E \leq 1$ ); в дальнейшем в расчетах принималось, что вся упругая энергия идет на создание поверхностей разрушения (т.е.  $k_E = 1$ ). В (5.3.6)  $p_j$  — полупериметр фрагмента  $j$ -го ансамбля.

Используя (5.3.5), из (5.3.6) получим уравнение

$$\sum_{j=1}^K N_j \left( p_j - \frac{\rho_0 E_* k_E}{\gamma} s_j \right) = 0. \quad (5.3.7)$$

Для нахождения  $(2K+1)$  неизвестных  $p_j, N_j, N_0$  имеется только  $(K+2)$  уравнений (5.3.4), (5.3.5) и (5.3.7). Выберем частное решение уравнения (5.3.7):

$$p_j = \frac{\rho_0 E_* k_E}{\gamma} s_j, \quad j = 1, 2, \dots, K. \quad (5.3.8)$$

Физический смысл (5.3.8) состоит в следующем. Половина энергии, необходимой для создания поверхности разрушения вокруг каждого  $j$ -го фрагмента с площадью  $s_j$  и массой  $m_j$ , черпается в заключенной внутри этого фрагмента области, а другая половина — извне (из соседних областей).

Оставшиеся  $(K+1)$  уравнения (5.3.4) теперь легко решаются: сначала находится

$$N_0 = \pi d_0^2 / \sum_{j=1}^K s_j (\beta_j - \beta_{j+1}), \quad (5.3.9)$$

а затем по (5.3.4) вычисляются и все  $N_j$ .

Заметим, что если ввести безразмерный коэффициент формы  $k_j = s_j / p_j^2$ , как в задаче об однородной фрагментации [38, 39], то получим

$$k_j = \left( \frac{\gamma}{\rho_0 E_* k_E} \right)^2 / s_j. \quad (5.3.10)$$

Для плоских фигур коэффициент формы изменяется в пределах

$$0 < k_j \leq 1/\pi, \quad (5.3.11)$$

принимая максимальное значение для круга. Из (5.3.10) следует, что фрагменты большей площади менее компактны, что подтверждается экспериментами [33]. Малые фрагменты можно считать плоскими, поэтому из (5.3.11) получается следующее ограничение снизу на площадь фрагментов:

$$s_j \geq \pi (\gamma / \rho_0 E_* k_E)^2, \quad (5.3.12)$$

которое необходимо учитывать при выборе  $s_{\min}$ .

Заметим, что если ввести характерный линейный размер фрагмента  $l_j = 2s_j / p_j$ , то окажется, что

$$l_j = 2\gamma / \rho_0 E_* k_E,$$

т.е. характерный линейный размер всех ансамблей осколков один и тот же и совпадает с полученным при решении задачи в предположении, что все фрагменты одинаковы (решение [38, 39]).

Результаты численных экспериментов. Давление на оболочку  $P = P(t)$  аппроксимировалось следующим образом (рис. 5.5):

$$P = P(t) = \begin{cases} P_0 + (P_f - P_0)(t/t_f)^2, & 0 \leq t \leq t_f, \\ P_f + \frac{P_{\max} - P_f}{t_{\max} - t_f}(t - t_f), & t_f \leq t \leq t_{\max}, \\ P_{\max} + \frac{P_{\max} - P_e}{t_{\max} - t_e}(t - t_{\max}), & t_{\max} \leq t \leq t_e, \\ P_{\infty} + (P_{\max} - P_{\infty}) \exp(-(t - t_{\max})/\tau), & t > t_e. \end{cases} \quad (5.3.13)$$

При соответствующем выборе параметров  $P_0, P_f, P_e, P_{\max}, P_{\infty}, t_f, t_{\max}, t_e$  и  $\tau$  такая зависимость (5.3.13) для давления позволяет удовлетворительно описать как процесс горения, перехода горения в детонацию, так и детонацию в объеме оболочки.

Поскольку в интересующих нас случаях начальное давление в оболочке  $P_0$  невелико, будем считать, что оболочка в начальном состоянии при  $t = 0$  остается упругой. Тогда начальные условия при  $t = 0$  будут:

$$\begin{aligned} v &= 0, \quad \sigma_0 = P_0 r_0 / 2h, \quad S_{\theta} = \sigma_{\theta} / 3, \\ \epsilon_{\theta} &= \epsilon_{\theta}^e = \sigma_{\theta} / 2\mu, \quad \epsilon_{\theta}^p = 0, \quad w = r_0 \epsilon_{\theta}, \\ r &= r_0 + w, \quad E = \mu [1 + (2\epsilon_{\theta} - 1) \exp(2\epsilon_{\theta})] / \rho_0, \\ D &= 0, \quad \rho = \rho_0 \exp(-2\epsilon_{\theta}). \end{aligned}$$

Здесь  $r_0$  — начальный радиус оболочки,  $w$  — перемещение.

Учитывая (5.3.12) было принято, что для первого ансамбля самых мелких фрагментов  $s_1 = \pi(\gamma / \rho_0 E_*)^2$ , всего в расчетах

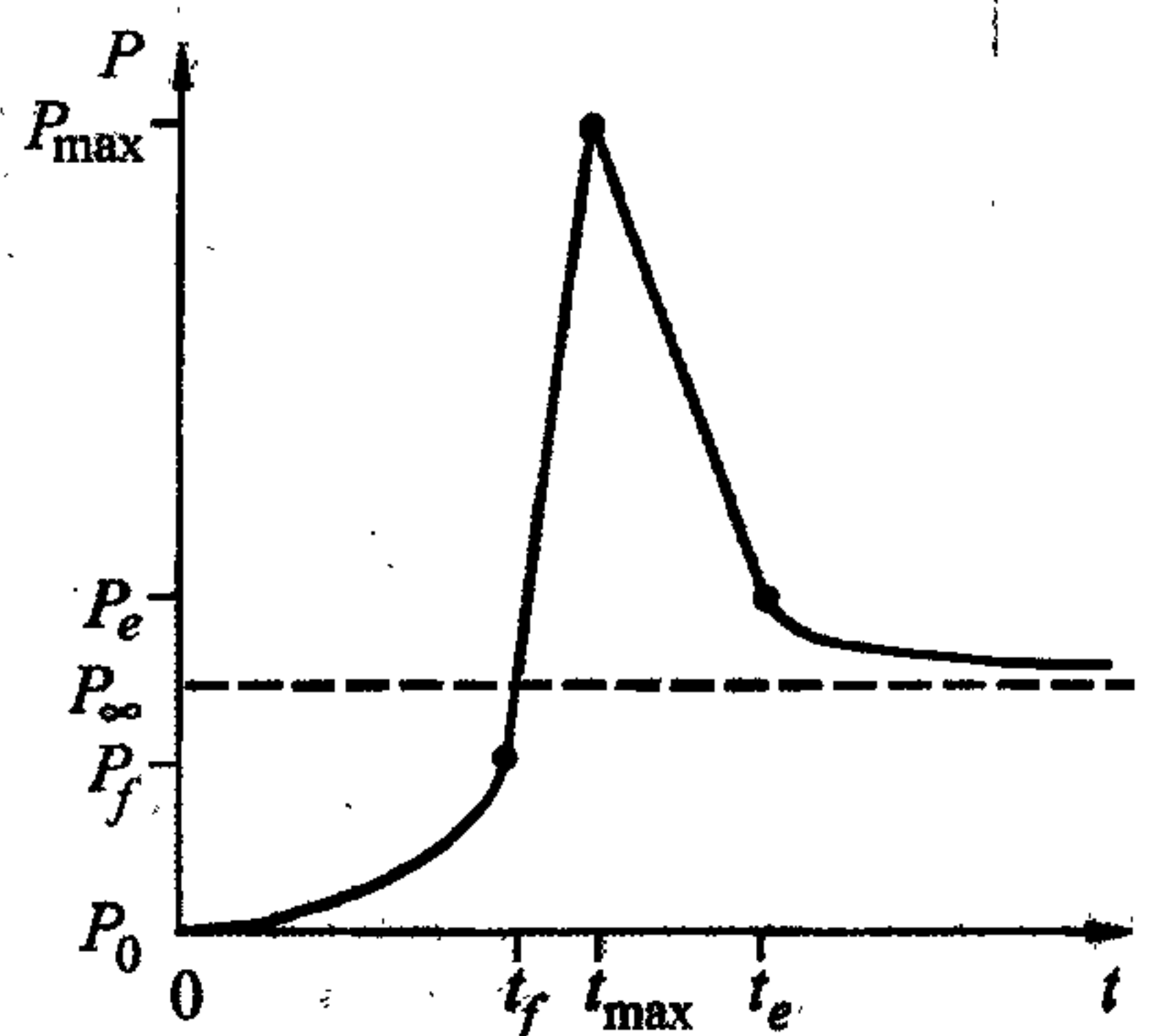


Рис. 5.5. Зависимость давления на оболочку от времени.



рассматривалось  $K = 20$  ансамблей фрагментов, причем

$$s_j = s_{j-1} \cdot 10^{0,25}, \quad j = 2, 3, \dots, 20;$$

$$s_{\min} = 2\pi(\gamma/\rho_0 E_*)^2 / (1 + 10^{0,25}), \quad s_{\max} = 10^5 s_{\min}.$$

Представленные ниже результаты расчетов получены для сферических дюралюминиевых оболочек радиуса  $r_0 = 0,25$  м, толщины  $h = 0,5$  мм;  $\rho_0 = 2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $J_0 = 0,25$  ГПа,  $\mu = 27$  ГПа,  $\eta = 100$  кПа·с,  $\gamma = 100$  кДж/м<sup>2</sup>,  $D_* = 30$  кДж/кг. Для аппроксимации давления  $P = P(t)$  (рис. 5.5, формула (5.3.13)) принято:  $P_0 = 0,41$  МПа,  $P_f = 4P_0$ ,  $t_f = 10$  мкс,  $P_{\max} = 20$  МПа,  $t_{\max} = 11$  мкс,  $P_e = 6P_0$ ,  $t_e = 13$  мкс,  $P_{\infty} = 5P_0$ ,  $\tau = 200$  мкс. При таких исходных параметрах  $E_* = 79,6$  кДж/кг,  $t_* = 45,6$  мс,  $m_1 = 0,917$  мг ( $s_1/h^2 = 2,72$ ), скорость расширения оболочки на момент разрушения  $v_0 = 267$  м/с.

На рис. 5.6 представлены распределения числа фрагментов  $N$  по ансамблям  $m = m_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 20$ ) для случая  $s_* = 1500s_1$  при следующих параметрах качества дробления  $\Lambda$ :  $\Lambda = 0,6$  (кривая 1,  $N_{\Sigma} = 475$ ),  $\Lambda = 0,8$  (кривая 2,  $N_{\Sigma} = 635$ ),  $\Lambda = 1$  (кривая 3,  $N_{\Sigma} = 719$ ) и  $\Lambda = 1,2$  (кривая 4,  $N_{\Sigma} = 768$ ). На рис. 5.7 представлены распределения для случая  $\Lambda = 0,8$  при следующих характеристических площадях фрагментов:  $s_* = 500s_1$  (кривая 4,  $N_{\Sigma} = 1924$ ),  $s_* = 1000s_1$  (кривая 3,  $N_{\Sigma} = 955$ ),  $s_* = 2000s_1$  (кривая 2,  $N_{\Sigma} = 473$ ) и  $s_* = 4000s_1$  (кривая 1,  $N_{\Sigma} = 231$ ).

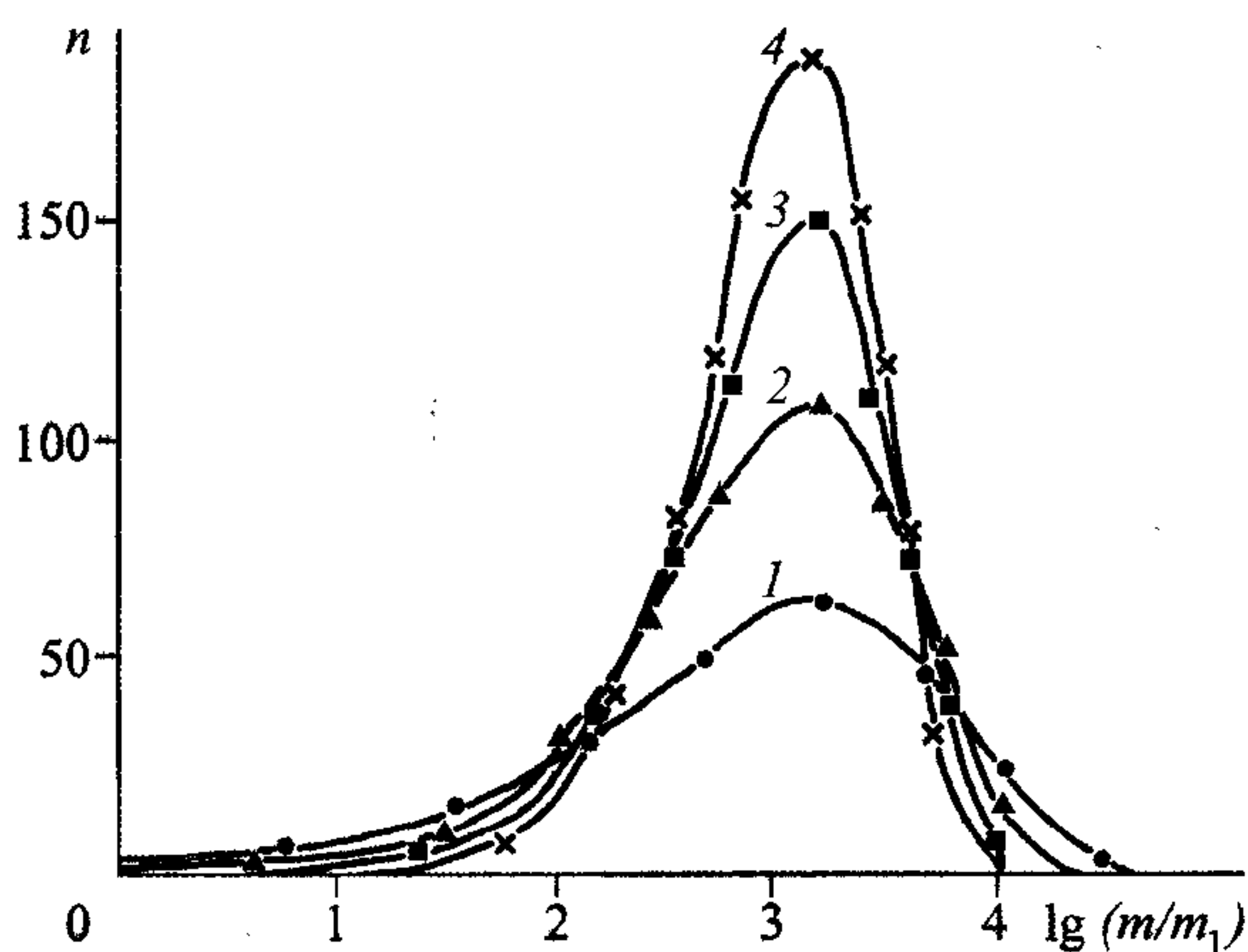


Рис. 5.6. Распределение числа фрагментов по ансамблям для различных показателей качества фрагментации.

Поясн. см. в тексте

Как видно из этих рисунков, при одном и том же значении характеристической площади распределения  $s_*$  с увеличением параметра качества дробления  $\Lambda$  наблюдается и увеличение полного числа фрагментов  $N_{\Sigma} =$

$$= \sum_{j=1}^{20} N_j \quad (\text{см. рис. 5.6}).$$

Причем для всех этих случаев максимум достигается для ансамбля  $m_{14} = 1,63$  г. Если

же зафиксировать параметр качества дробления  $\Lambda$  и изменять характеристическую площадь распределения  $s_*$ , то с увеличением  $s_*$  наблюдается уменьшение общего числа фрагментов  $N_\Sigma$  и максимум  $N$  также, естественно, смещается в сторону больших фрагментов (см. рис. 5.7). Укажем, для сравнения, что если принять, что все фрагменты имеют одинаковую массу и коэффициент формы  $k = 0,2$ , то общее число фрагментов  $N_\Sigma$ , рассчитанное по формуле (5.2.9)

$$N_\Sigma = \left[ \pi k (\rho_0 d_0 E_* / \gamma)^2 \right],$$

будет  $N_\Sigma = 726451$ ; масса фрагмента  $m = 1,46$  мг.

На рис. 5.8, заимствованном из работы [49], представлены распределения числа фрагментов по массе — результаты трех экспериментов. В этих экспериментах была осуществлена фрагментация тонкостенных цилиндрических оболочек толщиной  $h = 0,5$  мм, радиуса  $r_0 = 0,25$  м и длиной  $l = 0,75$  м, закрытых с торцов массивными пластинами, разрушения которых не наблюдалось.

Параметры материала образцов близки к используемым в наших расчетах. Оболочки были наполнены газообразной взрывчатой смесью со следующими начальными давлениями  $P_0$ , температурой  $T_0$  и ТНТ-

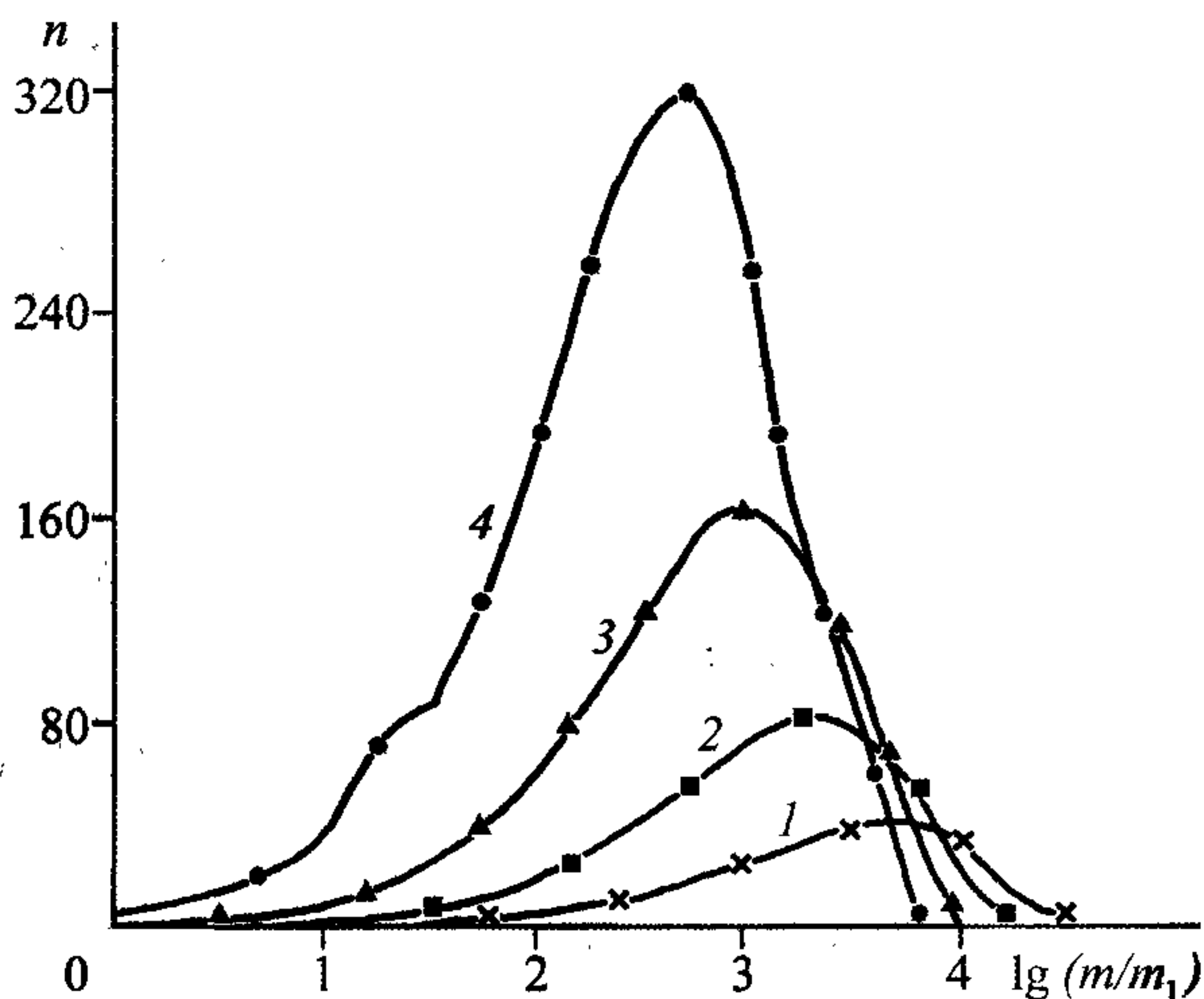


Рис. 5.7. Распределение числа фрагментов по ансамблям для различных характеристических площадей.

Поясн. см. в тексте.

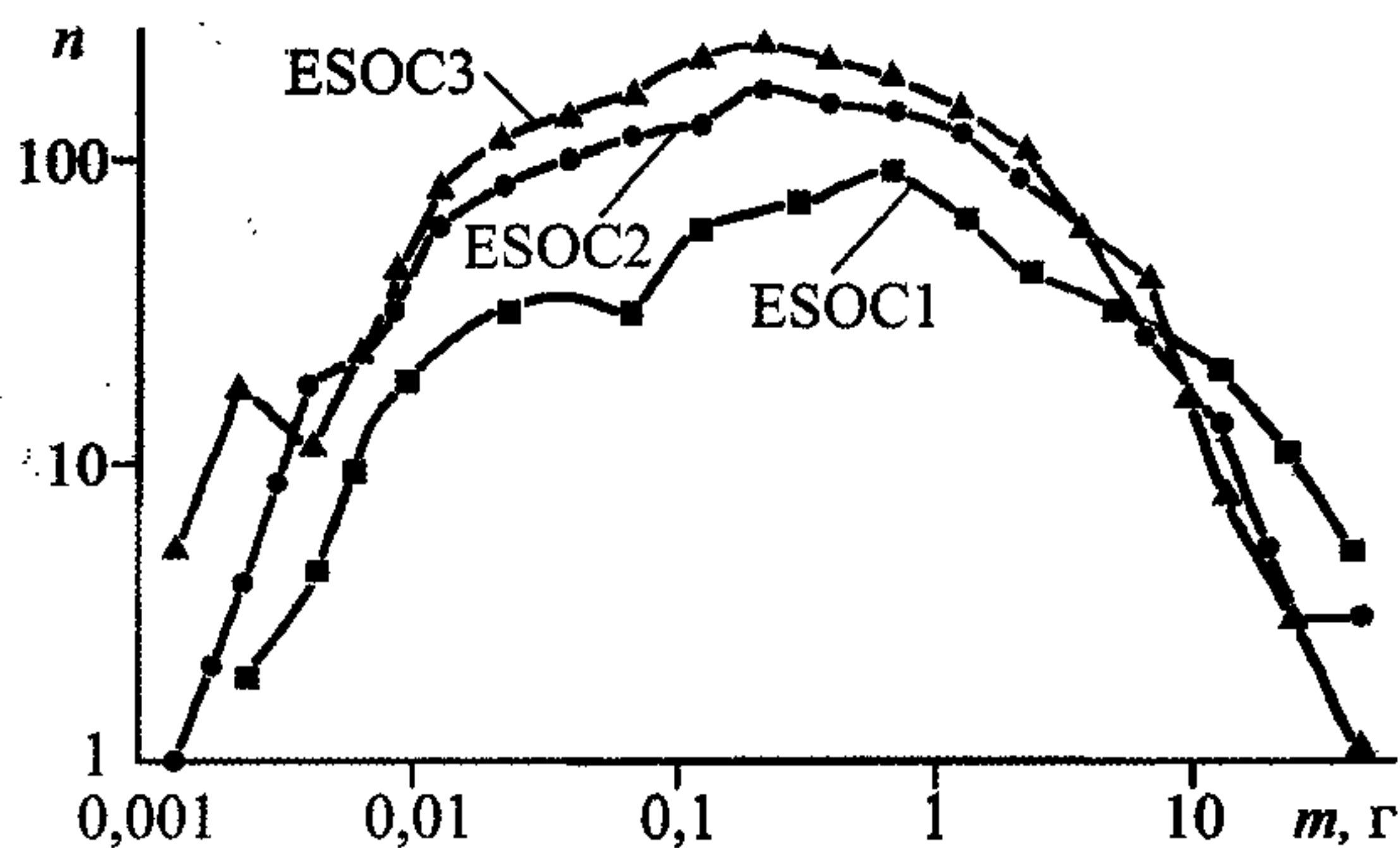


Рис. 5.8. Распределение числа фрагментов по массе.

Поясн. см. в тексте.



эквивалентом смеси для представленных на рис. 5.8 случаев:  $P_0 = 0,41$  МПа,  $T_0 = 20$  °С, ТНТ-эквивалент 1,33 кг (эксперимент ESOC1);  $P_0 = 0,41$  МПа,  $T_0 = -45$  °С, ТНТ-эквивалент 1,72 кг (ESOC2) и  $P_0 = 0,51$  МПа,  $T_0 = -45$  °С, ТНТ-эквивалент 2,13 кг (ESOC3). Полное число фрагментов  $N_\Sigma$  для этих случаев соответственно равно 6346, 1902 и 1762, максимум  $n$  для эксперимента ESOC1 достигается для ансамбля с массой фрагментов  $m = 0,73$  г, а для экспериментов ESOC2 и ESOC3 — с массой  $m = 0,24$  г. Заметим, что масса фрагментов  $m$  и их число  $n$ , отложенные по осям на рис. 5.8, даны в логарифмическом масштабе. Естественно, прямое сопоставление экспериментов [49] и представленных расчетов невозможно, однако, можно сделать вывод, что по характеру распределения фрагментов по массе и числу фрагментов результаты расчетов согласуются с экспериментами вполне удовлетворительно (естественно, при соответствующем выборе параметров  $s_*$  и  $\Lambda$  в законе (5.3.2)). Поскольку конструкция топливных баков ракет обычно представляет собой короткий цилиндр с полусферическими торцевыми элементами [49], можно ожидать, что предлагаемая модель фрагментации топливного бака, моделируемого сферической оболочкой, будет давать хорошие результаты при расчете реальных конструкций.

**Выводы.** Разработана математическая модель, позволяющая рассчитать число фрагментов, на которые разрушится тонкостенная вязкоупругопластическая сферическая оболочка, в предположении вейбулловского распределения фрагментов по массе. При этом принимается, что на разрушение оболочки затрачивается накопленная в ней упругая энергия, а момент разрушения определяется по критерию предельной удельной диссипации. Результаты расчетов по модели согласуются с экспериментальными данными.

#### **5.4. Моделирование деформирования и разрушения тонкостенной композитной оболочки, заполненной жидкостью, под действием взрыва заряда, расположенного в центре конструкции**

Рассмотрим задачу деформирования и разрушения тонкостенной сферической оболочки из слоистого двухкомпонентного вязкоупругого композита, заполненной жидкостью, при мгновенной детонации в центре оболочки заряда взрывчатого вещества (ВВ).



**Постановка задачи деформирования композитной оболочки.** Сделаем следующие предположения относительно характера нагрузки, деформирования и геометрии конструкции [50].

1. Оболочка тонкая:  $h/R \ll 1$  ( $h$  — толщина,  $R$  — радиус оболочки).
2. Оболочка заполнена жидкостью и находится под действием давления  $P = P(t)$ , равномерно распределенного по внутренней поверхности оболочки и являющегося результатом мгновенной детонации сферического заряда ВВ, расположенного в центре оболочки.
3. Процесс динамического деформирования конструкции считается адиабатическим.
4. Материал оболочки — двухкомпонентный слоистый композит, образованный концентрическими чередующимися вязкоупругими слоями из изотропных материалов. Известными считаются все необходимые свойства компонент и их объемные концентрации.
5. Используется модель композита, предложенная в [51], основные положения которой состоят в следующем.

Во-первых, поведение каждого компонента композита описывается релаксационными уравнениями Максвелла для малых упругих деформаций [52]:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(\alpha)}}{\partial t} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^{(\alpha)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(\alpha)}}{\partial x_i} \right) = - \frac{\sigma_{ij}^{(\alpha)} - \frac{1}{3} \sigma_{kk}^{(\alpha)} \delta_{ij}}{2\mu_\alpha \tau_\alpha},$$

где  $v_i^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 1, 2$ ) — составляющие вектора скорости компонента  $\alpha$  на оси  $x_i$  декартовой системы координат,  $\sigma_{ij}^{(\alpha)}$  — компоненты тензора напряжений;  $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}$  — компоненты тензора упругих деформаций;  $\rho_\alpha$  — плотность;  $\mu_\alpha$  — модуль сдвига;  $\tau_\alpha$  — время релаксации касательных напряжений (динамическая вязкость  $\eta_\alpha = \mu_\alpha \tau_\alpha$ ). Верхние индексы  $\alpha = 1, 2$  здесь и далее обозначают принадлежность векторного и тензорного параметров к соответствующей компоненте, для скалярных параметров компонентов используются нижние индексы  $\alpha = 1, 2$ , а параметры без индексов относятся к композиту в целом.

Напряжения  $\sigma_{ij}^{(\alpha)}$  связаны с упругими деформациями  $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}$  законом Гука:

$$\sigma_{ij}^{(\alpha)} = \lambda_\alpha \varepsilon_{kk}^{(\alpha)} \delta_{ij} + 2\mu_\alpha \varepsilon_{ij}^{(\alpha)}.$$

Во-вторых, используется односкоростное приближение:  $v_i^{(1)} = v_i^{(2)} = v_i$ .

В-третьих, поле вектора напряжений, действующего на площадке, параллельной слоям композита, однородно, а для напряжений  $\sigma_{ij}$ , действующих в плоскости слоев, применяется правило смесей:

$$\sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle = c\sigma_{ij}^{(1)} + (1-c)\sigma_{ij}^{(2)}.$$

Здесь  $c$  — объемная концентрация первого компонента в представительном элементе объема,  $(1-c)$  — второго.

В-четвертых, принимается, что упругие деформации  $\epsilon_{ij}^{(\alpha)}$  отсчитываются от “стандартного” состояния  $\bar{\epsilon}_{ij}^{(\alpha)}$ , при этом все  $\epsilon_{ij}$  вычисляются по правилу смесей, кроме деформаций в плоскости слоев, которые одни и те же для обоих компонентов ( $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{(1)} - \bar{\epsilon}_{ij}^{(1)} = \epsilon_{ij}^{(2)} - \bar{\epsilon}_{ij}^{(2)}$ ).

Данные гипотезы допускают существование для каждого компонента ненулевых микронапряжений  $\sigma_{ij}^{(\alpha)}$ , действующих в плоскости слоев, даже когда все макронапряжения  $\sigma_{ij}$  равны нулю.

Как показано в [5], введение параметров  $\Delta_{ij} = \epsilon_{ij}^{(1)} - \epsilon_{ij}^{(2)} = \bar{\epsilon}_{ij}^{(1)} - \bar{\epsilon}_{ij}^{(2)}$  для деформаций в плоскости слоев позволяет выразить все деформации для каждого из компонентов через макроскопические характеристики композита: тензор упругих деформаций  $\epsilon_{ij}$  и тензор  $\Delta_{ij}$ , характеризующий несоответствие деформаций компонентов композита. Ненулевое поле переменных  $\Delta_{ij}$  может образоваться как при изготовлении композита, так и в процессе его эксплуатации.

В силу первых двух гипотез задача деформирования тонкой оболочки может быть рассмотрена как одномерная сферическая. В этом случае уравнение движения оболочки имеет вид

$$\rho \dot{v} = \frac{P(t)}{h} - 2 \frac{\sigma_{\theta}}{R}, \quad (5.4.1)$$

где  $\rho = \langle \rho \rangle = c\rho_1 + (1-c)\rho_2$  — плотность композита;  $v$  — радиальная скорость оболочки;  $\sigma_{\theta}$  — кольцевое напряжение (усилие), которое равномерно распределено по толщине оболочки в силу первых двух гипотез.

Следуя [51], введем обозначения для усредненных параметров композита:

$$\langle A \rangle = cA_1 + (1-c)A_2, \quad \tilde{A} = (1-c)A_1 + cA_2.$$

В дальнейшем будем считать, что первый компонент композита — основа (армировка), а второй — связующее (матрица).

Скорость кольцевой деформации  $v/R$  является суммой скоростей упругой деформации  $\dot{\epsilon}_\theta$  и вязкой деформации; другие деформации композита отсутствуют ввиду симметрии оболочки и нагрузки и предположения о тонкости оболочки.

Определяющие уравнения модели [51] в рассматриваемом одномерном сферическом случае могут быть приведены к виду [50]:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_\theta &= \frac{v}{R} - 2(A\alpha - B\beta)\epsilon_\theta - C\gamma\Delta, \\ \dot{\Delta} &= -2(A\gamma - B\delta)\epsilon_\theta - C\psi\Delta, \quad \sigma_\theta = A\epsilon_\theta, \quad \sigma_R = 2B\epsilon_\theta. \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Здесь  $\sigma_R$  — радиальное напряжение,  $\Delta = \epsilon_\theta^{(1)} - \epsilon_\theta^{(2)} = \bar{\epsilon}_\theta^{(1)} - \bar{\epsilon}_\theta^{(2)}$  — параметр, характеризующий несоответствие деформаций компонентов, и, кроме того, введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A &= 2\langle\lambda + \mu\rangle - 2c(1-c)\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}, \quad B = \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1}, \\ C &= \frac{c(1-c)E_1E_2}{\langle E \rangle}, \quad \alpha = \frac{1}{12\langle E \rangle^2} \left\langle \frac{E^2}{\mu\tau} \right\rangle, \quad \beta = \frac{1}{2\langle E \rangle} \left\langle \frac{E\Lambda}{\tau} \right\rangle, \\ \gamma &= \frac{1}{12\langle E \rangle} \left( \frac{E_1}{\mu_1\tau_1} - \frac{E_2}{\mu_2\tau_2} \right), \quad \delta = \frac{1}{2} \left( \frac{\Lambda_1}{\tau_1} - \frac{\Lambda_2}{\tau_2} \right), \quad \psi = \frac{1}{12} \left( \frac{1-c}{\mu_1\tau_1} + \frac{c}{\mu_2\tau_2} \right), \\ \Lambda_\alpha &= \frac{E_\alpha}{3\mu_\alpha\langle E \rangle} \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right\rangle + \frac{2}{3(\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

В (5.4.2)  $\lambda_\alpha, \mu_\alpha$  — упругие константы Ламе,  $E_\alpha = \mu_\alpha(3\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha)/(\lambda_\alpha + \mu_\alpha)$  — модуль Юнга.

Упругие деформации компонентов могут быть рассчитаны по формулам:

$$\begin{aligned} \epsilon_\theta^{(1)} &= \epsilon_\theta + \bar{\epsilon}_\theta^{(1)}, \quad \bar{\epsilon}_\theta^{(1)} = \frac{(1-c)E_2}{\langle E \rangle} \Delta, \quad \epsilon_\theta^{(2)} = \epsilon_\theta + \bar{\epsilon}_\theta^{(2)}, \quad \bar{\epsilon}_\theta^{(2)} = -\frac{cE_1}{\langle E \rangle} \Delta, \\ \epsilon_R^{(1)} &= 2\frac{(1-c)(\lambda_2 - \lambda_1)}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \epsilon_\theta + \bar{\epsilon}_R^{(1)}, \quad \bar{\epsilon}_R^{(1)} = -\frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \bar{\epsilon}_\theta^{(1)}, \\ \epsilon_R^{(2)} &= -2\frac{(1-c)(\lambda_2 - \lambda_1)}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \epsilon_\theta + \bar{\epsilon}_R^{(2)}, \quad \bar{\epsilon}_R^{(2)} = -\frac{2\lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \bar{\epsilon}_\theta^{(2)}. \end{aligned} \quad (5.4.4)$$



Заметим, что хотя радиальная деформация всей оболочки  $\varepsilon_R$ , определяемая как

$$\varepsilon_R = c(\varepsilon_R^{(1)} - \bar{\varepsilon}_R^{(1)}) + (1-c)(\varepsilon_R^{(2)} - \bar{\varepsilon}_R^{(2)})$$

равна нулю ( $\varepsilon_R = 0$ ), радиальные деформации компонентов  $\varepsilon_R^{(1)}$ ,  $\varepsilon_R^{(2)}$  нулю, вообще говоря, не равны.

Кольцевые напряжения компонентов  $\sigma_\theta^{(\alpha)}$  рассчитываются по формулам

$$\sigma_\theta^{(1)} = \left( \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} - \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \frac{E_1}{\langle E \rangle} \right) \sigma_R + \frac{E_1}{\langle E \rangle} \sigma_\theta + \frac{C}{2c} \Delta,$$

$$\sigma_\theta^{(2)} = \left( \frac{2\lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} - \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \frac{E_2}{\langle E \rangle} \right) \sigma_R + \frac{E_2}{\langle E \rangle} \sigma_\theta - \frac{C}{2(1-c)} \Delta.$$

**Расчет внутреннего давления на оболочку.** Оболочка заполнена жидкостью, а в центре конструкции расположен заряд твердого ВВ радиуса  $R_0$ , удельной энергоемкости  $Q$  и плотности  $\rho_{ВВ}$ . Этот заряд в начальный момент  $t=0$  превращается в результате мгновенной детонации в газовый шар того же радиуса  $R_0$ , той же плотности  $\rho_{g_0} = \rho_{ВВ}$ , что и ВВ, и покоящийся:  $v_{g_0} = 0$ . Тогда, считая, что продукты детонации ВВ являются идеальным политропным газом с показателем политропы  $\gamma_g$ , может быть найдено начальное давление в газе [53]:

$$P_{g_0} = \rho_{g_0} (\gamma_g - 1) Q.$$

Определяющие уравнения для расчета дальнейшей трансформации газового пузыря запишем в виде

$$\frac{\dot{\rho}_g}{\rho_g} = -\frac{\partial v_g}{\partial r} - 2\frac{v_g}{r}, \quad \rho_g \dot{v}_g = -\frac{\partial P_g}{\partial r}, \quad (5.4.5)$$

$$P_g = \rho_g e_g (\gamma_g - 1), \quad \rho_g \dot{e}_g = P_g \dot{\rho}_g / \rho_g.$$

Из двух последних уравнений следует явная зависимость для давления  $P_g$  и плотности внутренней энергии  $e_g$  от текущей плотности газа  $\rho_g$  и начальных параметров:

$$P_g = Q(\gamma_g - 1)\rho_g \left( \frac{\rho_g}{\rho_{g0}} \right)^{\gamma_g - 1}, \quad e_g = Q \left( \frac{\rho_g}{\rho_{g0}} \right)^{\gamma_g - 1}. \quad (5.4.6)$$

При написании (5.4.5), (5.4.6) неявно предполагалось, что рассматриваются только непрерывные течения газа (без образования ударных волн), что, конечно, является еще одним упрощающим предположением. Однако это предположение не должно существенно сказаться на результатах решения основной задачи — расчета деформирования композитной оболочки, поскольку учет образования ударных волн привел бы к дополнительной диссипации энергии в заполнителе оболочки, а значит, и к уменьшению параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) самой оболочки. С точки же зрения практики завышенная оценка НДС предпочтительнее заниженной, поэтому предположение о непрерывности течения газа представляется оправданным.

Уравнения движения жидкости и закон сохранения массы имеют вид

$$\rho_w \dot{v}_w = -\frac{\partial P_w}{\partial r}, \quad \frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w} = -\frac{\partial v_w}{\partial r} - 2\frac{v_w}{r}.$$

В дальнейшем в качестве жидкости, заполняющей оболочку, рассматривается вода. Определяющие уравнения для воды — широкодиапазонные уравнения состояния [54]:

$$\frac{P_w}{P_{w0}} = \frac{3050(\bar{\rho}_w^{7,3} - 1)}{1 + 0,7(\bar{\rho}_w - 1)^4} (1 - 0,012\bar{\rho}_w^2 F) + 4,7\bar{\rho}_w F (T_w - 273) \quad (5.4.7)$$

при  $\bar{\rho}_w \geq 1$ ;

$$\frac{P_w}{P_{w0}} = \xi^4 - 470\bar{\rho}_w F \xi + 4,7\bar{\rho}_w F (T_w - 273) \quad (5.4.8)$$

при  $0 < \bar{\rho}_w < 1$ . В (5.4.8) параметр

$$\xi = 10(1 - \bar{\rho}_w) + 66(1 - \bar{\rho}_w)^2 - 270(1 - \bar{\rho}_w)^3$$

при  $0,8 < \bar{\rho}_w < 1$  и

$$\xi = 6,6(1 - \bar{\rho}_w)^{0,57} \bar{\rho}_w^{0,25}$$

при  $0 < \bar{\rho}_w \leq 0,8$ .

В формулах (5.4.7), (5.4.8)  $P_{w0} = 10^5$  Па — начальное давление в воде,

$\rho_{w_0}$  — начальная плотность,  $\bar{\rho}_w = \rho_w / \rho_{w_0}$ ,  $T_w$  — абсолютная температура,

$$F = (1 + 3,5\bar{\rho}_w - 2\bar{\rho}_w^2 + 7,27\bar{\rho}_w^6) / (1 + 1,09\bar{\rho}_w^6).$$

Температура в жидкости  $T_w$  рассчитывается из уравнения внутренней энергии

$$c_w \dot{T}_w = P_w \frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w^2}$$

( $c_w$  — теплоемкость).

Однако уравнения состояния (5.4.7), (5.4.8) при  $P_w/P_{w_0} \ll 1$ , т.е. при начале кавитации в жидкости, при которой образуется парожидкостная смесь, дают не вполне удовлетворительные результаты. Поэтому в программе численного расчета при  $P_w/P_{w_0} \ll 1$  давление в жидкости считается как давление на линии насыщения вода — водяной пар, подробные таблицы для которого приведены в справочнике [55]. Приведенные в [55] данные хорошо аппроксимируются следующей формулой:

$$P_w = 610 \exp(0,1T_w \ln 1,35). \quad (5.4.9)$$

Давление  $P_w$  в (5.4.9) считается в Па.

В центре оболочки при  $r=0$  ставится условие  $v_g = 0$ ; на границе контакта продукты детонации — жидкость имеем граничное условие  $P_g = P_w$ ,  $v_g = v_w$ ; условия на поверхности контакта оболочки с жидкостью:  $P(t) = P_w$ ,  $v_w = v$ .

**Моделирование разрушения композитной оболочки.** В качестве критерия разрушения компонентов (слоев) оболочки принимается условие достижения растягивающим кольцевым напряжением  $\sigma_\theta^{(\alpha)}$  некоторого предельного значения  $\sigma_*^{(\alpha)}$ :

$$\sigma_\theta^{(\alpha)} = \sigma_*^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Предположим, для определенности, что сначала в некоторый момент времени  $t = t_1^*$  выполняется критерий разрушения  $\sigma_\theta^{(2)} = \sigma_*^{(2)}$ , т.е. наступает разрушение связующего композита. Оболочка при этом еще не теряет своей несущей способности. Уравнение движения оболочки после разрушения второго компонента принимает вид



$$\rho \dot{v} = \frac{P(t)}{h} - 2c \frac{\sigma_\theta}{R}, \quad (5.4.10)$$

поскольку масса оболочки в результате разрушения связующего не меняется, а кольцевое усилие  $\sigma_\theta$  в оболочке приходится на меньшую площадь поперечного сечения. Для получения остальных уравнений (5.4.2), (5.4.3) и тех из уравнений (5.4.4), которые относятся к оставшемуся не разрушенным компоненту, достаточно положить  $c = 1$ , поскольку считается, что второй компонент композита с концентрацией  $(1 - c)$  не участвует после разрушения в деформировании оболочки. Тогда получим:

$$A = 2(\lambda_1 + \mu_1), \quad B = \lambda_1, \quad C = 0, \quad \alpha = \frac{1}{12\mu_1\tau_1}, \quad \beta = 2\alpha, \quad \gamma = \alpha, \quad \delta = \beta, \quad \theta = 0. \quad (5.4.11)$$

Для расчета напряжений и деформаций будем теперь иметь уравнения

$$\sigma_\theta = 2(\lambda_1 + \mu_1)\epsilon_\theta, \quad \sigma_R = 2\lambda_1\epsilon_\theta, \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{v}{R} - \frac{\epsilon_\theta}{3\tau_1}. \quad (5.4.12)$$

Если при дальнейшем деформировании в некоторый момент  $t = t_2^*$  ( $t_2^* > t_1^*$ ) достигается условие разрушения первого компонента  $\sigma_\theta = \sigma_\theta^{(1)} = \sigma_\theta^*$ , оболочка считается полностью разрушенной.

Заметим, что если свойства материала композита таковы, что сначала происходит разрушение первого компонента, то в уравнении (5.4.10) достаточно заменить  $c$  на  $(1 - c)$ , а в (5.4.11), (5.4.12) индекс 1 заменить на индекс 2.

**Метод расчета.** Задача решается численно по явной конечно-разностной лагранжевой схеме типа [56]. Расчетная область по заполнителю оболочки разбивается на  $N_g$  ячеек по газу и  $N_w$  ячеек по жидкости. В концевых точках ячеек с целыми индексами вычисляются скорости  $(v_g)_i^{n+1/2}$  и координаты  $r_i^n$  соответственно в полуцелые  $t^{n+1/2} = (n + 1/2)\Delta t$  и целые  $t^n = n\Delta t$  моменты времени ( $\Delta t$  — шаг схемы по времени). В центрах ячеек вычисляются плотности  $(\rho_g)_{i+1/2}^n$  и давления  $(P_g)_{i+1/2}^n$ .

Уравнения движения, например для газа, аппроксимируются следующим образом:

$$(v_g)_i^{n+1/2} = (v_g)_i^{n-1/2} \frac{2\Delta t((P_g)_{i+1/2}^n - (P_g)_{i-1/2}^n)}{(\rho_g)_{i+1/2}^n (r_{i+1}^n - r_i^n) + (\rho_g)_{i-1/2}^n (r_i^n - r_{i-1}^n)}.$$

Затем вычисляются новые значения координат расчетных точек:

$$r_i^{n+1} = r_i^n + (v_g)_i^{n+1/2} \Delta t.$$

Из закона сохранения массы, записанного в лагранжевой форме, вычисляются новые значения плотности:

$$(\rho_g)_{i+1/2}^{n+1} = \rho_{g0} \frac{(\hat{r}_{i+1} - \hat{r}_i)(\hat{r}_{i+1} + \hat{r}_i)^2}{(r_{i+1}^{n+1} - r_i^{n+1})(r_{i+1}^{n+1} + r_i^{n+1})^2}.$$

Здесь  $\hat{r}_i$  — начальные лагранжевые координаты расчетных точек.

Температура в воде вычисляется по формуле

$$(T_w)_{i+1/2}^{n+1} = (T_w)_{i+1/2}^n + \frac{4}{c_w} (p_w)_{i+1/2}^n \frac{(\rho_w)_{i+1/2}^{n+1} - (\rho_w)_{i+1/2}^n}{((\rho_w)_{i+1/2}^{n+1} + (\rho_w)_{i+1/2}^n)^2}.$$

Затем по уравнениям состояния (5.4.6)—(5.4.9) вычисляются новые давления в газе и жидкости и так далее.

Скорости в точках контакта продукты детонации — жидкость вычисляются таким образом, чтобы обеспечить точное выполнение граничных условий на контактной поверхности ( $P_g = P_w$ ,  $v_g = v_w$ ) [57, 58]:

$$(v_g)_{N_g}^{n+1} = (v_w)_0^{n+1/2} = (v_g)_{N_g}^{n-1/2} \frac{2\Delta t((P_w)_{1/2}^n - (P_g)_{N_g-1/2}^n)}{(\rho_g)_{N_g-1/2}^n (r_{N_g}^n - (r_g)_{N_g-1}^n) + (\rho_w)_{1/2}^n ((r_w)_1^n - (r_w)_0^n)}.$$

Уравнения (5.4.1), (5.4.2), описывающие поведение композитной оболочки, аппроксимируются следующим образом:

$$v^{n+1/2} = v^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\rho} \left( \frac{P^n}{h} - 2 \frac{\sigma_\theta^n}{R} \right),$$

$$\epsilon_\theta^{n+1} = \frac{\left( \frac{v^{n+1}}{R} \Delta t + \left( 1 - (A\alpha - B\beta)\Delta t - \frac{C_\gamma}{2} (\Delta t)^2 \frac{A\gamma - B\delta}{1 + \frac{C_\theta}{2} \Delta t} \right) \epsilon_\theta^n - \frac{C_\gamma}{2} \Delta t \left( 1 + \frac{1 - \frac{C_\theta}{2} \Delta t}{1 + \frac{C_\theta}{2} \Delta t} \right) \Delta^n \right)}{\left( 1 + (A\alpha - B\beta)\Delta t - \frac{C_\gamma}{2} (\Delta t)^2 \frac{A\gamma - B\delta}{1 + \frac{C_\theta}{2} \Delta t} \right)},$$

$$\Delta^{n+1} = \frac{1 - \frac{C_\theta}{2} \Delta t}{1 + \frac{C_\theta}{2} \Delta t} \Delta^n - (A\gamma - B\delta)\Delta t - (\epsilon_\theta^{n+1} + \epsilon_\theta^n), \quad \sigma_\theta^{n+1} = A\epsilon_\theta^{n+1}.$$

Давление на оболочку рассчитывается по формуле  $P^n = (P_w)_{N_w-1/2}^n$ , а скорость точки контакта жидкости с оболочкой — по формуле  $(\dot{v}_w)^{n+1/2} = \dot{v}^{n+1/2}$ .

Расчет в газе и жидкости проводится с использованием искусственной квадратичной вязкости [56].

**Результаты расчетов.** Расчеты были проведены для композита со следующими характеристиками: концентрация первого компонента (основы)  $c = 0,61$ , плотность основы  $\rho_1 = 1600 \text{ кг/м}^3$ , модули Ламе  $\lambda_1 = 94 \text{ ГПа}$ ,  $\mu_1 = 53 \text{ ГПа}$ , время релаксации  $\tau_1 = 10^{-4} \text{ с}$ , предел прочности  $\sigma_1^* = 1,4 \text{ ГПа}$ . Характеристики второго компонента (связующего):  $\rho_2 = 1300 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda_2 = 7,54 \text{ ГПа}$ ,  $\mu_2 = 1,89 \text{ ГПа}$ ,  $\tau_2 = 10^{-2} \text{ с}$ ,  $\sigma_2^* = 0,03 \text{ ГПа}$ . Такие характеристики соответствуют углепластику со связующим из эпоксидной смолы [59]. Радиус оболочки  $R = 1 \text{ м}$ , ее толщина  $h = 0,01 \text{ м}$ . Параметры ВВ: плотность  $\rho_{\text{ВВ}} = 1600 \text{ кг/м}^3$ , энергоемкость  $Q = 4520 \text{ кДж/кг}$ , показатель адиабаты продуктов детонации  $\gamma_g = 2,4$ . Начальное давление в воде  $P_{w_0} = 0,1 \text{ МПа}$ , ее плотность  $\rho_{w_0} = 1000 \text{ кг/м}^3$ , температура  $T_{w_0} = 273 \text{ К}$ , теплоемкость  $c_w = 4,182 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{К)}$ .

Некоторые из результатов расчетов представлены в табл. 5.3 и на рис. 5.9—5.13. Заметим, что случай  $\Delta_0 > 0$  означает, что в исходном состоянии основа композита растянута, а матрица сжата; при  $\Delta_0 < 0$ , наоборот, основа сжата, а матрица растянута; при  $\Delta_0 = 0$  отсутствует начальное несоответствие деформаций в компонентах композита.

На рис. 5.9 показано распределение по радиусу  $r$  скоростей в продуктах детонации  $v_g$  и в воде  $v_w$  в момент времени  $t = 0,626 \text{ мс}$  в промежутке времени между разрушениями компонент композита оболочки для случая  $R_0 = 0,05 \text{ м}$ ,  $\Delta_0 = -0,004$  (см. табл. 5.3). На рис. 5.10 показана зависимость давления на оболочку от времени  $P(t)/P_{w_0}$  и ее скорость  $v$  для случая  $R_0 = 0,05 \text{ м}$ ,  $\Delta_0 = -0,004$ . На рис. 5.11, 5.12 приведены зависимости от времени напряжения в композите



Результаты расчета разрушения композитной оболочки

$R_0, \text{ м}$	$\Delta_0$	$t_1^*, \text{ мс}$	$t_2^*, \text{ мс}$	$v _{t=t_1^*}, \text{ м/с}$	$v _{t=t_2^*}, \text{ м/с}$	$\epsilon_\theta _{t=t_1^*}$	$\epsilon_\theta _{t=t_2^*}$	$\Delta _{t=t_1^*}$
	0,004	0,590	0,633	67	27	0,0026	0,0048	0,002860
0,05	0,000	0,584	0,635	69	26	0,0023	0,0048	-0,000027
	-0,004	0,580	0,637	70	26	0,0020	0,0048	-0,002900
0,04	-0,004	0,613	1,787	49	6	0,0020	0,0048	-0,002885
0,03	-0,004	0,658	-	27	-	0,0020	-	-0,002830
0,02	-0,004	-	-	-	-	-	-	-

$\sigma_\theta/\sigma_*$  и в его компонентах  $\sigma_\theta^{(1)}/\sigma_*^{(1)}$ ,  $\sigma_\theta^{(2)}/\sigma_*^{(2)}$  (рис. 5.12, 1, 2 соответственно) для этого же случая (здесь  $\sigma_* = c\sigma_*^{(1)} + (1-c)\sigma_*^{(2)}$ ). Скачки функций на рис. 5.11 и 5.12 связаны с разрушением матрицы в момент  $t = t_1^* = 0,580$  мс. На рис. 5.13 показаны зависимость от времени давления жидкости на оболочку  $P(t)/P_{w_0}$  и

ее скорость  $v$  на заключительной стадии процесса перед полным разрушением оболочки для случая  $R_0 = 0,04$  м и  $\Delta_0 = -0,004$ .

На основе проведенных численных экспериментов можно сделать следующие выводы.

1. В случае взрыва достаточно мощных зарядов ВВ радиуса  $R_0 \geq 0,05$  м в воде формируется мощная ударная волна, при взаимодействии которой с композитной оболочкой последняя быстро приобретает достаточно большую скорость расширения (а следовательно, значительные

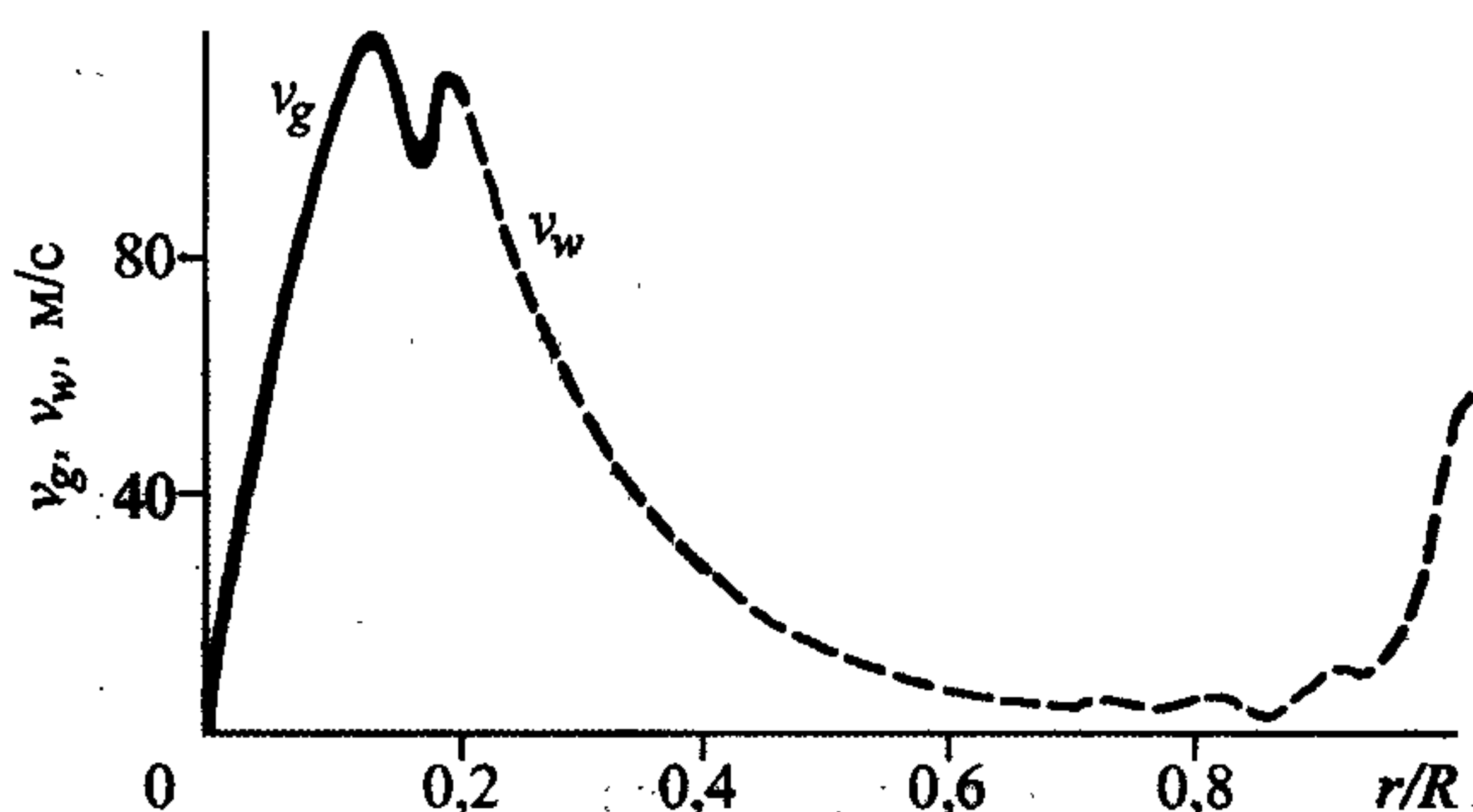


Рис. 5.9. Распределение скоростей по радиусу в продуктах детонации ( $v_g$ ) и в воде ( $v_w$ ).

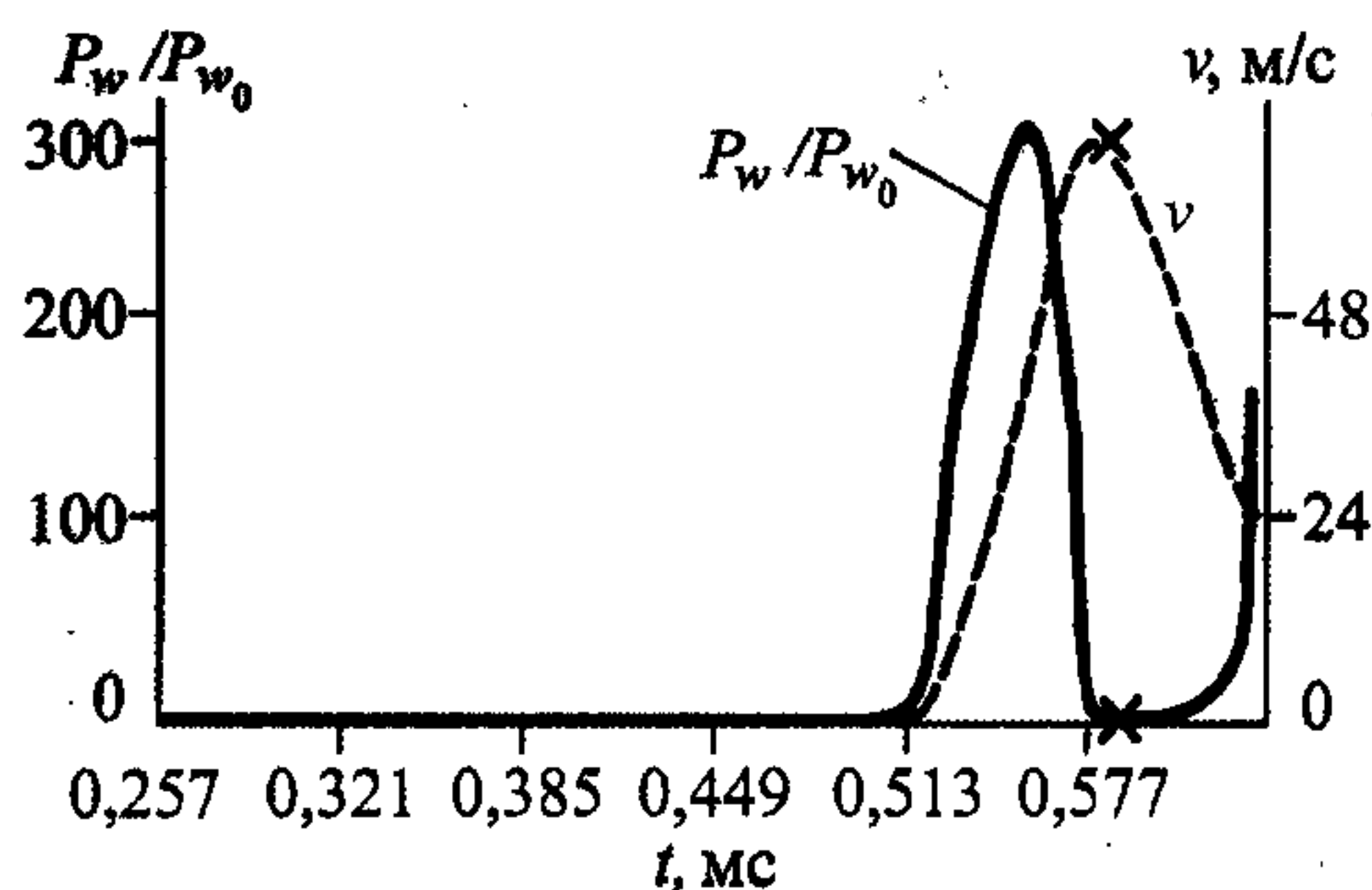


Рис. 5.10. Зависимость давления на оболочку (сплошная линия) и скорости оболочки (пунктирная линия) от времени.

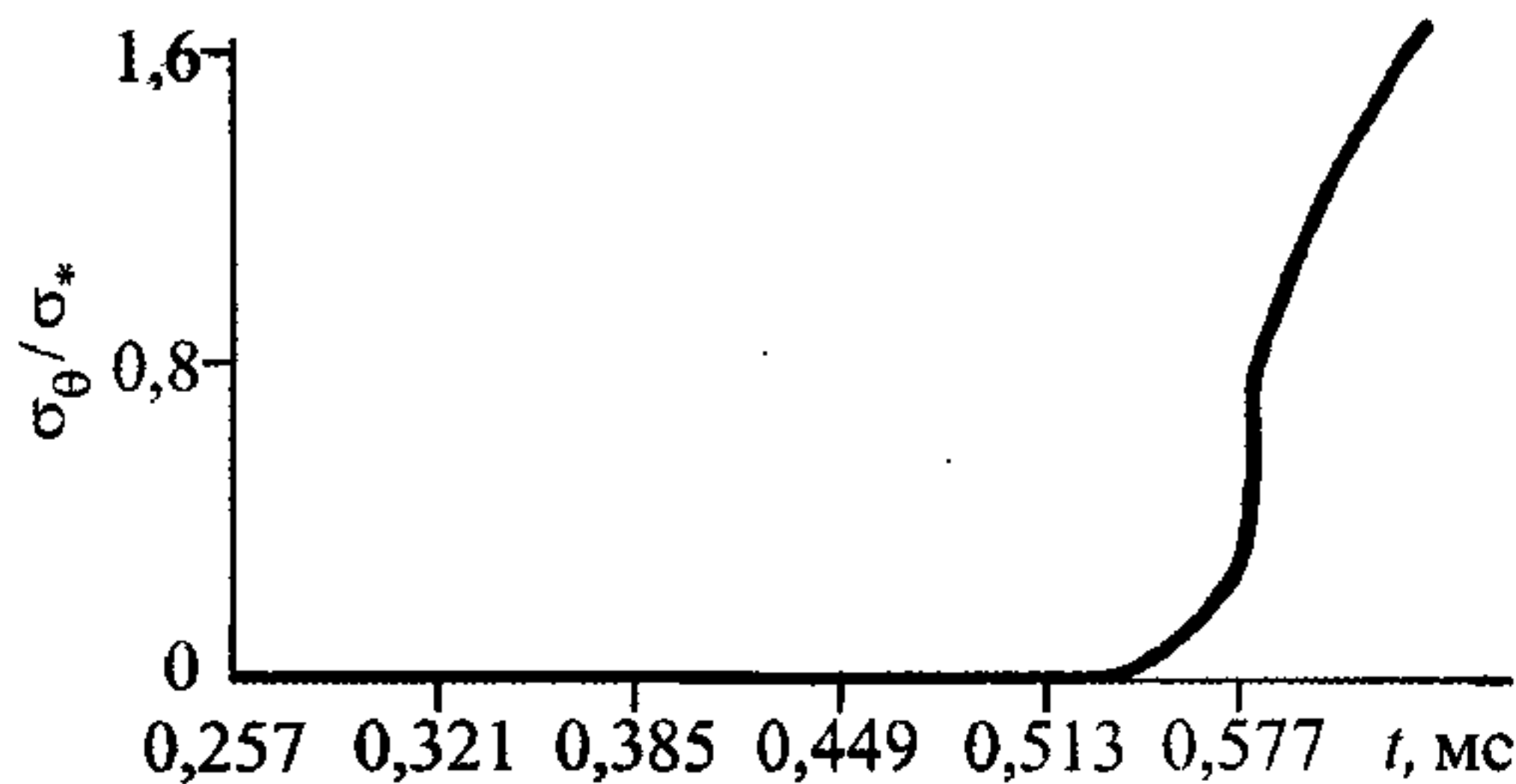


Рис. 5.11. Зависимость напряжения в композите от времени.

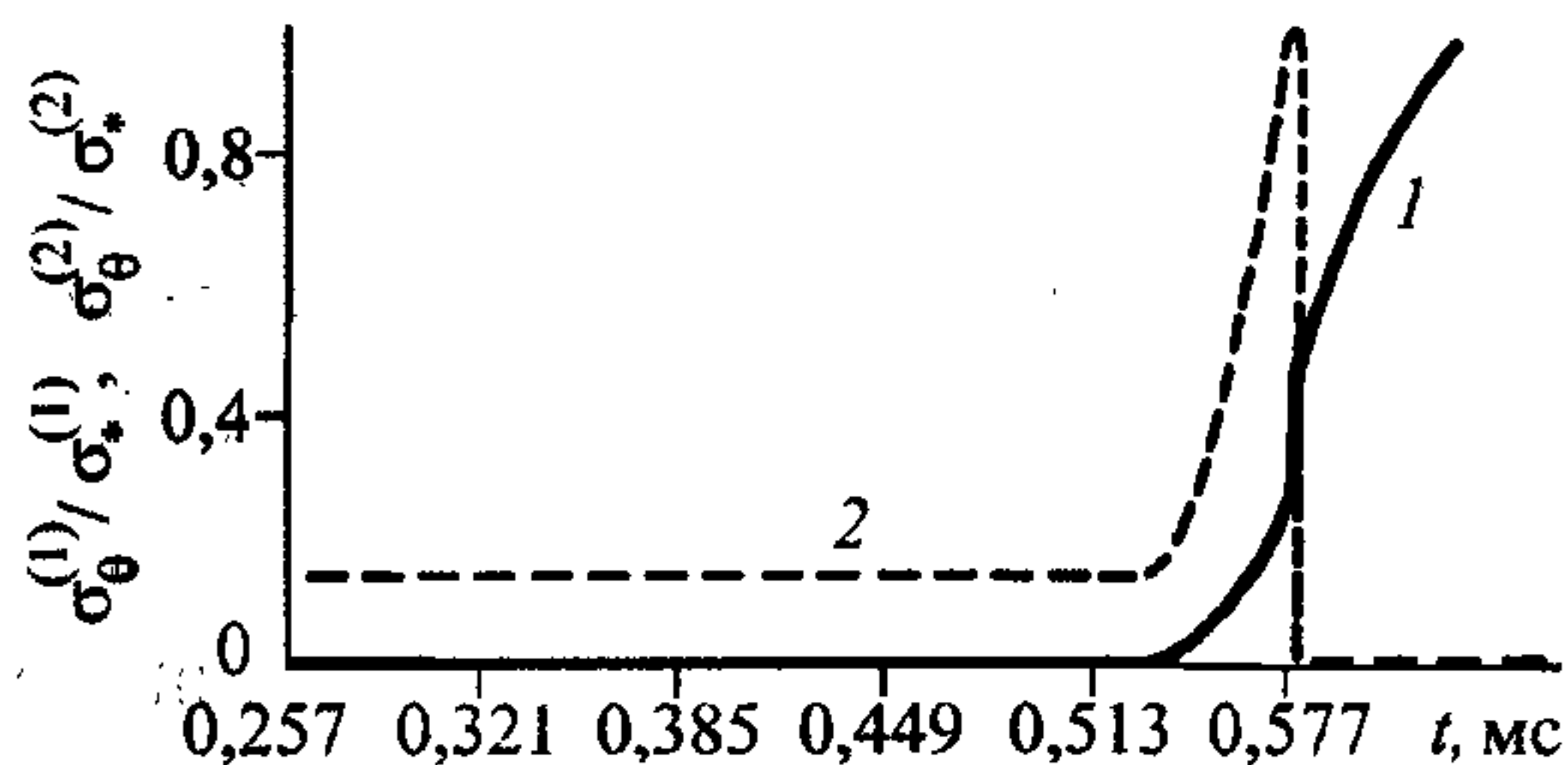


Рис. 5.12. Зависимость напряжения в компонентах композита от времени.

Поясн. см. в тексте.

деформации и напряжения) и происходит разрушение наиболее слабой компоненты композита — его матрицы. Ударная волна сжатия отражается от оболочки волной разряжения, давление на оболочку начинает падать, скорость расширения оболочки уменьшается. Однако мощности падающей первичной ударной волны оказывается достаточно для быстрого разрушения и основы композита, т.е. полного разрушения оболочки. При этом к моменту разрушения оболочки кавитационная зона в воде не успевает образоваться или еще только зарождается. Небольшая область кавитации вблизи поверхности контакта с разреженной газовой полостью продуктов детонации характерна для случая зарядов любой мощности и появляется после ухода ударной волны в воде от контактной поверхности к оболочке.

2. Для зарядов средней мощности (в нашем случае это вариант с  $R_0 = 0,04$  м) также наблюдается полное разрушение оболочки. Однако физика процесса меняется. Для таких зарядов энергии первичной ударной волны оказывается достаточно только для разрушения матрицы композита оболочки, сама же оболочка сохраняет целостность еще относительно длительное время.

Первичная ударная волна в воде, отражаясь от оболочки волной разряжения, формирует в воде значительную зону кавитации, в которой давление мало и плотность меньше начальной плотности  $\rho_{w_0}$ . Эта эволюционирующая кавитационная область не контактирует непосредственно с оболочкой. Для воды, “зажатой”

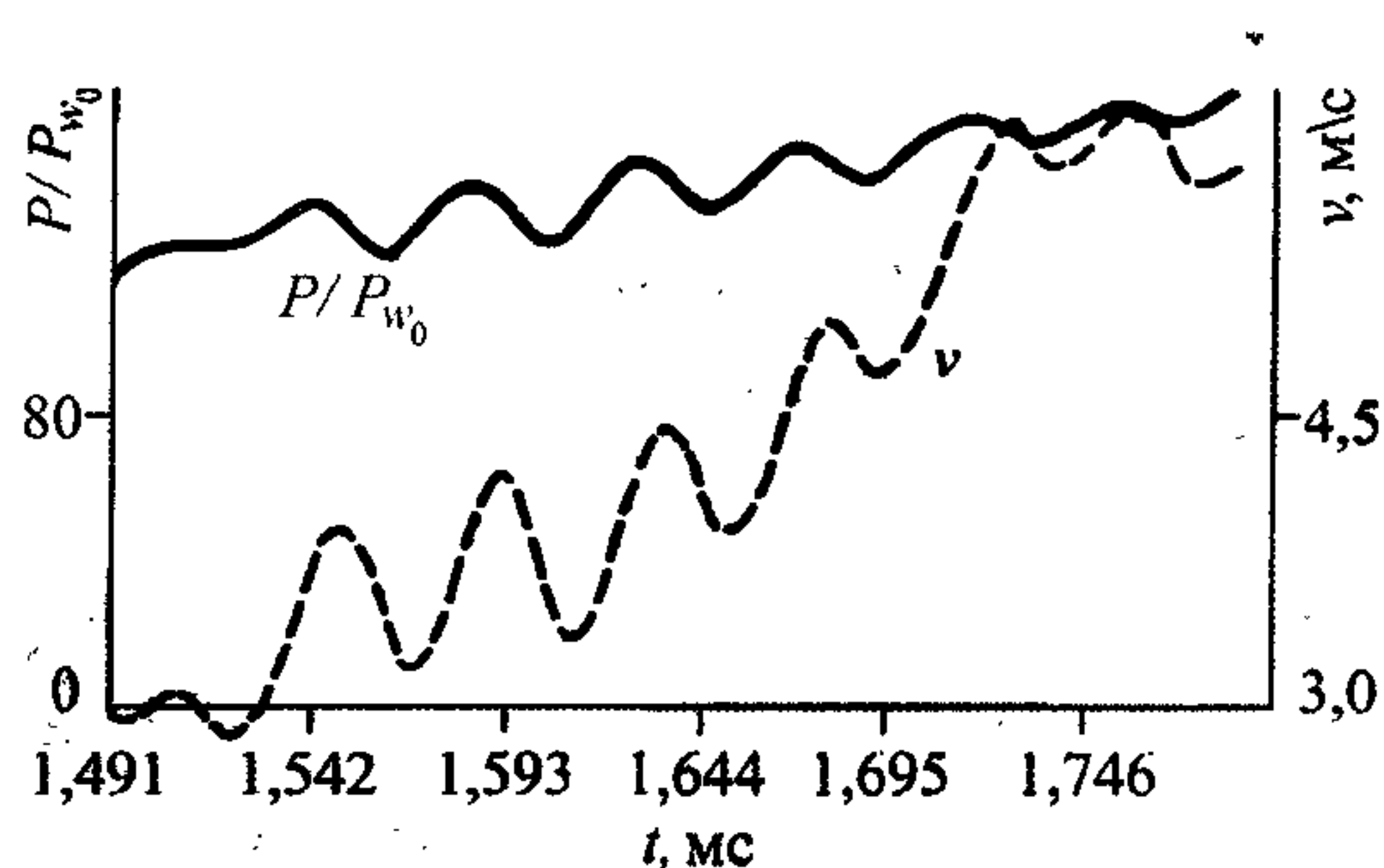


Рис. 5.13. Зависимость давления жидкости на оболочку (сплошная линия) и ее скорости от времени (штриховая линия).



между оболочкой и зоной кавитации, контактная поверхность жидкость — кавитационная область близка по характеру отражения волн в жидкости к свободной поверхности. Поэтому в этой области жидкости наблюдается распространение волн от оболочки, которая совершает колебательные движения в результате изменения давления на нее со стороны жидкости и упругости самой оболочки, к зоне кавитации и обратно. Сама же зона кавитации препятствует прохождению отраженных волн от оболочки к центру конструкции и от газовой полости, в которой в свою очередь происходят периодические изменения давления, плотности и скоростей частиц, к оболочке. Плотность газожидкостной смеси в кавитационной зоне относительно низка, однако скорость частиц возрастает из-за отражения от оболочки ударной волны в воде в виде волны разрежения. Ускорившийся газожидкостный поток низкой плотности встречает на своем пути замедляющуюся оболочку, что приводит к частичному схлопыванию кавитационной области за счет торможения потока оболочкой и возрастания плотности и давления у оболочки. Повышение давления вызывает в свою очередь ускорение расширения оболочки и образование новой волны разрежения в жидкости, идущей к центру. Таким образом, возникают периодические нагрузки на оболочку, приводящие к ее колебаниям. При этом средняя скорость расширения оболочки постепенно возрастает (см. рис. 5.13), что и приводит со временем к ее полному разрушению.

Итак, в результате сложной волновой картины спустя значительный интервал времени (в несколько раз превосходящий время распространения первичной ударной волны к оболочке) происходит полное разрушение оболочки.

3. Для зарядов еще меньшей мощности ( $R_0 = 0,03$  м) энергии взрыва оказывается достаточно только для разрушения связующего композита оболочки. В расчетах в этом случае наблюдаются интересная волновая картина в газе и жидкости (развитие и схлопывание областей кавитации, многократные расширения и сжатия газовой полости продуктов детонации, постепенно затухающие), колебания оболочки.

4. Были проведены также расчеты с абсолютно жесткой недеформируемой оболочкой. В этом случае сколько-нибудь заметных областей кавитации в жидкости после отражения ударной волны от оболочки и в более поздние моменты времени не наблюдается, что влечет за собой принципиальное изменение всей волновой картины в газе и жидкости.

5. О влиянии начального параметра несоответствия деформаций компонент композита оболочки  $\Delta_0$  на характер деформирования оболочки. При  $\Delta_0 > 0$



(растянутая основа и сжатая матрица) разрушение матрицы наступает позднее, чем при  $\Delta_0 = 0$  и еще позднее, чем при  $\Delta_0 < 0$  (сжатая основа и растянутая матрица). Что же касается момента наступления полного разрушения оболочки в результате разрушения основы, то, наоборот, при  $\Delta_0 > 0$  разрушение оболочки происходит раньше, чем при  $\Delta_0 = 0$ , и еще раньше, чем при  $\Delta_0 < 0$  (см. табл. 5.3). Заметим, что начальные деформации оболочки “в целом” во всех вариантах расчетов отсутствовали:

$$\varepsilon_{\theta}|_{t=0} = 0.$$

**Выводы.** Таким образом, создана математическая модель для расчета динамического деформирования и разрушения тонкостенных вязкоупругих двухкомпонентных композитных оболочек слоистой структуры, заполненных жидкостью, при мгновенном взрыве в жидкости заряда взрывчатого вещества в одномерном центрально-симметричном приближении;

предложен двухстадийный критерий динамического разрушения композита оболочки;

предложено уточнение уравнения состояния воды в области низких давлений, при которых происходит образование парожидкостных кавитационных зон;

выявлено определяющее влияние кавитационных парожидкостных зон в воде, образующихся в результате отражения ударной волны от деформируемой оболочки и не находящихся в непосредственном контакте с оболочкой, на динамику деформирования и разрушения композитной оболочки, на волновую картину в жидкости и газовой полости.

## Литература к главе 5

1. Coleman B. D., Gurtin N. E. Thermodynamics with internal state variables// J. Chem. Phys. — 1967. — V. 47, N 2. — P. 597—613.
2. Кукуджанов В. Н. Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред// Успехи механики. — 1985. — Т. 8, № 4. — С. 21—65.
3. Антуков В. Н. Модель термоупругопластической поврежденной среды. Приложение к откольному разрушению// ФГВ. — 1986. — Т. 22, № 6. — С. 120—130.
4. Астафьев В. И. Структурные параметры и длительная прочность металлов в условиях ползучести// ПМТФ. — 1987. — № 6. — С. 156—162.
5. Кондауров В. И., Никитин Л. В. Теоретические основы реологии геоматериалов. — М.: Наука, 1990. — 207 с.

6. **Киселев А. Б., Юмашев М. В.** Деформирование и разрушение при ударном нагружении. Модель повреждаемой термоупругопластической среды// ПМТФ. — 1990. — № 5. — С. 116—123.
7. **Киселев А. Б., Юмашев М. В.** Математическая модель деформирования и разрушения твердого топлива при ударном нагружении// ПМТФ. — 1992. — № 6. — С. 126—134.
8. **Kiselev A. B.** The model of thermoelastoplastic deformation and fracture of materials under multiaxial loading// Forth Int. Conf. of Biaxial/Multiaxial Fatigue (St. Germain en Laye, France, May 31—June 3, 1994). — V. 2. — P. 183—186.
9. **Kiselev A. B.** Thermomechanical model of dynamic deformation and combined fracture of solids// Proc. of Int. Conf. of Structure and Properties of the Brittle and Quaziplastic Matherials (June 14—16, 1994, Riga, Latvia). — Riga: Inst. of Inorganic Chemistry of the LAS, 1994. — P. 66—70.
10. **Шалль Р.** Физика детонации// Физика быстропротекающих процессов. Т. 2. — М.: Мир, 1971. — С. 276—349.
11. **Баум Ф. А., Орленко Л. П., Станюкович К. П. и др.** Физика взрыва. — М.: Наука, 1975. — 704 с.
12. **Брод Г.** Расчеты взрывов на ЭВМ. — М.: Мир, 1976. — 270 с.
13. **Мейдер Ч.** Численное моделирование детонации. — М.: Мир, 1985. — 384 с.
14. **Взрывные явления. Оценки и последствия.** В 2-х томах/ Бейкер М., Кокс П., Уэстайн П. и др. — М.: Мир, 1986. — Т. 1. — 319 с; Т. 2. — 384 с.
15. **Селиванов В. В., Соловьев В. С., Сысоев Н. Н.** Ударные и детонационные волны. Методы исследований. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. — 262 с.
16. **Белов Н. Н., Демидов В. Н., Ефремова Л. В. и др.** Компьютерное моделирование динамики высокоскоростного удара и сопутствующих физических явлений// Изв. вузов. Физика. — 1992. — № 8. — С. 5—48.
17. **Рыбаков А. П.** Отколы в стали при нагружении с помощью взрыва листового заряда ВВ и удара пластиной// ПМТФ. — 1977. — № 1 — С. 151—155.
18. **Дерибас А. А.** Физика упрочнения и сварки взрывом. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1980. — 219 с.
19. **Сугак Г. Г., Канель Г. И., Фортов В. Е. и др.** Численное моделирование действия взрыва на железную плиту// ФГВ. — 1983. — № 2. — С. 121—128.
20. **Канель Г. И., Фортов В. Е.** Механические свойства конденсированных сред при интенсивных импульсных воздействиях// Успехи механики. — 1987. — Т. 10, № 3. — С. 3—82.
21. **Гендугов В. М., Киселев А. Б.** Численное исследование откола в пластине при взрыве накладного заряда ВВ// Вестник МГУ. Сер. 1. Матем. механ. — 1990. — № 5. — С. 54—58.
22. **Богданов В. И., Звягин А. В.** Штамповка взрывом// Там же. — 1990. — № 2. — С. 42—46.
23. **Богданов В. И., Звягин А. В.** Метание пластин взрывом// Там же. — 1991. — № 2. — С. 39—45.
24. **Одинцов В. А., Чудов Л. А.** Расширение и разрушение оболочек под действием продуктов детонации// Проблемы динамики упругопластических сред. — М.: Мир, 1975. — С. 85—154.
25. **Одинцов В. А.** Механизм разрушения цилиндров// Вопросы физики взрыва и удара. Вып. 1/ МВТУ им. Н. Э. Баумана. — М., 1980. — С. 22—70.



26. Olive F., Nicaud A., Marilleau J., Loichot R. Rupture behavior of metals in explosive expansion// Mechanical properties at high rates of strain: Proc. 2nd conf. (Oxford, 1979). — Bristol; London, 1980. — P. 242—251.
27. Stelly M., Legrand J., Dormeval R. Some metallurgical aspects of the dynamic expansion of shells in shock waves and high strain rate phenomena in metal// Shock waves and high-strain-rate phenomena in metals. Concepts and applications: Proc. Int. Conf. (Albuquerque, 1980). — N.Y.; London: Plenum Press, 1981. — P. 113—125.
28. Колобанова А. Е., Одинцов В. А., Чудов Л. А. Распространение трещины в цилиндре, нагруженном взрывом// Изв. АН СССР. МТТ. — 1982. — № 1. — С. 138—149.
29. Иванов А. Г., Кочкин Л. И., Новиков В. Ф., Фоломеева Т. М. Высокоскоростное разрушение тонкостенных труб из мягкой стали// ПМТФ. — 1983. — № 1. — С. 112—117.
30. Anderson C. E., Predebon W. W. Computational modelling of explosive-filled cylinders// Int. J. Engng. Sci. — 1985. — V. 21, N 12. — P. 1317—1330.
31. Одинцов В. А. Бимодальное распределение фрагментов цилиндров// ФГВ. — 1991. — Т. 27, № 5. — С. 118—122.
32. Одинцов В. А. Гиперэкспоненциальные спектры разрушения металлических цилиндров// Изв. РАН. МТТ. — 1992. — № 5. — С. 48—55.
33. Одинцов В. А. Двумерное распределение осколков цилиндров по массе и характеристике формы// ФГВ. — 1993. — Т. 29, № 1. — С. 129—133.
34. Одинцов В. А., Шкалябин И. О. Дробящее действие смесевых ВВ в унифицированных цилиндрах// Там же. — 1994. — Т. 30, № 3. — С. 147—150.
35. Огородников В. А., Тюлькин Е. С., Иванов А. Г. Прочность и вязкость металлов в широком диапазоне изменения скорости деформации// ПМТФ. — 1995. — № 3. — С. 134—140.
36. Proceedings of the First European Conference on Space Debris ( Darmstadt, Germany, 1—7 April, 1993). — Darmstadt: ESA, 1993. — 741 p.
37. Киселев А. Б. Простейшая математическая модель разрушения космического аппарата при взрыве// Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. механ. — 1993. — № 4. — С. 49—53.
38. Kiselev A. B. Mathematical modelling of fragmentation of thin shells in explosion// Proc. of the IMACS Symposium on Mathematical Modelling. V. 5. — Vienna: Tech. Univ., 1994. — P. 882—884.
39. Киселев А. Б. Простейшие математические модели разрушения космического аппарата при взрыве// ПМТФ. — 1995. — № 2. — С. 159—165.
40. Иванов А. Г. О возможности построения единой теории разрушения// Там же. — 1990. — № 1. — С. 109—116.
41. Иванов А. Г. Роль инерционных и упругих сил при динамическом разрушении в пластической области// Докл. АН СССР. — 1991. — Т. 321, № 1. — С. 28—32.
42. Пэжина П. Основные вопросы вязкопластичности. — М.: Мир, — 1968. — 176 с.
43. Власов О. Е. Основы теории действия взрыва/ ВИА им. В. В. Куйбышева. — М., 1957. — 408 с.
44. Райнхарт Дж., Пирсон Дж. Поведение металлов при импульсных нагрузках. — М.: ИЛ, 1958. — 268 с.
45. Banks E. F. The fragmentation behavior of thin-walled metal cylinders// J. Appl. Phys. — 1969. — V. 40, N 1. — P. 437—439.



46. Кузнецов В. М. О разрушении металлических колец при импульсных нагрузках// ФГВ. — 1973. — Т. 9, № 4. — С. 567—571.
47. Киселев А. Б. Математическое моделирование фрагментации тонкостенных сферических оболочек под действием динамического внутреннего давления// Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. механ. — 1996. — № 3. — С. 52—60.
48. Вейбулл В. Усталостные испытания и анализ их результатов. — М.: Машиностроение, 1964. — 273 с.
49. Focke W. Fragmentation experiments for the evolution of the small size debris population// Proc. of the First European Conf. on Space Debris (Darmstadt, Germany, 5—7 April, 1993). — Darmstadt: ESA, 1993. — P. 275—280.
50. Киселев А. Б. Численное моделирование деформирования и разрушения тонкостенной сферической оболочки из слоистого вязкоупругого композита, заполненной жидкостью, под действием взрыва заряда, расположенного в центре конструкции// Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. механ. — 1997. — № 5. — С. 41—48.
51. Реснянский А. Д., Роменский Е. И. Модель динамического деформирования слоистого термовязкоупругого композита// ФГВ. — 1993. — Т. 29, № 4. — С. 123—131.
52. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. — М.: Наука, 1978. — 304 с.
53. Brode H. L. Numerical solution of spherical blast waves// J. Appl. Phys. — 1955. — V. 26, N 3. — P. 766—775.
54. Кузнецов Н. М. Уравнения состояния и теплоемкость воды в широком диапазоне термодинамических параметров// ПМТФ. — 1961. — № 1. — С. 112—120.
55. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. — М.: Наука, 1972. — 720 с.
56. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений// Вычислительные методы в гидродинамике. — М.: Мир, 1967. — С. 212—263.
57. Гулидов А. И., Шабалин И. И. Численная реализация граничных условий в динамических контактных задачах. — Новосибирск, 1987. — 37 с. (Препринт/ ИТПМ СО АН СССР; №12-87).
58. Kiselev A. B. Computational simulation of boundary conditions in problems of elastoplastic bodies interaction// Systems Analysis Modelling Simulation. — 1995. — V. 18—19. — P. 809—812.
59. Композиционные материалы: Справочник/ Под ред. В.В. Васильева и Ю.М. Тарнопольского. — М.: Машиностроение, 1990. — 512 с.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ МЕТАНИЯ ПЛАСТИН И ОБЛИЦОВОК

---

Задача об ускорении тел продуктами детонации (ПД) взрывчатых веществ (ВВ) является одной из ключевых в физике высоких плотностей энергии, механике импульсных процессов и физике взрыва. Ускоряемые тела при ударе создают в исследуемых образцах-преградах ударные волны необходимой интенсивности и формы, с помощью которых изучаются свойства сред и поведение конструкций в экстремальных условиях, осуществляются технологические процессы сварки и штамповки взрывом, упрочнения, обработки деталей и т.п. Из всего многообразия возможных способов метания в главе представляются процессы динамического нагружения взрывом цилиндрических оболочек (облицовок), многослойных систем в режиме неограниченной кумуляции, а также кумулятивных облицовок.

### 6.1. Разлет и схлопывание оболочек под действием продуктов детонации ВВ

С помощью задачи о разлете и схлопывании оболочек (облицовок) специалисты нередко изучают такие процессы, как разрушение, фазовые переходы, кумуляция, детонация ВВ. Существуют десятки работ по метанию и разрушению пластин и оболочек под действием ПД, обзор некоторых из них выполнен, например, в статьях [1—7].

В настоящей главе рассматривается класс задач о взрывном метании цилиндрических оболочек или систем разнесенных пластин с присоединенными к ним слоями ВВ и, в общем случае, разделенных между собой зазорами. Геометрии задач в цилиндрическом и плоском случаях показаны на рис. 6.1. Количество пластин и слоев ВВ произвольное.

Для рассматриваемых в работе мощных конденсированных ВВ при их детонации возникают давления 0,2—0,5 Мбар. Продукты детонации, ударно воздействуя на оболочку, ускоряют ее. При этом в процессе деформирования тонкой оболочки определяющими являются инерционные силы, а для более тол-



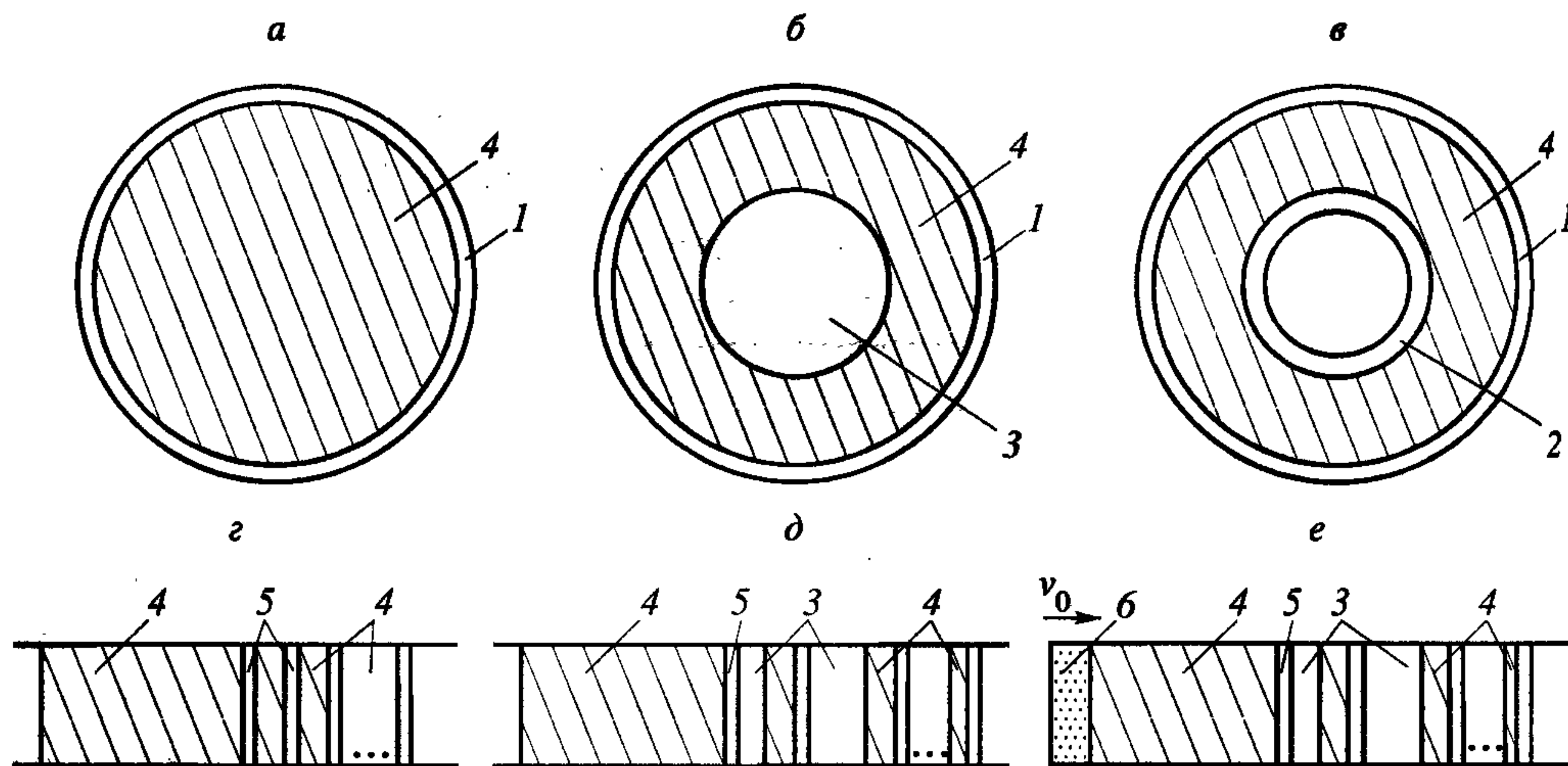


Рис. 6.1. Начальная геометрия одномерных задач.

1 — внешняя оболочка; 2 — внутренняя оболочка; 3 — полость, зазор; 4 — ВВ; 5 — пластина; 6 — ударник. а—в — цилиндрический случай, разные конфигурации; г—е — плоский случай, многослойные системы.

стых начинают проявляться эффекты прочности. Отсюда, в зависимости от коэффициента нагрузки — отношения массы ВВ к массе оболочки (пластины)  $\eta = M_{\text{ВВ}} / M_{\text{об}}$ , возможны различные постановки задач. На начальной стадии ускорения оболочек (пластин) существенны ударно-волновые явления, которые зависят от свойств ВВ и металла, а на конечной — ускорение определяется в основном статическим давлением. Учет волновых процессов позволяет глубже понять физические явления при деформировании оболочек, а в ряде конструкций, например, многослойных, разрушаемых и др., ударно-волновые эффекты являются определяющими при развитии физического процесса.

Предполагая, что оболочки относительно тонкие ( $\eta > 0,1$ ) и длинные в осевом направлении, а их деформация под действием ПД однородная, т.е. отсутствуют сильные локальные деформации, рассмотрим задачу в одномерной постановке. При разрушении оболочек и пластин ниже учитывается только откольное разрушение.

Поведение материала оболочек и пластин при динамическом нагружении в случае одной пространственной переменной будем описывать уравнениями:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{r^{v-1}} \frac{\partial (r^{v-1} u)}{\partial r},$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_1}{\partial r} + (v-1) \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{r}, \\ \frac{\partial e}{\partial t} &= -P \frac{\partial V}{\partial t} + V \left[ s_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + (v-1) s_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} \right], \\ \frac{\partial r}{\partial t} &= u, \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

где  $t$  — время,  $r$  — пространственная переменная,  $V = 1/\rho$  — удельный объем,  $\rho$  — плотность,  $v = 1, 2, 3$  соответственно в случаях плоской, цилиндрической и сферической симметрии,  $u$  — массовая скорость,  $e$  — удельная внутренняя энергия,  $P$  — шаровой тензор напряжений,  $\varepsilon_i$  — компоненты тензора деформаций ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\sigma_i$  — главные напряжения, которые связаны с компонентами тензора девиатора напряжений  $s_i$  соотношениями

$$\sigma_i = -P + s_i, \quad \sum_{i=1}^3 s_i = 0. \quad (6.1.2)$$

Система уравнений (6.1.1) замыкается термодинамическим уравнением состояния

$$P = P(\rho, e), \quad (6.1.3)$$

в области упругих деформаций — законом Гука

$$\frac{\partial s_i}{\partial t} = 2\mu \left( \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} - \frac{1}{3V} \frac{\partial V}{\partial t} \right), \quad (6.1.4)$$

где  $\mu$  — модуль сдвига, а в пластической области — условием текучести Мизеса

$$\frac{3}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \leq Y_0^2. \quad (6.1.5)$$

Здесь  $Y_0$  — предел текучести, который в общем случае может быть функцией скоростей деформации, давления, температуры (в главе 6 принято  $Y_0 = \text{const}$ ). Если интенсивность напряжений такова, что условие (6.1.5) нарушается, то для определения девиатора напряжений применяется процедура приведения напряжений к кругу текучести. Для этого компоненты девиатора напряжений умножаются на нормирующий множитель

$$\frac{\sqrt{2/3} Y_0}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}. \quad (6.1.6)$$

С. С. Григорьяном показано [8], что подобная процедура эквивалентна применению в области пластичности теории течения Прандтля—Рейсса. Скорости деформаций связаны со скоростями соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_1}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \frac{\partial \epsilon_2}{\partial t} &= \frac{u}{r}, \\ \frac{\partial \epsilon_3}{\partial t} &= \frac{\partial \epsilon_2}{\partial t} & \text{при } \nu &= 3, \\ \frac{\partial \epsilon_3}{\partial t} &= 0 & \text{при } \nu &= 2, \\ \frac{\partial \epsilon_3}{\partial t} &= \frac{\partial \epsilon_2}{\partial t} & \text{при } \nu &= 1. \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

Заметим, что если в приведенных уравнениях положить  $\mu = 0$ ,  $Y_0 = 0$ , то система уравнений (6.1.1), (6.1.3) описывает движение невязкого нетеплопроводного газа.

При взрывном метании тонких оболочек (пластин) определяющими являются инерционные силы, а учет волновых явлений слабо влияет на конечную ее скорость [9—13]. Поэтому для описания их движения в ряде задач применяется модель несжимаемой жидкости, что требует существенно меньше ресурсов ЭВМ при сохранении необходимой точности или дает возможность найти аналитическое решение. Рассмотрим ряд одномерных задач.

**Задача 1.** Схлопывание несжимаемой цилиндрической оболочки к центру симметрии, ускоренной продуктами детонации “полубесконечного” слоя ВВ [9].

Пусть начальный наружный радиус оболочки  $r_0$ , толщина  $\delta_0$ , внутри ее пустота, а снаружи она окружена “бесконечным” слоем газа, являющегося продуктами “мгновенной” детонации взрывчатого вещества. Начальное давление  $P_0$  в продуктах взрыва для случая идеальной детонации определяется выражением [14]

$$P_0 = \frac{1}{8} \rho_{\text{ВВ}} D^2, \tag{6.1.8}$$

где  $\rho_{\text{ВВ}}$  — начальная плотность ВВ,  $D$  — скорость детонации. Последующее расширение газа считаем адиабатическим с показателем адиабаты  $\gamma = 3$ . Так как начальная плотность продуктов взрыва для случая идеальной детонации равна начальной плотности ВВ, то с помощью определения скорости звука вы-

ражение (6.1.8) преобразовывается к виду

$$P_0 = \frac{1}{3} \rho_{\text{ВВ}} a_0^2, \quad \rho_0 = \rho_{\text{ВВ}}. \quad (6.1.9)$$

Кроме того, из адиабатичности расширения газа следует, что давление и скорость звука в газе в любой точке связаны соотношением

$$P = P_0 \cdot (c/a_0)^3. \quad (6.1.10)$$

Уравнение движения оболочки записывается в предположении, что скорость ее внутренней и наружной поверхностей не сильно отличаются друг от друга. В самом деле, из уравнения неразрывности для движения несжимаемой жидкости с цилиндрической симметрией следует

$$r_1 v_1 = r_2 v_2 = f(t), \quad (6.1.11)$$

где индекс 2 относится к внутренней границе оболочки, а индекс 1 — к наружной. Отсюда следует, что для достаточно больших радиусов при относительно небольшой толщине значения скоростей  $v_1$  и  $v_2$  близки друг к другу. Конечно, это предположение не выполняется при стремлении внутренней границы  $r_2$  к оси симметрии. Координаты наружной и внутренней границ в любой момент времени связаны соотношением, легко получаемым из условия сохранения массы:

$$r_2(t) = \sqrt{r_1^2(t) - 2r_0\delta_0 + \delta_0^2}. \quad (6.1.12)$$

При сделанном предположении уравнение движения наружной поверхности оболочки будет иметь вид

$$-M_0 \frac{d^2 r_1}{dt^2} = 2\pi r_1 P_1(t), \quad (6.1.13)$$

где  $P_1(t)$  — давление в газе на границе с оболочкой,  $M_0 = \pi \rho_{\text{М}} (2r_0\delta_0 - \delta_0^2)$  — ее масса и  $\rho_{\text{М}}$  — плотность. С помощью соотношения (6.1.10) и определения скорости наружной границы кольца преобразуем уравнение (6.1.13) к следующему:

$$\frac{dv_1}{dt} = -\frac{2\pi r_0^2 P_0}{M_0 a_0^2} \cdot r_1 \left( \frac{c_1}{a_0} \right)^3, \quad (6.1.14)$$

где  $c_1 = c_1(t)$  — скорость звука в газе на границе с оболочкой.



Уравнения, описывающие одномерное адиабатическое движение газа с цилиндрической симметрией, имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\rho v}{r} = 0, \quad (6.1.15)$$

$$P = A\rho^3, \quad (6.1.16)$$

где  $A$  — некоторая константа. С помощью соотношений (6.1.10) и (6.1.16) уравнения (6.1.15) преобразуются к уравнениям, содержащим в качестве иско- мых функций массовую скорость  $v$  и скорость звука  $c$ :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + c \frac{\partial c}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial r} + c \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{cv}{r} = 0. \quad (6.1.17)$$

Затем, как это делается обычно, вводятся обозначения

$$M = c + v, \quad N = c - v, \quad (6.1.18)$$

складывая и вычитая первое и второе уравнения (6.1.17), получаем

$$\frac{\partial M}{\partial t} + M \frac{\partial M}{\partial r} = -\frac{cv}{r}, \quad \frac{\partial N}{\partial t} - N \frac{\partial N}{\partial r} = -\frac{cv}{r}. \quad (6.1.19)$$

Отсюда легко получить удобную для численного интегрирования связь между функциями  $M$ ,  $N$ ,  $c$  и  $v$  и их дифференциалами:

$$dM = -\frac{cv}{r} dt, \quad dN = -\frac{cv}{r} dt \quad (6.1.20)$$

вдоль положительной  $M$ -характеристики, определяемой уравнением

$$\frac{dr}{dt} = (c + v),$$

вдоль отрицательной  $N$ -характеристики, определяемой уравнением

$$\frac{dr}{dt} = -(c - v).$$

Поставленную задачу удобно решать в безразмерных переменных. В каче- стве независимых переменных принимается

$$x = \frac{r}{r_0}, \quad \tau = \frac{a_0 t}{r_0}. \quad (6.1.21)$$

Параметры течения в безразмерном виде запишутся:

$$\bar{u} = \frac{v}{a_0}, \quad \bar{c} = \frac{c}{a_0}, \quad \bar{M} = \frac{c+v}{a_0}, \quad \bar{N} = \frac{c-v}{a_0}. \quad (6.1.22)$$

Черту в обозначениях безразмерных функций (6.1.22) в дальнейшем для простоты опускаем, предполагая, что ниже используются только безразмерные функции. В принятых обозначениях уравнение (6.1.14) преобразуется к следующему:

$$\frac{du_1}{dt} = -mx_1 c_1^3(t), \quad (6.1.23)$$

где

$$m = \frac{2\pi r_0^2 P_0}{M_0 a_0^2} = \frac{2 \rho_{\text{ВВ}}}{3 \rho_{\text{М}}} \cdot \frac{1}{2\delta_0/r_0 - (\delta_0/r_0)^2}. \quad (6.1.24)$$

В (6.1.24) давление  $P_0$  было заменено выражением (6.1.9). Соотношение (6.1.12), связывающее координаты внутренней и наружной границ оболочки, принимает вид

$$x_2(t) = \sqrt{x_1^2(t) - 2\frac{\delta_0}{r_0} + \left(\frac{\delta_0}{r_0}\right)^2}. \quad (6.1.25)$$

Соотношения (6.1.20) теперь запишутся

$$dM = -\frac{cu}{x} dt \quad \text{вдоль} \quad dx = (c+u)dt, \quad (6.1.26)$$

$$dN = -\frac{cu}{x} dt \quad \text{вдоль} \quad dx = -(c-u)dt. \quad (6.1.27)$$

Начальные условия для данной задачи следующие:

$$\begin{aligned} x_1(0) = 1, \quad u_1(0) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad c(x, 0) = 1, \\ M(x, 0) = 1, \quad N(x, 0) = 1. \end{aligned} \quad (6.1.28)$$

Рассмотрим схему численного решения уравнений (6.1.23)—(6.1.28). На рис. 6.2 представлена  $(x-t)$ -диаграмма рассматриваемого процесса. В начальный момент времени наружная граница оболочки находится в точке  $x=1$ . Справа от этой точки находится покоящийся газ с давлением  $p_0$ . Под действием газа оболочка начинает двигаться. На рис. 6.2 кривые  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  — координаты соответственно ее наружной и внутренней границ. Одновременно по

газу распространяется волна разрежения, одна из границ которой совпадает с наружной границей  $x_1(t)$ , а уравнение правой границы имеет вид

$$x = 1 + t. \quad (6.1.29)$$

На рис. 6.2 правая граница волны разрежения обозначена через  $R(t)$ . Таким образом, на  $(x-t)$ -диаграмме линии  $x_1(t)$  и  $R(t)$  ограничивают область движущегося газа. Граничные условия для этой области следующие:

$$\text{на } x_1(t) \quad u(x_1, t) = u_1(t), \quad c(x_1, t) = c_1(t);$$

$$\text{на } R(t) \quad u(R, t) = 0, \quad c(R, t) = 1.$$

Пусть в некоторый момент времени  $t_1$  имеются  $n$  точек  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , в которых известны все параметры течения. На отрезках оси  $x$  между этими точками распределение параметров течения предполагается линейным. Покажем, каким образом рассчитываются параметры течения в момент времени  $t = t_1 + \Delta t$ . При численном расчете все дифференциалы в уравнениях (6.1.23), (6.1.26) и (6.1.27) заменяются конечными разностями. Из уравнения (6.1.23) получаем  $\Delta u_1 = -m \cdot x_1(t_1) \cdot c_1^3(t_1) \cdot \Delta t$ . Тогда скорость наружной границы оболочки через промежуток времени  $\Delta t$  (на рис. 6.2 — в точке  $B_1$ ) будет

$$u_1(t_1 + \Delta t) = u_1(t_1) + \Delta u_1. \quad (6.1.30)$$

Координата точки  $B_1$  находится из предположения, что скорость кольца за промежуток времени  $\Delta t$  остается постоянной и меняется только в точке  $B_1$ :

$$x_1(t_1 + \Delta t) = x_1(t_1) + u_1(t_1) + \Delta u_1. \quad (6.1.31)$$

Далее, в предположении, что все параметры течения за промежуток времени  $\Delta t$  остаются постоянными, ищется некоторая точка  $a_1$ , из которой  $N$ -характеристика приходит в точку  $B_1$ . Так как на отрезках между известными

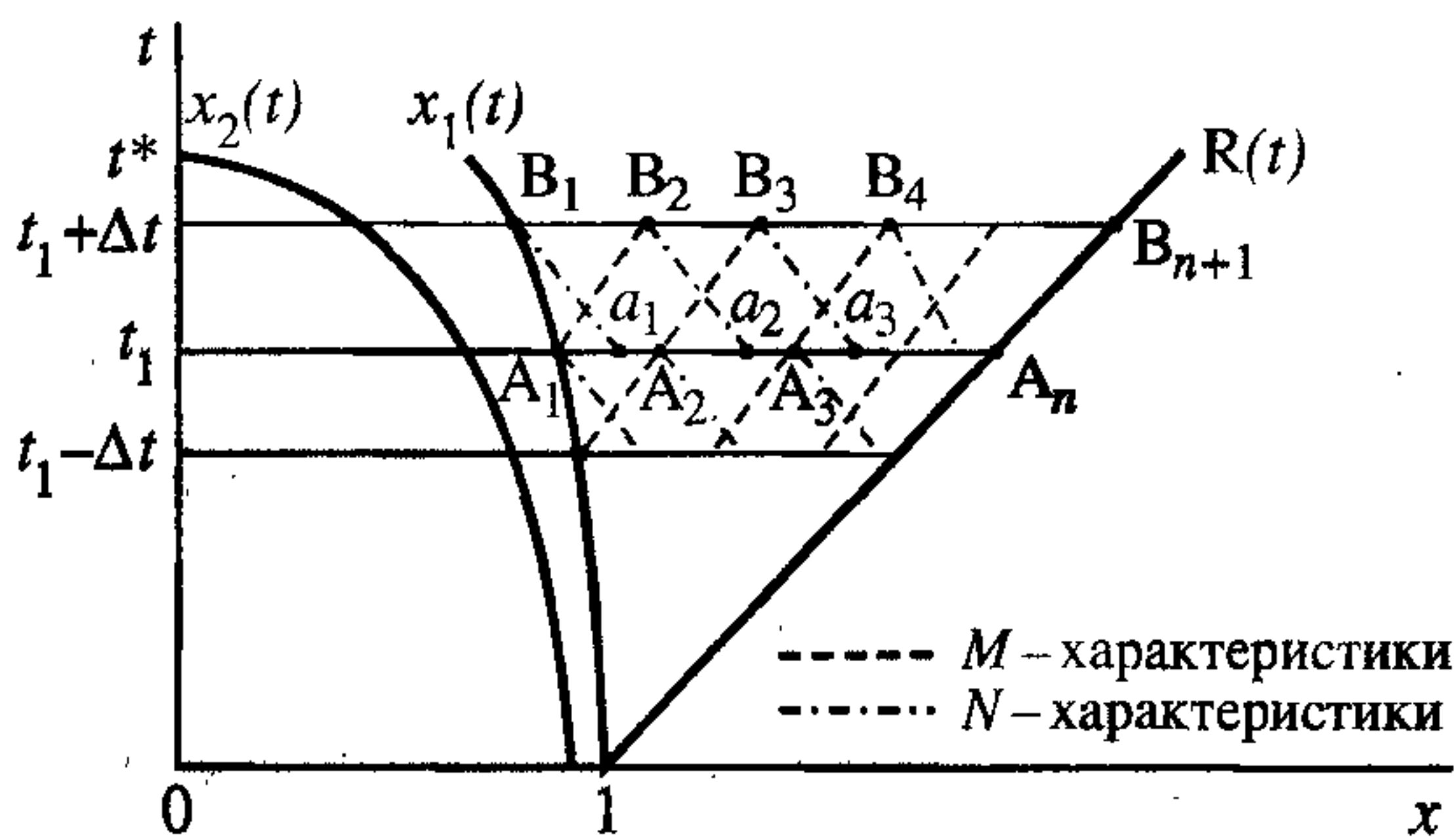


Рис. 6.2. Пространственно-временная диаграмма процесса схлопывания оболочки, ускоренной продуктами детонации “полубесконечного” слоя ВВ.

Поясн. см. в тексте.



точками  $A$  предполагается линейное распределение параметров газа, то для определения координаты точки  $a_1$  получается простое алгебраическое уравнение. Затем по (6.1.27) находят приращение функции  $N$  вдоль  $N$ -характеристики, выходящей из точки  $a_1$ :

$$\Delta N_1 = -\frac{u(a_1, t_1) \cdot c(a_1, t_1)}{a_1} \Delta t, \quad (6.1.32)$$

и новое значение функции  $N$  в точке  $B_1$ :

$$N_1(t_1 + \Delta t) = N(a_1, t_1) + \Delta N_1. \quad (6.1.33)$$

Из (6.1.33) с помощью соотношений (6.1.30), (6.1.32) и определения функции  $N$  находится величина скорости звука  $c_1(t_1 + \Delta t)$  в точке  $B_1$ .

Координаты точек  $B_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) определяются из условия, что в эти точки приходят  $M$ -характеристики, выходящие соответственно из точек  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ). По (6.1.26) находят приращения функции  $M$  вдоль этих характеристик и ее новые значения в каждой из точек  $B_{i+1}$ . Затем, как это делалось для точки  $B_1$ , ищутся точки  $a_{i+1}$ , из которых  $N$ -характеристики приходят в соответствующие точки  $B_{i+1}$ . После этого находят приращения функции  $N$  вдоль этих характеристик и ее новые значения в каждой из точек  $B_{i+1}$ . Когда новые значения функций  $M$  и  $N$  найдены во всех точках  $B_{i+1}$ , новые значения скорости звука  $c$  и массовой скорости  $u$  в этих точках даются выражениями

$$c = \frac{M + N}{2}, \quad u = \frac{M - N}{2}.$$

Координата последней точки  $B_{n+1}$  находится из (6.1.29).

Таким образом, теперь известны все параметры течения в момент времени  $t = t_1 + \Delta t$  в точках  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ). Предполагая опять распределение параметров течения между точками  $B_i$  линейным, приходим к ситуации, аналогичной моменту времени  $t = t_1$ , с той лишь разницей, что точек стало на одну больше.

Численное решение уравнений (6.1.23)—(6.1.27) по вышеописанной схеме проводилось на ЭВМ для ряда значений параметра  $m$ . Расчет велся с момента времени  $t = 0$  до тех пор, пока внутренняя граница кольца не достигала центра.

При этом наружная граница кольца достигала своего предельного (по несжимаемости) значения, которое может быть найдено из (6.1.25):

$$x_{\text{пред}} = \sqrt{2 \frac{\delta_0}{r_0} - \left( \frac{\delta_0}{r_0} \right)^2}.$$

Шаг во времени выбирался преимущественно равным 0,1.

Результаты численного решения задачи сопоставлены с экспериментальными данными, полученными на рентгеноимпульсной установке. Эксперименты проводились с медными трубками, окруженными слоем ВВ некоторой толщины. В качестве ВВ использовался сплав тротила с гексогеном ТГ 50/50, скорость детонации которого порядка 7,5 км/с. Высокая скорость детонации обеспечивала некоторое приближение к “идеальной” детонации, так как время, за которое фронт детонации проходил длину трубки, было значительно меньше времени процесса схлопывания трубки. Для того чтобы исключить влияние концов трубки, ее длина бралась порядка двух диаметров трубки. В экспериментах измерялся наружный радиус оболочки в зависимости от времени в каком-то среднем по ее длине сечении. После подстановки численных значений величин, входящих в (6.1.24) ( $\rho_{\text{ВВ}} = 1,6 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_{\text{М}} = 8,9 \text{ г/см}^3$ ,  $D = 7,5 \text{ км/с}$ ,  $a_0 = 4,5 \text{ км/с}$ ), получаем, что параметр  $m$  зависит от отношения  $\delta_0/r_0$ . Это отношение подбиралось в экспериментах таким, чтобы значения параметра  $m$  равнялись значениям, использованным при численном счете.

Экспериментальные данные приводятся на рис. 6.3—6.5 в сравнении с расчетными. Светлые точки на графиках относятся к небольшим толщинам ВВ, когда не выполняется условие бесконечности толщины слоя ВВ в вышеуказанном смысле. Закрашенные точки относятся к экспериментам с толщиной слоя ВВ большей или близкой к предельной. Рассмотрение графиков, представленных на рис. 6.3 и 6.4, показывает, что до некоторого момента времени расчетные кривые хорошо совпадают с экспериментами с большой толщиной слоя ВВ. Расхождение начинается в конце процесса схлопывания оболочки и может

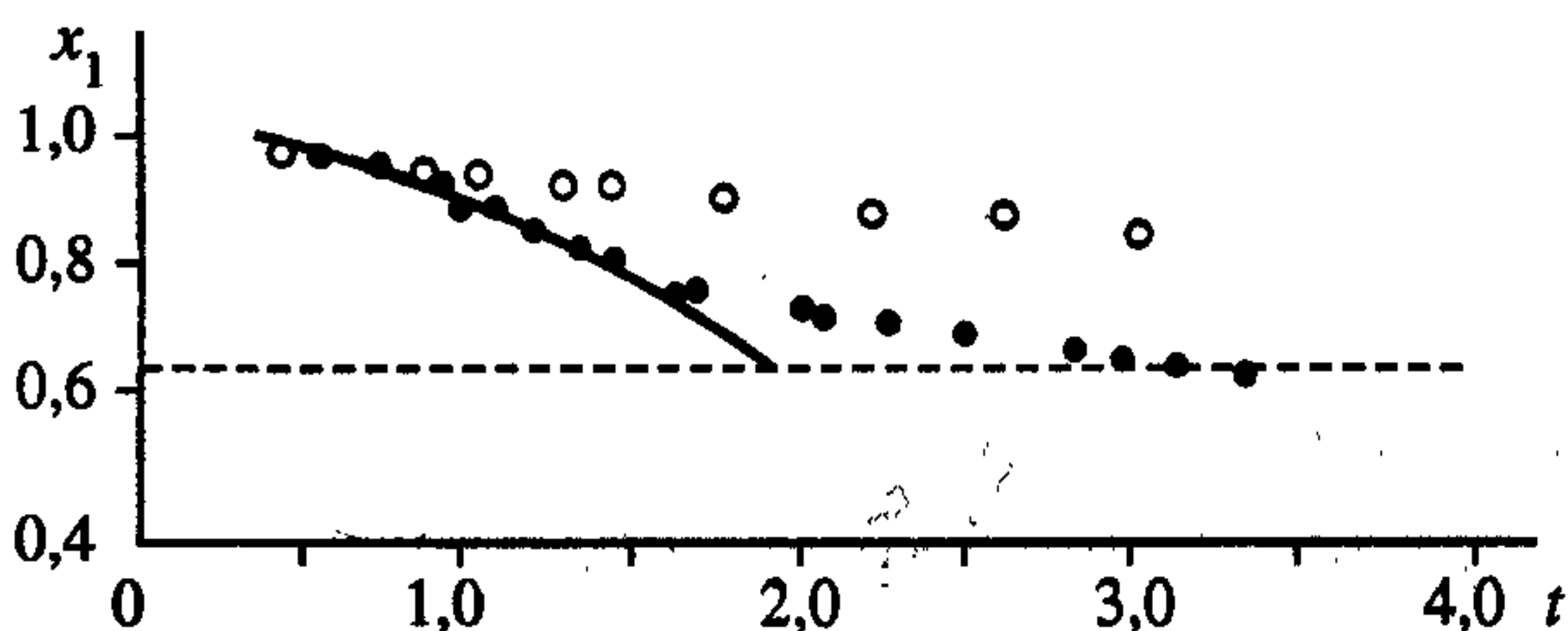


Рис. 6.3. Зависимость координаты внешней поверхности медной трубки от времени.

Линия — расчет, точки — эксперимент,  $m = 0,3$ .



быть объяснено двумя причинами. Во-первых, здесь перестает быть справедливым предположение о небольшой разнице между скоростями наружной и внутренней ее границ, что следует из соотношения (6.1.11) при стремлении  $r_2(t)$  к нулю; во-вторых, в моменты, близкие к схлопыванию кольца, уже нельзя пренебрегать сжимаемостью среды. Отдельно следует рассмотреть график, представленный на рис. 6.5. Здесь наблюдается существенное расхождение эксперимента с расчетной кривой, полученной с соответствующим эксперименту значением параметра  $m$  (кривая I). Объяснение этого факта кроется, видимо, в том, что здесь не выполняется соотношение (6.1.8), т.е. предположение о “мгновенной” детонации. В самом деле, из выражения (6.1.24) следует, что большим значениям  $m$  соответствуют малые значения отношения  $\delta_0/r_0$ , что, в свою очередь, соответствует тонким, малоинерционным оболочкам. Время схождения такой оболочки мало и на ее движение успевает оказать существенное влияние начальное давление на фронте детонационной волны, которое в два раза больше [14] давления, определяемого выражением (6.1.8). Это удвоенное давление было принято за начальное и найдено соответствующее ему значение параметра  $m$ . Полученное с “подправленным” значением  $m$  численное решение так же приводится на рис. 6.5 (кривая II).

**Задача 2.** О схождении несжимаемой оболочки к оси симметрии под действием расширяющегося газа, окружающего поршень [10]. В отличие от задачи 1 уравнение движения оболочки записывается с учетом разницы скоростей внутренней и наружной ее границ на основе

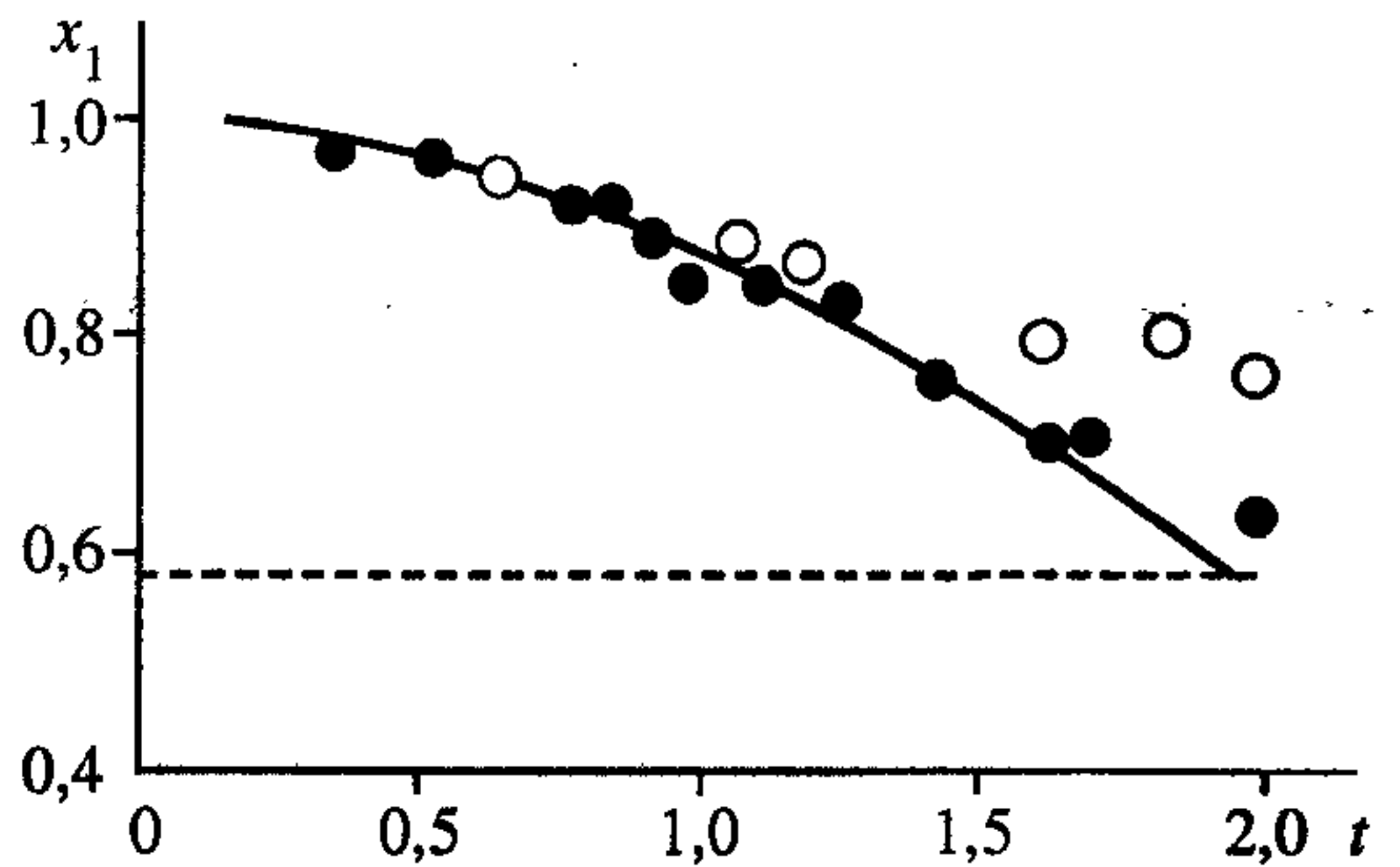


Рис. 6.4. Сравнение расчетных (линия) и экспериментальных (точки) данных при  $m = 0,565$ .

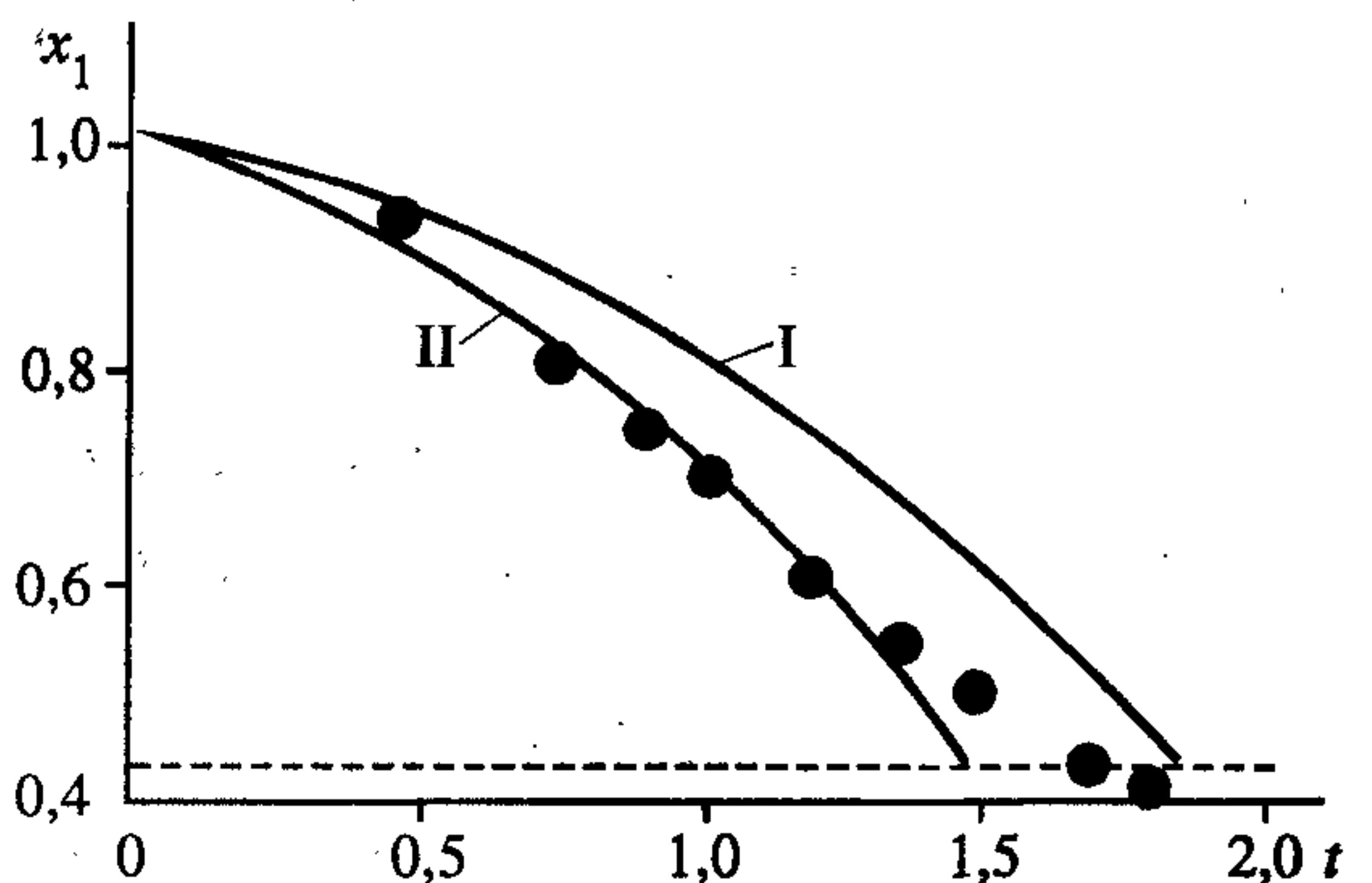


Рис. 6.5. Сравнение расчетных (линии I, II) и экспериментальных (точки) данных при  $m = 0,652$ .



энергетических положений.

Можно показать, что кинетическая энергия оболочки, описываемой моделью идеальной несжимаемой жидкости, имеет вид

$$\varepsilon = \pi \rho_1 r_1^2 v_1^2 \ln \frac{r_1}{r_2}, \quad (6.1.34)$$

где  $\rho_1$  — плотность среды на единицу длины,  $v_1$  — скорость наружной границы. Из условия равенства приращения кинетической энергии оболочки за время  $dt$  работе, совершенной расширяющимся газом над поршнем, получаем

$$d\varepsilon = 2\pi \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_1 \cdot P_1(t) dt, \quad (6.1.35)$$

где  $P_1(t)$  — давление в газе на границе с оболочкой. Находя дифференциал выражения (6.1.34) и раскрывая скалярное произведение векторов в правой части (6.1.35) (что дает знак минус, так как координата  $r_1$  и скорость  $v_1$  направлены в противоположные стороны), после ряда несложных преобразований получаем уравнение для скорости наружной границы оболочки:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{r_1 \ln \frac{r_1}{r_2}} \left\{ \frac{1}{2} v_1^2 \left[ \left( \frac{r}{r_2} \right)^2 - 1 \right] - v_1^2 \ln \frac{r_1}{r_2} \frac{P_1}{\rho_1} \right\}. \quad (6.1.36)$$

При моделировании движения ПД принимаются соотношения (6.1.8), (6.1.9). Задача решается в тех же безразмерных переменных, в которых соотношение (6.1.35) имеет вид

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{1}{x_1 \ln(x_1/x_2)} \left\{ \frac{1}{2} u_1^2 \left[ (x_1/x_2)^2 - 1 \right] - u_1^2 \ln \frac{x_1}{x_2} - \frac{1}{3} q c_1^3(t) \right\}, \quad (6.1.37)$$

где  $q = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ ,  $u(x, t) = \frac{v(r, t)}{a_0}$ ,  $c(x, t) = \frac{c(r, t)}{a_0}$ .

Координаты и скорости внутренней и наружной границ оболочки в любой момент времени  $t$  связаны соотношениями

$$x_2(t) = \sqrt{x_1^2(t) - 2m_1 - m_1^2},$$

$$x_1(t) \cdot u_1(t) = x_2(t) \cdot u_2(t).$$

Задача также решалась численно видоизмененным методом характеристик. При расчетах для параметра  $q$ , входящего в (6.1.37), принято  $q = 0,1798$  и был

построен ряд решений для различных значений параметра  $m_1 = \delta_0/r_0$ . Некоторые результаты расчетов приводятся ниже.

Аналогичным образом может быть поставлена задача о движении плоского поршня или сферической оболочки. Представляет интерес рассмотреть плоскую задачу, так как в этом случае, в силу автомодельности, можно получить решение в аналитическом виде. В [15] приведено общее решение задачи о движении плоского поршня под действием расширяющегося газа. Для рассматриваемого случая  $\gamma = 3$  и с учетом принятых в настоящей работе обозначений решение для скорости поршня  $u_1$  и скорости звука  $c_1$  в газе на границе с поршнем имеет вид

$$u_1(t) = 1 - \left[ 1 + \frac{2q}{3m_1} t \right]^{-1/2}, \quad (6.1.38)$$

$$c_1(t) = 1 - u_1(t) = \left[ 1 + \frac{2q}{3m_1} t \right]^{-1/2}. \quad (6.1.39)$$

Если считать, что поршень движется в направлении, противоположном направлению оси  $x$  (как на рис. 6.2), то (6.1.38) выражает модуль скорости поршня, а сама скорость отрицательна. На рис. 6.6, 6.7 представлены зависимости

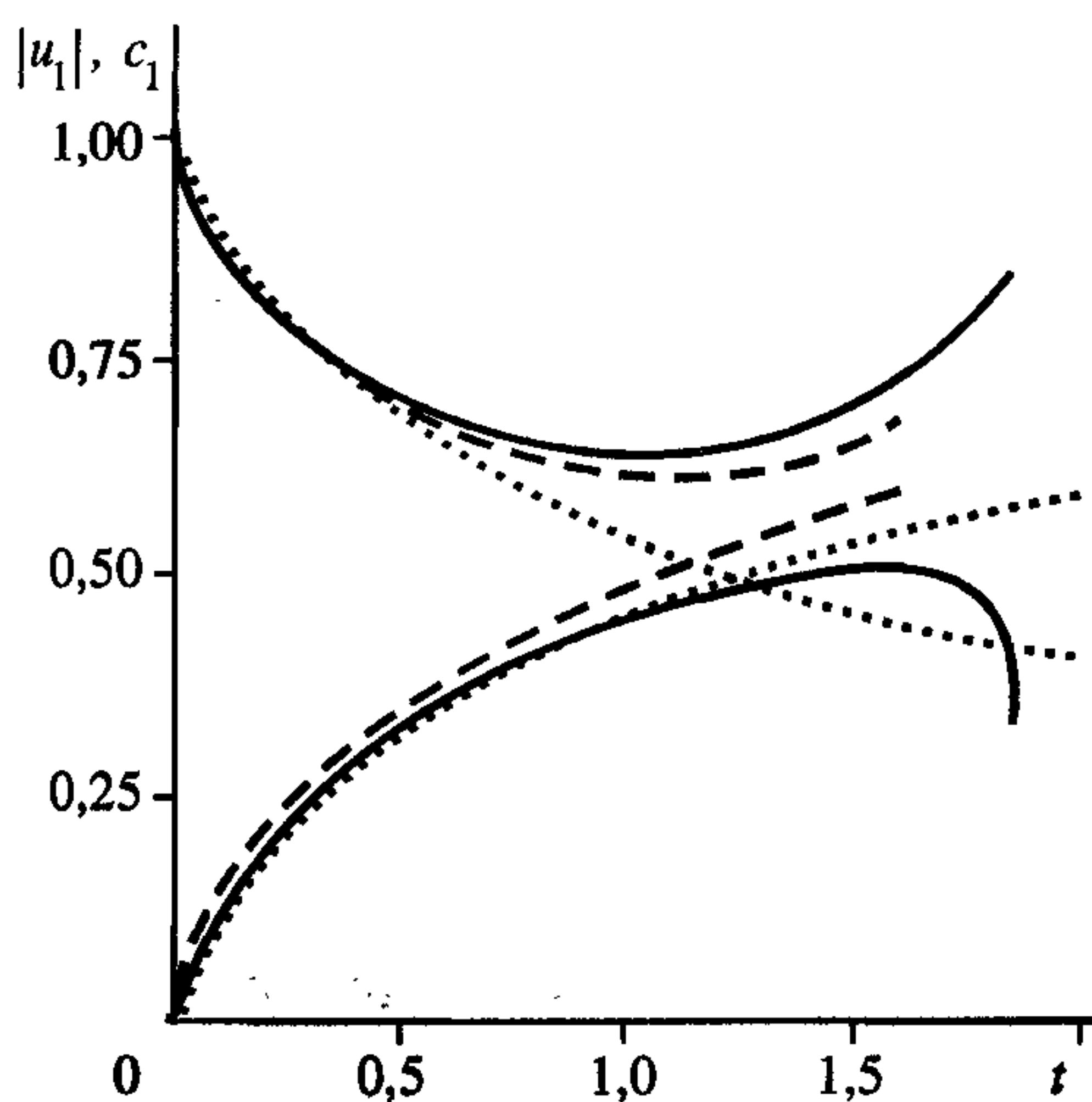


Рис. 6.6. Зависимость скорости поршня  $|u_1|$  и скорости звука  $c_1$  в газе на границе с поршнем от времени при  $m = 0,053$ ,  $q = 0,18$ .

Поясн. см. в тексте.

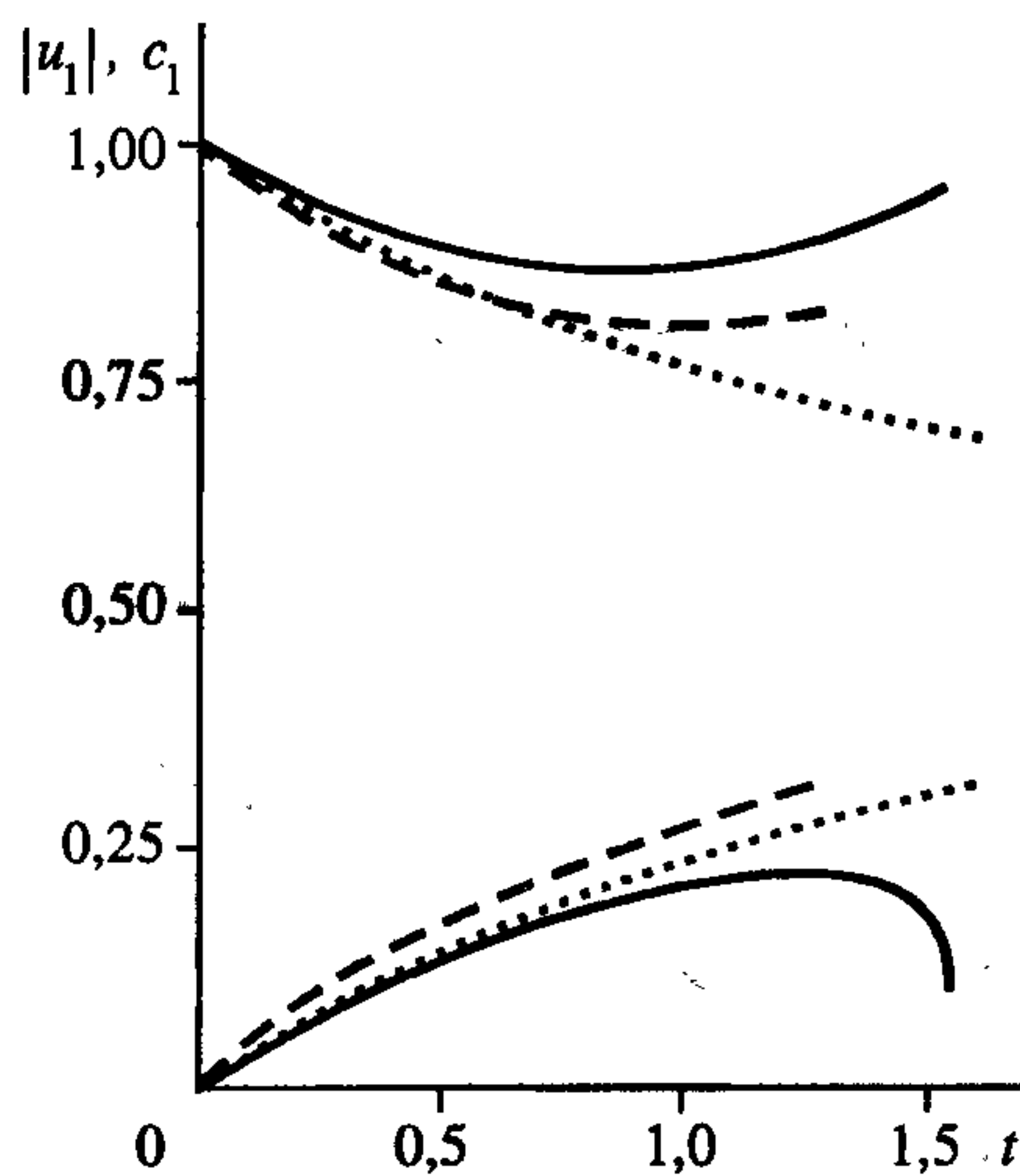


Рис. 6.7. Зависимость  $|u_1|$  и  $c_1$  от времени при  $m = 0,333$ ,  $q = 0,18$ .

Поясн. см. в тексте.

$|u_1(t)|$  и  $c_1(t)$  для двух значений параметра  $m_1$ , причем верхние кривые относятся к скорости звука в газе, а нижние — к скорости поршня. Сплошные кривые построены по результатам расчетов задачи 2, штриховые — задачи 1, а пунктирные — по формулам (6.1.38) и (6.1.39) соответственно.

Из графиков видно, что для тонких поршней (см. рис. 6.6) различия в скорости границы газ — поршень невелики для всех трех решений (если не рассматривать резкий спад сплошной кривой до нуля в конце схлопывания, что является следствием цилиндрической симметрии и несжимаемости среды). Для более толстостенных поршней (см. рис. 6.7) разница возрастает. В результатах для скорости звука  $c_1$  в газе на границе с поршнем наблюдается качественное различие между случаями плоской и цилиндрической симметрии. Оно заключается в том, что в случае цилиндрической симметрии течения падение скорости звука в газе на границе с поршнем замедляется и, начиная с некоторого момента времени, скорость звука (и давление) начинает возрастать. Спад и последующее повышение скорости звука происходит тем более резко, чем меньше толщина поршня  $m_1$ , т.е. чем выше скорость движения поршня и газа.

На рис. 6.8 приведено характерное распределение массовой скорости газа и скорости звука в возмущенной области в некоторый момент времени. Распределения в случае плоской симметрии являются линейными [15] и проведены на графике пунктирными линиями. В случае цилиндрической симметрии наблюдается нарушение линейности распределений, тем более заметное, чем ближе к оси симметрии. Сплошные кривые относятся к результатам решения задачи 2, а штриховые — задачи 1.

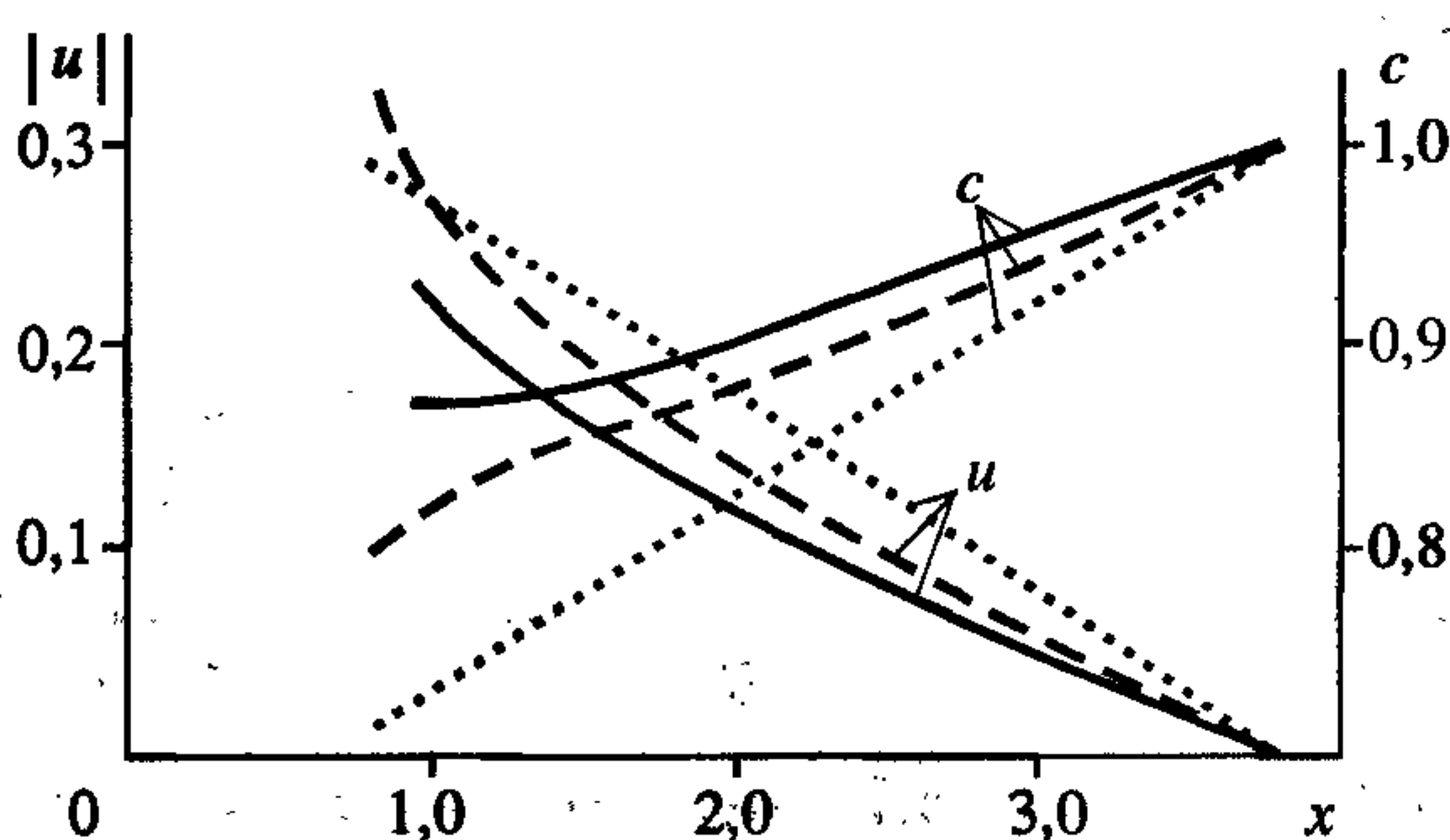


Рис. 6.8. Пространственное распределение массовой скорости газа и скорости звука при  $m = 0,333$ ,  $q = 0,18$ ,  $t = 2,50$ .

Поясн. см. в тексте.

Выражение для траектории плоского поршня на  $(x-t)$ -диаграмме можно получить, если проинтегрировать (6.1.38). Для траектории внутренней (по аналогии с цилиндрическим поршнем) границы получаем

$$x_2(t) = \left(1 - \frac{3m_1}{q}\right) - t + \frac{3m_1}{q} \sqrt{1 + \frac{2}{3} \frac{q}{m_1} t}. \quad (6.1.40)$$



Здесь учтено, что скорость поршня  $u_1$  отрицательна. На рис. 6.9 приводятся траектории внутренней границы поршня для нескольких значений параметра  $m_1$ . Пунктирные кривые относятся к плоскому поршню и построены по формуле (6.1.40). Смысл сплошных и штриховых кривых аналогичен предыдущему рисунку.

Из (6.1.40) можно найти плоский аналог времени схлопывания поршня, т.е. время, за которое плоский поршень пройдет расстояние  $x = 1$ . Приравняв нулю левую часть (6.1.40), получаем квадратное уравнение относительно времени схлопывания  $t^*$ . Решение его имеет вид

$$t_1^* = 1 + \sqrt{6m_1/q}. \quad (6.1.41)$$

Второе решение квадратного уравнения, со знаком минус перед корнем, отброшено, так как оно не имеет физического смысла. На рис. 6.10 приводятся зависимости времени схлопывания поршня от толщины поршня  $m_1$ . Сплошная и штриховая кривые относятся к цилиндрическому поршню и построены по результатам решения задач 2 и 1 соответственно. Пунктирная кривая 1 относится к плоскому поршню и построена по формуле (6.1.41).

Можно сформулировать другое определение времени "схлопывания" для плоского поршня. При схлопывании цилиндриче-

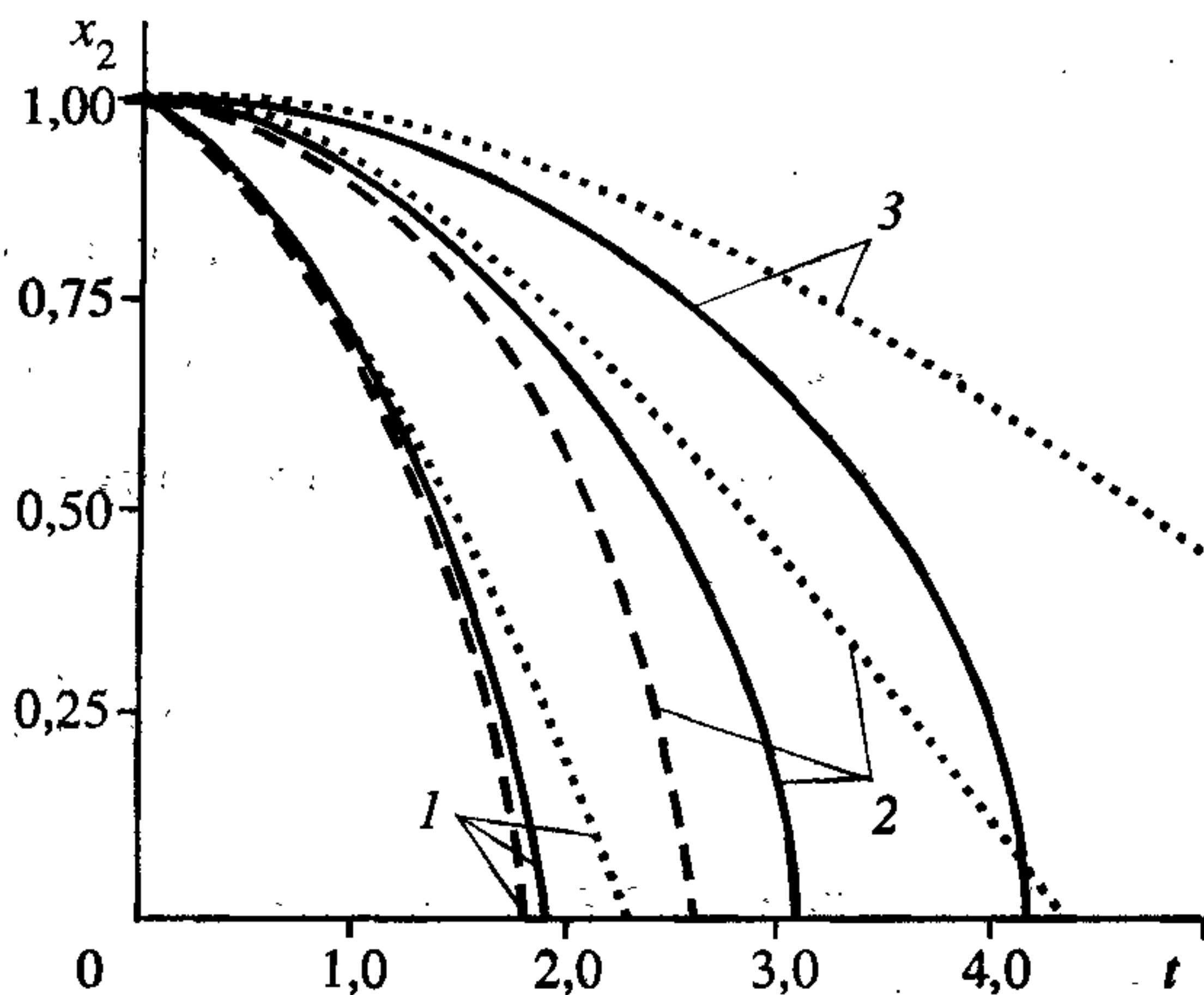


Рис. 6.9. Траектория поршня для различных значений толщины поршня  $m_1$  (0,053 (1), 0,333 (2), 1,000 (3)),  $q = 0,18$ .

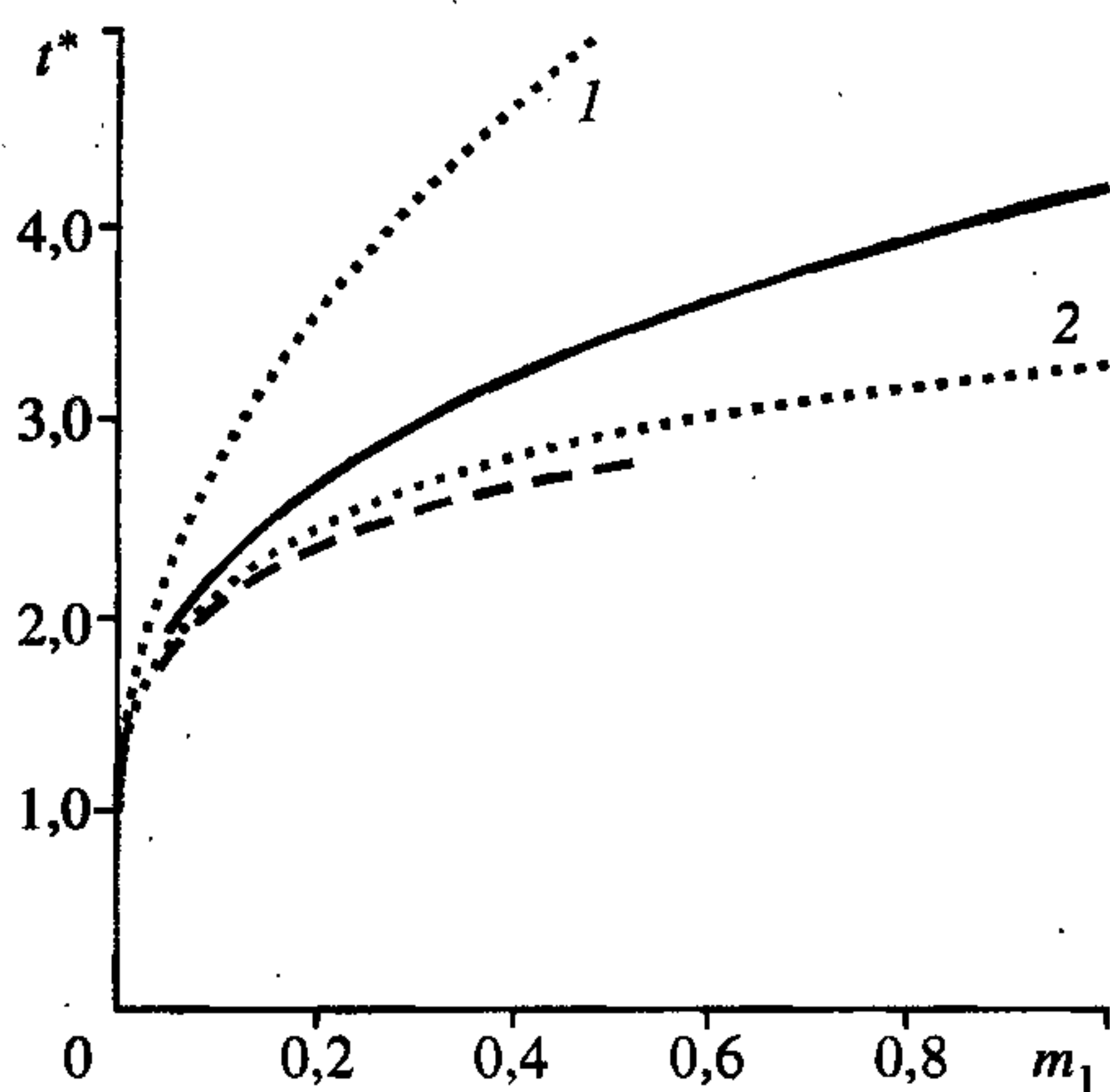


Рис. 6.10. Зависимость времени схлопывания поршня у оси симметрии от  $m_1$ .

Поясн. см. в тексте.

ского поршня происходит постоянное утолщение стенки поршня и внутренняя и наружная границы поршня проходят неодинаковый путь. Координата внутренней границы поршня меняется от единицы до нуля, а координата внешней границы — от  $1 + m_1$  до  $x_1^*$ , где  $x_1^*$  является предельным по несжимаемости радиусом наружной границы схлопнувшегося поршня. Величина предельного радиуса находится из соотношения

$$x_1^*(m_1) = \sqrt{(2m_1 + m_1^2)}. \quad (6.1.42)$$

В случае плоского поршня обе его границы проходят одинаковый путь. Сначала мы определили плоский аналог времени схлопывания поршня условием, что внутренняя не соприкасающаяся с газом граница плоского поршня проходит, как и в случае цилиндрического поршня, путь равный единице. Можно отвлечься от того, что плоский поршень при движении не утолщается, и определить плоский аналог времени схлопывания поршня как время, за которое наружная граница плоского поршня проходит путь, равный пути наружной границы аналогичного цилиндрического поршня. Траектория наружной границы плоского поршня также определяется выражением (6.1.40), с той разницей, что свободный член в правой части станет больше на величину  $m_1$ . Приравнявая левую часть (6.1.40) значению предельного радиуса (6.1.42) и решая квадратное уравнение, получаем выражение для второго плоского аналога времени схлопывания поршня

$$t_2^*(m_1) = (1 + m_1) - \sqrt{(2m_1 + m_1^2)} + \sqrt{\frac{6m_1}{q}} \cdot \sqrt{\left( (1 + m_1) - \sqrt{(m_1 + m_1^2)} \right)}. \quad (6.1.43)$$

Зависимость, описываемая формулой (6.1.43), приведена на рис. 6.10 пунктирной кривой 2.

Здесь необходимо следующее замечание. При стремлении толщины поршня к нулю задача о его движении вырождается в задачу о разлете сжатого газа в вакуум. В плоском случае решение задачи о движении поршня остается справедливым при  $m_1 \rightarrow 0$  и переходит в решение задачи о разлете газа в вакуум, если во всех формулах положить  $m_1 = 0$ .

Задача о заполнении сжимаемой жидкостью цилиндрической (или сферической) полости представляет самостоятельный интерес. В связи со сказанным, кривые на рис. 6.10, относящиеся к плоскому поршню, продолжены до  $m_1 = 0$ , а



кривые, относящиеся к цилиндрическому поршню, обрываются при значении  $m_1 = 0,05$ , которое являлось минимальным в проведенных расчетах.

**Задача 3.** О движении цилиндрической оболочки под действием адиабатически расширяющегося газа конечной толщины  $\Delta_0$  [11].

Процесс схлопывания оболочки к оси симметрии в этой задаче сопровождается распространением двух волн разрежения: одна — по газу от контактной границы газ—оболочка, другая — перемещается внутрь невозмущенного газа со скоростью  $a_0$  от свободной границы разлетающегося газового потока. В момент времени  $t = \Delta_0 / 2a_0$  обе волны разрежения встречаются и начинают взаимодействовать. Очевидно, что существует некоторая предельная толщина слоя газа  $\Delta_0^*$ , выше которой наличие свободной поверхности газ—вакуум не будет оказывать влияние на движение поршня. В задаче 3 рассматривается случай  $\Delta_0 < \Delta_0^*$  и используются уравнения движения поршня, полученные для задачи 2.

Заметим, что, в отличие от задачи 2,  $r_0$  здесь является начальным наружным радиусом поршня, а толщина слоя газа  $\Delta_0 / r_0$ .

Решение уравнений, описывающих одномерное движение газа с цилиндрической симметрией, опять ищется в виде

$$u(x, t) = \frac{v(r, t)}{a_0}, \quad c(x, t) = \frac{a(r, t)}{a_0},$$

где  $u(x, t)$  и  $c(x, t)$  соответственно безразмерные массовая скорость и скорость звука.

Рассмотрим  $(x-t)$ -диаграмму рассматриваемого процесса схождения цилиндрической оболочки (рис. 6.11), где  $X_1(t)$  — траектория переднего фронта волны разрежения, распространяющейся влево с границы газ—вакуум;  $X_2(t)$  — переднего фронта волны разрежения, распространяющейся вправо и возникающей на движущемся поршне. Кривые  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$  имеют прямолинейные участки до точки их взаимного пересечения. Уравнения этих кривых на прямолинейных участках имеют вид

$$X_1(t) = \left(1 + \frac{\Delta_0}{r_0}\right) - t, \quad X_2(t) = 1 + t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\Delta_0}{2r_0}. \quad (6.1.44)$$



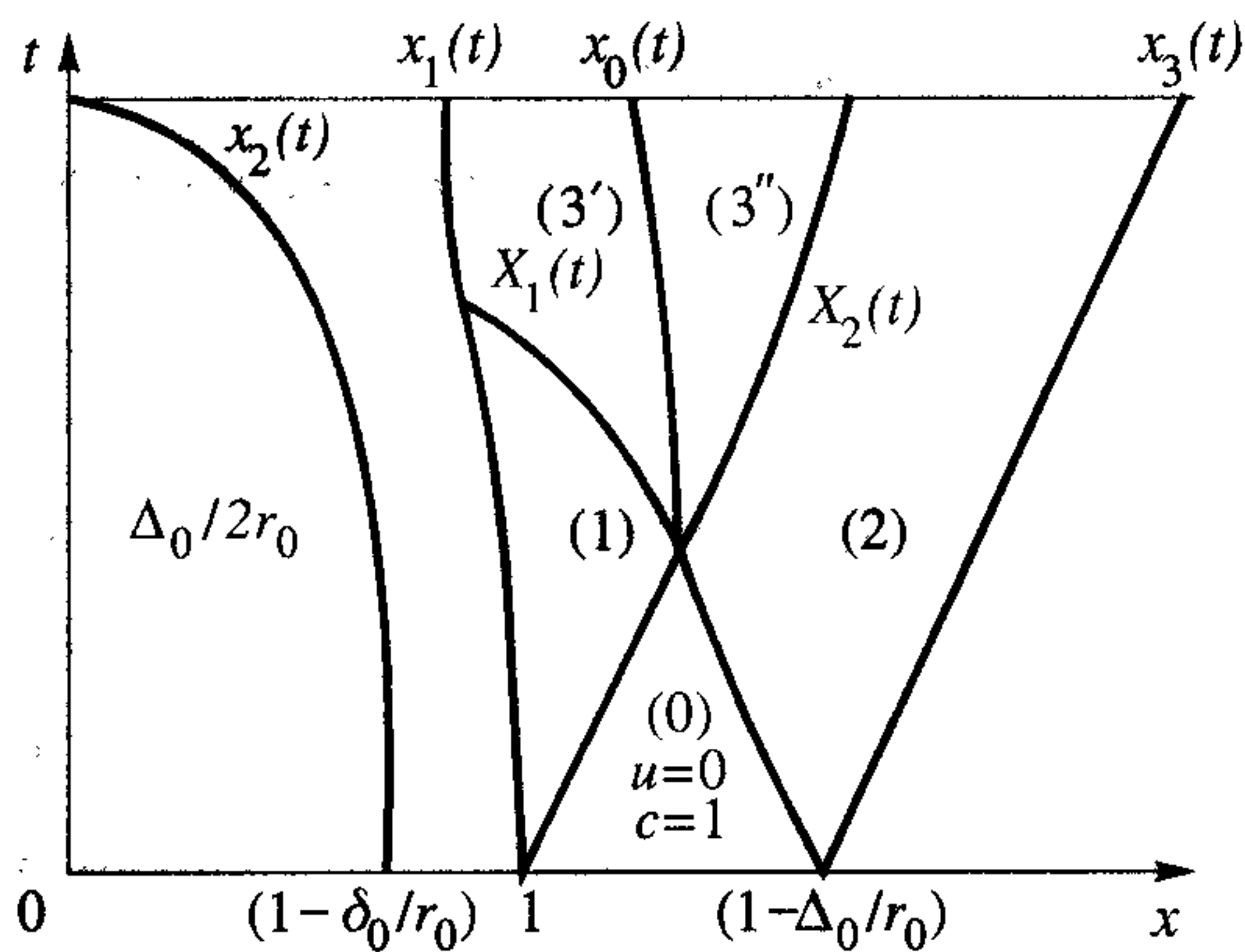


Рис. 6.11.  $(x - t)$ -диаграмма процесса схлопывания цилиндрической оболочки к оси симметрии.

Поясн. см. в тексте.

Ось  $x$  и линии (6.1.44) ограничивают область невозмущенного газа (на рис. 6.11 — область (0)), где  $u = 0$ ,  $c = 1$ . Граница газ—вакуум является прямой линией, так как эту границу не может догнать ни одно возмущение (см., например, [16]). Скорость перемещения этой границы равна максимальной скорости истечения газа в вакуум, которая для случая  $\gamma = 3$  равна начальной скорости звука в газе. В силу этого уравнение линии  $x_3(t)$ ,

являющейся на  $(x - t)$ -диаграмме границей разлетающегося в вакуум газа, имеет вид  $x_3(t) = (1 + \Delta_0 / r_0) + t$ .

Таким образом, область движущегося газа на  $(x - t)$ -диаграмме ограничена линией поршня  $x_1(t)$ , прямолинейными участками (6.1.44) передних фронтов волн разрежения  $X_1$  и  $X_2$  и линией  $x_3(t)$  разлета газа в вакууме. В свою очередь, эта область может быть разделена на несколько частей (см. рис. 6.11). Область (1) является областью движения газа в волне разрежения, возникающей на поршне; (2) — областью движения газа в волне разрежения, возникающей при разлете газа в вакуум; (3) — областью взаимодействия упомянутых волн разрежения. Область (3) делится линией  $x_0(t)$  на две части. Слева от нее (область (3')) скорость движущегося газа направлена к оболочке, а справа (область (3'')) — к границе газ—вакуум. На самой линии  $x_0(t)$  массовая скорость газа равна нулю.

Выпишем условия на границе области движущегося газа:

на  $x_1(t)$ :  $u = u_1$ ,  $c = c_1$ ,

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{1}{x_1 \ln \frac{x_1}{x_2}} \left\{ \frac{1}{2} u_1^2 \left[ \left( \frac{x_1}{x_2} \right)^2 - 1 \right] - u_1^2 \ln \frac{x_1}{x_2} - \frac{1}{3} \frac{\rho_0}{\rho_1} c_1^3 \right\}, \quad (6.1.45)$$

$$x_2(t) = \sqrt{x_1^2(t) - 2\frac{\delta_0}{r_0} + \left(\frac{\delta_0}{r_0}\right)^2}, \quad (6.1.46)$$

где уравнение движения наружной границы оболочки (6.1.45) получено выше, а соотношение (6.1.46) выражает условие сохранения массы несжимаемого поршня; на  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$  ( $0 \leq t \leq \Delta_0/2r_0$ ):  $u=0$ ,  $c=1$ ; на  $x_3(t)$ :  $u=1$ ,  $c=0$ .

Решение уравнений одномерного движения газа с цилиндрической симметрией с граничными условиями (6.1.45), (6.1.46) также получено численно методом характеристик. В данном случае до момента времени  $t = \Delta_0/2r_0$  приходилось находить решение в двух областях движения — (1) и (2), имеющих разные граничные условия, причем решение для области (1) ничем не отличается от решения задачи 2. Для  $t > \Delta_0/2r_0$  решение находилось сразу для всей области от поршня до границы газ—вакуум. Построены решения для ряда значений параметров  $\delta_0/r_0$  и  $\Delta_0/r_0$ . Для параметра  $\rho_0/\rho_1$  во всех расчетах выбрано значение 0,18. Ниже приводятся некоторые результаты численных расчетов.

Задачу о движении цилиндрической оболочки, окруженной слоем газа конечной толщины, можно рассмотреть в импульсной постановке. В этом случае пренебрегается понижением давления в газе на границе с поршнем в волне разрежения, возникающей при движении поршня, и предполагается, что на поршень действует постоянное давление  $P_0$  в течение времени  $t = \Delta_0/a_0$ , после чего это давление снимается мгновенно волной разрежения, приходящей со свободной границы газа. В работе [17] выведены уравнения движения цилиндрической оболочки для каждой из двух фаз движения поршня — фазы постоянного давления на поршень и фазы инерциального движения поршня с сохранением кинетической энергии. Эти уравнения в принятых в настоящей работе обозначениях решены численно и результаты расчетов также приводятся на соответствующих графиках.

На рис. 6.12 представлены зависимости давления  $P_1(t)$  в газе на границе с оболочкой для различных ее толщин и толщины слоя газа, причем  $p_1$  — давление, отнесенное к начальному давлению  $P_0$ , определяемому выражением (6.1.9). Кривые под номером 4 относятся к бесконечно большой толщине слоя и построены по результатам работы [10]. Вертикальные штрихпунктирные линии показывают время окончания действия давления  $P_1 = 1$  на оболочку при рас-



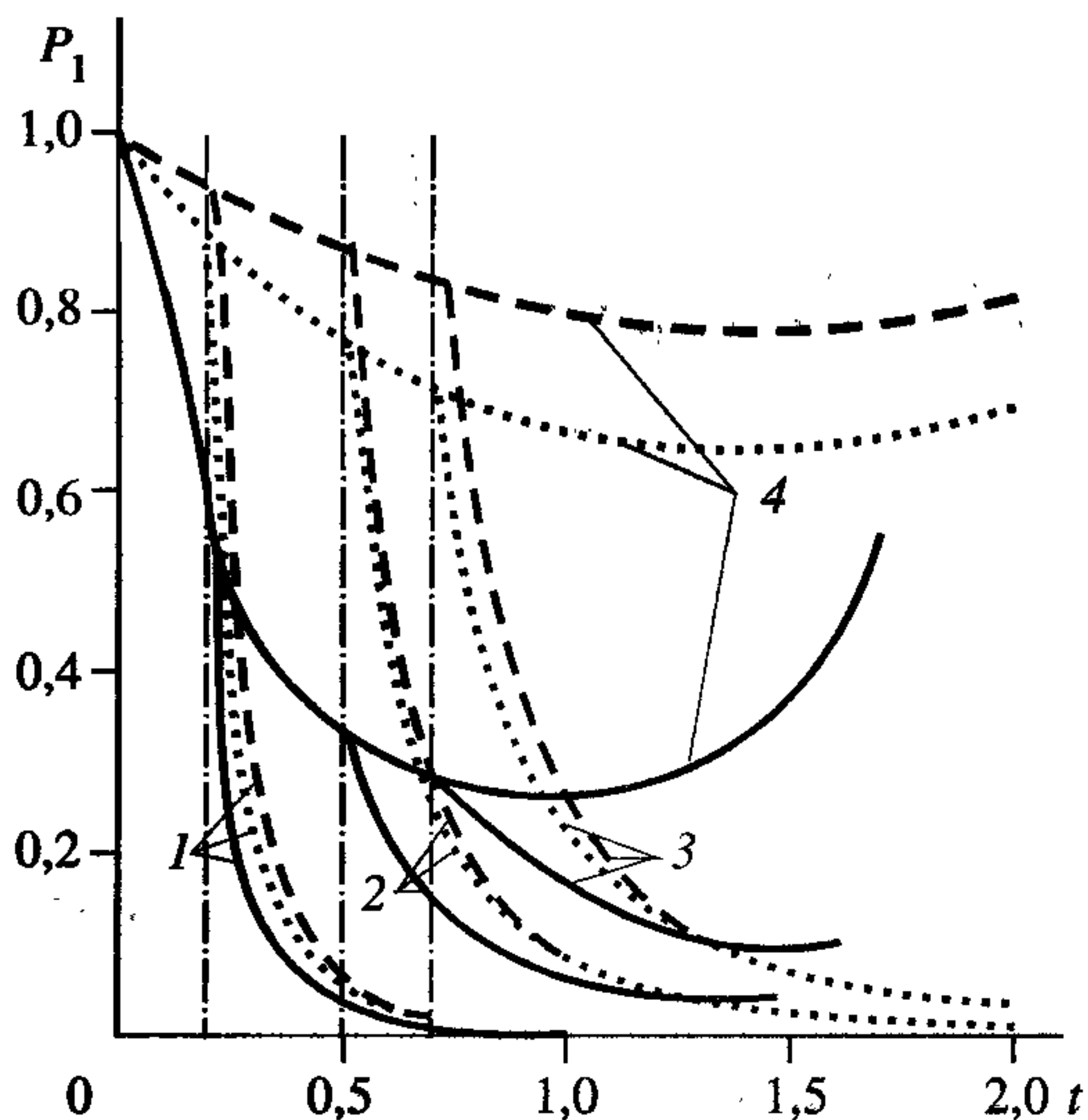


Рис. 6.12. Зависимость давления в газе на границе с оболочкой от времени.

Сплошные линии —  $\delta_0/r_0 = 0,05$ , пунктирные —  $\delta_0/r_0 = 0,25$ , штриховые —  $\delta_0/r_0 = 0,45$ .  $\Delta_0/r_0 = 0,2$  (1),  $0,5$  (2),  $0,7$  (3),  $\infty$  (4).

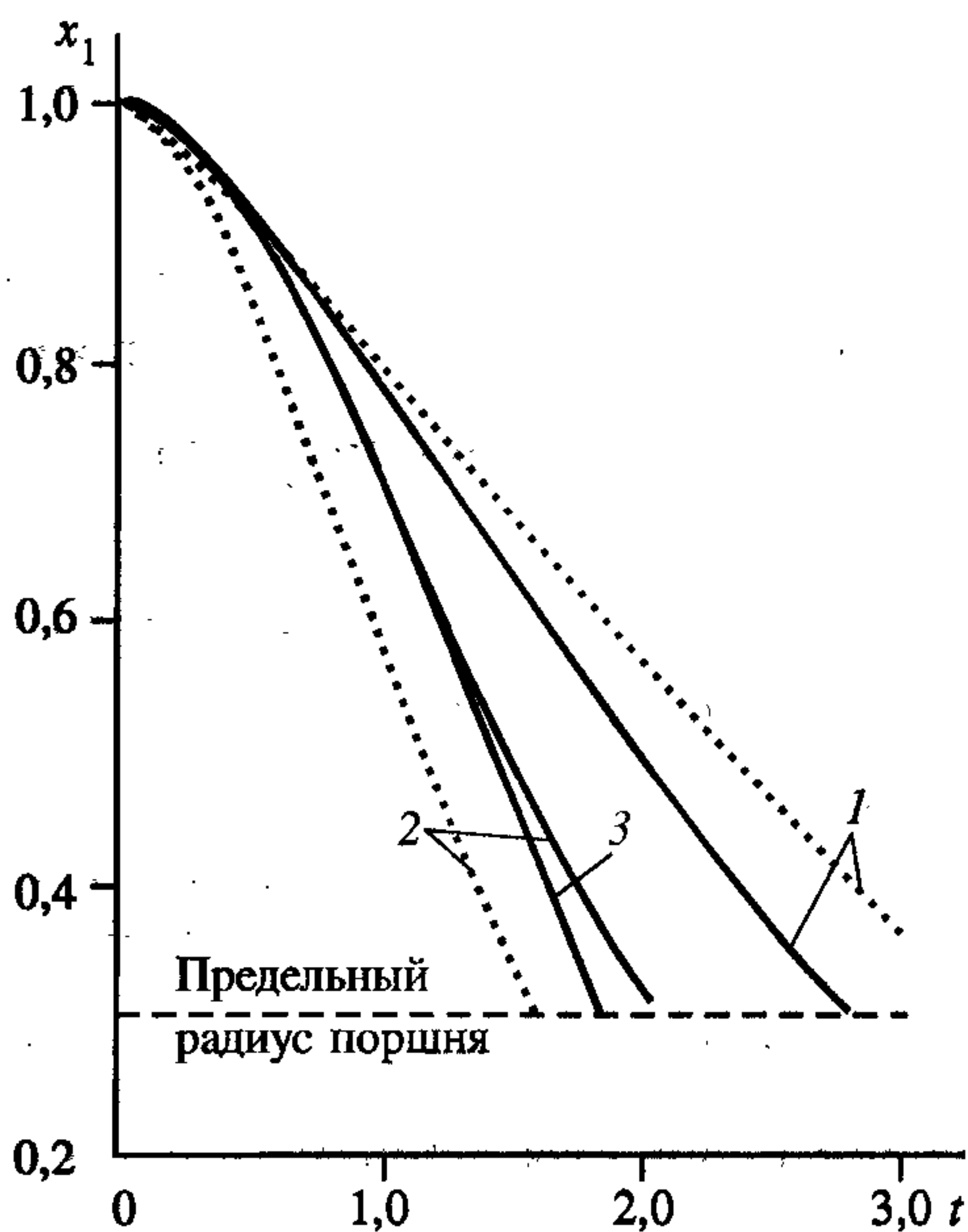


Рис. 6.13. Траектория наружной поверхности оболочки.

$\delta_0/r_0 = 0,05$ ;  $\Delta_0/r_0 = 0,2$  (1),  $0,5$  (2),  $\infty$  (3).  
Ост. поясн. см. в тексте.

смотреии задачи в импульсной постановке. Профиль давления в этом случае есть ступенька. На рис. 6.13 приведены траектории наружной границы тонкой оболочки (относительная толщина — 0,05) для двух значений толщины слоя газа. Сплошные кривые на этом и всех последующих рисунках относятся к результатам, полученным при численном решении задачи методом характеристик, а пунктирные кривые — к результатам решения задачи в импульсной постановке.

На рис. 6.14 приводятся зависимости скорости наружной границы оболочки  $u_1(t)$ , соответствующие случаям, представленным на рис. 6.13. Из рис. 6.13 видно, что в начальные моменты времени импульсное решение для координаты оболочки “обгоняет” точное численное решение. Это связано с тем, что в точном решении учитывается спад давления в газе в волне разрежения, возникающей при движении оболочки, а в импульсном — на оболочку действует постоянное давление  $P_1 = 1$ . Естественно, это отражается и на значениях скорости. В момент прихода волны разрежения со свободной границы газа на оболочку высокое давление газа на ней снимается, импульсное решение — штрихпунктирные линии



на рис. 6.12, а в точном решении спад давления происходит постепенно и тем медленнее, чем толще оболочка. Если импульсное давление  $P_1 = 1$  действует на оболочку достаточно долго (т.е. достаточно велика толщина слоя газа), то в импульсном решении она успевает набрать высокую скорость и схлопывается быстрее, чем в точном решении (кривые 2 на рис. 6.13 и рис. 6.14). С другой стороны, если импульс был коротким и оболочка не успела достаточно разогнаться, то остаточное давление в том решении успевает оказать влияние на параметры движения и оболочка движется быстрее, чем в импульсном решении (кривые 1 на рис. 6.13 и 6.14). Рис. 6.15 и 6.16 аналогичны рисункам 6.13 и 6.14, но относятся к более массивной оболочке (относительная ее толщина — 0,45). Цифровые обозначения кривых аналогичны рис. 6.13.

На рис. 6.17 приводятся зависимости времени  $t^*$  полного схлопывания поршня от толщины оболочки для различных толщин слоя газа (сплошные кривые относятся к точному, пунктирные — к импульсному решению). Пересечение сплошных и пунктирных кривых, относящихся к одной и той же толщине слоя газа, дает такие толщину оболочки и слоя газа, для которых она схлопывается

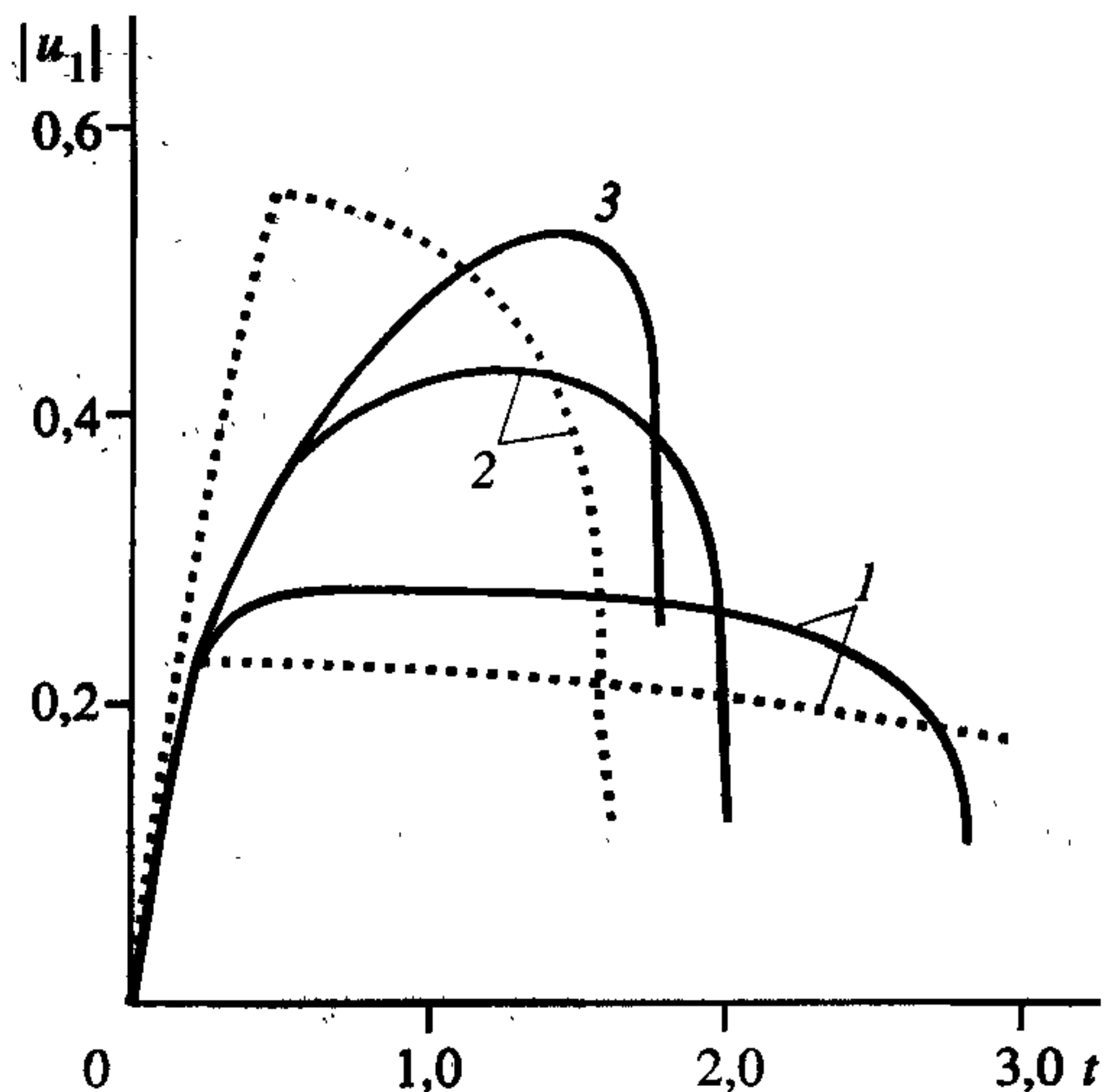


Рис. 6.14. Зависимость скорости наружной поверхности оболочки от времени. Усл. обозн. см. рис. 6.13.

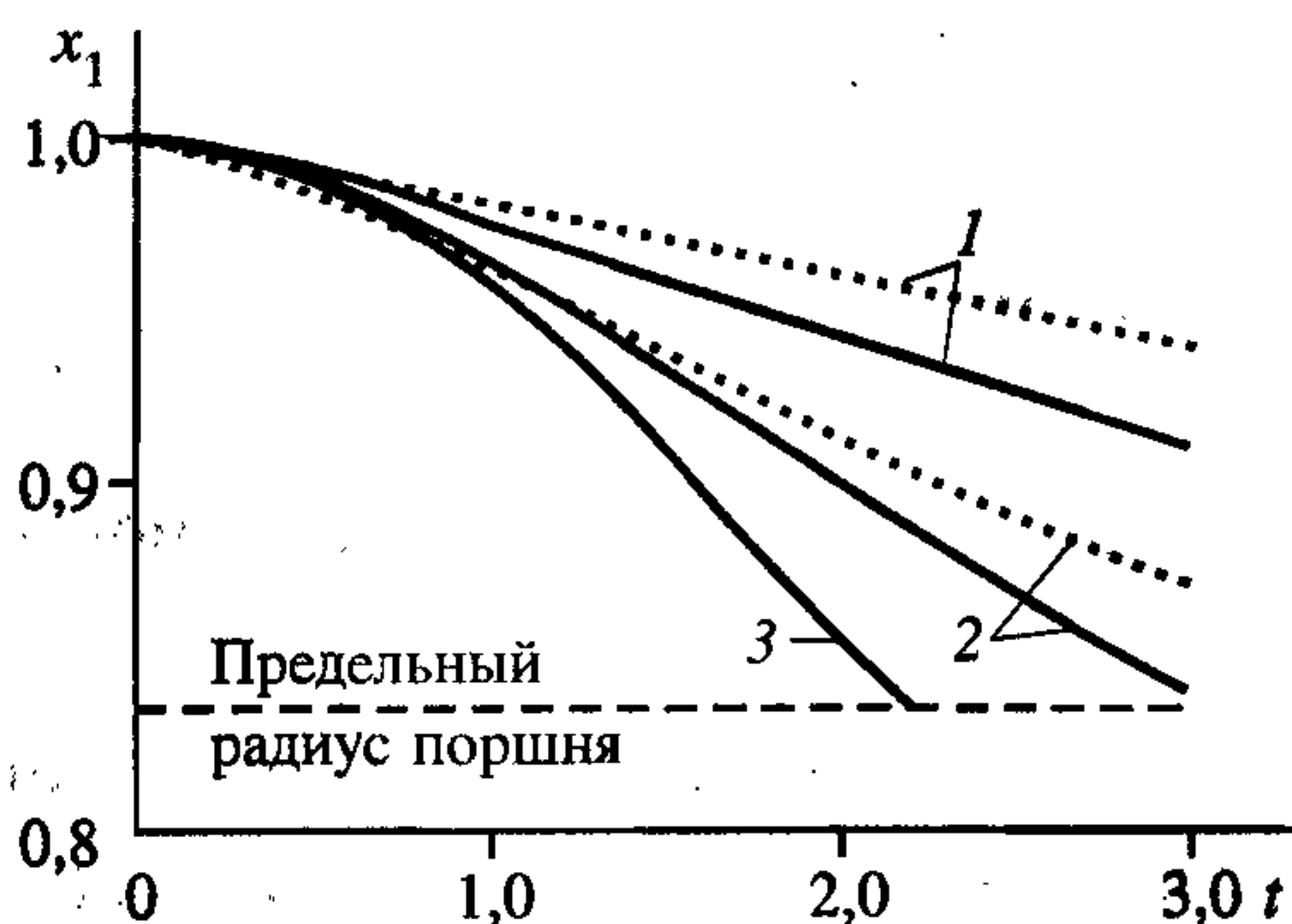


Рис. 6.15. Траектория наружной поверхности оболочки.

$\delta_0/r_0 = 0,45$ . Ост. усл. обозн. см. рис. 6.13.

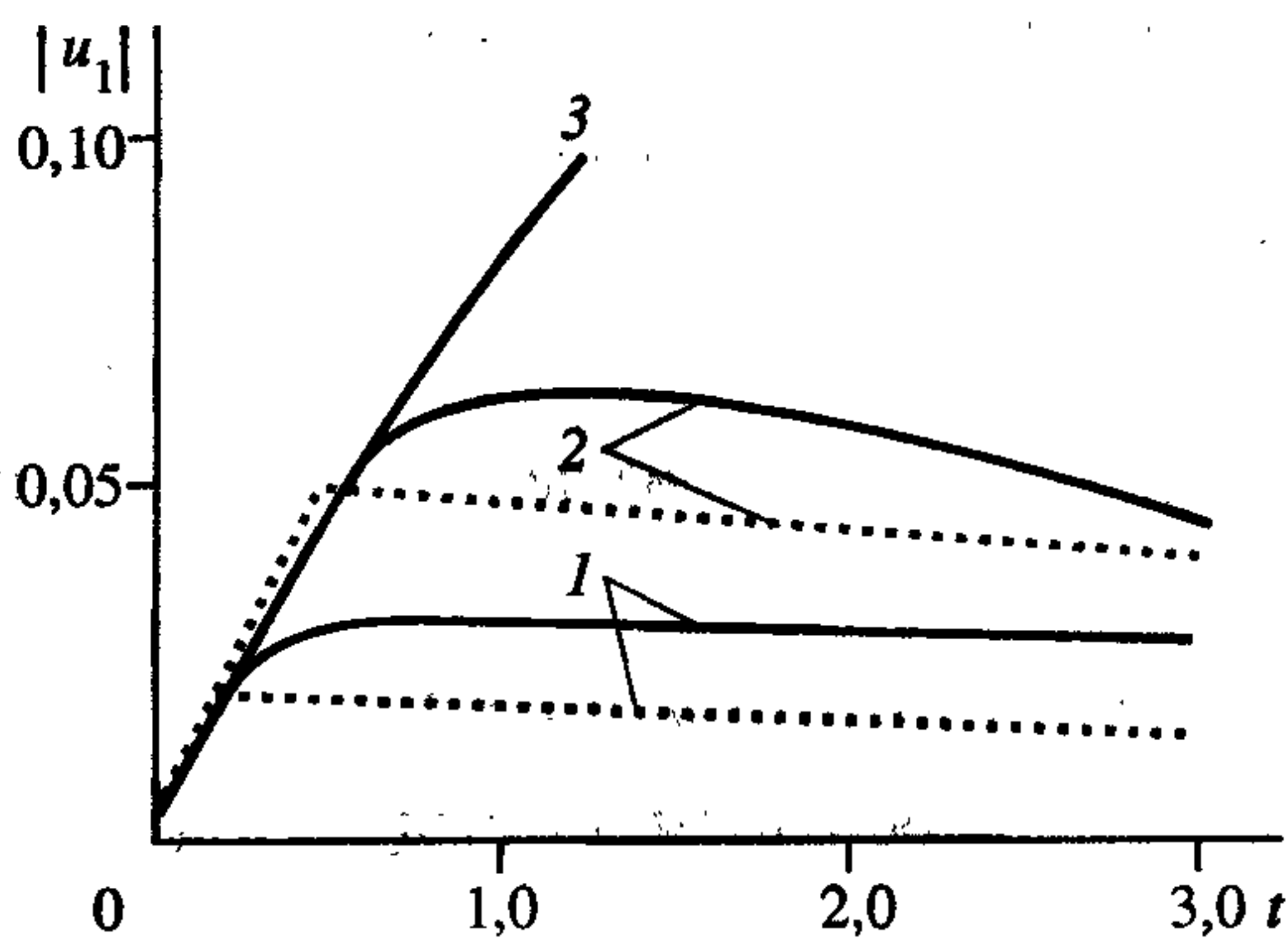


Рис. 6.16. Зависимость скорости наружной поверхности оболочки от времени.  $\delta_0/r_0 = 0,45$ . Ост. усл. обозн. см. рис. 6.13.

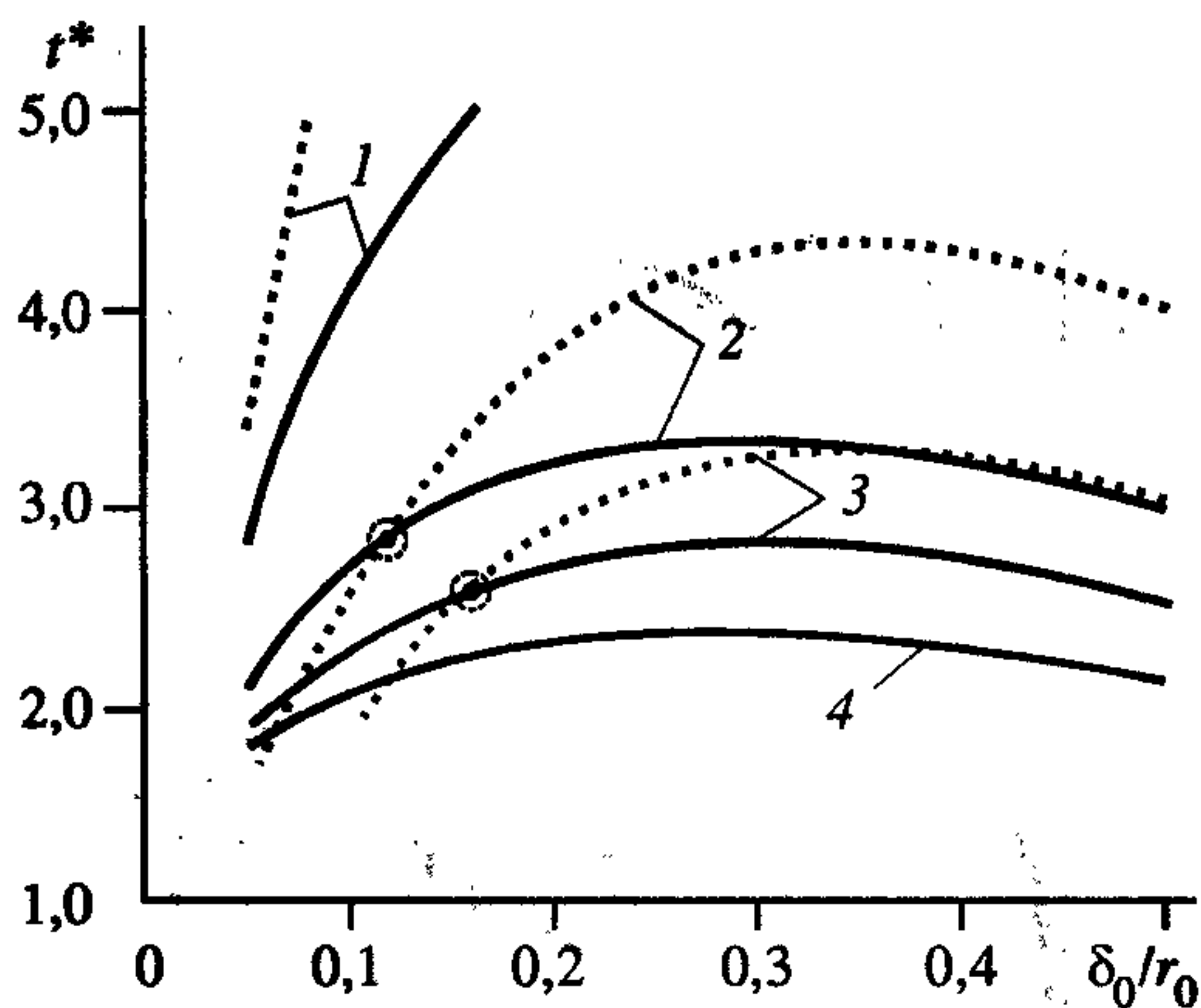


Рис. 6.17. Зависимость времени схлопывания оболочки у оси симметрии от толщины слоя газа.

$$\Delta_0/r_0 = 0,2 (1), 0,5 (2), 0,7 (3), \infty (4).$$

толщин оболочки и слоя газа, в которой рассматриваемую задачу можно решать в импульсной постановке.

**Задача 4.** Схлопывание к оси вязкой несжимаемой цилиндрической оболочки [18].

Опыт применения для метаемой взрывом оболочки модели идеальной несжимаемой жидкости показал, что расчетные кривые зависимости радиуса оболочки от времени хорошо совпадают с экспериментальными до некоторого момента времени. Заметное расхождение начинается в конце процесса схлопывания оболочки. Расхождение с экспериментом было преодолено при использовании модели вязкой несжимаемой жидкости для материала оболочки. Кроме того, эта модель объяснила и ряд физических эффектов, впервые полученных экспериментально: остановку оболочки при достижении внутренней поверхности некоторого критического радиуса, не равного нулю, “взрывное” испарение оболочки вследствие быстрого перехода всей кинетической энергии оболочки в тепло из-за действия вязких сил, динамическую потерю устойчивости оболочки.

Пусть имеется цилиндрическая оболочка вязкой несжимаемой жидкости, окруженная слоем сжатого газа. Начальные параметры газа: давление  $P_0$ , плотность  $\rho_0$ , скорость звука в газе  $a_0$ , толщина слоя  $\Delta_0$ ; оболочки: плотность вещества  $\rho_1$ , динамический коэффициент вязкости  $\mu$ , внутренний радиус  $R_0$ ,

одновременно как в точном, так и в импульсном решении. Следовательно, в некоторой окрестности значений этих толщин оболочки и слоя газа можно говорить в какой-то мере о совпадении точного и импульсного решений. Задаваясь определенной степенью точности этого совпадения (например, по наибольшему отклонению траекторий точного и импульсного решений или по времени полного схлопывания поршня), можно найти некоторую окрестность вышеупомянутых тол-



наружный радиус  $r_{10}$ . Внутри оболочки и вне слоя сжатого газа вакуум.

Считая, что газ, окружающий цилиндрическую оболочку, является продуктом мгновенной детонации с  $\gamma = 3$ , можно написать соотношение (6.1.9), а с учетом адиабатичности — (6.1.10). Уравнения движения газа и неразрывности для  $u(t)$  и  $a(t)$  имеют вид (6.1.17).

Как и прежде, для цилиндрической оболочки выполняются соотношения, выражающие закон сохранения массы и уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости (пусть  $R = r_2$ ):

$$\begin{aligned} r_1^2(t) - R^2(t) &= r_{10}^2 - R_0^2 = C = \text{const}, \\ r_1(t)\dot{r}_1(t) &= R(t)\dot{R}(t) = rv. \end{aligned}$$

Начальные условия очевидны:

$$\begin{aligned} u(r, 0) = \dot{r}_1(0) &= 0, \quad a(r, 0) = a_0, \quad r_1(0) = r_{10}, \quad R(0) = R_0, \\ X_3(0) &= r_{10} + \Delta_0. \end{aligned}$$

Условия на границе области движущегося газа

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{на } X_3(t) \quad u = a_0, \quad a = 0; \\ \text{на } X_1(t), X_2(t) \text{ для } 0 \leq t \leq \frac{\Delta_0}{2a_0} \quad u = 0, \quad a = a_0; \\ \text{на } r_1(t) \quad u = \dot{r}_1, \quad a = a_1. \end{array} \right.$$

На  $r_1(t)$  также выполняется соотношение, связывающее ускорение оболочки с параметрами оболочки и газа, которое можно получить из энергетических соображений.

Рассмотрим закон сохранения механической энергии для некоторого объема  $V$  сплошной среды, который в общем случае имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_1 \frac{v_i^2}{2} dV + \int_V D_{ij} \sigma_{ji} dV = \int_S v_i t_i^{(n)} dS, \quad (6.1.47)$$

где  $\rho_1$  — плотность среды;  $v_i$  — вектор скорости материальной точки;  $D_{ij}$  — тензор скоростей деформации;  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжений;  $S$  — поверхность, ограничивающая объем  $V$ ;  $t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$  — вектор напряжения на площадке  $dS$  с нормалью  $n$ .

Уравнение (6.1.47) устанавливает связь между скоростью изменения пол-



ной механической энергии среды и мощностью поверхностных сил. Применим уравнение (6.1.47) к одномерному осесимметричному движению цилиндрической оболочки, сходящейся к оси под действием давления  $P$  газа на внешней поверхности оболочки (давление газа на внутренней поверхности  $P=0$ ). Оболочка представляет собой несжимаемую ньютоновскую жидкость, для которой

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}.$$

В случае цилиндрической симметрии  $D_{rr} = \partial v / \partial r$ ,  $D_{\varphi\varphi} = v/r$ , а остальные  $D_{ij} = 0$ . Кроме того,  $D_{ij}\sigma_{ji} = -PD_{ii} + 2\mu D_{ij}D_{ij} = 2\mu D_{ij}D_{ij}$ , так как  $D_{ii} = 0$  вследствие  $\rho_1 = \text{const}$  и уравнения неразрывности (6.1.11). С учетом уравнения неразрывности (6.1.11) имеем

$$D_{ij}\sigma_{ji} = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{v}{r} \right)^2 \right] = 4\mu R^2 \frac{\dot{R}^2}{r^4}. \quad (6.1.48)$$

Тогда уравнение (6.1.47) для единицы длины оболочки с учетом (6.1.11) приобретает вид

$$\frac{d}{dt} \left[ \pi \rho_1 (R\dot{R})^2 \ln \frac{r_1}{R} \right] - \frac{4\mu\pi CR^2}{r_1^2} = -2\pi R\dot{R}P, \quad (6.1.49)$$

где  $C = r_1^2 - R^2 = \text{const}$ .

Дифференцируя первый член уравнения (6.1.49) по времени и используя соотношения (6.1.9), (6.1.10), окончательно получаем

$$\frac{d\dot{r}_1}{dt} = \frac{1}{r_1 \ln \frac{r_1}{R}} \left( \frac{C\dot{r}_1^2}{2R^2} - \frac{2\nu C\dot{r}_1}{r_1 R^2} - \frac{\rho_0 a_1^3}{3\rho_1 a_0} \right) - \frac{\dot{r}_1^2}{r_1}, \quad (6.1.50)$$

где  $\nu = \mu/\rho_1$  — кинематическая вязкость. Соотношение (6.1.50) является граничным условием для области движущегося газа и выполняется на кривой  $r_1(t)$ .

Решение уравнений одномерного движения газа с цилиндрической симметрией строилось численно описанным выше методом характеристик. Совпадение расчетных кривых зависимости радиуса цилиндрической оболочки от времени с экспериментальными достигалось подбором величины кинематической вязкости материала оболочки. Для меди величина кинематической вязкости при этом оказалась равной  $\nu = 0,7 \cdot 10^4 \text{ см}^2/\text{с}$ , что меньше кинематической

вязкости, приведенной в [3]. На рис. 6.18 представлены расчетные зависимости радиуса схлопывающейся медной цилиндрической оболочки ( $R_0 = 9$  мм,  $r_{10} = 11,7$  мм,  $\rho_1 = 8,9$  г/см<sup>3</sup>) под действием слоя ВВ — сплава тротила с гексогеном ТГ 50/50 ( $\rho_{ВВ} = 1,65$  г/см<sup>3</sup>,  $D = 7,5$  км/с,  $a_0 = 4,5$  км/с). Сплошные кривые построены для вязкой оболочки с  $\nu = 0,7 \cdot 10^4$  см<sup>2</sup>/с, штриховые — для модели идеальной несжимаемой жидкости ( $\nu = 0$ ). Кривые 1—3 относятся к разным толщинам ВВ на внешней поверхности цилиндрической оболочки ( $\Delta_0 = 8,2; 5,9$  и  $2,4$  мм соответственно). Точками нанесены результаты экспериментов. Хорошее наложение экспериментальных точек на расчетные кривые для выбранного коэффициента кинематической вязкости в течение всего процесса схлопывания и значительное расхождение экспериментальных точек с моделью идеальной несжимаемой жидкости в конце процесса говорят в пользу модели вязкой несжимаемой жидкости.

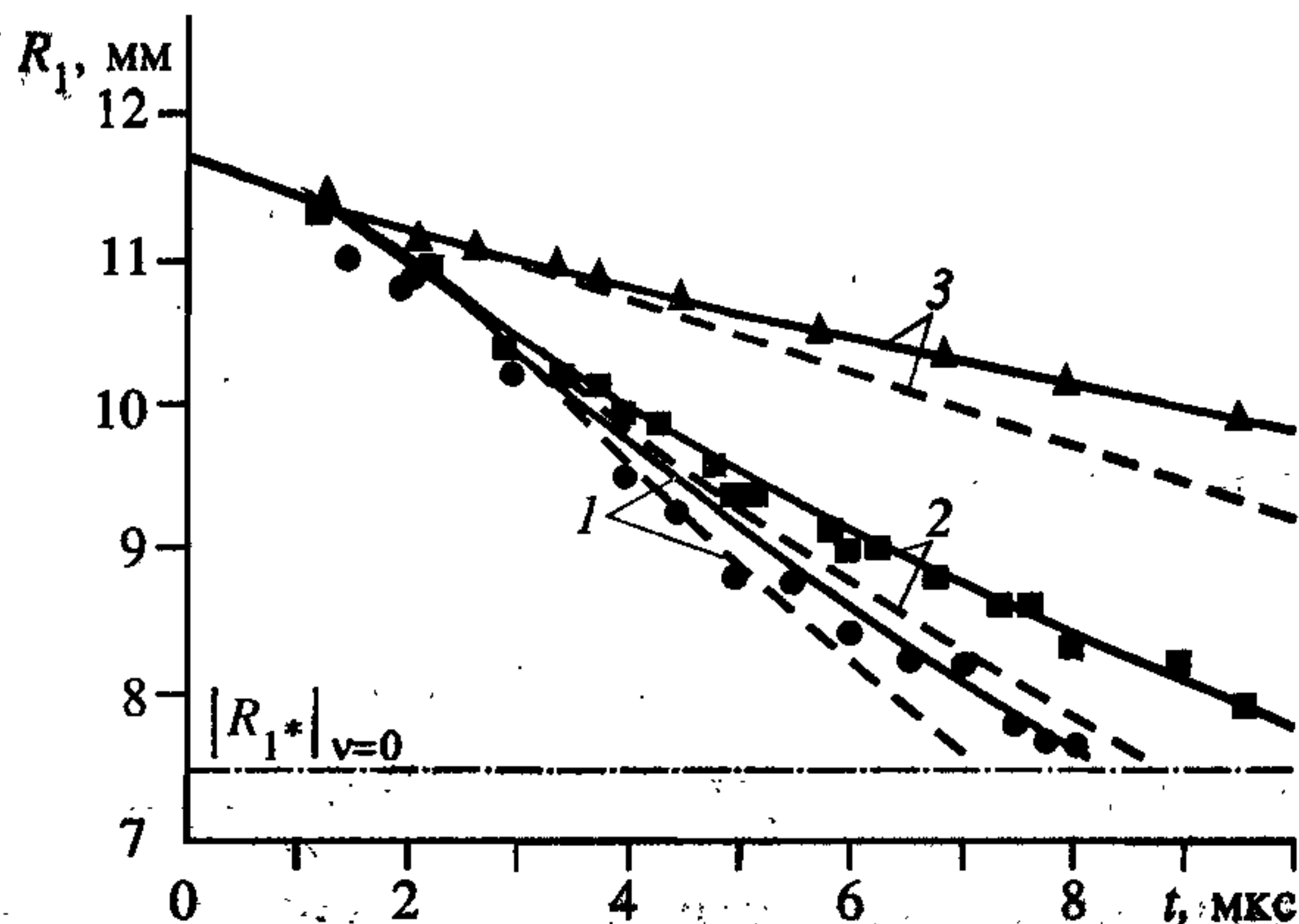


Рис. 6.18. Влияние модели оболочки на процесс схлопывания.

Поясн. см. в тексте.

Рассмотрим инерционное схлопывание вязкой цилиндрической оболочки, когда давление газа как на наружной, так и на внутренней поверхности оболочки равна нулю, а  $R = R_0$ ,  $r_1 = r_{10}$ ,  $\dot{R} = \dot{R}_0$  при  $t = 0$ . В этом случае из уравнения (6.1.49) имеем

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{4\pi\rho_1\nu C\dot{R}^2}{r_1^2}, \quad (6.1.51)$$

где  $E = \pi\rho_1(R\dot{R})^2 \ln(r_1/R)$  — кинетическая энергия на единицу длины цилиндрической оболочки. Интегрируя (6.1.51) при условии, что  $E = E_0$  при  $R = R_0$ , получаем

$$\sqrt{E} = \sqrt{E_0} - 4\nu\sqrt{\pi\rho_1} \left( \sqrt{\ln \frac{r_1}{R}} - \sqrt{\ln \frac{r_{10}}{R_0}} \right). \quad (6.1.52)$$

Соотношение (6.1.52) указывает на то, что имеется  $R = R_* \neq 0$ , когда  $E = 0$ :

$$R_* = R_0 \sqrt{\frac{(r_{10}/R_0)^2 - 1}{(r_{10}/R_0)^m - 1}}, \quad (6.1.53)$$

$$\text{где } m = 2 \left( 1 + \frac{R_0 |\dot{R}_0|}{4\nu} \right)^2 = 2 \left( 1 + \frac{\text{Re}}{4} \right)^2.$$

Радиус  $R_*$  остановки оболочки на некотором расстоянии от оси симметрии в общем случае при взрыве ВВ в контакте с оболочкой весьма мал из-за очень сильной зависимости от числа Рейнольдса, определенного в виде  $\text{Re} = R_0 |\dot{R}_0| / \nu$ . Действительно, для медной оболочки ( $\nu = 0,7 \cdot 10^4 \text{ см}^2/\text{с}$ ) с внутренним радиусом 50 мм и толщиной 5 мм при начальной скорости схлопывания  $\dot{R}_0 = 1 \text{ км/с}$  радиус остановки получается равным  $\approx 10^{-14} \text{ см}$ . Ясно, что такую величину никакими инструментальными измерениями обнаружить невозможно. Но радиус остановки  $R_*$  может оказаться значительным для цилиндрических оболочек, у которых величина  $\text{Re} \rightarrow 0$ . Если теперь взять медную оболочку, имеющую ту же начальную скорость схлопывания 1 км/с, но толщиной 0,5 мм и  $R_0 = 5 \text{ мм}$ , то  $R_*$  окажется равным 1,23 мм и его можно зафиксировать при рентгеноимпульсной съемке. Может показаться, что если в оболочке есть диссипативные силы, то эффект остановки можно получить и при действии, например, сил прочности материала оболочки. В работе [19] теоретически исследован случай инерционного схождения упругопластической цилиндрической оболочки к оси симметрии и найдена минимальная начальная скорость  $\dot{R}_{0*}$ , при которой оболочка захлопывается. Для медного цилиндра с  $R_0 = 9 \text{ мм}$ ,  $r_{10} = 10 \text{ мм}$ , у которого предел текучести  $\sigma_s = 6,85 \cdot 10^8 \text{ дин/см}^2$ , начальная скорость  $\dot{R}_{0*}$  оказывается равной 160 м/с. В случае взрывного обжатия медной оболочки при начальной скорости  $\dot{R}_0$  порядка 1 км/с и выше эффект остановки упругопластическая модель без введения дополнительных реологических соотношений объяснить не в состоянии. Потеря же энергии на преодоление пластического сопротивления материала составляет всего 2,5% от начальной кинетической энергии оболочки при  $\dot{R}_0 = 1 \text{ км/с}$ .

Можно рассмотреть в аналогичной постановке инерционное схлопывание



пустой сферической полости радиуса  $R_0$  в безграничной несжимаемой вязкой жидкости. В этом случае уравнение неразрывности имеет вид  $v = \dot{R}R^2/r^2$ , а компоненты тензора скоростей деформации  $D_{rr} = \partial v/\partial r$ ,  $D_{\varphi\varphi} = D_{\theta\theta} = v/r$ , остальные  $D_{ij} = 0$  и  $D_{ij}\sigma_{ji} = 2\mu D_{ij}D_{ji} = 12\mu\dot{R}^2 R^4/r^6$ .

Поэтому уравнение (6.1.47) можно записать в виде

$$dE/dt = -16\pi\mu\dot{R}^2 R, \quad (6.1.54)$$

где  $E = 2\pi\rho_1 R^3 \dot{R}^2$  — полная кинетическая энергия. Исключая время и интегрируя (6.1.54) при очевидных начальных условиях, получаем

$$\sqrt{E} = \sqrt{E_0} - 8v\sqrt{2\pi\rho_1}(\sqrt{R_0} - \sqrt{R}). \quad (6.1.55)$$

В случае инерционного схождения к центру сферической полости в вязкой жидкости может произойти как схлопывание до нулевого радиуса, так и остановка полости на некотором расстоянии от центра. Это зависит от начальных условий. Найдем  $R(t)$  из соотношения (6.1.55) в квадратурах

$$t = \int_{R_0}^R \frac{R^{3/2} dR}{\sqrt{R_0}(R_0\dot{R}_0 + 8v) - 8v\sqrt{R}}. \quad (6.1.56)$$

Рассмотрим три случая:

1)  $R_0\dot{R}_0 + 8v = 0$ , т.е.  $Re = R_0|\dot{R}_0|/v = 8$ , тогда из (6.1.56) получаем  $R_0^2 - R^2 = 16vt$ , откуда следует, что полость схлопывается до нулевого радиуса за конечное время  $t_* = R_0^2/16v$  и при  $R \rightarrow 0$   $\dot{R} = -8v/R \rightarrow -\infty$ ,  $E = 128\pi\rho_1 v^2 R \rightarrow 0$ ;

2)  $R_0\dot{R}_0 + 8v > 0$ , т.е.  $Re < 8$ , тогда из (6.1.56) получаем, что при  $R \approx R_0$  знаменатель подынтегрального выражения меньше нуля, а при  $R \rightarrow 0$  больше. Это означает, что при  $R_* = (1 - Re/8)^2 R_0$  происходит остановка границы движущейся полости, причем  $E = 0$ , а время остановки равно бесконечности;

3)  $R_0\dot{R}_0 + 8v < 0$ , т.е.  $Re > 8$ , тогда знаменатель подынтегрального выражения (6.1.56) отрицателен в течение всего времени схождения полости, происходит схлопывание, причем при  $R \rightarrow 0$   $E = 2\pi\rho_1 v^2 (Re - 8)^2 R_0$ ,  $\dot{R} \sim R^{-3/2} \rightarrow -\infty$ , как в идеальной несжимаемой жидкости.

В несколько иной постановке задача о схлопывании сферического пузырька в вязкой жидкости рассмотрена в работе [20]. Здесь на бесконечности зада-

ется давление  $P_0$ , под действием которого и происходит захлопывание полости, т.е. в постановке, аналогичной задаче Рэля о схлопывании сферической полости в идеальной несжимаемой жидкости. В этой работе также получено, что характер движения зависит от значения числа Рейнольдса, определяемого

теперь как  $Re = \frac{R_0}{\nu} \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}}$ . При  $Re > Re_*$ , где  $Re_*$  — некоторое критическое

число, происходит захлопывание, а скорость границы полости  $\dot{R} \rightarrow -\infty$  при  $R \rightarrow 0$  по такому же закону, как и в задаче Рэля. При  $Re < Re_*$  захлопывание пузырька происходит медленно за бесконечное время. В промежуточном случае при  $Re = Re_*$  пузырек захлопывается за конечное время, скорость  $\dot{R}$  при  $R \rightarrow 0$  неограниченно растет, но слабее, чем  $R^{-1}$ . Численное интегрирование уравнений [20] дает для критического числа Рейнольдса значение  $Re_* = 8,4$ .

Итак, при инерционном движении цилиндрической оболочки вязкой жидкости в отличие от движения с центральной симметрией схлопывания до нулевого радиуса никогда не происходит. Из уравнения (6.1.49) также видно, что если давление ПД, действующее на внешнюю поверхность оболочки, падает до нуля за конечное время, то схлопывания оболочки не происходит — она останавливается, и внутренняя поверхность оболочки никогда не достигает оси. Таким образом, вязкость вещества реальных оболочек может являться основной причиной, полностью устраняющей кумуляцию в устройствах с цилиндрической симметрией. Этот факт необходимо учитывать в ряде физических устройств, использующих эффект схождения цилиндрических оболочек (например, МК-генераторы и т.д.).

Экспериментальная проверка остановки цилиндрической оболочки на некотором расстоянии от оси симметрии при взрывном обжатии проводилась на рентгеноимпульсной установке. В экспериментах использовались медные трубки, снаружи окруженные слоем ВВ (сплав ТГ 50/50). Детонационная волна скользит вдоль наружной поверхности оболочки. Из-за большой разницы в скоростях детонационной волны (7,5 км/с) и радиального схождения (0,5—1,5 км/с) процесс схлопывания трубки можно считать с хорошей точностью одномерным с цилиндрической симметрией. Использование скользящей детонационной волны позволяет на одном кадре зафиксировать различные временные фазы схлопывания цилиндрической оболочки. Если перейти в систему координат, связанную с фронтом детонационной волны, то ясно, что более дале-



кие от него сечения трубки будут находиться в более поздних фазах схлопывания, так как  $t = x/D$ , где  $x$  — расстояние от фронта детонационной волны до рассматриваемого сечения трубки;  $D$  — скорость детонационной волны. Применение этой методики позволило в экспериментах четко зафиксировать остановку внутренней поверхности оболочки на некотором расстоянии от оси симметрии. На рис. 6.19, *a*, *б* представлен процесс схлопывания медной трубки ( $R_0 = 9$  мм,  $r_{i0} = 10$  мм) под воздействием слоя ВВ, фронт детонационной волны движется сверху вниз. Рентгенограммы процесса схлопывания трубки на рис. 6.19, *a* отличаются от рентгенограммы рис. 6.19, *б* тем, что в первом случае представлена более ранняя фаза схлопывания и с меньшей начальной скоростью ( $\dot{R}_0 \cong 1$  км/с), чем во втором ( $\dot{R}_0 \cong 1,6$  км/с). Времена отсчитываются с момента инициирования ВВ детонатором. На кадрах 2, *a* и 1, *б* видно, что трубка, достигнув не равного нулю минимального внутреннего радиуса в некотором сечении, затем расширяется. На последующих кадрах (*б*) видно, что начинается разлет оболочки после фазы с минимальным радиусом, причем на более поздних кадрах разлет сопровождается разрушением, потерей сплошности и появлением неустойчивостей, искажающим осесимметричную форму разлетающейся оболочки.

Стремление получить радиус остановки  $R_*$  достаточно большим для большей точности измерения накладывает ограничение на число Рейнольдса

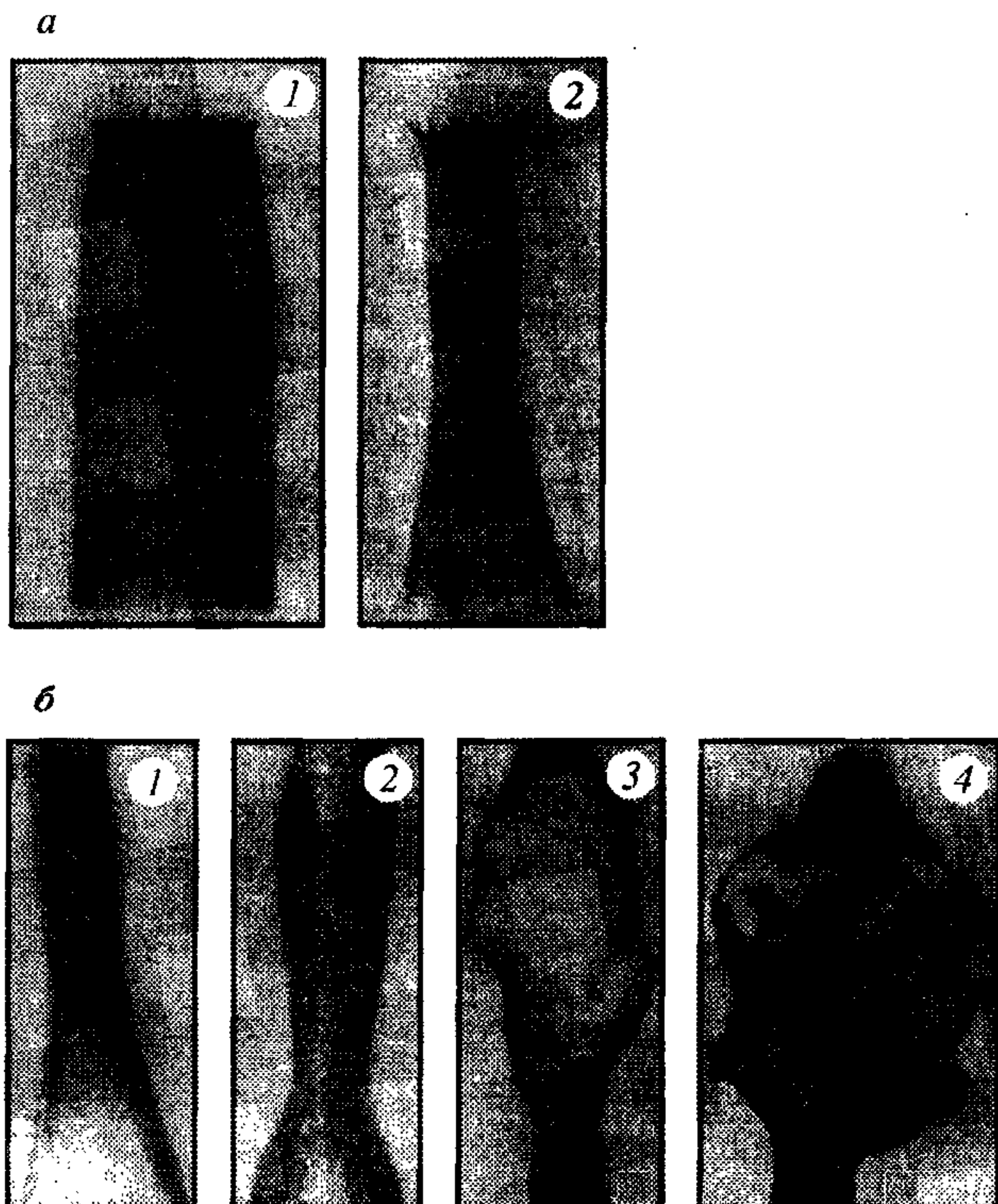


Рис. 6.19. Рентгенограммы процесса схлопывания к оси симметрии и последующего расширения медной трубки; ранняя (*a*) и поздняя (*б*) стадии. Времена, мкс: *a* — 7 (1), 14,3 (2); *б* — 13,4 (1), 16,3 (2), 23,2 (3), 33,5 (4).



$Re = R_0 |\dot{R}_0| / \nu$ . Например, для оболочек, у которых  $r_{10} \cong 1,1R_0$ , из соотношения (6.1.53) следует, что должно быть  $Re \leq 20$ , если нужно иметь радиус остановки внутренней поверхности порядка  $0,1 R_0$ . Из соотношения (6.1.53) и измерений на снимках начальной скорости  $\dot{R}_0$  и внутреннего радиуса остановки  $R_*$  можно определить вязкость металлов и других конденсированных веществ

$$\nu = \frac{R_0 |\dot{R}_0|}{4} \left[ \sqrt{\ln \left( \frac{r_{10}^2 - R_0^2}{R_*^2} + 1 \right)} / \left( 2 \ln \frac{r_{10}}{R_0} - 1 \right) \right]^{-1}$$

Для меди при скоростях деформаций  $\sim 10^5 \text{ с}^{-1}$  значение кинематического коэффициента вязкости получается равным  $(1,5—1,8) \cdot 10^4 \text{ см}^2/\text{с}$ , что превышает величину кинетической вязкости из решения задачи о взрывном обжатии цилиндрической оболочки. Причина такого расхождения, по-видимому, состоит в том, что к моменту остановки вся кинетическая энергия переходит в тепло. Особенно сильно нагреваются слои оболочки, примыкающие к внутренней поверхности. Испарение и разлет внутренних слоев к оси может начаться еще до остановки, и фиксируемый на рентгеновском снимке радиус остановки будет иметь завышенное значение. Внутренний канал зачастую оказывается

размытым.

При схлопывании вязкой цилиндрической оболочки к оси в результате диссипации кинетической энергии происходит ее нагрев. На рис. 6.20 представлены зависимости, полученные из (6.1.52), безразмерных величин — скорости внутренней поверхности  $\dot{R}/\dot{R}_0$  и кинетической энергии  $E/E_0$  от безразмерного внутреннего радиуса  $R/R_0$  для медной оболочки, у которой  $R_0 = 9 \text{ мм}$ ,  $r_{10} = 11,7 \text{ мм}$ ,  $\nu = 0,7 \cdot 10^4 \text{ см}^2/\text{с}$ . Кривые 1 соответствуют началь-

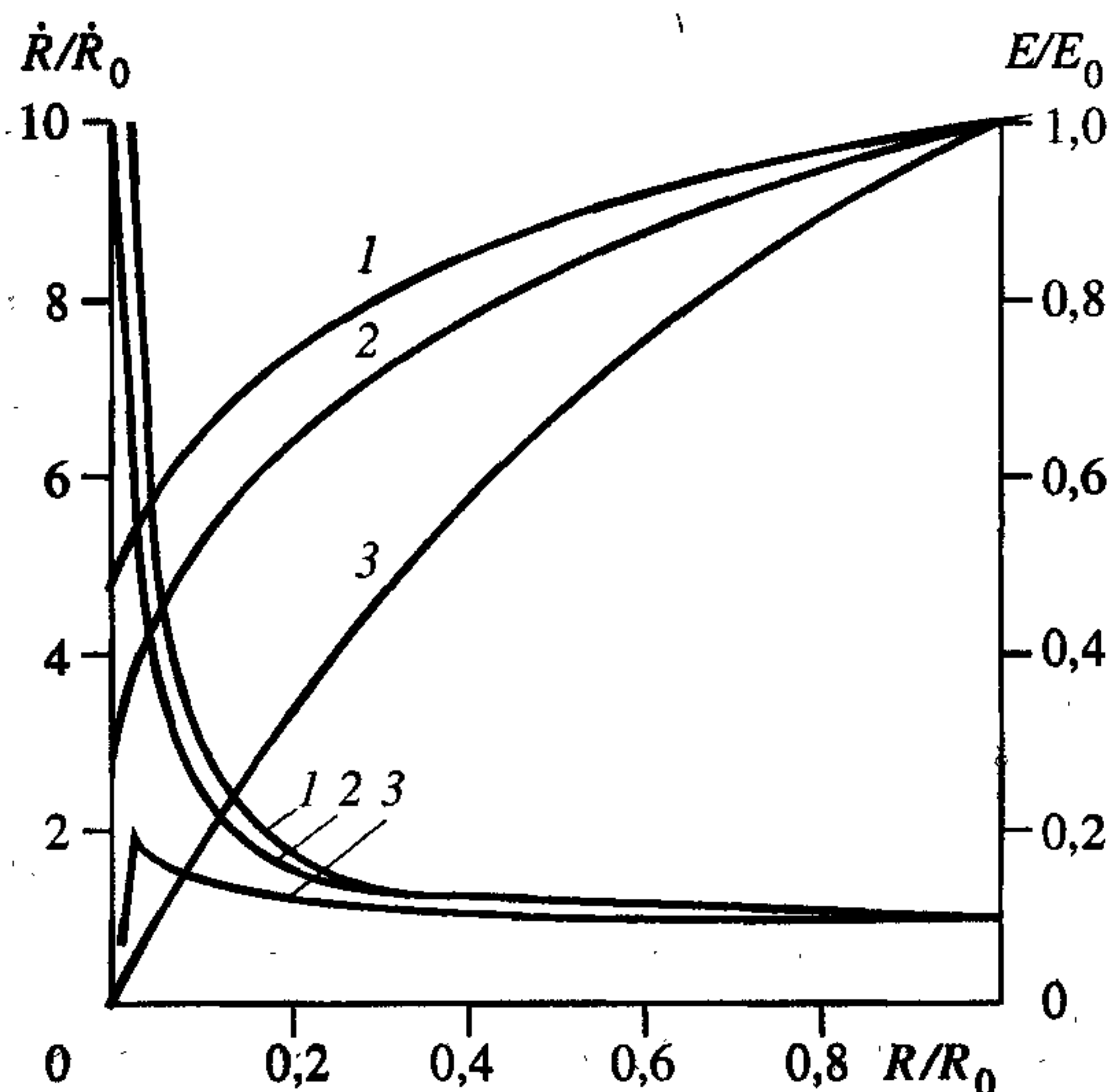


Рис. 6.20. Зависимость скорости внутренней поверхности оболочки и ее кинетической энергии от ее текущего радиуса.

Поясн. см. в тексте.

ной скорости  $\dot{R}_0 = 3$  км/с, 2 —  $\dot{R}_0 = 2$  км/с, 3 —  $\dot{R}_0 = 1$  км/с. Из рассмотрения этих кривых следует, что доля кинетической энергии, перешедшей в тепло, вплоть до значений  $R/R_0 = 0,5—0,7$  мала, а скорость схождения почти не меняется и равна начальной. Значительное выделение тепла наблюдается перед фазой остановки оболочки, и в момент остановки вся кинетическая энергия переходит в тепло. Оценим температуру и ее распределение по толщине оболочки в зависимости от времени. Будем опять рассматривать инерционное движение. Из соотношения (6.1.52) получаем уравнение движения для внутреннего радиуса  $R$  оболочки:

$$\dot{R} = \frac{R_0 \dot{R}_0 \sqrt{\ln \frac{r_{10}}{R_0}} + 4\nu \left( \sqrt{\ln \frac{r_1}{R}} - \sqrt{\ln \frac{r_{10}}{R_0}} \right)}{R \sqrt{\ln \frac{r_1}{R}}}. \quad (6.1.57)$$

Мощность сил диссипации на единицу объема, согласно (6.1.48), есть

$$F = \frac{d\varepsilon'}{dt} = 4\nu \frac{R^2 \dot{R}^2}{r^4}, \quad (6.1.58)$$

где  $r$  — независимая переменная ( $R \leq r \leq r_1$ );  $\varepsilon'$  — энергия диссипации на единицу объема. Будем следить за частицей, находящейся в толще цилиндрической оболочки и имеющей начальный радиус  $r_0$  ( $R_0 \leq r_0 \leq r_{10}$ ). Из закона сохранения массы следует, что  $r^2(t) = R^2(t) + r_0^2 - R_0^2$  и выражение (6.1.58) для движущейся частицы с начальной координатой  $r_0$  принимает вид

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 4\nu \frac{R^2 \dot{R}^2}{(R^2 + r_0^2 - R_0^2)^2}, \quad (6.1.59)$$

где  $\varepsilon$  — удельная энергия диссипации, переходящая в тепло, причем в уравнении (6.1.59)  $\varepsilon = 0$  при  $t = 0$ . Интегрируя совместно (6.1.57) и (6.1.59), найдем в адиабатическом приближении для частицы  $r_0$  приращение температуры

$$\Delta T = \frac{4\nu}{c_{уд0}} \int \frac{R^2 \dot{R}^2 dt}{(R^2 + r_0^2 - R_0^2)^2},$$

где  $c_{уд}$  — удельная теплоемкость материала оболочки. Для численного счета оболочка по толщине разбивалась на 10 равных интервалов в начальный мо-

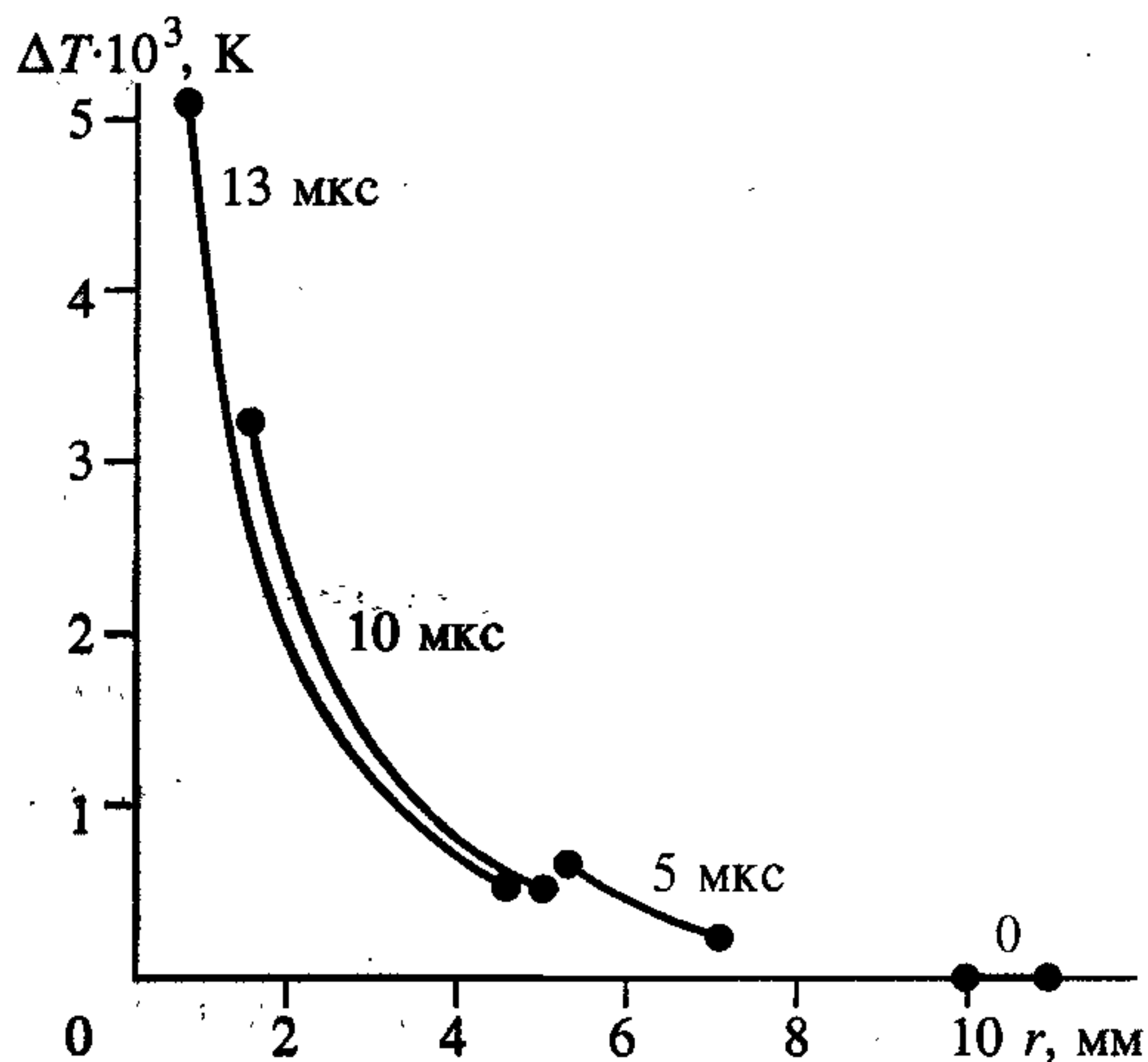


Рис. 6.21. Распределение температуры по толщине медной оболочки на три момента времени.

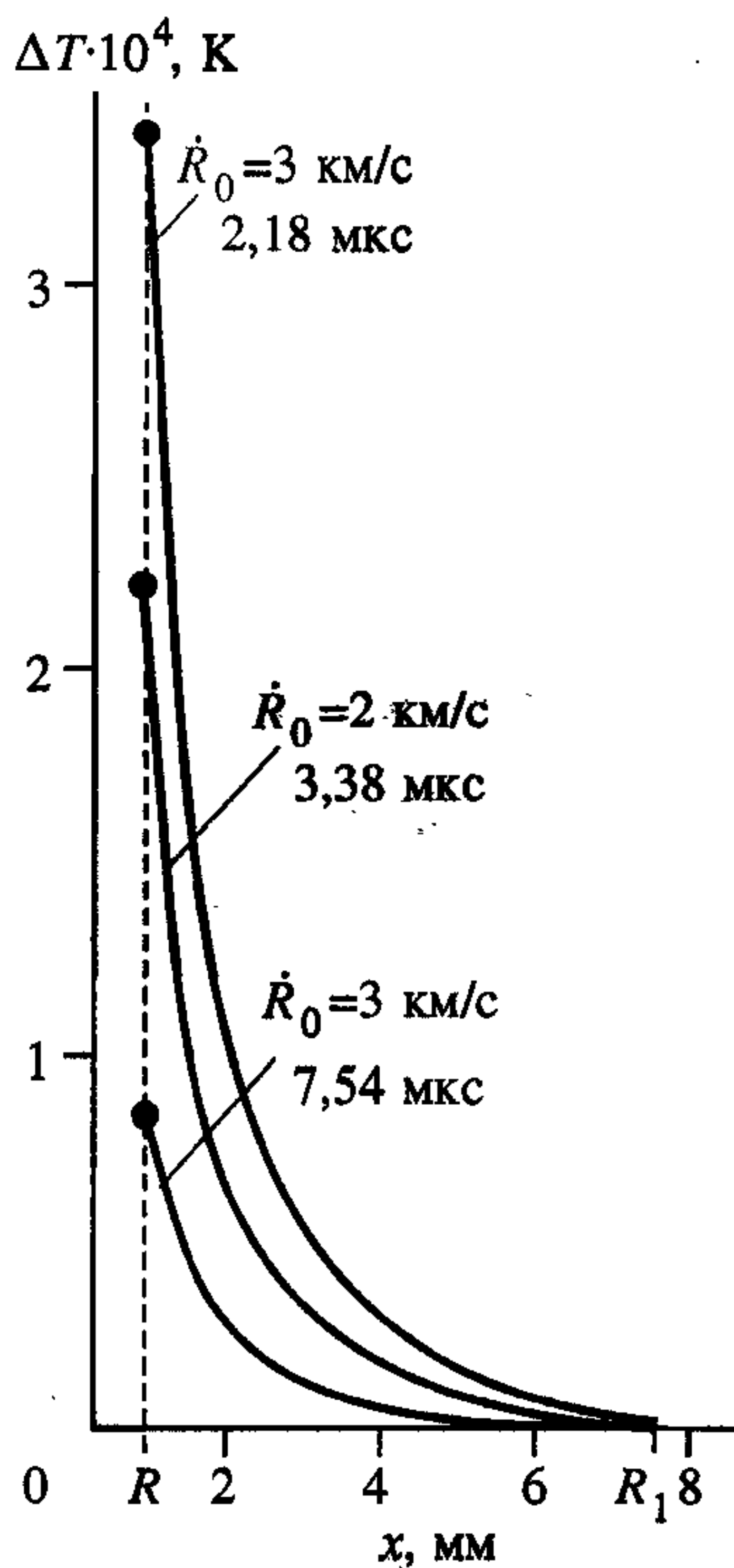


Рис. 6.22. Распределение температуры по толщине оболочки в момент достижения внутренней поверхности радиуса 1 мм соответственно для разных начальных скоростей.

мент времени. Таким образом, расчет проводился для 11 точек, две из которых принадлежат внутренней и наружной поверхностям оболочки. Расчеты распределения температур в оболочке (без учета фазовых переходов) проводились для меди, причем  $\nu = 0,7 \cdot 10^4 \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $c_{\text{уд}} = 3,82 \times 10^6 \text{ эрг}/(\text{г} \cdot \text{град})$ . На рис. 6.21 представлены результаты расчета распределения температуры в медной оболочке по ее толщине в различные моменты времени. При этом начальные параметры оболочки таковы:  $R_0 = 10 \text{ мм}$ ,  $r_{10} = 11 \text{ мм}$ ,  $\dot{R}_0 = 1 \text{ км}/\text{с}$ . На рис. 6.22 дано распределение температур по толщине медной оболочки ( $R_0 = 9 \text{ мм}$ ,  $r_{10} = 11,7 \text{ мм}$ ) в момент достижения внутренней поверхностью оболочки радиуса 1 мм; кривые относятся к разным начальным скоростям оболочки и к разным моментам времени. Полученные значения температур довольно велики, а в используемой здесь модели вязкой жидкости температура внутренней поверхности и прилегающих к ней слоев оболочки к моменту остановки будет еще выше. Если сравнить рис. 6.20 и 6.22 (обе для оболочки с  $R_0 = 9 \text{ мм}$ ,  $r_{10} = 11,7 \text{ мм}$ ), то к моменту достижения внутренней поверхности оболочки радиуса 1 мм у “быстрой”



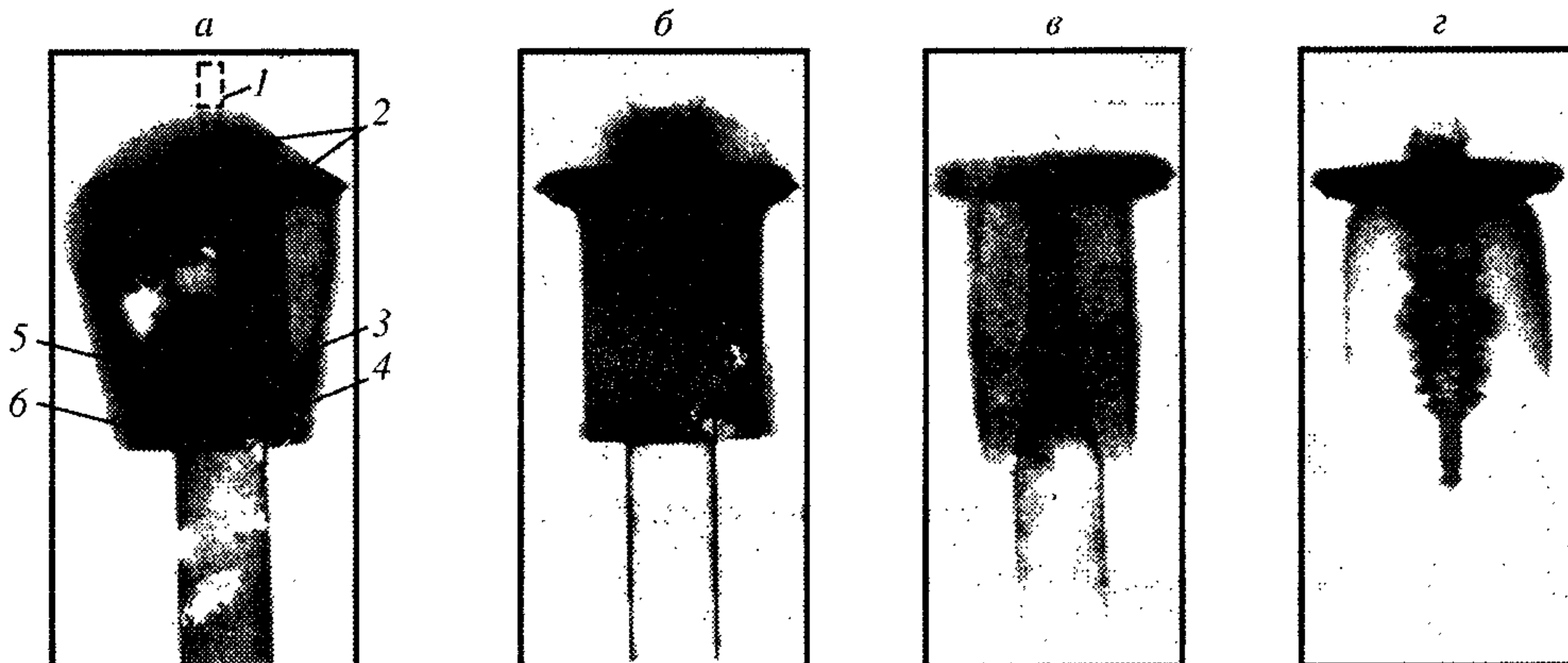
оболочки остается свыше 60% кинетической энергии, 50 и около 20% — у двух остальных.

Расчет температуры внутренней поверхности “медленной” оболочки  $\dot{R}_0 = 1$  км/с, проведенный до радиуса  $R = 0,0715$  мм, почти равного радиусу остановки  $R_* = 0,0708$  мм, показывает, что температура поднимается до  $13,4 \cdot 10^4$  К в момент времени  $t = 8,16$  мкс, а скорость внутренней поверхности в этот момент равна 40 м/с. Температура в несколько десятков тысяч градусов, например, достигается в конденсированных средах при прохождении только очень сильных ударных волн. При ударном сжатии свинца в 2,2 раза вещество за фронтом нагревается до температуры 26400 К [16], при этом давление за фронтом ударной волны свыше  $4 \cdot 10^3$  кбар, а тепловое давление составляет 32% от полного. Представим себе порядок величины теплового давления, если нагрев медной оболочки происходит при постоянном объеме, что справедливо, так как нагрев на  $\Delta T = 3,4 \cdot 10^4$  К происходит за время значительно меньше 2 мкс (см. рис. 6.22). Воспользуемся соотношением, связывающим величину теплового давления с тепловой энергией:

$$P_T = \Gamma(V)\epsilon_T/V = \Gamma(V)c_V T/V \approx \Gamma(V_1)c_V T/V_1,$$

где  $\Gamma$  — коэффициент Грюнайзена;  $c_V$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме;  $V_1 = 1/\rho_1$  — удельный объем при нормальных условиях. Для меди при  $T = 3,4 \cdot 10^4$  К величина давления оказывается свыше  $3 \cdot 10^3$  кбар. Столь высокие давления порождают в материале оболочки ударную волну, распространяющуюся к периферийным слоям и заставляющую оболочку расхлопываться. Конечно, рассматриваемая модель не может учесть всех сложностей процесса схождения реальных металлических оболочек к оси, но ряд физических эффектов, описанных выше, она качественно объясняет.

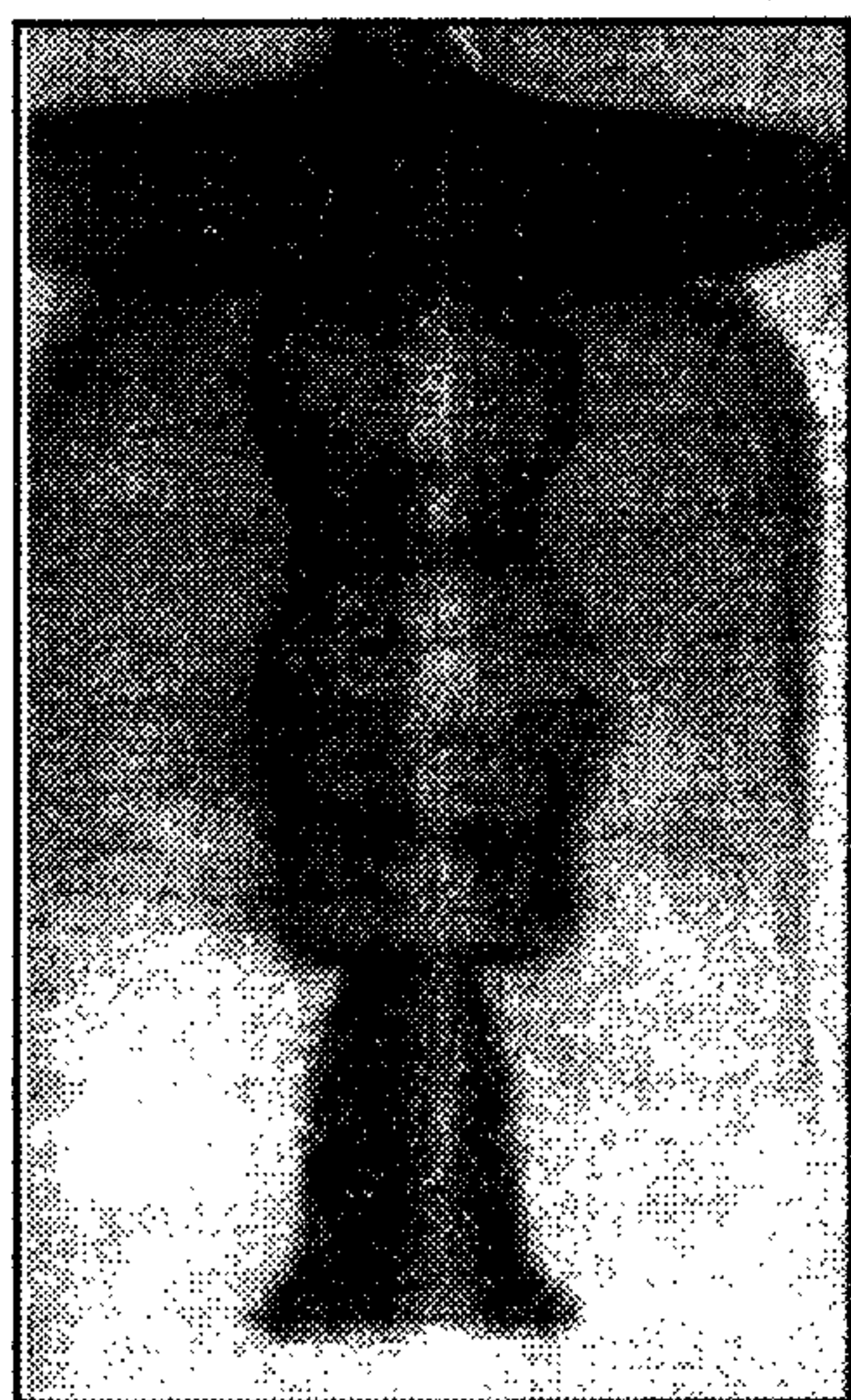
Процесс одновременного схождения оболочек с цилиндрической симметрией экспериментально реализован в устройстве, приведенном на рис. 6.23, а. Исследуемая цилиндрическая оболочка 6 ( $r_{10} = 10,5$  мм), окруженная слоем 5 взрывчатого вещества ТГ 50/50 толщиной 0,5 см, заключалась в конический дюралюминиевый генератор 4, который возбуждал цилиндрическую детонационную волну одновременно по всей поверхности ВВ на длине 60 мм. Иницирование слоя ВВ 3, ускоряющего генератор, производится детонатором 1. Раз-



**Рис. 6.23.** Рентгенограммы процесса одновременного схлопывания и последующего разлета медной цилиндрической оболочки.

Поясн. см. в тексте.

водка ВВ от детонатора к слою ВВ производится посредством слоя ВВ, окружающего инертную вставку 2 из пластмассового конуса и стального диска в основании конуса. На рис. 6.23 приведен процесс схлопывания и разлета медной трубки ( $R_0$  10 мм). Начальная скорость порядка 1,7—2 км/с. Времена отсчитываются от момента инициирования и составляют для последовательности приведенных кадров 13; 19; 21 и 27 мкс.



**Рис. 6.24.** Рентгенограмма разлета (после схлопывания) железной толстостенной оболочки.

На рис. 6.24 приведена фотография разлета более толстой железной трубки ( $R_0 = 9,5$  мм) через 27 мкс после инициирования устройства, приведенного на рис. 6.23. Медная более тонкая трубка к этому моменту диспергируется на слои, перпендикулярные оси симметрии. Куполообразное образование на рис. 6.24 появилось из-за дополнительного металлического кольца, вставленного в нижнюю часть трубки для полной гарантии свободного истечения воздуха из внутренней полости в процессе захлопывания оболочки. На обеих фотографиях отмечается потеря устойчивости первоначальной формы цилиндрической оболочки в фазе расхлопывания. Можно предположить, что потеря устойчивости формы оболочки обусловлена быстрым нагревом металла при постоянном



объеме еще в фазе схлопывания, в результате чего появляются осевые силы, превышающие критическую эйлерову силу. Тогда форма оболочки определяется динамической потерей устойчивости, впервые проанализированной в работе [21] для упругих стержней и оболочек.

Таким образом, в оболочках с цилиндрической симметрией, по-видимому, основным фактором, ограничивающим кумуляцию (в смысле соударения внутренней поверхности на оси симметрии), является вязкость реальных оболочек. Но при этом можно говорить о другом роде кумуляции в рассматриваемой ниже модели — кумуляции тепловой энергии в слоях, примыкающих к внутренней поверхности, которая в свою очередь ограничена фазовыми переходами материала оболочки. На основе анализа инерционного схождения цилиндрической оболочки предложена методика определения коэффициентов вязкости для металлов и других конденсированных веществ.

**Задача 5.** Метание двух соосных цилиндрических оболочек под действием ПД, заключенных между ними [22].

Задача рассматривается при таких параметрах заряда и оболочек, когда волна сжатия, получающаяся в результате динамического схождения (схлопывания) внутренней оболочки А к оси, догоняет внешнюю оболочку В и сообщает ей дополнительный импульс. В результате наблюдается двухэтапный набор скорости оболочкой В. Первый этап — движение трубы до момента прихода к ней сфокусированной волны сжатия, второй — после прихода. Ниже показано, что величиной дополнительного импульса и времени начала второго этапа, при фиксированной толщине оболочки В, можно управлять путем изменения радиуса полости или введением в полость оболочки А. Задача о метании оболочки зарядом ВВ с полостью (без внутренней оболочки) для различных коэффициентов нагрузки и относительных радиусов полости рассмотрена в [23]. Для описания движения оболочки в [23] применялась модель несжимаемой жидкости, выраженная в форме закона Ньютона. Заметим, что применение этой модели для описания движения оболочки А дает меньшую величину дополнительного импульса, чем при использовании модели сжимаемой жидкости. Причем с возрастанием толщины оболочки  $\delta_A$  различие увеличивается.

Геометрия задачи изображена на рис. 6.1. Задачу, представленную геометрией *в*, назовем задачей 5.1, *б* — задачей 5.2, *а* — задачей 5.3. Предполагается, что материал оболочек однородный, изотропный и подчиняется закону Гука в упругой области, а в пластической — условию текучести Мизеса и уравнению



Прандтля—Рейсса (6.1.1)—(6.1.7). Уравнение состояния для гидростатической части напряжений бралось в виде

$$P = c_0^2(\rho - \rho_0) + (n-1)\rho e, \quad (6.1.60)$$

где  $c_0$ ,  $n$  — постоянные;  $P$  — давление;  $\rho$  — плотность;  $e$  — удельная внутренняя энергия. Для ПД бралось уравнение состояния идеального газа с показателем адиабаты  $\gamma = 3$ . Математическое решение задачи сводится к определению решения указанной системы уравнений, описывающих движение оболочек и ПД при следующих начальных и граничных условиях.

Начальные условия ( $t=0$ ): для внутренней  $R_0 \leq r \leq R_1$  и внешней  $R_2 \leq r \leq R_3$  оболочек полагаем  $\rho_i = \rho_{0i}$  ( $i = 1, 2$  соответственно для оболочки А и В) и  $P = 0$ ;  $u = 0$ ;  $s_i = 0$ . Для ПД реализуется режим мгновенной детонации, т.е. при  $t=0$   $\rho = \rho_{ВВ}$ ;  $P = P_0 = \frac{1}{8}\rho_{ВВ}D^2$ ;  $e = e_0$ ;  $u = 0$ . В полости и вне оболочки — вакуум.

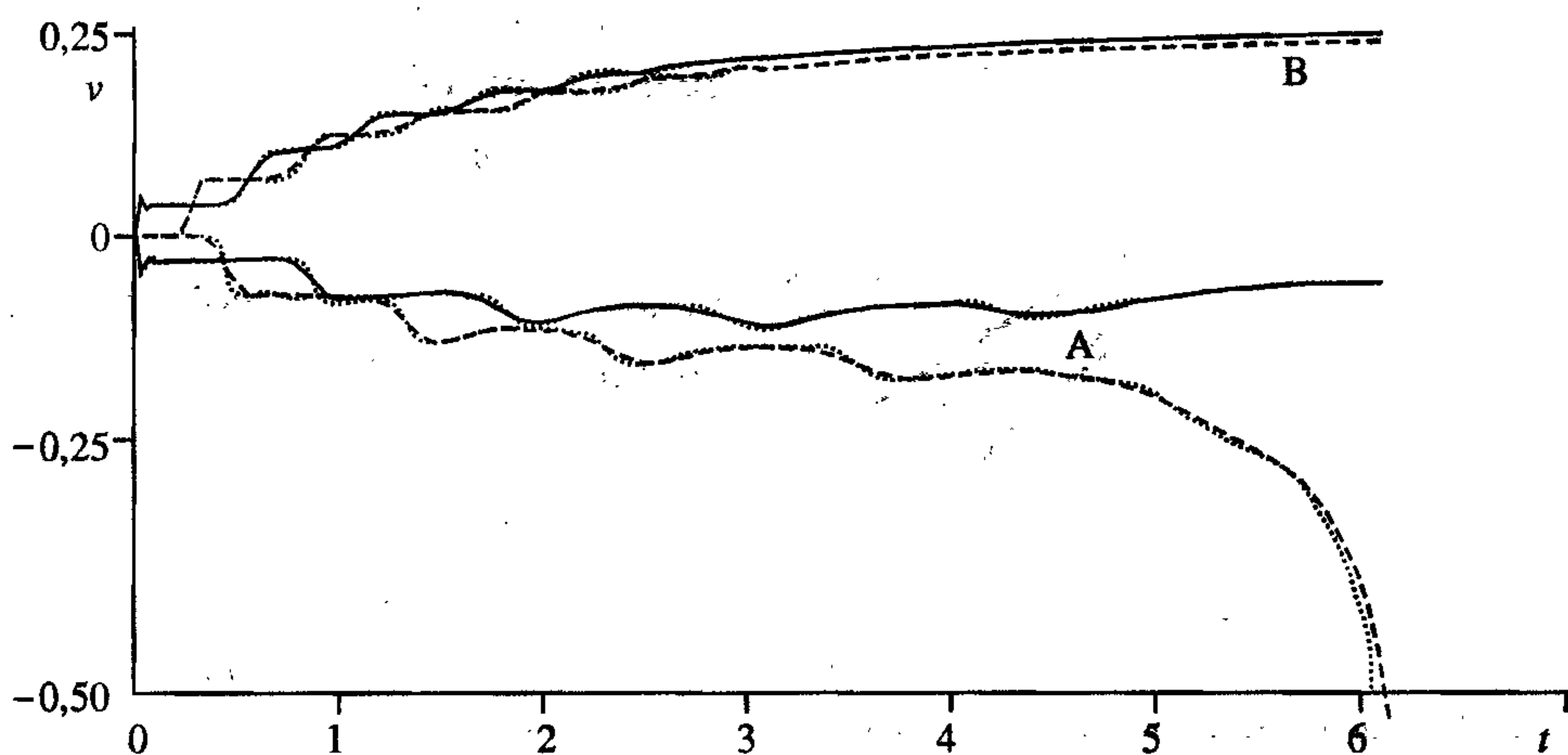
*Граничные условия.* На свободных поверхностях напряжения полагаются равными нулю, а на оси симметрии  $u = 0$ ;  $\frac{\partial \sigma_i}{\partial r} = 0$ , где  $\sigma_i$  — полные напряжения. На контактных поверхностях требуется выполнение условия непрерывности давления и скорости.

Для определения численного решения поставленной задачи применяется конечно-разностный модифицированный метод Уилкинса [8], где для устойчивого счета волн сжатия используется искусственная вязкость, добавляемая аддитивно к давлению. Используется конечно-разностная схема второго порядка аппроксимации по  $r$  (на равномерной сетке) и первого — по  $t$ . В расчетах брались: плотность ВВ  $\rho_{ВВ} = 1,62$  г/см<sup>3</sup>; скорость детонации  $D = 0,76$  см/мкс;  $e_0 = D^2 / 2(\gamma^2 - 1)$ ; для оболочек  $\rho_{01} = 8,9$  г/см<sup>3</sup>;  $\rho_{02} = 7,84$  г/см<sup>3</sup>. Расчеты проводились в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} t' = tD/R; \quad r' = r/R; \quad \rho' = \rho/\rho_{ВВ}; \quad e' = e/D^2; \quad u' = u/D; \\ P' = P/k; \quad s'_i = s_i/k; \quad \mu' = \mu/k; \quad Y'_0 = Y_0/k, \end{aligned} \quad (6.1.61)$$

где  $k = \rho_{ВВ}D^2$ ;  $R$  — характерный размер;  $\mu$  — модуль сдвига;  $Y_0$  — статический начальный предел текучести при одноосном напряженном состоянии. В дальнейшем штрихи опускаются.

Рассмотрим  $(r-t)$ -диаграмму процесса разгона сжимаемых оболочек. В момент времени  $t=0$  на границе металл — ПД происходит распад разрыва, в результате чего по газу начинает распространяться волна разрежения, а по оболочке — ударная волна; свободная поверхность начинает двигаться после выхода на нее ударной волны; это порождает волну разрежения, которая двигается по направлению к контактной границе металл — ПД, отражается от нее как волна сжатия, контактная граница приобретает дополнительную скорость. Волна сжатия, достигнув свободной поверхности, порождает вторую волну разрежения и т.д. Рис. 6.25 отчетливо отражает ударно-волновой характер набора скорости внутренней и внешней поверхности оболочки А и В во времени (сплошные линии — контактные границы металл — ПД; штриховые — свободные поверхности). Расчет проведен до момента схлопывания у оси оболочки А. Некоторое сглаживание кривых связано с искусственным размазыванием фронта ударной волны. В расчете применялась линейная вязкость с коэффициентом  $C_q = 0,5$ . На этом же рисунке точками отмечены результаты счета с  $C_q = 0,3$ . Уменьшение значения искусственной вязкости приводит к меньшему размазыванию, но больше проявляется немонотонность решения за фронтом ударной волны. При сжатии оболочки А к оси происходит ее утолщение, а при некотором  $t$  наблюдается резкое возрастание скорости, что является следствием цилиндрической симметрии. На рис. 6.26—6.28 приведено сравнение численных расчетов (сплошная линия — внешняя поверхность оболочки А,



**Рис. 6.25.** Зависимость скорости внутренних и ведущих поверхностей двух оболочек (схлопывающейся — нижние кривые; разлетающейся — верхние кривые).

Ост. поясн. см. в тексте.



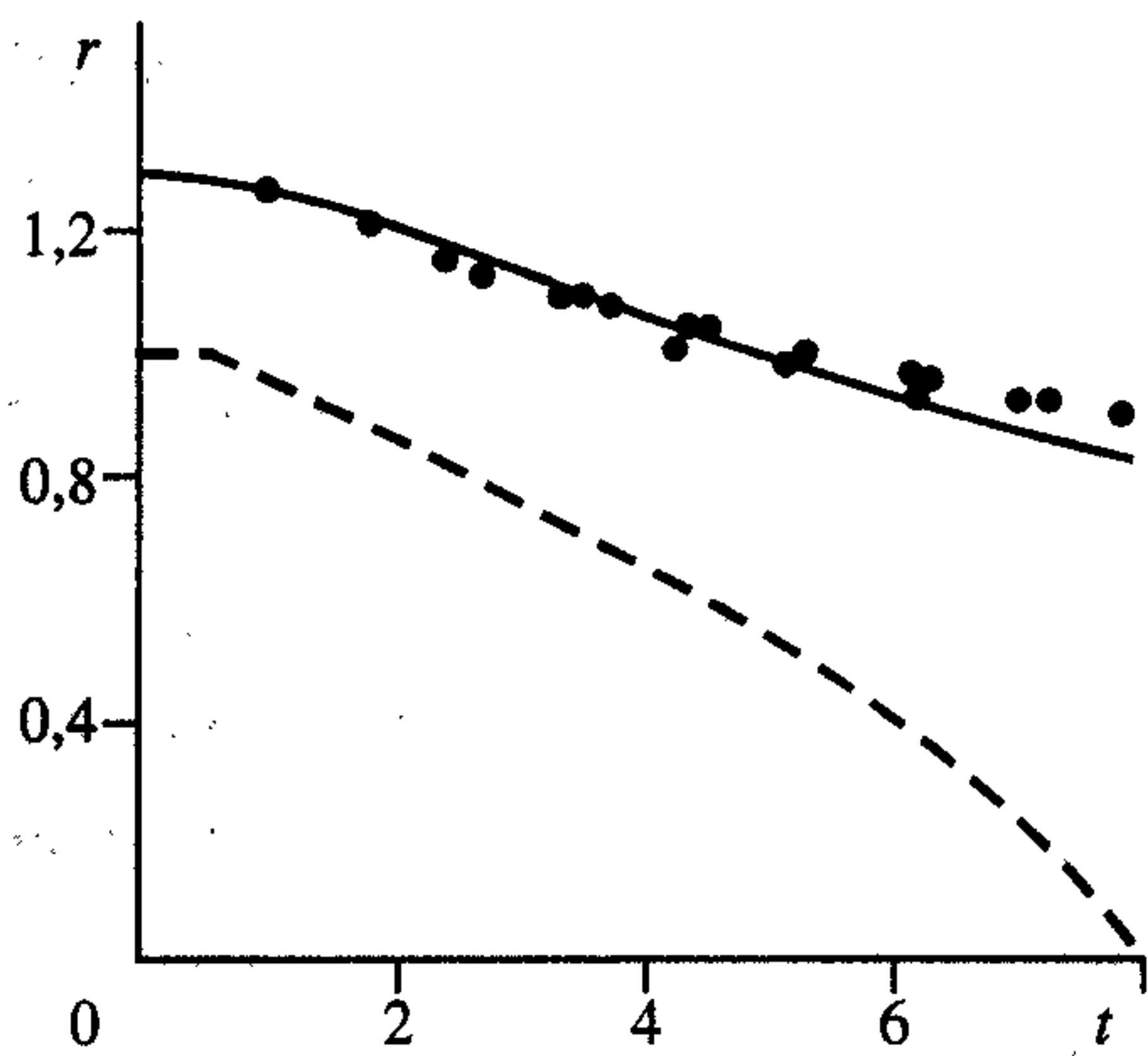


Рис. 6.26. Траектории движения поверхностей схлопывающейся оболочки для отношения массы ВВ к массе оболочки 0,489.

Поясн. см. в тексте.

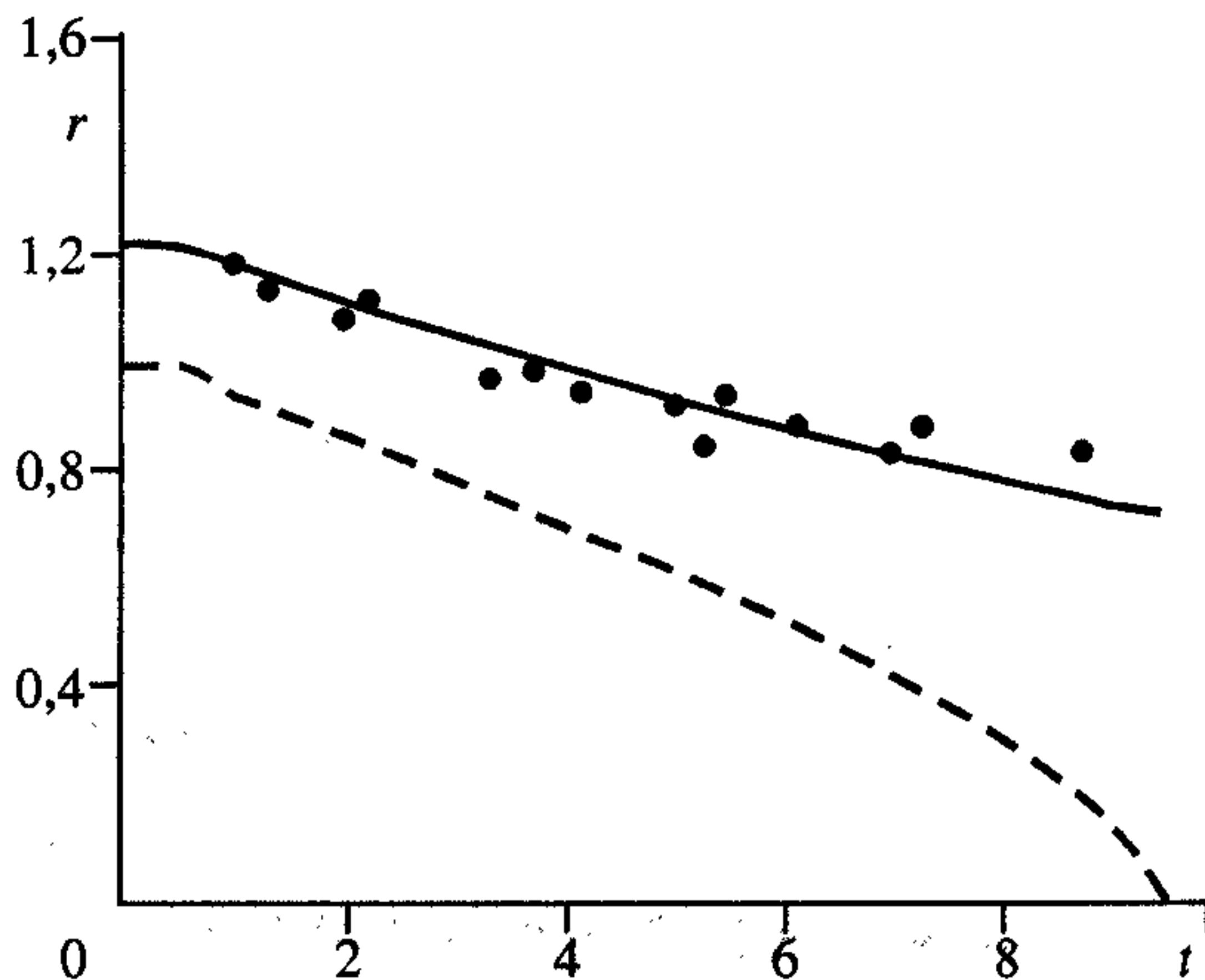


Рис. 6.27. Траектории движения поверхностей схлопывающейся оболочки для отношения массы ВВ к массе оболочки 0,361.

Поясн. см. в тексте.

штриховая — внутренняя поверхность) с экспериментом (точки), проведенным Ю. А. Тришиным и С. А. Кинеловским. В эксперименте измерялся внешний радиус медной оболочки А (оболочка В отсутствовала), длина трубки выбиралась такой, чтобы исключить влияние торцевой разгрузки. В качестве ВВ выбиралось ТГ 50/50,  $\rho_{ВВ} = 1,6 \text{ г/см}^3$ ,  $D = 0,75 \text{ см/мкс}$ , для оболочки  $\rho_{01} = 8,9 \text{ г/см}^3$ . Начальные геометрические безразмерные параметры даны в табл. 6.1.

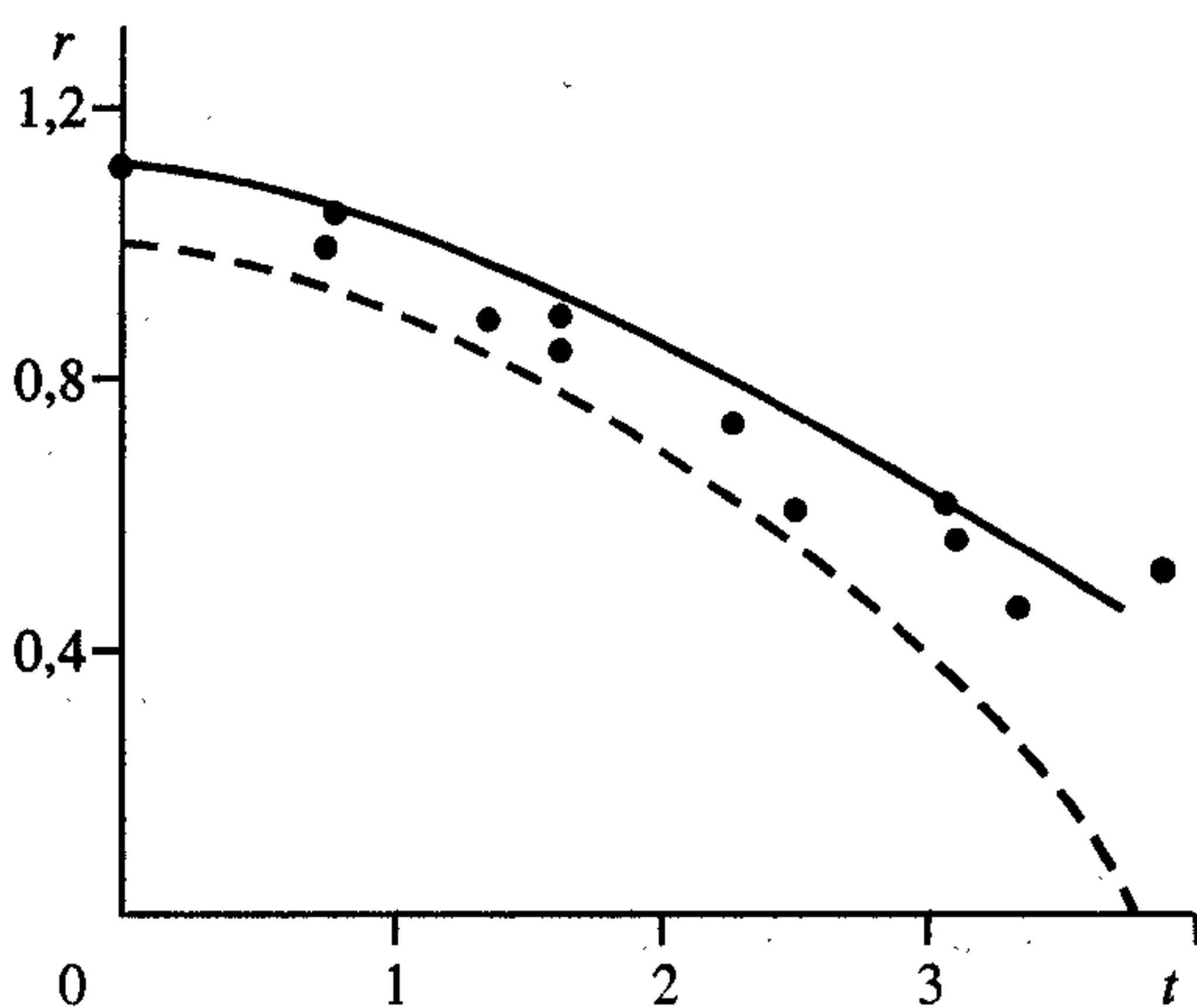


Рис. 6.28. Траектории движения поверхностей схлопывающейся оболочки для отношения массы ВВ к массе оболочки 3,117.

Поясн. см. в тексте.

Данные рис. 6.26, 6.27 свидетельствуют об удовлетворительном согласии расчета с экспериментом. Однако можно указать варианты с более тонкой оболочкой, где такого согласия не будет (например, на рис. 6.28). Для малоинерционных тонких оболочек становится несправедливым предположение о мгновенной детонации. Такие оболочки набирают скорость за малый промежуток времени и на их движение оказывает существенное влияние

Размеры геометрии

Номер рисунка	$R_0$	$R_1$	$R_2$	$M_{ВВ}/M_A$
6.26	1	1,3	1,8555	0,489
6.27	1	1,2222	1,5555	0,361
6.28	1	1,1111	3,3333	3,117

давление на фронте детонационной волны, которое в два раза больше  $P_0$ .

Рассмотрим задачу 5.1 при  $t > \tau_{\text{схл}}$ , где  $\tau_{\text{схл}}$  — момент схлопывания оболочки А к оси симметрии. Уже отмечалось, что внутренние слои оболочки А при подходе к оси получают значительное ускорение. В процессе схлопывания оболочки (или ПД [23]) формируется волна сжатия, которая при определенных параметрах догоняет оболочку В и сообщает ей дополнительный импульс. Сравним результаты расчетов задач 5.2 и 5.3 для одного и того же отношения массы ВВ к массе оболочки В ( $\eta = 0,5$ ):

$$R_0 = R_1 = 0,8; \quad R_2 = 1; \quad R_3 = 1,0718;$$

$$R_0 = R_1 = 0; \quad R_2 = 1; \quad R_3 = 1,18881.$$

В силу волнового характера набора скорости сжимаемой оболочки каждая ее точка при фиксированном  $t$  имеет свою локальную скорость. Поэтому для удобства сравнения результатов счета будем следить за среднемассовой скоростью оболочки В

$$v_B = \sum_i m_i u_i / M_B,$$

где  $m_i$  — масса  $i$ -й лагранжевой ячейки;  $u_i$  — массовая скорость в  $i$ -м узле; суммирование производится по ячейкам оболочки В. На рис. 6.29 показана зависимость  $v_B$  от текущего радиуса внутренней поверхности оболочки В. Расчеты подтвердили ожидаемый результат, что максимально набранная скорость будет одинакова (для данных параметров) при существенно различающейся качественной картине набора скорости.

На примере ряда расчетов задачи 5.1, в которых меняется толщина оболочки А  $\delta_A$ , а толщины слоя ВВ и оболочки В фиксированы, проследим за поведением  $v_B$  и за изменением давления, действующего на оболочку В. На



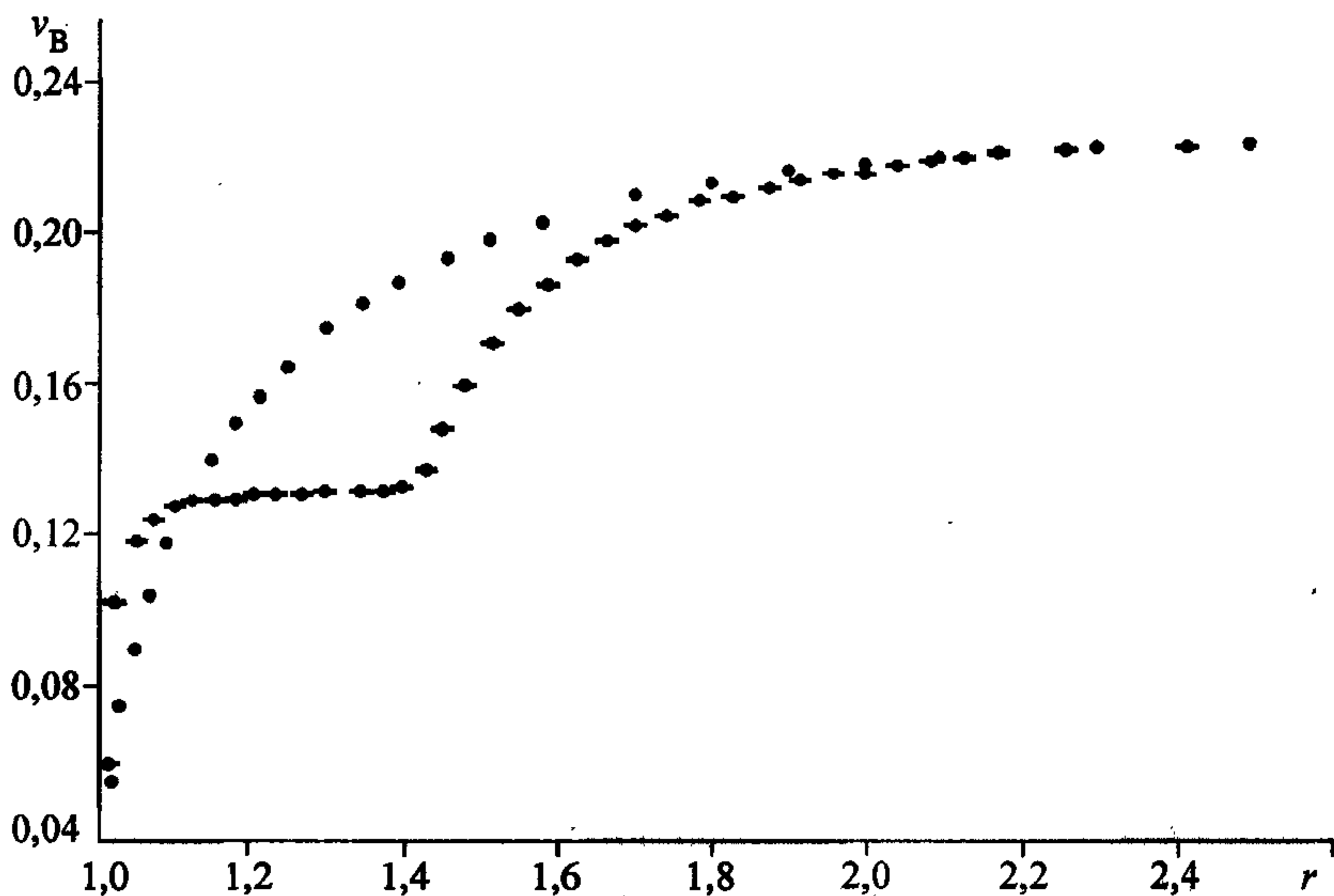


Рис. 6.29. Зависимость скорости оболочки от ее текущего радиуса (точки — геометрия на рис. 6.1, а, точки со штрихом — рис. 6.1, в).

рис. 6.30 сопоставляются зависимости  $v_B$  от  $r$  для различных  $\delta_A$ : 0; 0,02; 0,04; 0,0627; 0,1 (1—5 соответственно). Видим, что с увеличением  $\delta_A$  возрастает

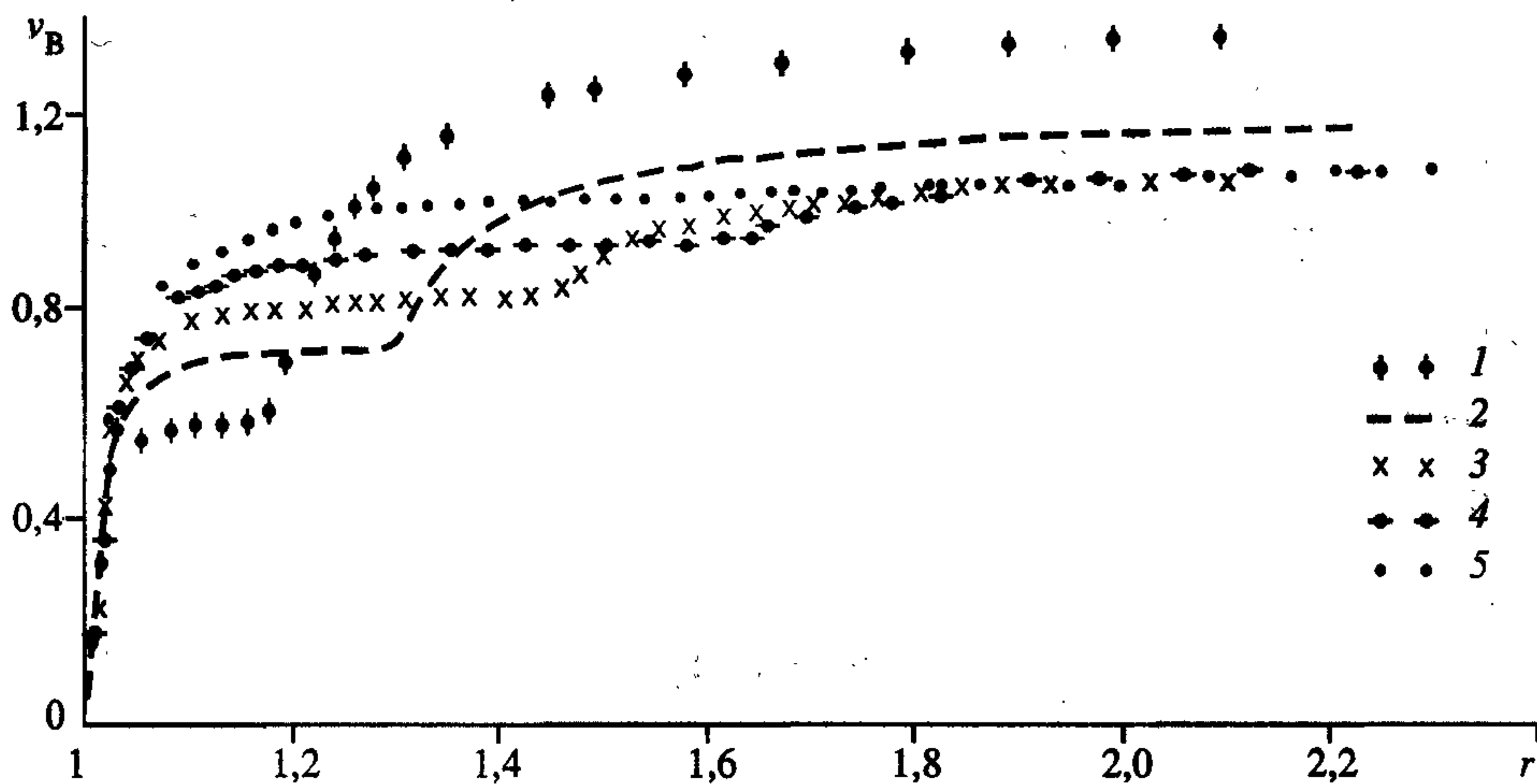


Рис. 6.30. Зависимость скорости внешней оболочки от текущего радиуса для задач с различными толщинами  $\delta$  внутренней оболочки.

Поясн. см. в тексте.

скорость оболочки В на первом этапе и уменьшается на втором; а также возрастает время начала второго этапа. Начиная с некоторого  $\delta^*$  дальнейшее увеличение  $\delta_A$  практически не сказывается на скорости оболочки В. Величина максимального давления дополнительной волны сжатия в ячейке, прилегающей к оболочке, в зависимости от массы оболочки А (точки) и время прихода волны к оболочке ( $t_{п.в}$  — точки с чертой) показаны на рис. 6.31.

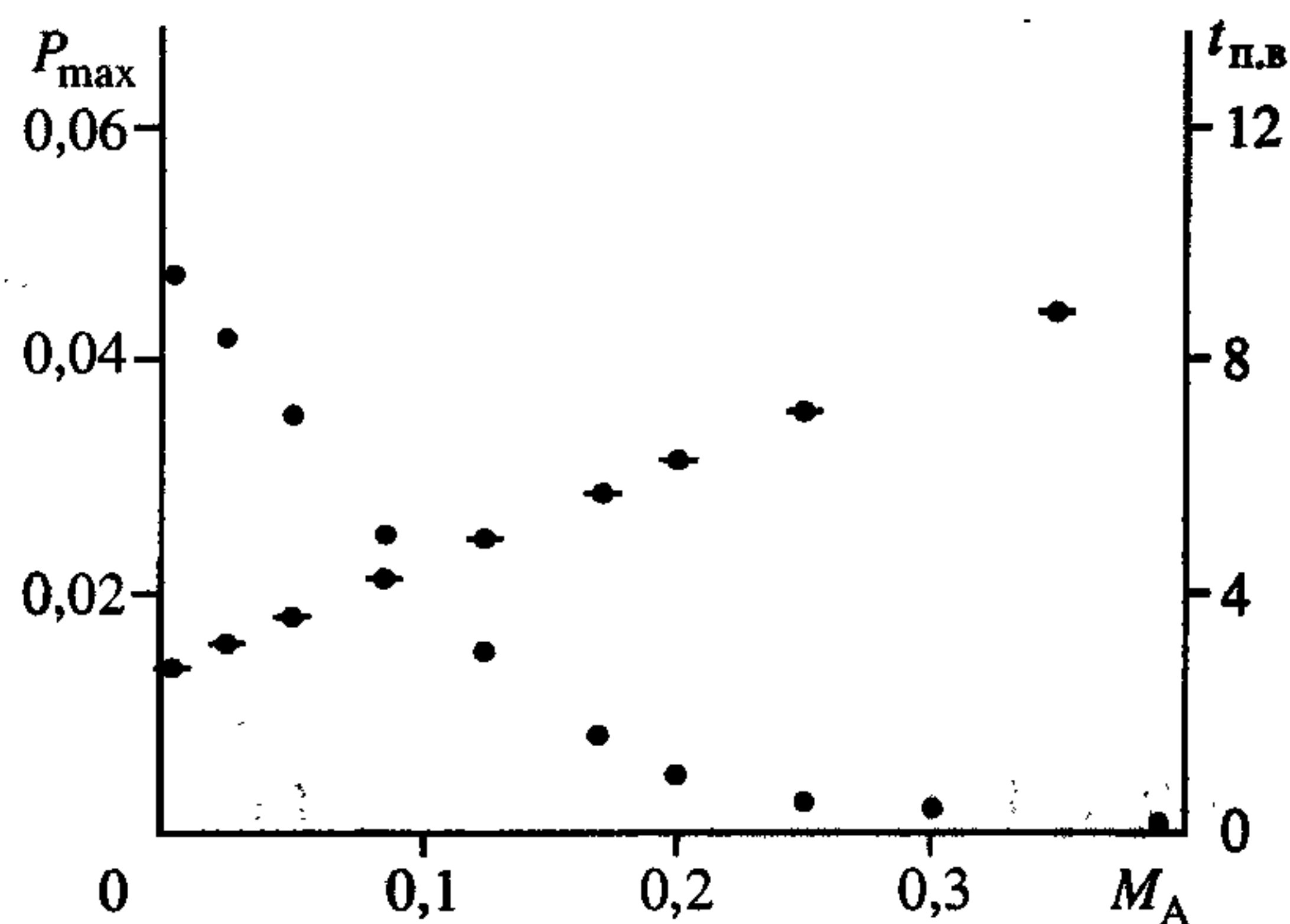


Рис. 6.31. Максимальное давление в дополнительной волне сжатия и время прихода волны и внешней оболочки в зависимости от массы внутренней оболочки.

Законы изменения давления, действующего на оболочку В ( $R_1 = 0$ ;  $R_2 = 1$ ;  $R_3 = 1,18881$ ) во времени, для задач 5.1 и 5.3 представлены на рис. 6.32. Волновой характер изменения давления в задаче 5.3 связан с волновой картиной набора скорости сжимаемой оболочки. Для заряда с полостью (с оболочкой А и без нее), начиная с некоторого момента времени, давление, действующее на оболочку В, снимается за счет прихода волны разрежения со стороны полости и в дальнейшем возрастает за счет дополнительной волны сжатия. Затухание этой волны также имеет волновой вид, поскольку возникли новые волновые процессы, вызванные дополнительной волной сжатия.

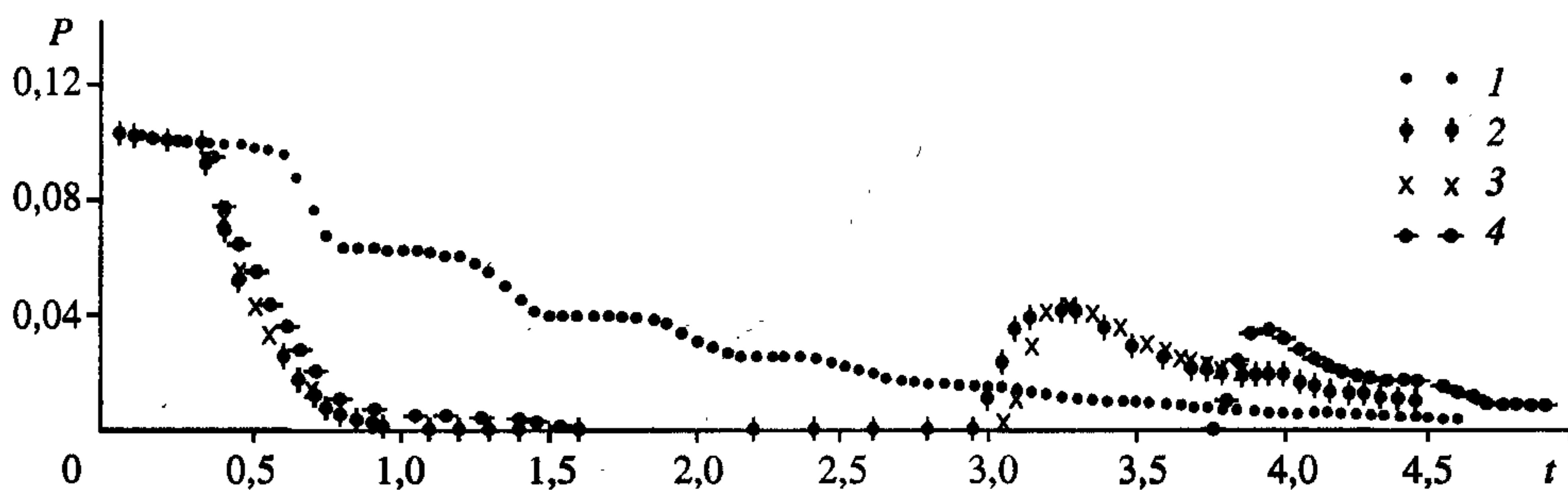


Рис. 6.32. Зависимость давления в газе на границе с внешней оболочкой от времени для задач с различными толщинами внутренней оболочки.

1 — без полости; 2 —  $\delta = 0$ ; 3 —  $\delta = 0,001$ ; 4 —  $\delta = 0,01214$ .



## 6.2. Многоступенчатый метод разгона пластин и оболочек до больших скоростей

Для усиления амплитуды ударных волн в связи с проблемами термоядерного синтеза Е. И. Забабахин [12, 20, 65] предложил применять многослойную систему чередующихся тел из “легкого” и “тяжелого” материала, толщина которых уменьшается в направлении движения головной волны. Подобный процесс назван явлением неограниченной кумуляции (ЯНК). В 1978 г. Г. А. Сапожников и В. М. Фомин с помощью методов математического моделирования построили другой пример ЯНК, который получил название многоступенчатого метода разгона пластин и оболочек. (По известным причинам авторам не была известна каскадная схема высокоскоростного метания тел, представленная в недавно опубликованных статьях [4, 29, 36, 37]). Идея метода возникла в связи с поиском схем рационального разгона и размещения в пространстве системы пластин (например, в соответствии с [24]) и эффективных схем гиперскоростного метания тел. Известно, что при больших параметрах нагрузки  $\eta \gg 5$  коэффициент передачи энергии ВВ к метаемой пластине (оболочке) достаточно мал. Это связано с тем, что энергия с отдаленных от тела слоев ВВ практически не поступает в активную часть заряда. Для “транспортировки” этой энергии к метаемому телу предложено разделить ВВ по определенному принципу на ряд разнесенных в пространстве слоев и к каждому из них присоединить пластину-посредник, с помощью чего удастся более эффективно передавать энергию с периферийных областей ВВ к метаемому телу.

Рассмотрим качественную картину ударно-волновых процессов в системе разнесенных оболочек (пластин) с присоединенными к ним слоями ВВ в координатах  $(r, t)$ . На рис. 6.33 показана часть геометрии задачи и  $(r-t)$ -диаграмма процесса движения оболочек и ПД. В момент времени  $t_0 = (R_1 - r_1)/D$  детонационная волна, инициируемая у оси симметрии, выходит на контактную границу раздела первой оболочки и ВВ, в результате распада разрыва по ПД к оси симметрии и по оболочке к свободной поверхности пойдут ударные волны. При отражении волны от свободной поверхности оболочки ее внешние слои приобретут в волне разрежения скорость, равную удвоенной массовой скорости падающей ударной волны. При выходе волны разрежения на контактную границу ПД—оболочка вторично в результате распада разрыва по оболочке пойдет ударная волна. В последующем этот процесс повторяется, в результате чего оболочка ускоряется.

Через время  $(t_1 - t_0)$  первая оболочка соударяется с покоящимся слоем ВВ, присоединенным ко второй оболочке. Если предположить, что ВВ детонирует при ударе, слой ПД оказывает противодействие на первую оболочку и замедляет ее движение. При достижении детонационной волны контактной границы  $r = R_2$  во второй оболочке возникают ударные волны и волны разрежения аналогично описанному выше. Такой же ударно-волновой процесс возникает при движении каждой последующей оболочке. Последняя оболочка ускоряется свободно, без воздействия на нее противодействия.

Вернемся к движению первой оболочки. В силу того, что ее скорость уменьшилась, а скорость второй оболочки увеличилась, давление в слое ПД между ними через некоторое время становится меньше, чем на внутренней поверхности первой оболочки. В результате она вновь ускорит свое движение, одновременно сжимая слой ПД и создавая повышенное противодействие, которое снова ее затормозит и т.д. Аналогичный волновой режим набора скорости имеют и другие внутренние оболочки, но длительность этого волнового этапа (назовем его первым) каждой оболочки различна. Вторым этапом  $j$ -й оболочки начнется после того, как она “узнает” о существовании внешней  $N$ -й оболочки. Это выражается в приходе волны разгрузки от  $N$ -й оболочки в результате ее свободного ускорения. При последующем движении для внутренних оболочек вновь может наступить режим набора скорости, характерный для первого этапа.

Покажем вышеописанное на конкретном примере. На рис. 6.34 и 6.35 представлены зависимости среднемассовых скоростей оболочек

$$v_j = \left( \sum_i m_i^j u_i^j \right) / M_{об}^j,$$

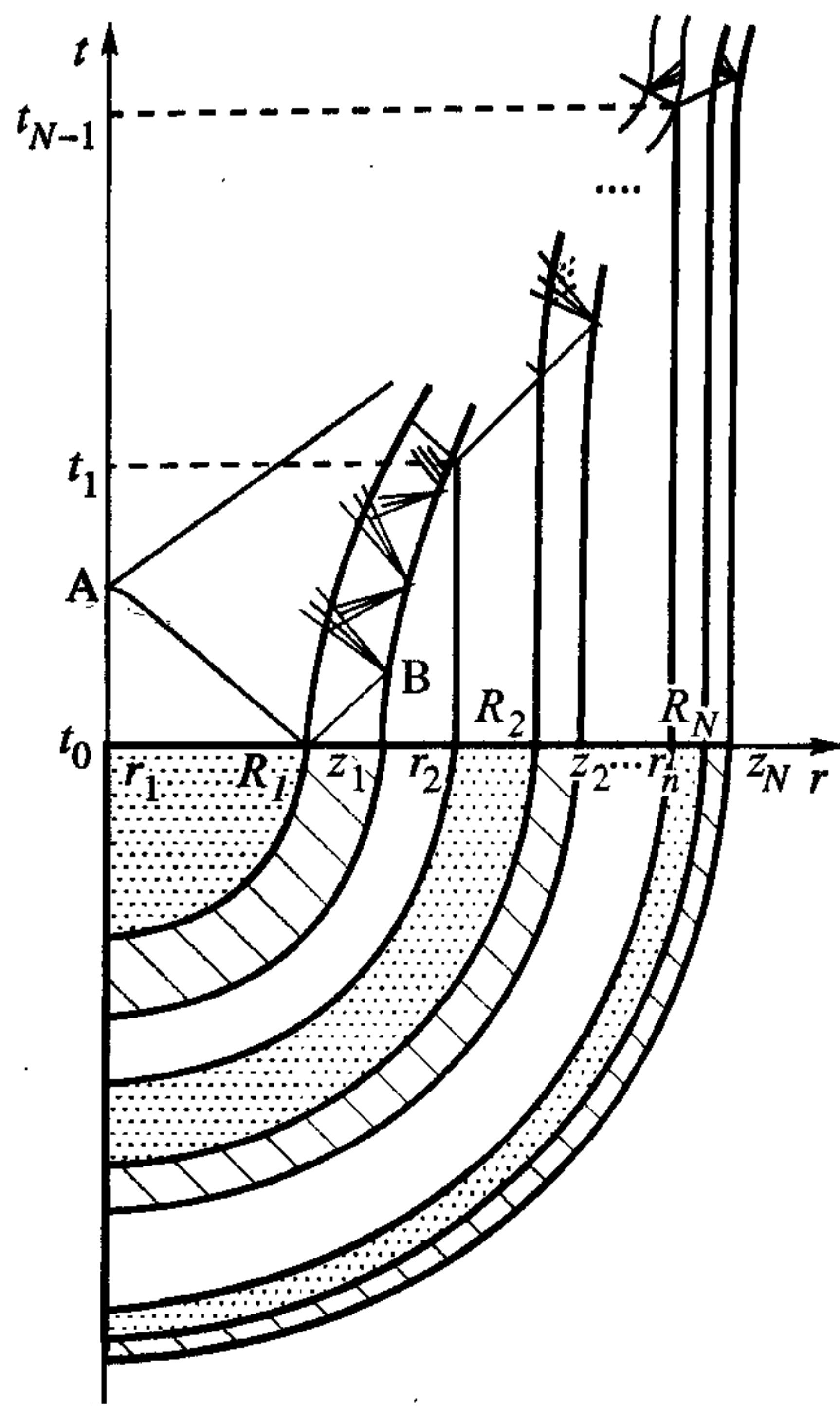


Рис. 6.33. Начальная геометрия задачи о метании системы оболочек и качественная  $(r-t)$ -диаграмма процесса движения оболочек и продуктов детонации.



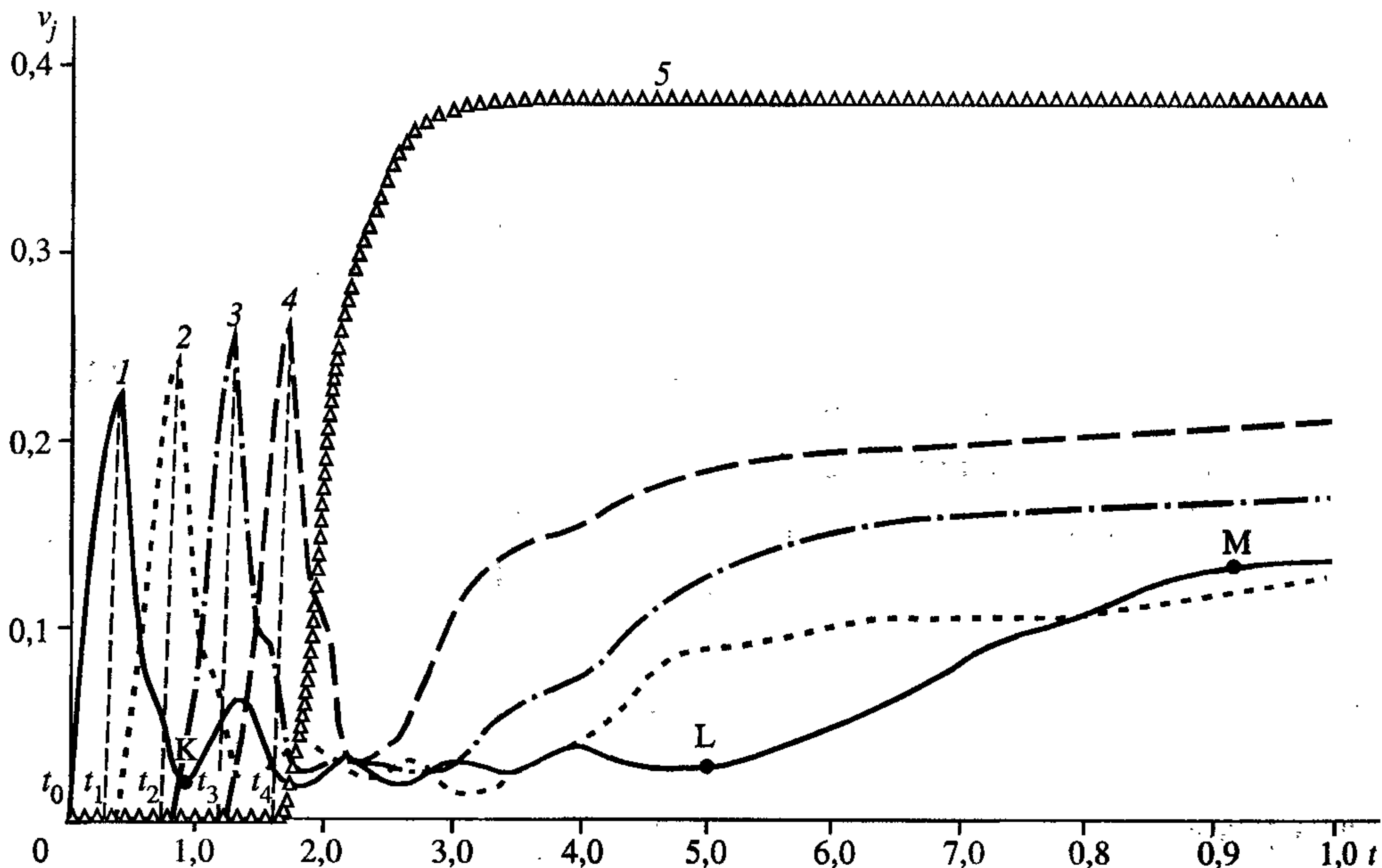


Рис. 6.34. Зависимость скорости пяти оболочек от времени.

Поясн. см. в тексте.

( $m_i^j$  — масса  $i$ -й лагранжевой ячейки,  $u_i^j$  — массовая скорость  $i$ -го узла сетки, суммирование по ячейкам сетки  $j$ -й оболочки,  $M_{об}^j$  — ее масса) и координаты внутренних поверхностей оболочек от времени. Расчет проведен для пяти железных цилиндрических оболочек с  $\rho_0^j = 7,84 \text{ г/см}^3$ ,  $\mu = 0,814 \text{ Мбар}$ ,  $Y_0 =$

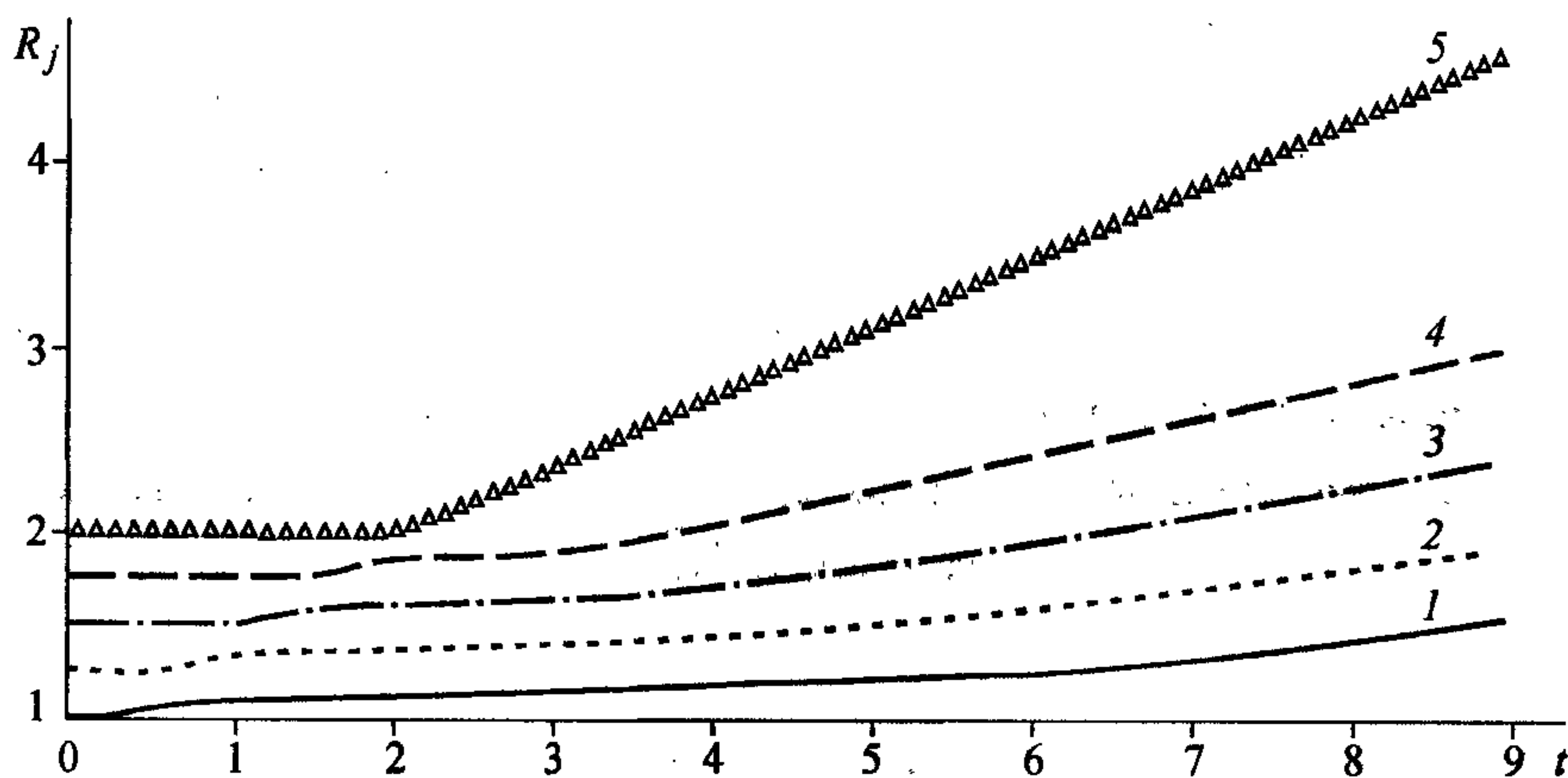


Рис. 6.35. Траектории движения пяти оболочек.

Поясн. см. в тексте.

$= 0,01$  Мбар,  $a_0 = 0,385$  см/мкс,  $n = 5,5$ . В качестве ВВ выбран ТГ 50/50 с  $\rho_{\text{ВВ}} = 1,62$  г/см<sup>3</sup>,  $D = 0,76$  см/мкс,  $\gamma = 3$ . Расчет выполнен в безразмерных переменных (6.1.61), где характерный размер  $R = R_1 - r_1$ . Безразмерные значения параметров ВВ и оболочек следующие:  $\rho_{\text{ВВ}} = 1$ ,  $\rho_0^j = 4,8395$ ,  $\mu = 0,87$ ,  $D = 1$ ,  $Y_0 = 0,0107$ ,  $a_0 = 0,50658$ . Толщина оболочек  $R_j Z_j = 0,05$  ( $j = 1, 2, \dots, 5$ ), величина вакуумного зазора  $Z_j r_{j+1} = 0,05$ , радиус внутреннего заряда  $R = 1$ , толщина слоев ВВ  $r_j R_j = 0,15$  ( $j > 1$ ).

Указанные на рисунках номера кривых соответствуют номерам оболочек. Кроме того, на рис. 6.34 отмечены моменты времени  $t_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ), при которых  $j$ -я оболочка соударяется с  $(j+1)$ -м слоем ВВ. По поведению кривых трудно видеть характерные особенности ударно-волнового процесса взаимодействия ВВ и оболочек. Так, например, по поведению скорости первой оболочки (кривая 1 на рис. 6.34) видно, что при  $t = t_0$  оболочка ускоряется, при  $t = t_1$  — соударяется со слоем ВВ, отрезок кривой KL характеризует первый этап движения, а отрезок LM — второй. Заметим, что в приведенном расчете не ставилась цель получения высокой скорости метания тел.

При исследовании физико-механических явлений рассматриваемого процесса взрывного метания оболочек и пластин в плане получения высоких скоростей проведена серия расчетов. Отметим и кратко опишем результаты некоторых из них.

1. Фактически первой модельной постановкой задачи, в рамках которой обнаружен эффект увеличения скорости внешней оболочки (в отличие от работы [4] здесь разлетающиеся от оси симметрии оболочки, а не схлопывающиеся), была задача о метании пяти стальных цилиндрических оболочек равной толщины  $R_j Z_j = 0,03$  ( $j = 1, \dots, 5$ ). Здесь  $R_1 = 1$ ,  $R_5 = 2$ , а оболочки размещены равномерно с интервалом  $Z_j r_{j+1} = 0,22$ , параметры ВВ и материала оболочек приведены выше. Изменяя только количество ВВ в слоях, определим скорости внешней оболочки и найдем, при какой толщине ВВ скорость наибольшая.

Зафиксируем  $R_j Z_j$ ,  $r_1 = 0$  и будем в каждом расчете одновременно изменять величину зазора  $0 < Z_j r_{j+1} < 0,1$  и толщину слоя  $0,12 < r_j R_j < 0,22$  ( $j > 1$ ,  $r_j R_j + Z_j r_{j+1} = 0,22$ ). На рис. 6.36 приведена зависимость наибольшей скорости



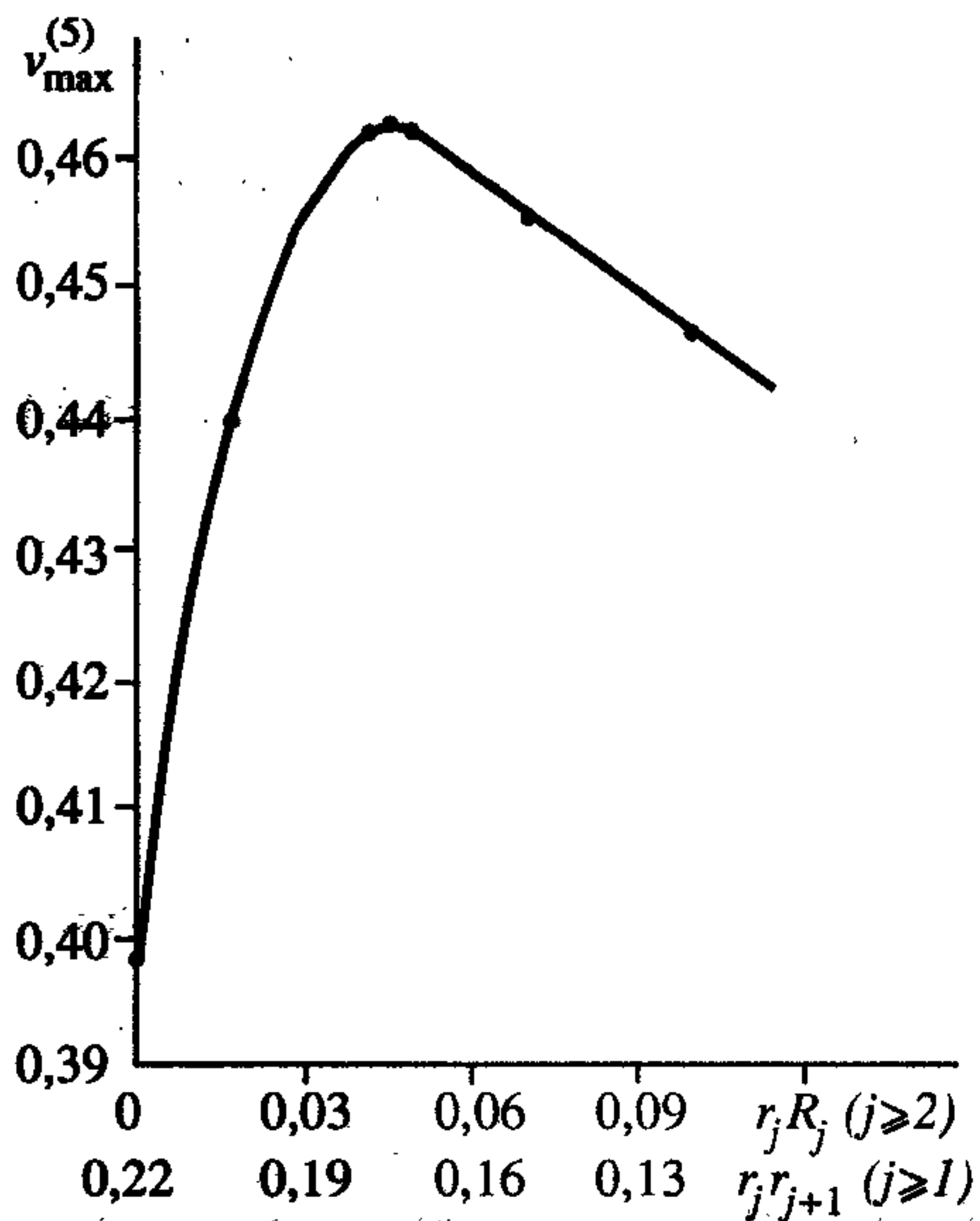


Рис. 6.36. Зависимость максимальной скорости внешней оболочки от размера зазора между слоями ВВ и внутренними оболочками (или толщины слоя ВВ).

внешней пятой оболочки в зависимости от  $r_j R_j$  (или  $Z_j r_{j+1}$ ). Из рисунка видно, что при нулевом зазоре, т.е. когда вся система состоит из чередующихся слоев ВВ и оболочек, скорость внешней оболочки наименьшая. Далее с уменьшением количества ВВ в системе (система с зазорами) скорость внешней оболочки увеличивается и достигает наибольшего значения при  $r_j R_j = 0,045$ .

Перераспределяя массы оболочек и их положение в пространстве, можно достичь и большее увеличение скорости. В многопараметрической задаче для установления закономерностей процесса необходимо ее упростить, рассмотрев, в частности, плоскую постановку и сосредото-

доточив внимание на взаимодействии пластин двух соседних каскадов.

2. В дальнейшем нам потребуются зависимости скорости одной пластины ( $v = 1$ ) от текущей координаты ее внутренней поверхности для различных  $\eta$  в случае, когда слева заряд ограничен недеформируемой стенкой. Такая серия расчетов проведена для условий мгновенной детонации и детонации, описываемой автомодельным решением [14] (условно “реальная” детонация). Результаты представлены на рис. 6.37. Существенное различие скоростей на различных этапах движения наблюдается при  $\eta > 2$ .

3. Рассмотрим несколько вариантов двухступенчатой сборки в плоской постановке, когда слева заряд ограничен жесткой стенкой.

а. Фиксируются размеры первого каскада  $r_1 R_1 = 1$ ;  $\eta = 0,5$  и величина зазора  $Z_1 r_2 = 0,787$ , который выбирается из условия, чтобы первая пластина в основном успела на этом интервале набрать наибольшую скорость. Изменяются размеры ВВ и пластины второго каскада при сохранении коэффициента нагрузки  $\eta_2 = 0,5$ .

б. В другой серии расчетов при этих же параметрах будем сохранять  $\eta_2 = 4$ . Рисунок 6.38 демонстрирует зависимость конечной скорости пластины

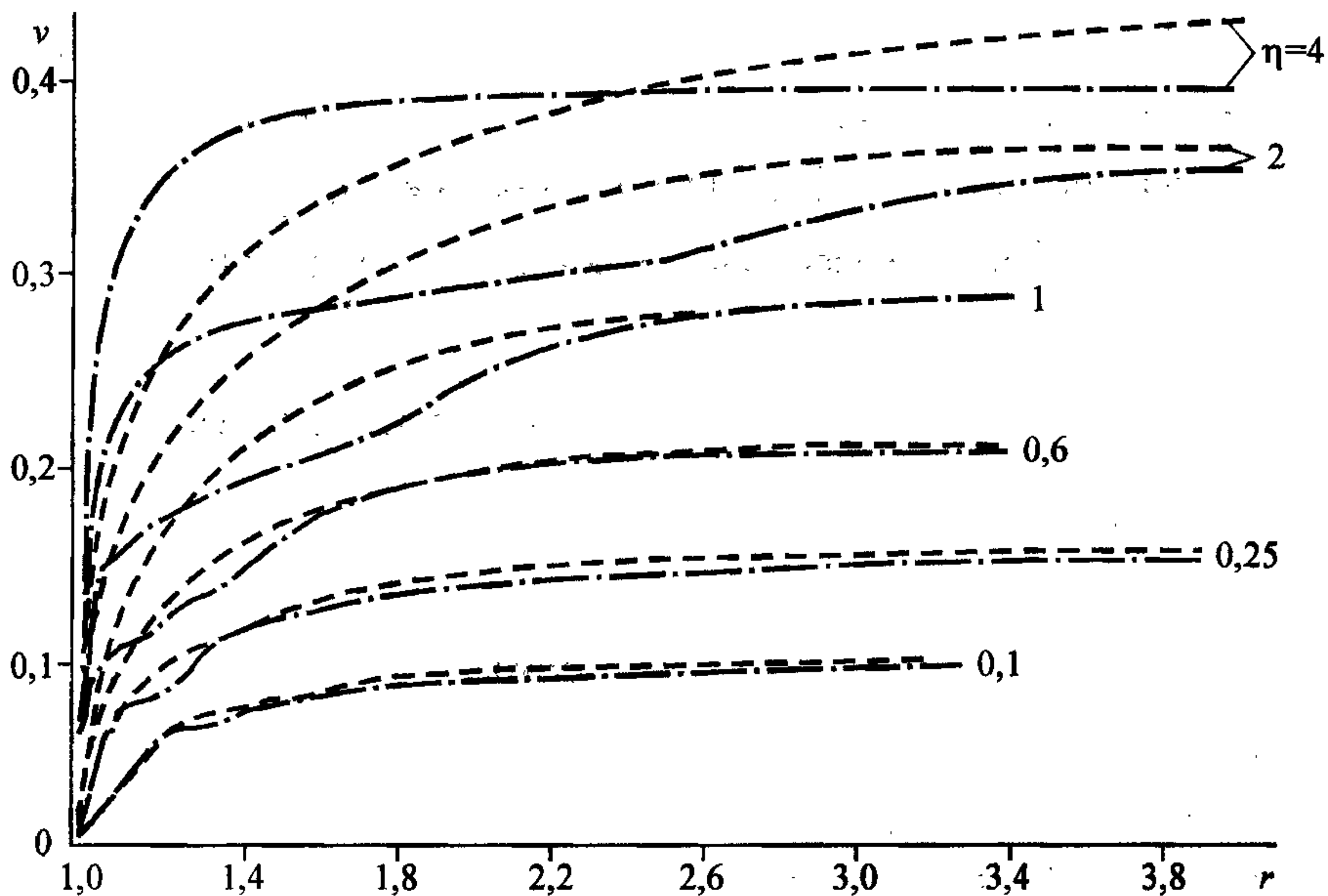


Рис. 6.37. Зависимость скорости оболочки от времени для различных коэффициентов нагрузки и моделей детонации ВВ.

Штрих — мгновенная детонация, штрихпунктир — “реальная”.

второго каскада от размера его ВВ соответственно для  $\eta_2 = 0,5$  и  $\eta_2 = 4$ . Выделяются два естественных предельных случая:

1) с увеличением  $r_2 R_2$  наблюдается асимптотическая сходимость  $v^{(2)}$  к некоторому  $v^*$ , где  $v^*$  есть максимальное значение скорости второй пластины при условии, что ПД второго слоя со стороны свободной поверхности свободно истекают в вакуум для рассматриваемого  $\eta_2$  (т.е. удар первой пластины отсутствует или ее масса пренебрежимо мала);

2) с уменьшением  $r_2 R_2$  значения  $v^{(2)}$  так же ограничены некоторым  $v^{**}$ . Причем  $v^{**} = v^{(1)} + v_{жс}^{(2)}$ , где

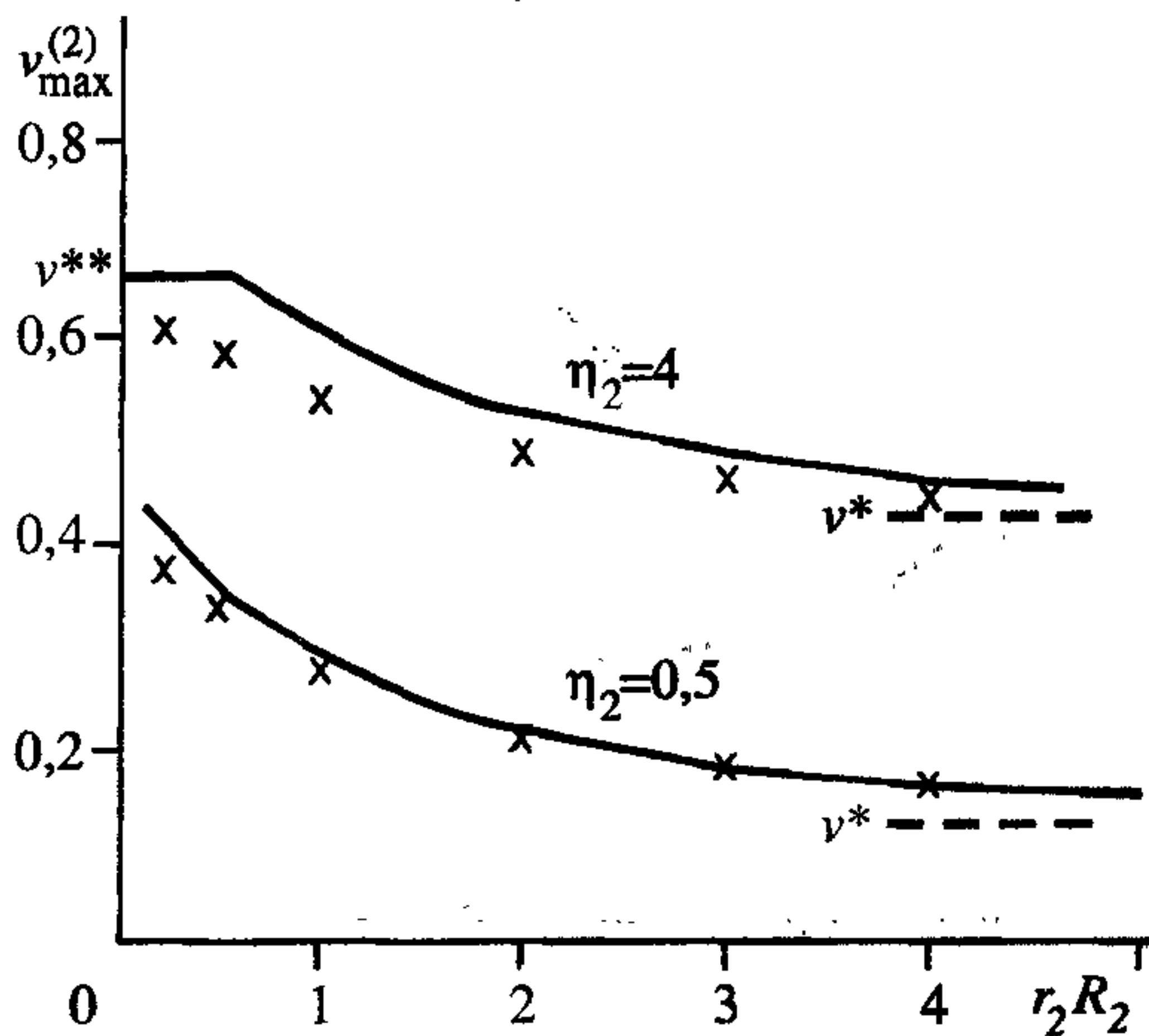


Рис. 6.38. Конечная скорость пластины второго каскада в зависимости от размера его слоя ВВ для двух коэффициентов нагрузки.

Поясн. см. в тексте.



$v^{(1)}$  — скорость первой пластины в момент удара о слой ВВ,  $v_{\text{жс}}^{(2)}$  — скорость второй пластины при условии, если бы левая граница второго слоя ВВ была ограничена неподвижной недеформируемой стенкой. Представленные зависимости в пределах  $v^*$  и  $v^{**}$  качественно совпадают при  $\eta_2 = 0,5$  и  $\eta_2 = 4$  (напомним, что  $\eta_1 = 0,5$ ;  $r_1 R_1 = 1$ ). Несколько контрольных расчетов показали, что и для других  $\eta_2$ , близких к указанным, кривые имеют подобный вид. Поскольку  $v^*$  вычислить легко (для  $v^*$  существует аналитическое решение, см. [14]), а  $v^{**}$  можно, например, получить, воспользовавшись рис. 6.37, то применяя зависимость  $v_{\text{max}}^{(2)}$  от  $r_2 R_2$ , с учетом  $v^*$  и  $v^{**}$  легко оценить скорость второй пластины для произвольного  $\eta_2$  и  $r_2 R_2$  при заданной скорости удара пластины первого каскада. Для рассматриваемых параметров задачи в этом случае предлагается, например, воспользоваться зависимостью

$$v_{\text{max}}^{(2)} = v^* + \frac{1}{1 + m_{\text{ВВ}}^{(2)}} (v^{**} - v^*), \quad (6.2.1)$$

где  $m_{\text{ВВ}}^{(2)}$  — масса ВВ второго каскада. Решение с применением (6.2.1) на рис. 6.38 показано крестиками.

в. Выше рассмотрено движение пластины с  $\eta_1 = 0,5$  ( $r_1 R_1 = 1$ ), т.е. тело достаточно большой массы. В случае движения легких пластин ( $\eta_1 > 1$ ) на

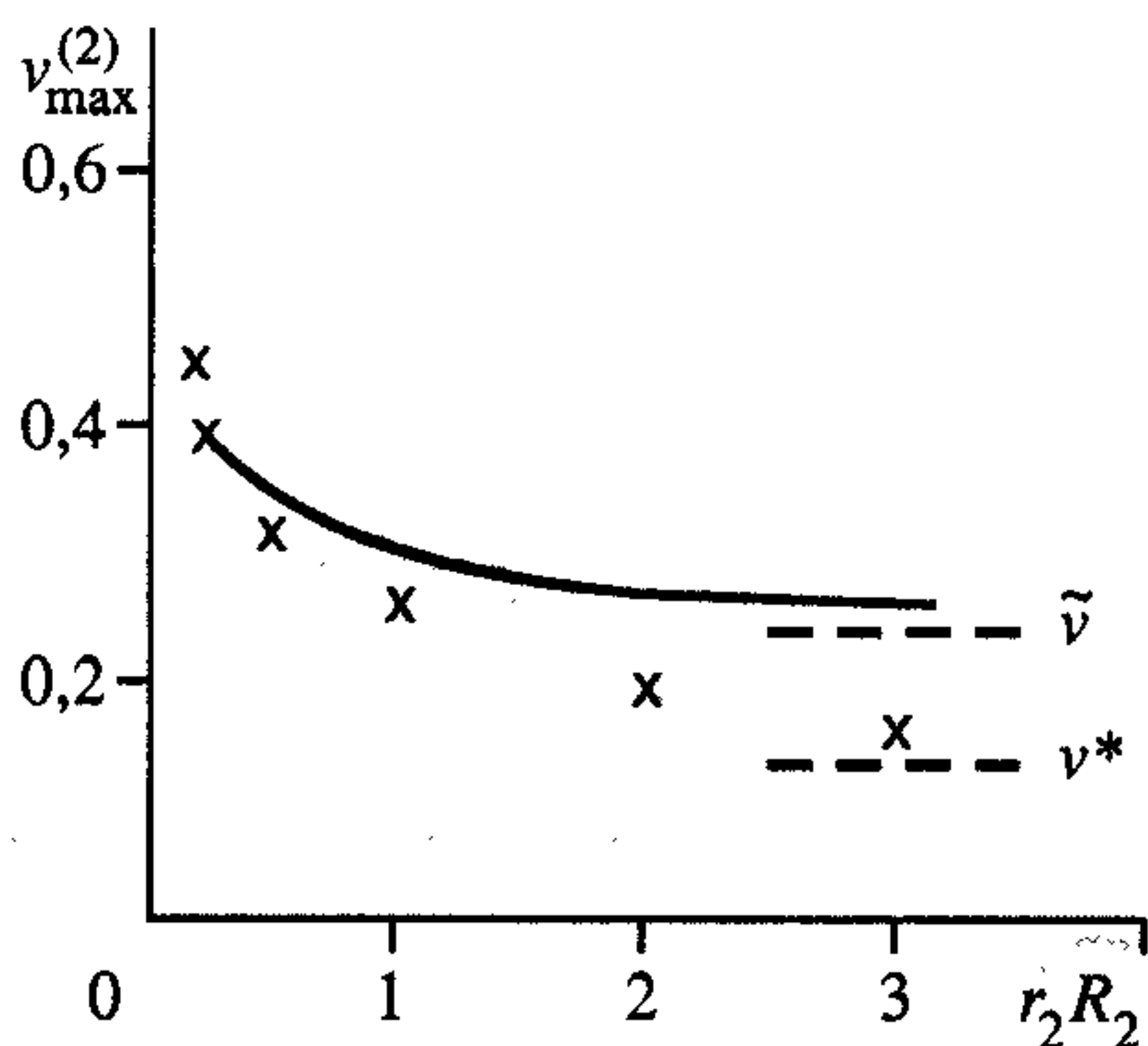


Рис. 6.39. Конечная скорость пластины второго каскада в зависимости от размера его слоя ВВ в условиях более легкого (чем на рис. 6.38) поршня первого каскада.

первой ступени она после удара о слой ПД отскакивает в противоположном направлении, и затем ПД первого слоя успевают вторично ее разогнать и сообщить второй пластине дополнительный импульс. Зависимость, подобная рис. 6.38, для  $\eta_1 = 1$ ;  $r_1 R_1 = 1$ ;  $\eta_2 = 0,5$  при  $r_2 R_2 = 1, 2, 3$  представлена на рис. 6.39; но в этом случае с увеличением  $r_2 R_2$  наблюдается сходимость к некоторому  $\tilde{v} > v^*$ .

г. Введем в рассмотрение параметр, характеризующий отношение кинетической энергии  $K_j$  ударяемой  $(j-1)$ -й пла-

стины к полной энергии слоя ВВ, по которому производится удар:

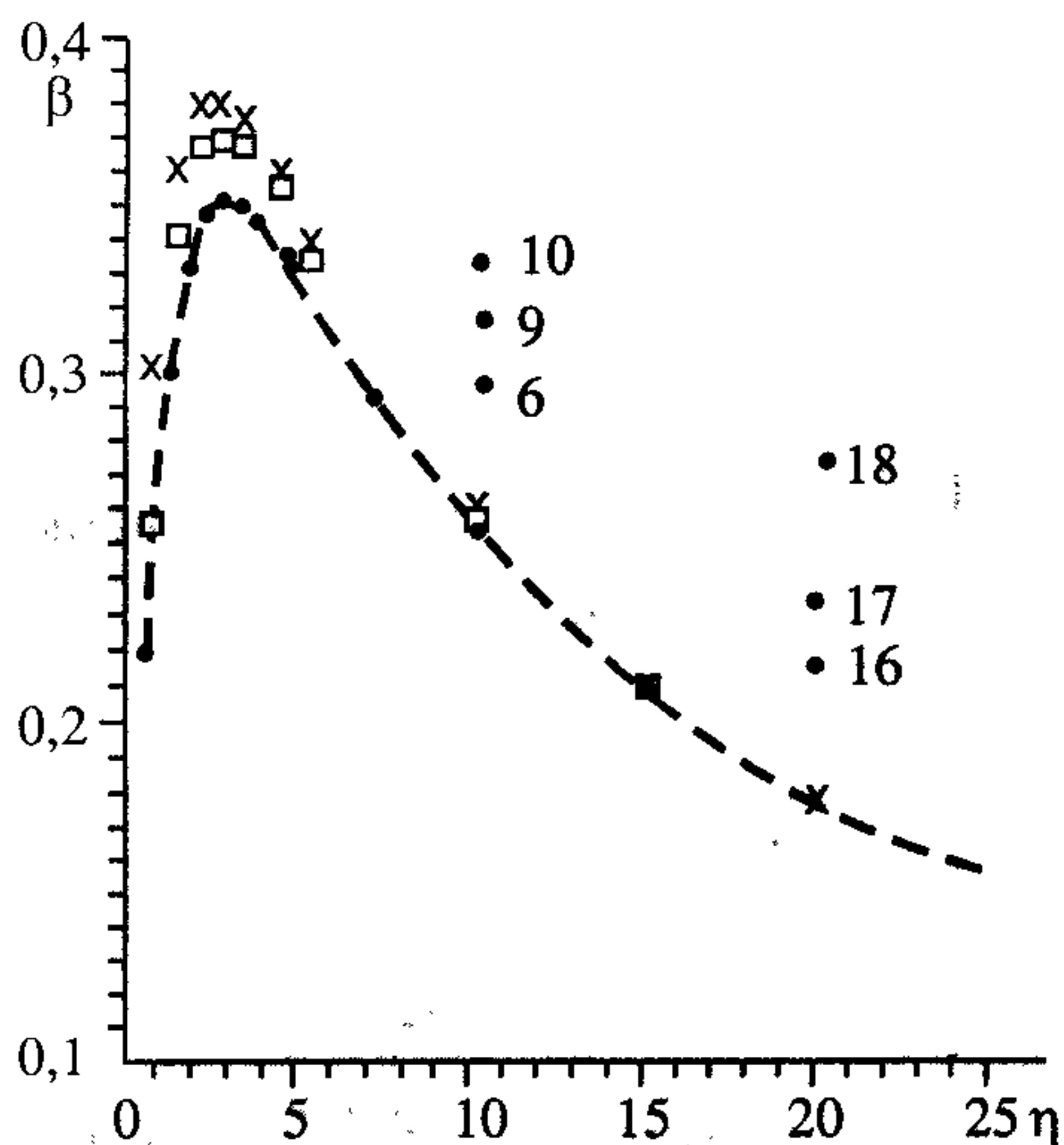
$$\xi_{j,j-1} = \frac{K_3^{j-1}}{M_{ВВ}^j e_0^j}.$$

В случае, когда расстояние между каскадами достаточно велико (обеспечивается полный набор скорости пластин и отсутствует дополнительный импульс, указанный выше) и параметры  $\xi_{2,1}, \eta_2$  выдерживаются равными в различных вариантах, рассчитанные скорости второй пластины получаются одинаковыми. Для малых зазоров в  $\xi_{2,1}$  необходимо учитывать еще и внутреннюю энергию ударяемой пластины и часть энергии первого слоя ВВ.

4. Рассмотрим одномерную задачу о взрывном метании пластины, когда плоская детонационная волна инициирована у открытого торца ВВ. Известно, что доля энергии ВВ, которую получает пластина в результате взрыва (несжимаемая среда, акустическое приближение), определена соотношением [65]

$$\beta(\eta) = \frac{E_{пл}}{E_{ВВ}} = \frac{27^2}{32\eta^3} \left\{ 1 + \frac{16}{27}\eta - \sqrt{1 + \frac{32}{27}\eta} \right\}^2, \quad (6.2.2)$$

где  $E_{пл}, E_{ВВ}$  — энергия пластины и ВВ соответственно. Функция  $\beta(\eta)$  имеет максимальное значение при  $\eta \approx 2,53$ . При этом наибольшая доля энергии, получаемая пластиной,  $\beta_{max} \approx 0,351$ , т.е. достаточно незначительна. Изменение веса пластины приводит к уменьшению коэффициента использования энергии  $\beta$ . Аналитически полученные значения  $\beta$  в зависимости от  $\eta$  представлены на рис. 6.40 штриховой линией. Результаты численных расчетов этой же задачи с применением упруго-пластической модели и “реальной” детонации показаны на рисунке крестиками для  $\beta_1 = P_3 / E_{ВВ}$  и квадратиками



**Рис. 6.40.** Эффективность передачи энергии от ВВ (иницирование на свободной границе) к пластине от коэффициента нагрузки.

Номера точек см. табл. 6.2. Ост. поясн. см. в тексте.



ми для  $\beta_2 = K_3 / E_{ВВ}$  ( $P_3, K_3$  — полная и кинетическая энергия сжимаемой пластины).

В случае применения более полной физико-математической модели процесса значения  $\beta$  несколько выше. С увеличением  $\eta$  результаты сближаются, что дополнительно подтверждает применимость модели несжимаемого тела для тонких пластин. При метании толстых пластин часть энергии ВВ расходуется на адиабатическое нагревание и на работу упругопластического деформирования. Для  $\eta < 2$  пластина недополучает энергию от ВВ из-за действия волн разрежения со стороны свободной поверхности ПД, а для  $\eta > 2,5$  относительно тонкая пластина быстро ускоряется и ПД не успевает эффективно передать свою энергию с периферийных областей заряда. Многоступенчатая схема взрывного метания в последнем случае позволяет “транспортировать” энергию к исходной пластине. Причем эффективность многоступенчатого метода увеличивается с возрастанием  $\eta$ .

При метании пластины, когда детонационная волна инициирована у жесткой стенки, коэффициент передачи энергии  $\beta_2$  (КПЭ) значительно выше, чем

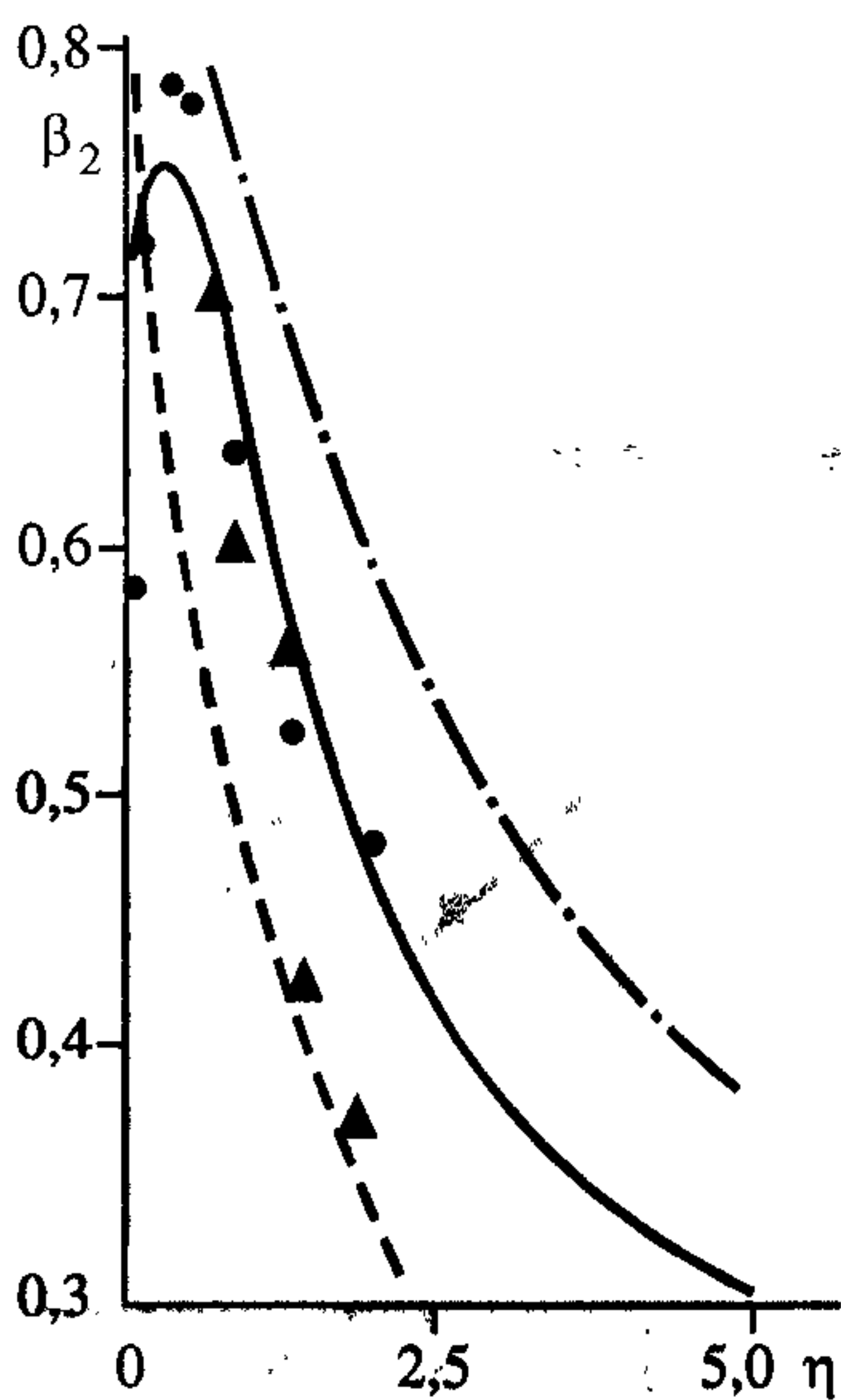


Рис. 6.41. Эффективность передачи энергии от ВВ (иницирование у жесткой стенки) к пластине от коэффициента нагрузки.

Поясн. см. в тексте.

(6.2.2), и достигает наибольшего значения 0,75—0,8 при коэффициенте нагрузки  $\eta = 0,3$ . На рис. 6.41 сплошной линией представлена зависимость  $\beta_2$  от  $\eta$  по результатам численного решения. Здесь же точками отмечены данные Е. И. Биченкова, В. А. Лобанова [25], треугольниками — Кнопфеля, штрихпунктир показывает аналитическое решение Гарни (линейное распределение скорости в ПД), штрих — решение, полученное без учета распределения скорости ПД. Убывание КПЭ при малых  $\eta$  объясняется тем, что значительная доля энергии ВВ передается в волны деформации тела, а при  $\eta > 1$ , как и раньше, быстрое ускорение тонких пластин не позволяет эффективно передать энергию из отдаленных областей ПД. В представленных экспериментальных данных из [25] метание медных и дюралевых пластин осуществлялось в режиме сколь-

зующей детонационной волны, а в расчетах — для нормально падающей волны. Это, видимо, и является основной причиной некоторого различия расчетных и экспериментальных данных.

В плане применения этих результатов к многоступенчатому методу можно сделать вывод, что в промежуточных каскадах, ограниченных массивной ударяемой пластиной, более оптимальная передача энергии от ВВ к метаемой пластине осуществляется при малых коэффициентах нагрузки  $\eta < 0,5 \div 1$ .

Практически во всех расчетах для промежуточных слоев ВВ применялась модель мгновенной детонации с учетом направления развития процесса. Возникшая в результате соударения ударная волна в ВВ очередного каскада является в этой модели зоной введения в систему энергии мгновенной детонации соответствующего объема ВВ. Модель нестационарной детонации с учетом кинетики химической реакции ВВ применялась редко, так как требовала значительных затрат машинного времени при выполнении многопараметрических серийных расчетов. Для рассмотренных вариантов задачи эта модель незначительно повлияла на скорость метаемой пластины, хотя можно указать системы, когда режим пережатой детонации или процесс взаимодействия зоны химической реакции с соизмеримой по толщине пластиной существенно влияют на результаты. В этом случае в зоне химической реакции и в ПД движение среды, представляющей сложную смесь из газа и частиц ВВ, опишем уравнениями газодинамики многофазных сред [27]:

$$\begin{aligned} \frac{d_i \rho_i}{dt} + \rho_i \nabla \bar{U}_i &= \sum_{j=1}^k \chi_{ij}, \\ \rho_i \frac{d_i \bar{U}_i}{dt} &= \nabla \sigma_i + \rho_i \bar{F}_i + \sum_{j=1}^k (\bar{p}_{ij} - \chi_{ij} \bar{U}_i), \\ \rho_i \frac{d_i E_i}{dt} &= \nabla (\sigma_i \bar{U}_i + Q_i) + \rho_i \bar{F}_i U_i + \sum_{j=1}^k (E_{ij} - \chi_{ij} E_i), \\ \sum_{i=1}^k m_i &= 1 \quad (i = 1, 2, \dots, k; \quad j = 1, 2, \dots, k), \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

где  $\rho_i = \rho_{ii} m_i$ ,  $\rho_{ii}$  — истинная плотность  $i$ -й фазы,  $\bar{U}_i$  — вектор скорости,  $\sigma_i$  — тензор напряжения,  $\bar{F}_i$  — вектор внешних сил,  $Q_i$  — приток тепла,  $\chi_{ij}$  — интенсивность перехода массы из  $j$ -й в  $i$ -ю составляющую в единице объема,  $\bar{p}_{ij}$ ,  $E_{ij}$  — сила и энергия, учитывающие интенсивность обмена меж-



ду  $i$ -й и  $j$ -й составляющими. При этом

$$\chi_{ij} = -\chi_{ji}, \quad \chi_{ii} = 0, \quad \bar{p}_{ii} = 0, \quad E_{ii} = 0, \\ d_i(\cdot)/dt = \partial(\cdot)/\partial t + \bar{U}_i \nabla(\cdot).$$

Уравнения (6.2.3) могут применяться для описания многоскоростной сплошной среды как в гомогенном, так и в гетерогенном приближении в зависимости от конкретизации величин  $\sigma_i$ ,  $\bar{p}_{ij}$ ,  $E_{ij}$ . Замыкается система (6.2.3) термодинамическими соотношениями, характеризующими свойства составляющих среды, и указанием сил их взаимодействия.

В настоящей работе применяется простая модель среды для описания взрывного превращения ВВ. Предполагая, что среда состоит из непрореагировавшего ВВ, ПД и их смеси, а также считая, что их скорости и температуры в объеме  $\tau(t)$  равны:  $u = u_1 = u_2$ ,  $T = T_1 = T_2$ , система уравнений (6.2.3) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_1}{dt} + \rho_1 \frac{\partial u}{\partial r} &= \chi_{12}, \\ \frac{d\rho_2}{dt} + \rho_2 \frac{\partial u}{\partial r} &= \chi_{21}, \\ \rho \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial r}, \\ \rho \frac{dE}{dt} &= -\frac{\partial Pu}{\partial r} + Q \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \\ m_1 + m_2 &= 1, \quad P = \Phi(\rho, e), \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

где  $\rho = \rho_1 + \rho_2$ ,  $\rho_1 = \rho_{11} m_1$ ,  $\rho_2 = \rho_{22} m_2$ ,  $E = \tilde{e} + u^2/2$ ;  $m_1, m_2$  — объемные концентрации ВВ и ПД соответственно;  $\chi_{21} = \partial\alpha/\partial t$ ;  $\alpha$  — массовая доля прореагировавшего ВВ;  $Q$  — энергосвободное ВВ, индексы 1, 2 относятся соответственно к непрореагировавшему ВВ и ПД,

$$\begin{aligned} \tilde{e} &= \alpha e_2 + (1 - \alpha)(e_1 + Q), \\ e &= \alpha e_2 + (1 - \alpha)e_1. \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

Перепишем уравнения (6.2.4) в виде

$$\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{r^{v-1}} \frac{\partial(r^{v-1}u)}{\partial r},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial P}{\partial r}, \\ \frac{\partial r}{\partial t} &= u, \\ \frac{\partial e}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t} &= Q \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

$$P = f(V, e). \quad (6.2.7)$$

Уравнение кинетики выбрано в форме Аррениуса

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = v_r (1 - \alpha) \exp(-E_\alpha / RT), \quad (6.2.8)$$

где  $E_\alpha$  — энергия активации,  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $v_r$  — кинетическая постоянная,  $T$  — температура, связанная с удельной внутренней энергией соотношением  $e = c_V T$ ,  $c_V$  — теплоемкость при постоянном объеме.

Важной самостоятельной задачей является определение уравнения состояния для ВВ, ПД и их смеси. В настоящее время получены уравнения состояния ПД многих ВВ для равновесного состояния за плоскостью Чепмена—Жуге, а в области высоких давлений зоны химической реакции надежные данные о составе продуктов разложения ВВ отсутствуют.

Для непрореагировавшего ВВ в работе используется известная экспериментальная ударная адиабата в виде

$$D_B = a_y + b_y u, \quad (6.2.9)$$

где  $D_B$  — скорость ударной волны,  $a_y, b_y$  — постоянные, а для ПД применяется уравнение состояния идеального газа или уравнение, полученное В. Ф. Куропатенко [28]:

$$P = [\gamma(\eta_2 - 1)] \rho_0 \eta_2 e + \varphi(\eta_2), \quad (6.2.10)$$

где

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_\infty & \text{при } x > 1, \\ \gamma_0 (\gamma_\infty - \gamma_0) (3 - 3x + x^2) \cdot x & \text{при } x \leq 1; \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} \rho_0 D^2 A (\eta_2 - \delta_*)^m & \text{при } x > 1, \\ 0 & \text{при } x \leq 1; \end{cases}$$



$$x = \eta_2 / \delta_*, \quad A = 0,1533, \quad m = 2,284, \quad \gamma_\infty = 1,67, \quad \gamma_0 = 1,375, \\ \delta_* = 0,35, \quad \eta_2 = \rho_{22} / \rho_0.$$

При определении уравнения состояния смеси ПД и непрореагировавшего ВВ в некотором объеме  $\tau$  предполагается равенство давлений обеих фаз  $P = P_1 = P_2$ . Привлекая уравнение  $m_1 + m_2 = 1$ , из которого следует

$$V = \alpha V_2 + (1 - \alpha) V_1, \quad (6.2.11)$$

и используя (6.2.5), (6.2.9), (6.2.10) и соотношение Гюгонио для конденсированной фазы

$$e_1 = 0,5 P (V_0 - V_1), \quad (6.2.12)$$

путем исключения  $e_1, e_2, V_2$  и  $P$  получаем нелинейное уравнение для определения  $V_1$ :

$$\xi(V_1) = V_1 - \frac{2(\gamma - 1)}{(1 - \alpha)(\gamma + 3)P} \left[ \frac{VP}{(\gamma - 1)} - \rho_0 e - \frac{2\alpha\phi}{\gamma + 1} \right] - \frac{(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} = 0. \quad (6.2.13)$$

Связь между  $P$  и  $V_1$  получается из уравнений неразрывности, сохранения количества движения и соотношений (6.2.5), (6.2.10), (6.2.11), (6.2.12)

$$P = \frac{a_y^2 (1 - V_1) \rho_0}{(1 - b_y + b_y V_1)^2}. \quad (6.2.14)$$

Для уравнения состояния идеального газа подчеркнутый член в (6.2.13) равен нулю. Зная  $V_1$ , следовательно  $V_2, e_1, e_2$ , по (6.2.11) и (6.2.12) определяем давление смеси ПД и ВВ.

Для численного решения системы уравнений (6.2.6)—(6.2.8) применяется следующий конечно-разностный метод. Первые три уравнения системы (6.2.6) аппроксимируются явной конечно-разностной схемой [8], а для уравнения энергии (6.2.9) и (6.2.10) используется неявная схема с итерациями по нелинейности:

$$\alpha_{i+1/2}^{s+1} = \alpha_{i+1/2}^n + v_r \tau^{n+1/2} \left[ \frac{\alpha_{i+1/2}^s + \alpha_{i+1/2}^n}{2} \right] \times \exp \left( - \frac{E_\alpha}{R(e_{i+1/2}^n + e_{i+1/2}^s) 0,5 / c_V} \right), \\ e_{i+1/2}^{s+1} = e_{i+1/2}^n + Q (\alpha_{i+1/2}^{s+1} - \alpha_{i+1/2}^n) - \left( \frac{P_{i+1/2}^n + P_{i+1/2}^s}{2} + q_{i+1/2}^{n+1/2} \right) \times (V_{i+1/2}^{n+1} - V_{i+1/2}^n),$$

$$P_{i+1/2}^{s+1} = f(V_{i+1/2}^{n+1}, e_{i+1/2}^{s+1}),$$

где  $s$  — номер итерации, расчеты выполняются шагами по времени в следующем порядке. Зная функции течения при  $t = t^n$ :  $u_i^{n-1/2}$ ,  $V_{i+1/2}^n$ ,  $e_{i+1/2}^n$ ,  $P_{i+1/2}^n$ ,  $\alpha_{i+1/2}^n$ ,  $r_i^n$ , сначала определяются значения  $u_i^{n+1/2}$ ,  $V_{i+1/2}^{n+1}$ ,  $r_i^{n+1}$ , а затем по вышеприведенным формулам  $e_{i+1/2}^{s+1}$ ,  $P_{i+1/2}^{s+1}$ ,  $\alpha_{i+1/2}^{s+1}$ . Итерационный процесс продолжается, пока не достигнется требуемая точность

$$\left| e_{i+1/2}^{s+1} - e_{i+1/2}^s \right| \leq \varepsilon, \quad \left| \alpha_{i+1/2}^{s+1} - \alpha_{i+1/2}^s \right| \leq \varepsilon, \quad \left| P_{i+1/2}^{s+1} - P_{i+1/2}^s \right| \leq \varepsilon$$

В результате определяются функции на момент времени  $t^{n+1}$ :

$$e_{i+1/2}^{n+1} = e_{i+1/2}^{s+1}, \quad \alpha_{i+1/2}^{n+1} = \alpha_{i+1/2}^{s+1}, \quad P_{i+1/2}^{n+1} = P_{i+1/2}^{s+1}.$$

Эта модель обрабатывалась на задаче о воздействии приложенного давления на слой гексогена с параметрами:  $\rho = 1,82$  г/см<sup>3</sup>,  $D = 0,88$  см/мкс,  $Q = e_0 = 0,05614$  мбар·см<sup>3</sup>/г,  $a_y = 0,287$  см/мкс,  $b_y = 1,61$ ,  $\nu_r = 10^{12,5}$  мкс<sup>-1</sup>;  $E_\alpha = 0,00896$  мбар·см<sup>3</sup>/г;  $R = 0,3745 \cdot 10^{-6}$  мбар·см<sup>3</sup>/(г·град.);  $c_V = 0,1323 \times 10^{-4}$  мбар·см<sup>3</sup>/(г·град.). Приложенное давление имело треугольный профиль (см. вставку на рис. 6.42) с максимальным давлением  $P_m = 0,1$  мбар, а время его действия  $t_k = 0,5$  мкс. На рис. 6.42 показана зависимость давления от пространственной координаты на момент времени 0,1 мкс. Расчетное значение давления в точке Чепмена—Жуге  $\sim 0,39$  мбар хорошо согласуется с экспериментом [14].

В представленных задачах по метанию систем пластин применялось ВВ ТГ 50/50 с уравнением состояния идеального газа для ПД  $\gamma = 3$ ,  $\rho = 1,62$  г/см<sup>3</sup>,  $D = 0,76$  см/мкс,

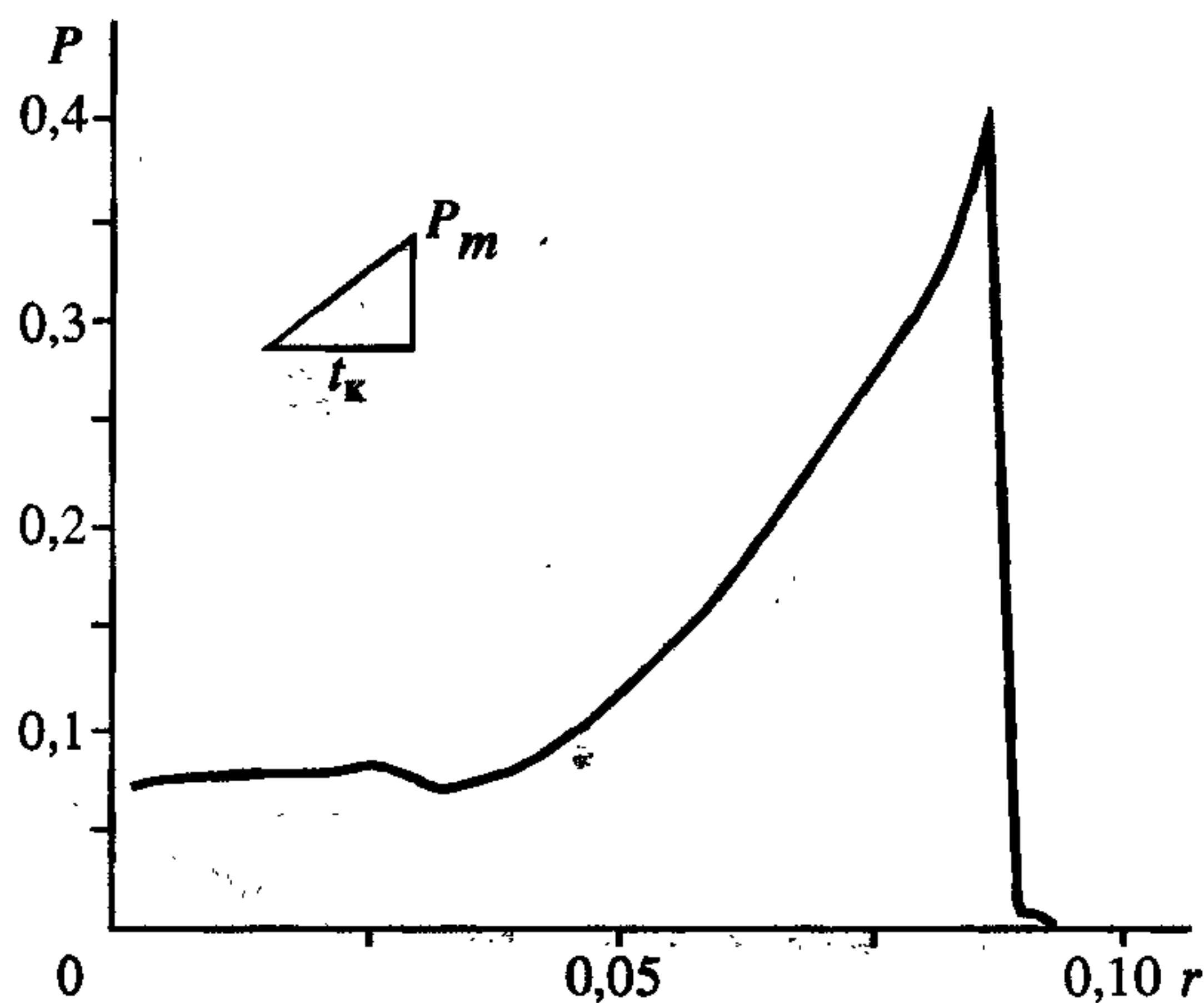


Рис. 6.42. Распределение давления за фронтом детонационной волны;  $t = 0,1$  мкс.

Поясн. см. в тексте.

$Q = e_0 = 0,0361$  мбар·см<sup>3</sup>/г. Для модели нестационарной детонации использовались следующие параметры:  $E_\alpha = 0,0070532$  мбар·см<sup>3</sup>/г;  $R = 0,3706 \times 10^{-6}$  мбар·см<sup>3</sup>/(г·град.);  $c_V = 0,129 \cdot 10^{-4}$  мбар·см<sup>3</sup>/(г·град.);  $a_y = 0,271$  см/мкс;  $b_y = 1,86$ . Расчеты проведены для безразмерных параметров:  $\rho = 1$ ;  $D = 1$ ;  $e_0 = 0,0625$ ;  $v_r = 10^{10,5}$ ;  $E_\alpha = 0,012211$ ;  $R = 0,6416 \cdot 10^{-6}$ ;  $c_V = 0,2233 \cdot 10^{-4}$ ;  $a_y = 0,3566$ . На рис. 6.43 численное решение (точки) сопоставляются с точным (сплошная линия) для задачи, когда инициирование детонации произведено у неподвижного тяжелого поршня (режим жесткой стенки). Здесь же приведены решения для задачи о распространении детонационной волны при ударе по ВВ стальной пластиной толщиной 0,07232 (за характерный размер выбрана толщина слоя ВВ) со скоростями 0,2; 0,315; 0,5. Поперечными штрихами на рисунке отмечено положение контактной границы между пластиной и ПД. На рисунке показан (крестики) также профиль давления в ПД для модели мгновенной детонации с учетом направления развития процесса при ударе пластиной со скоростью 0,315. В этом случае метаемая пластина с массой 0,05 (масса слоя ВВ равна единице) набирает скорость 0,7, а для модели нестационарной детонации — 0,707, т.е. скорости близки. Другие варианты задачи подтверждают различие в скоростях пластины около 1—3%. Таким образом, применение простейшей модели мгновенной детонации с учетом направления развития процесса позволяет удовлетворительно осуществить процесс передачи энергии от ПД к метаемой пластине.

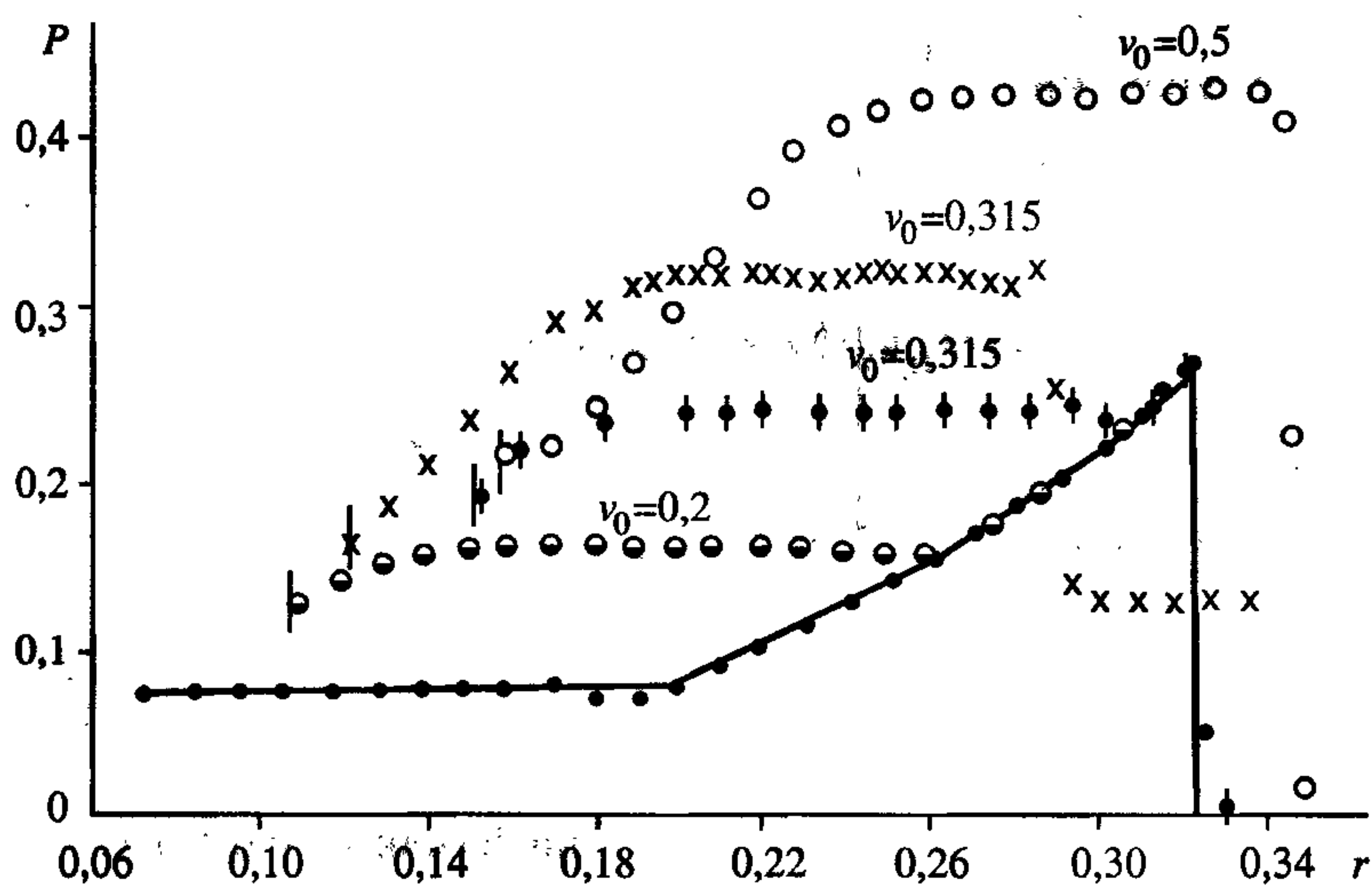


Рис. 6.43. Распределение давления в продуктах детонации ВВ.

Поясн. см. в тексте.



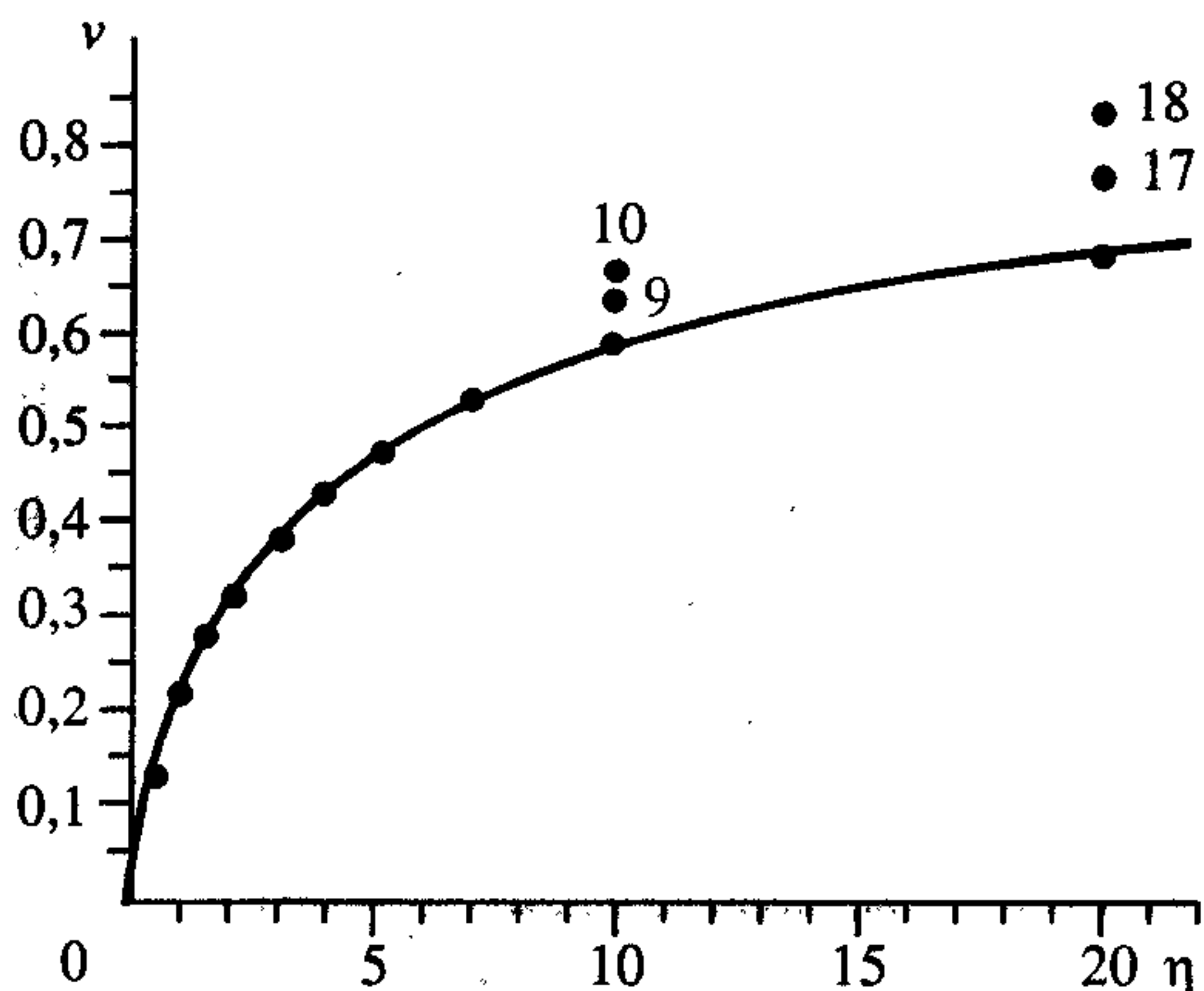


Результаты расчета многослойных систем

Номер варианта	Схема с указанием массы слоев	Масса ВВ	Скорость пластины	Конечное распределение энергии, %		
				Метаемая пластина	ПД основного ВВ	Внутренние слои
1	ВВ Пластина  -----  1 0,1	1	0,57	26	74	—
2	-----   -----  0,7 0,2 0,1 0,1	0,8	0,56	31,3	47,7	21
3	-----   -----  0,75 0,2 0,25 0,1	1	0,584	27	45	28
4	-----   -----  0,8 0,2 0,2 0,1	1	0,6	29	45	26
5	-----   -----  0,9 0,25 0,1 0,1	1	0,56	29	49	22
6	-----   -----  0,85 0,3 0,15 0,1	1	0,607	29,6	47,7	22,7, из них 17-ПД
7	-----   -----   -----  0,87 0,3 0,08 0,17 0,05 0,1	1	0,603	29,3	48,6	22,1
8	-----   -----   -----  0,7 0,28 0,2 0,2 0,1 0,1	1	0,601	29	43	28,7
9	-----   -----   -----  0,77 0,32 0,13 0,17 0,1 0,1	1	0,628	31,7	45	23,3
10	-----   -----   -----   -----  0,77 0,32 0,1 0,25 0,08 0,17 0,05 0,1	1	0,643	33,1	44,1	22,8
11	-----   -----   -----   -----  0,7 0,25 0,1 0,21 0,1 0,17 0,1 0,1	1	0,643	33,1	40,7	26,2
12	-----   -----   -----   -----  0,85 0,25 0,05 0,2 0,05 0,17 0,05 0,1	1	0,608	30	47,2	22,8
13	-----  1 0,05	1	0,672	18	82	—
14	-----   -----  0,8 0,32 0,2 0,05	1	0,711	20	45	35
15	-----   -----  0,9 0,36 0,1 0,05	1	0,727	21,2	50	28,8
16	-----   -----  0,9 0,3 0,1 0,05	1	0,736	21,7	48,3	30
17	-----   -----   -----  0,8 0,32 0,15 0,16 0,05 0,05	1	0,766	23,5	47	29,5
18	-----   -----   -----   -----  0,77 0,32 0,1 0,254 0,08 0,17 0,05 0,05		0,822	27,1	44,3	28,6

Рис. 6.44. Скорость метания пластин в зависимости от коэффициента нагрузки.

Номера точек см. табл. 6.2.



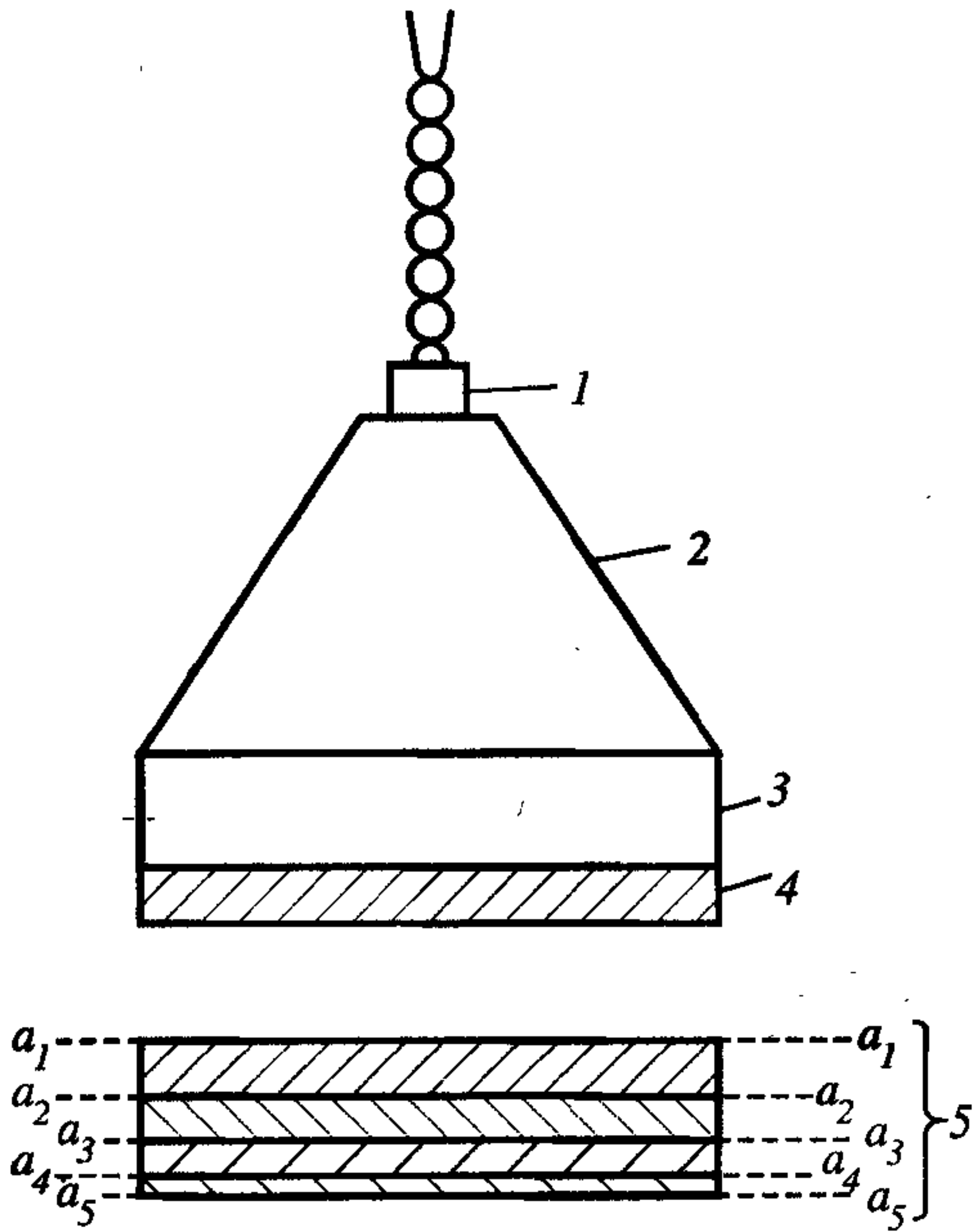
рости метания тела под действием ПД слоя ВВ. В общем же случае должны работать оба механизма.

### 6.3. Распространение ударных волн в многослойной системе с послойно уменьшающейся (увеличивающейся) акустической жесткостью

Выше представлен новый пример явления неограниченной кумуляции (ЯНК) в периодической плоской структуре без применения принципа сходящихся (схлопывающихся) ударных волн (в 1978 г. авторам не были известны исследования каскадной схемы метания пластин и оболочек, описанные в работах [4, 29], а также опубликованные в 1979—1982 гг. [30—35] и позднее [36—38]). Кроме этого примера ранее были известны следующие многослойные схемы неограниченной кумуляции. Это движение волны в преграде, состоящей из чередующихся плоских слоев легкого и тяжелого газа (сред) [12, 20], или в слое газа с убывающей плотностью, или в многослойной преграде с уменьшающейся (увеличивающейся) акустической жесткостью [26, 39].

Рассмотрим более детально последнюю схему в одномерной постановке на примере задачи о распространении ударных волн, образующихся при соударении бойка с преградой — набором пластин. Обозначим индексом 0 параметры, характеризующие боек, а индексом  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) — параметры пластин преграды, пластина  $i = 1$  обращена к бойку. Контактные поверхности между пластинами обозначим через  $a_i a_i$  ( $a_1 a_1$  — контактная поверхность между бойком и первой пластиной набора,  $a_{m+1} a_{m+1}$  — тыльная свободная поверхность пластинчатой преграды, рис. 6.45).





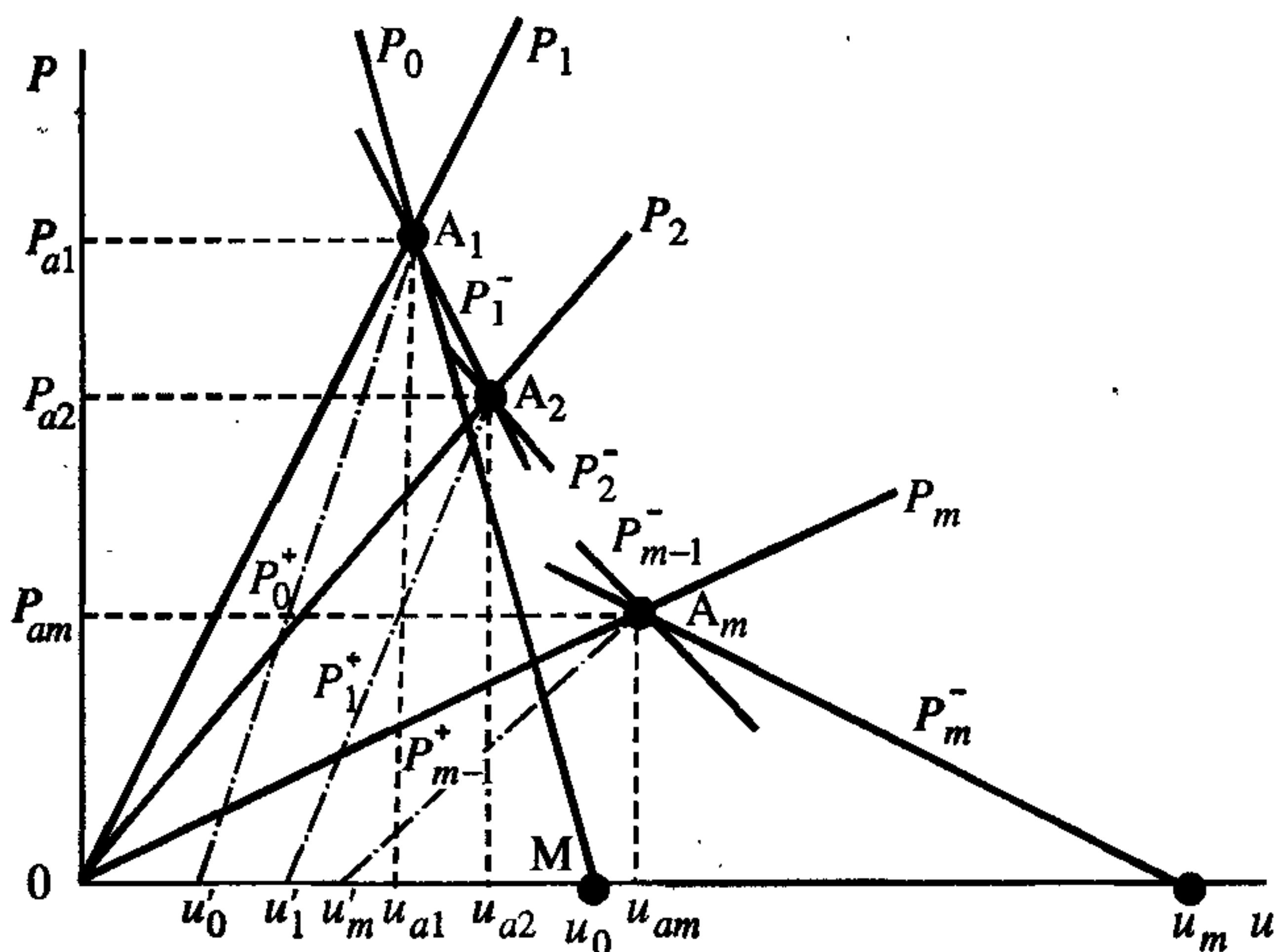
**Рис. 6.45.** Схема эксперимента по исследованию распространения ударных волн в многослойной преграде с изменяемой акустической жесткостью слоев  $a_i a_{i+1}$ .

1 — капсуль-детонатор; 2, 3 — ВВ; 4 — металлический ударник; 5 — преграда.

Пусть до соударения неподвижная преграда имеет параметры  $\rho_i, c_i, u_i = 0, P_i = 0$ , а налетающая пластина конечной толщины —  $\rho_0, c_0, u_0, P_0 = 0$  ( $\rho$  — плотность материала,  $c$  — скорость звука в материале,  $u$  — массовая скорость,  $P$  — давление).

При соударении как в преграде, так и в бойке образуются ударные волны, которые распространяются от поверхности соударения  $a_1 a_1$  в противоположные стороны. Обозначим скорость движения границ раздела  $a_i a_i$  через  $u_{ai}$ , а давление в области между фронтами волн, претерпевающих распад разрыва на контактной поверхности  $a_i a_i$ , через  $P_{ai}$ .

Столкновение пластин удобно рассматривать в координатах  $P, u$ . Начальные состояния покоящейся преграды ( $P_i = 0, u_i = 0$ ) и бойка ( $P_0 = 0, u = u_0$ ) изображены на рис. 6.46 точками О и М. Будем рассматривать задачу в акустическом приближении



**Рис. 6.46.**  $(P, u)$ -диаграмма состояния ударной волны, распространяющейся в многослойной преграде.

$$u_0 \ll c_0, c_i. \quad (6.3.1)$$

Кривая в плоскости переменных  $P, u$  с центром  $(u_{ai}, P_{ai})$  имеет вид

$$(P - P_{ai})(1/\rho_{ai} - 1/\rho(P)) = (u - u_{ai})^2. \quad (6.3.2)$$

Для металлов при давлениях порядка  $10^5$  атм часто используют эмпирическое уравнение состояния типа

$$P = \frac{\rho_i c_i^2}{n} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_i} \right)^n - 1 \right], \quad (6.3.3)$$

в котором  $n$  считается постоянным. Для слабых ударных волн положим

$$\rho/\rho_i = 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1, \quad \rho_{ai}/\rho_i = 1 + \varepsilon_{ai}, \quad \varepsilon_{ai} \ll 1. \quad (6.3.4)$$

Подставляя (6.3.3) в уравнение (6.3.2) и учитывая (6.3.4), имеем

$$P - P_{ai} = \pm \left[ (P_{ai} + \rho_i c_i^2)(P + \rho_i c_i^2) \right]^{1/2} \frac{u - u_{ai}}{c_i}. \quad (6.3.5)$$

Максимальное давление, которое может развить боек, реализуется при его торможении на абсолютно жесткой преграде:

$$P_* = \rho_0 c_0 u_0. \quad (6.3.6)$$

Поэтому в уравнении (6.3.5), учитывая соотношения (6.3.1) и (6.3.6), можно в знаменателе пренебречь величинами  $P$  и  $P_{ai}$  по сравнению с  $\rho_i c_i^2$ . Тогда из (6.3.5) получаем

$$P - P_{ai} = \pm \rho_i c_i (u - u_{ai}). \quad (6.3.7)$$

Это свидетельствует о том, что в акустическом приближении ударные адиабаты и плоскости  $(P, u)$  есть прямые линии (6.3.7). Воспользуемся некоторыми свойствами  $(P, u)$ -диаграмм. Из (6.3.2) видно следующее: кривая симметрична относительно прямой  $u = u_{ai}$ , что следует также из (6.3.7);  $(P, u)$ -диаграмма состоит из двух ветвей, пересекающихся в ее центре под конечным углом, тангенс которого равен величине акустического импеданса.

Задача определения параметров ударной волны при соударении бойка с первой пластиной преграды сводится к определению точки пересечения  $A_1$  прямых  $P_0$  и  $P_1$  (см. рис. 6.46):

$$P_0 = -R_0(u - u_0), \quad P_1 = R_1 u, \quad (6.3.8)$$

где  $R_0 = \rho_0 c_0$  — акустический импеданс материала бойка,  $R_1 = \rho_1 c_1$  — акустический импеданс материала первой пластины. Из (6.3.8) следует:

$$u_{a1} = \frac{R_0}{R_0 + R_1} u_0, \quad P_{a1} = \frac{R_0 R_1}{R_0 + R_1} u_0. \quad (6.3.9)$$

При распространении образовавшейся ударной волны по пластинам мишени нужно рассматривать распад разрыва на каждой контактной поверхности  $a_i a_i$  ( $i = 2, 3, \dots, m + 1$ ). Рассмотрим случай соударения бойка с преградой, у которой акустический импеданс пластин уменьшается от пластины к пластине в направлении распространения ударной волны, возбужденной бойком. Положим, что

$$R_0 \geq R_1 > R_2 > \dots > R_m. \quad (6.3.10)$$

Выберем такую преграду, чтобы для каждой пластины выполнялось соотношение

$$l_k / c_k = l_{k+1} / c_{k+1}, \quad (6.3.11)$$

где  $l_k, l_{k+1}$  — соответственно толщины предыдущей и последующей пластин в преграде. В этом случае окончательные массовые скорости в  $k$ -й пластине определяются только распадом разрыва на  $(k + 1)$ -й контактной поверхности. В плоскости переменных  $P, u$  состояния пластинчатой преграды описываются пучком прямых, выходящих из точки  $O$ :

$$P_i = R_i u \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

При переходе ударной волны с параметрами  $P_{a1}, u_{a1}$  (точка  $A_1$ ) из первой пластины преграды во вторую от контактной поверхности  $a_2 a_2$  в обе стороны распространяется волна с параметрами  $P_{a2}, u_{a2}$ . Массовая скорость и давление в этой волне определяются точкой пересечения  $A_2$  прямой  $P_2$  и прямой  $P_1^-$ , симметричной  $P_1$  относительно  $u = u_{a1}$  ( $P_1^-$  симметричны прямой  $P_i$  относительно  $u = u_{ai}$ ). В дальнейшем этот процесс повторяется. Видно (см. рис. 6.46), что при прохождении ударной волны по пластинчатой преграде, у которой акустический импеданс уменьшается от пластины к пластине, массовые скорости за фронтом ударной волны растут от пластины к пластине. На этом основан



эффект ускорения пластин.

Из рис. 6.46 можно найти соотношение, связывающее массовую скорость  $u_m$  последней пластины преграды с начальной скоростью  $u_0$  бойка

$$u_m = \frac{2^m}{\prod_{i=1}^m (1 + R_i/R_{i-1})} u_0. \quad (6.3.12)$$

Из (6.3.12) видно, что если для пластинчатой мишени выполнено соотношение (6.3.10), то  $u_m > u_0$ . Акустическое приближение для  $(P, u)$ -диаграмм упрощает громоздкие математические выкладки, сохраняя и обнажая физический смысл явления. Эффект увеличения массовой скорости при соударении бойка с пластинчатой преградой будет иметь место и для больших скоростей соударения, когда акустическое приближение неприменимо.

Для проверки (6.3.12) были проведены эксперименты по соударению пластины — бойка с пластинчатой преградой. Постановка эксперимента ясна из рис. 6.45. В экспериментах измерялись скорость бойка  $u_0$  и скорость  $u_m$  последней пластины преграды. Во всех экспериментах заряд ВВ толщиной 10 мм и стальной боек толщиной 3 мм оставались постоянными: менялось сочетание материала пластин в преграде. Съемка производилась как на импульсной рентгеновской установке, так и на СФР, работающем в режиме покадровой съемки. Измеренная скорость бойка  $1,46 \text{ км/с} \pm 14\%$ . Результаты экспериментов приведены в табл. 6.3. В последней колонке таблицы приведены значения  $u_m/u_0$ , вычисленные по (6.3.12), величины  $\rho_i$  и  $c_i$  для материалов бойка и пластин преграды взяты из [40].

Таблица 6.3

Экспериментальные и теоретические значения скорости для указанной преграды

$i$	Преграда		$u_m/u_0$ среднее экспериментальное	$u_m/u_0$ по формуле (6.3.12)
	материал	толщина, мм		
1	Медь	3	1,66	1,48—1,5
2	Латунь	2		
3	Дюралюминий	1		
1	Медь	3	1,33	1,44—1,46
2	Дюралюминий	1		
1	Дюралюминий	3	2,06	2,45
2	Полиэтилен	1		

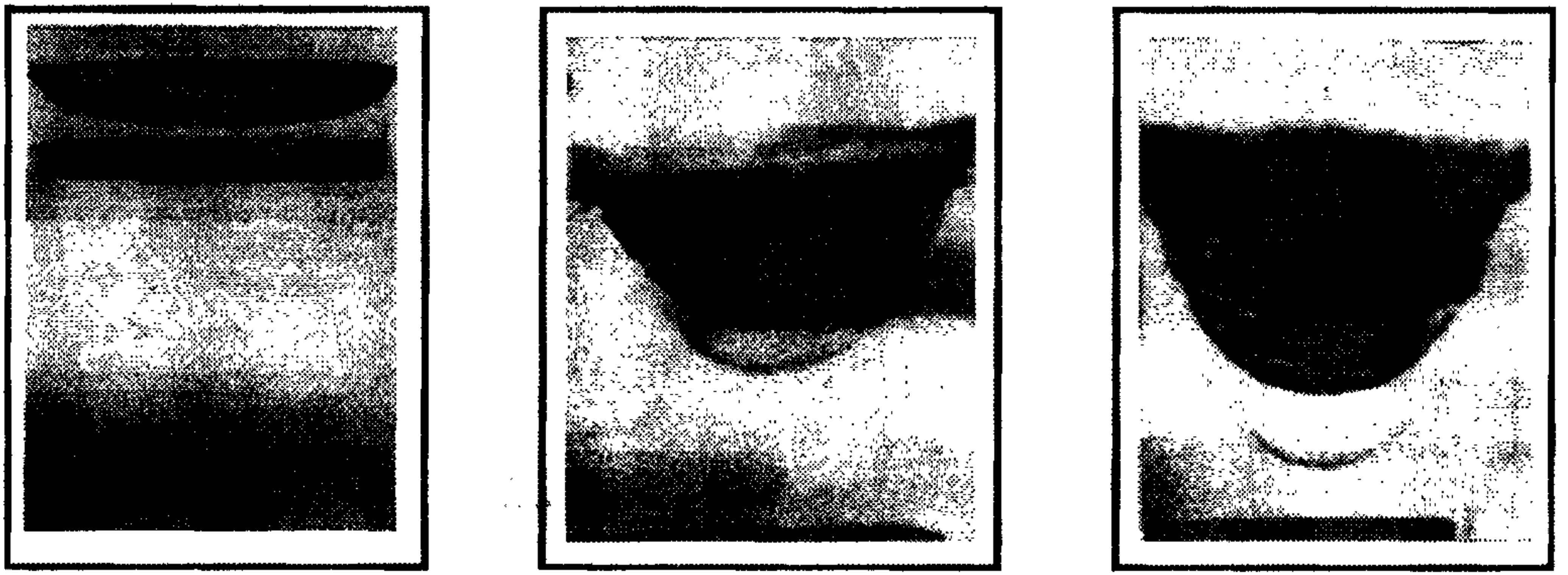


Рис. 6.47. Рентгенограммы процесса удара стальной пластины по многослойной преграде (медь, латунь, дюралюминий).

Импульсная рентгено съемка дает возможность определять скорости любой пластины преграды. Это позволяет дополнительно контролировать правильность приведенных рассуждений. На рис. 6.46 точками  $u'_0, u'_1, \dots$  на оси  $u$  указаны состояния бойка и пластин преграды после прохождения по ним ударной волны ( $k$ -пластина переходит из состояния  $P_{ak}, u_{ak}$  в состояние  $P=0, u=u'_k$  по прямой  $P_k^+$ , симметричной прямой  $P_k^-$  относительно  $u=u_{a(k+1)}$ ).

На рис. 6.47 приведены фотографии покадровой съемки на рентгене удара стальной пластины по преграде, состоящей из 3 мм медной, 2 мм латунной и

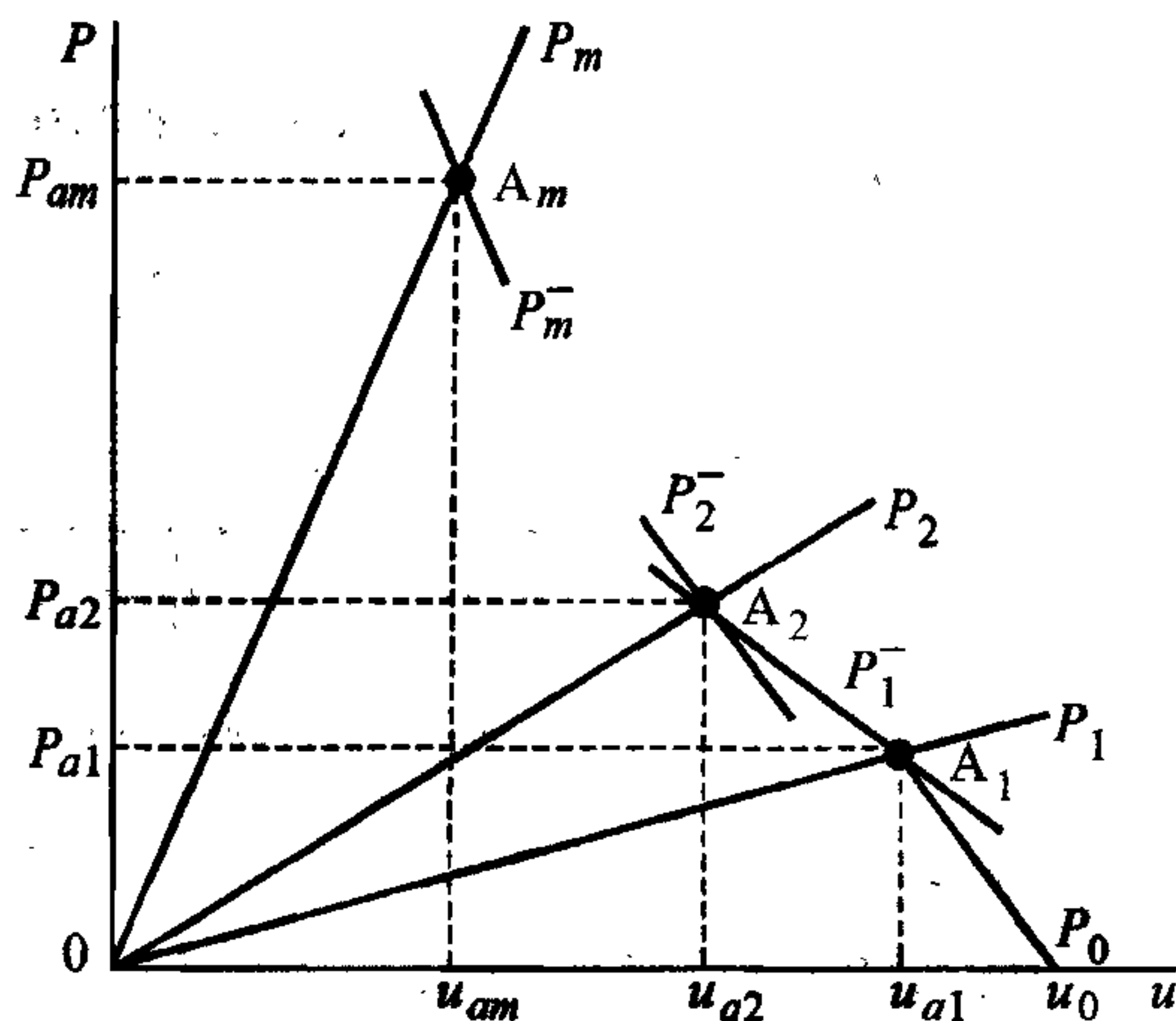


Рис. 6.48.  $(P, u)$ -диаграмма состояния среды за фронтом ударной волны при ее распространении в пластинах с увеличивающимся акустическим импедансом.

1 мм дюралюминиевой пластин. На первом кадре виден движущийся боек до соударения с преградой (16 мкс), а на последующих — разлет пластин преграды (35 и 40 мкс). Времена отсчитываются с момента инициирования капсуля-детонатора. Эксперименты подтверждают эффект увеличения массовой скорости при ударе бойка по преграде из пластин, в которой величины акустического импеданса удовлетворяют соотношению (6.3.10).

Из рис. 6.48, если рассматри-



вать состояния за фронтами ударных волн на каждом контактном разрыве  $a_i a_i$  справа налево, т.е. от точки  $A_m$  до  $A_1$ , следует важный физический эффект увеличения амплитуды давления при распространении ударной волны в пластинчатой преграде, у которой

$$R_1 < R_2 < \dots < R_m, \quad (6.3.13)$$

т.е. акустический импеданс увеличивается от пластины к пластине в направлении распространения ударной волны.

Итак, рассмотренный случай пластинчатой преграды указывает на возможность усиления амплитуды ударной волны в плоских системах слоев с различными акустическими импедансами, подчиняющимися соотношению (6.3.13). Усиление будет иметь место лишь в случае, если потери энергии на нагревание будут невелики. Для оценки потерь энергии на нагревание и остаточную кинетическую энергию слоев расчеты нужно провести для реальных  $(P, u)$ -диаграмм материала слоев преграды, составленной из слоев с учетом (6.3.11) и (6.3.13).

Соответствующие формулы для величины давления и массовой скорости для  $(m + 1)$ -го слоя преграды можно получить из рис. 6.48:

$$P_{a(m+1)} = \frac{2^m}{\prod_{i=1}^m (1 + R_i/R_{i+1})} P_{a1}, \quad u_{a(m+1)} = \frac{2^m}{\prod_{i=1}^m (1 + R_{i+1}/R_i)} u_{a1}, \quad (6.3.14)$$

где  $P_{a1}$  и  $u_{a1}$  определяются соотношением (6.3.9). Так как для преграды (6.3.13)  $R_i < R_{i+1}$ , то формулы (6.3.14) указывают на рост давления в проходящей ударной волне при одновременном уменьшении массовой скорости.

Описанное явление кумуляции скорости в слоях пластин применено для целей высокоскоростного метания [41]. Основным отправным моментом в реализации предлагаемой схемы высокоскоростного метания является применение в качестве ударника кумулятивной струи. Возможность подобного использования кумулятивных струй обсуждалась ранее в [42]. Отметим еще раз основные преимущества кумулятивной струи-ударника: а) высокая скорость соударения с первым слоем преграды, б) отсутствие разгрузки с тыльной стороны ударника за счет большой протяженности струи. В отличие от [41] в настоящем разделе применялись медные конические облицовки с углом раствора  $2\alpha = 60^\circ$ , снаряженные составом ТГ 50/50. Скорость и диаметр головной части струи измеря-



лись с помощью импульсного рентгенографирования процесса схлопывания облицовки.

Применявшаяся экспериментальная сборка представляла собой стальную обойму с цилиндрическим каналом диаметром  $0,85—0,9$  диаметра головной части струи кумулятивного заряда. В цилиндрическом канале помещался набор плотноупакованных цилиндров из металлов с различной величиной акустической жесткости. Диаметр обоймы составил величину порядка  $20d$ , где  $d$  — диаметр слоистой метаемой сборки, что позволило исключить разгрузочные явления с внешней поверхности, во всяком случае, до времен, несколько больших времени распространения головной ударной волны от точки касания струи и преграды до выхода ее на внешнюю поверхность крайнего элемента. Входная часть канала обоймы имела диаметр, приблизительно равный диаметру головной части струи, и была выполнена, как это показано на рис. 6.49. Высота приемной части обоймы составляла величину  $8—12$  диаметров головной

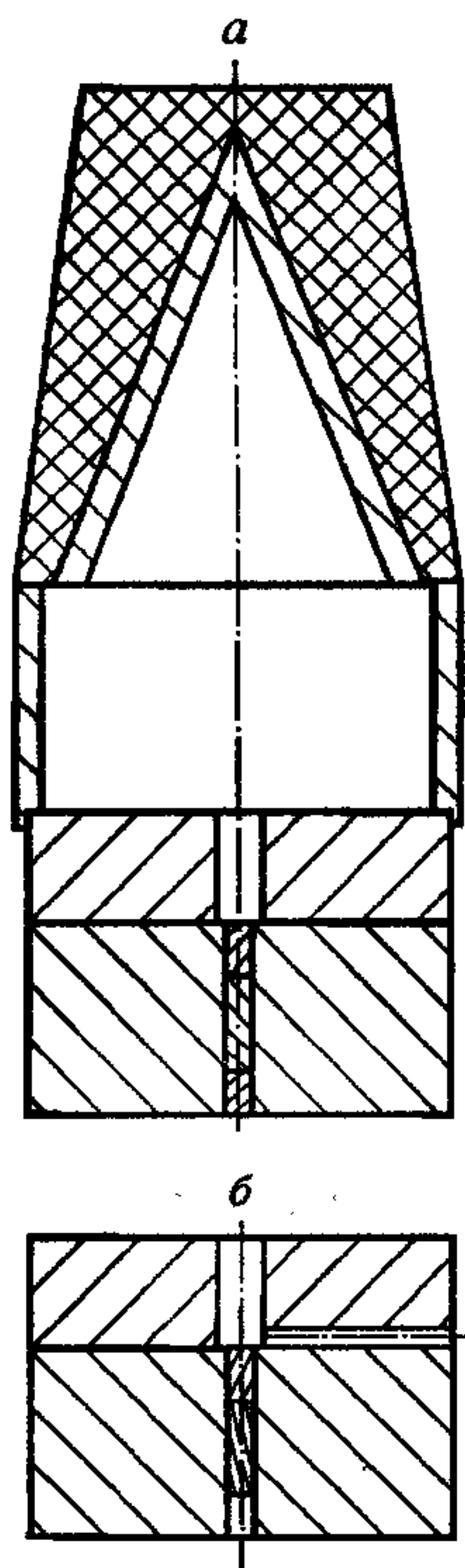


Рис. 6.49. Схема экспериментальной сборки.

Поясн. см. в тексте.

части струи, что необходимо для стабилизации процессов внедрения струи в приемный канал. Подобная геометрия приемной части канала, когда в момент соударения струи с тыльной частью слоистой сборки боковые поверхности струи не являются свободными, а плотно сжаты стенками канала, позволяет утверждать о реализации в данном случае сугубо одномерной схемы метания и отсутствии течений, сопутствующих процессам пробивания. Радиальный разрез обоймы (рис. 6.49, а) и боковой канал (рис. 6.49, б) выполнялись для оттока воздуха из приемной части канала. Отсутствие такого дренирования приводило в начальных экспериментах со сплошной обоймой к значительному снижению параметров метания в связи с наличием прослойки воздуха между “головкой” струи и тыльной частью метаемой системы. Подобный эффект запирания канала струей со сжатием газом описан в [42], где газ находился под большим начальным давлением. В нашем случае прослойка лишь ослабляет головную ударную волну, уходя-





Рис. 6.50. Рентгенограмма процесса метания тел с применением кумулятивной струи.

щую в слоистую сборку. Расстояние между срезом конической облицовки и приемной частью цилиндрического канала во всех случаях было одинаковым, составляло 40 мм и задавалось пластмассовой втулкой, одновременно центрирующей оси заряда и обоймы.

Эксперименты выполнялись с трех- или четырехэлементной слоистой метаемой системой с коэффициентом отношения акустических импедансов слоев, равным  $K = 1,23 \div 1,25$ . Некоторая узость выбора константы акустической жесткости продиктована ограниченностью выбора металлических материалов с необходимыми параметрами. Во входном сечении использовались цилиндрики из никеля, в выходном — цинк и алюминиевый сплав. Масса метаемых цилиндров уменьшалась от входного сечения к выходному в разных опытах с постоянным коэффициентом  $1,5 \div 2$ . Все опыты регистрировались на рентгеноимпульсной установке. Типичная рентгенограмма приведена на рис. 6.50. Результаты опытов сводятся к следующему. Для метаемых элементов из цинка замеренная скорость составляет величину 1,1—1,15 скорости головной части струи или в абсолютных цифрах  $3,9 \div 4,0$  км/с. Измеренная скорость на 30—35 % отличается от рассчитанной в акустическом приближении или численным мето-



**Рис. 6.51.** Рентгенограмма не “штатного” процесса взаимодействия струи с метаемой слоистой системой тел.

дом, что достаточно хорошо, учитывая весьма далекий от идеального упругого характер соударений между элементами метаемой системы. Известная часть экспериментов вообще неудачна, в связи с плохим попаданием струи в приемный канал, что приводит к отклонениям от одномерного характера метания и пробивания системы кумулятивной струи (рис. 6.51). Различия коэффициента уменьшения массы в указанных выше пределах не внесли существенных изменений в скорость метания, во всяком случае, изменения скорости метания не превышают точности измерения скорости. Отметим, что скорость выходных элементов из алюминиевого сплава значительно выше полученных для

цинка. Однако малость линейных размеров и низкая плотность не позволяют надежно фиксировать по рентгенограммам их скорость.

#### **6.4. Сопоставление методов. Инженерно-аналитические решения**

1. Рассмотрим вопрос о том, как соотносится многоступенчатый метод и метод Забабахина при совпадающих геометрических и энергетических условиях? При этом еще раз подчеркнем, что многоступенчатый метод интерпретируется как прием, позволяющий при определенных коэффициентах нагрузки увеличивать активную массу ВВ посредством пространственного перераспределения массы ВВ и введения вспомогательных пластин, с помощью которых удастся более рационально использовать энергию ВВ. Частично на указанный вопрос отвечают результаты, например, следующих модельных расчетов развития процесса в двухкаскадных схемах.

Сопоставим результаты расчетов задачи соударения в одномерной постановке двух пластин, между которыми располагается слой газа или ВВ той же массы. Для этих вариантов (1 и 2) обозначим через  $\xi_1$  отношение кинетической



энергии метаемой пластины  $E_m$ , а через  $\xi_2$  отношение  $E_m$  к суммарной начальной энергии ударника и слоя ВВ. Кроме массы в вариантах 1, 2 будем сохранять и начальную энергию системы, т.е. для варианта 2 кинетическая энергия ударника уменьшается на величину энергии ВВ. На рис. 6.52 даны зависимости скорости ударяемых  $v_y^{(1)}, v_y^{(2)}$  и метаемых  $v_m^{(1)}, v_m^{(2)}$  стальных пластин от времени для указанных вариантов со следующими параметрами слоев: плотность газа, ВВ и металла —  $0,31 \text{ г/см}^3, 1,62 \text{ г/см}^3, 7,84 \text{ г/см}^3$ ; масса ударника  $0,5 \text{ г}$  (здесь и далее для одномерных задач представляется масса пластин на единицу площади), слоя газа и ВВ —  $0,1 \text{ г}$ , метаемой пластины —  $0,4$ ; скорость удара  $0,5 \text{ см/мкс}$  при ударе через газовую прослойку, а через слой ВВ —  $0,48534 \text{ см/мкс}$  (скорость детонации  $0,76 \text{ см/мкс}$ ). Результаты расчетов, представленные на рис. 6.52, показывают, что для рассматриваемых параметров наибольшие скорости движения метаемых пластин как для метода Забабахина, так и для многоступенчатого метода практически одинаковы. Однако в случае применения ВВ процесс ускорения пластины развивается значительно быстрее. В зависимости от целей применения методов этот факт может иметь положительное и отрицательное значение.

Зависимость коэффициента передачи энергии  $\xi_1, \xi_2$  от отношения масс ударяемой и метаемой пластин  $\beta_y$  для указанных схем и параметров удара представлены на рис. 6.53. Качественный вид зависимостей и значение наибольшего коэффициента практически совпадают. Схема Забабахина более эффективна, чем многоступенчатая при  $\beta_y < 1$ , и менее эффективна при  $\beta_y > 1,5$  (здесь пока не обсуждаются побочные явления, такие как разрушение, действие боковых волн разгрузки в двумерных схемах и т.д.), а в области значений  $\beta_y = 1,25$  методы дают близкие результаты.

Сохраняя размеры пластин при  $\beta_y = 1,25$ , рассмотрим влияние массы газа и ВВ для четырех характерных скоростей удара  $0,5; 0,4; 0,3; 0,2 \text{ см/мкс}$ . Это скорости для случая соударения

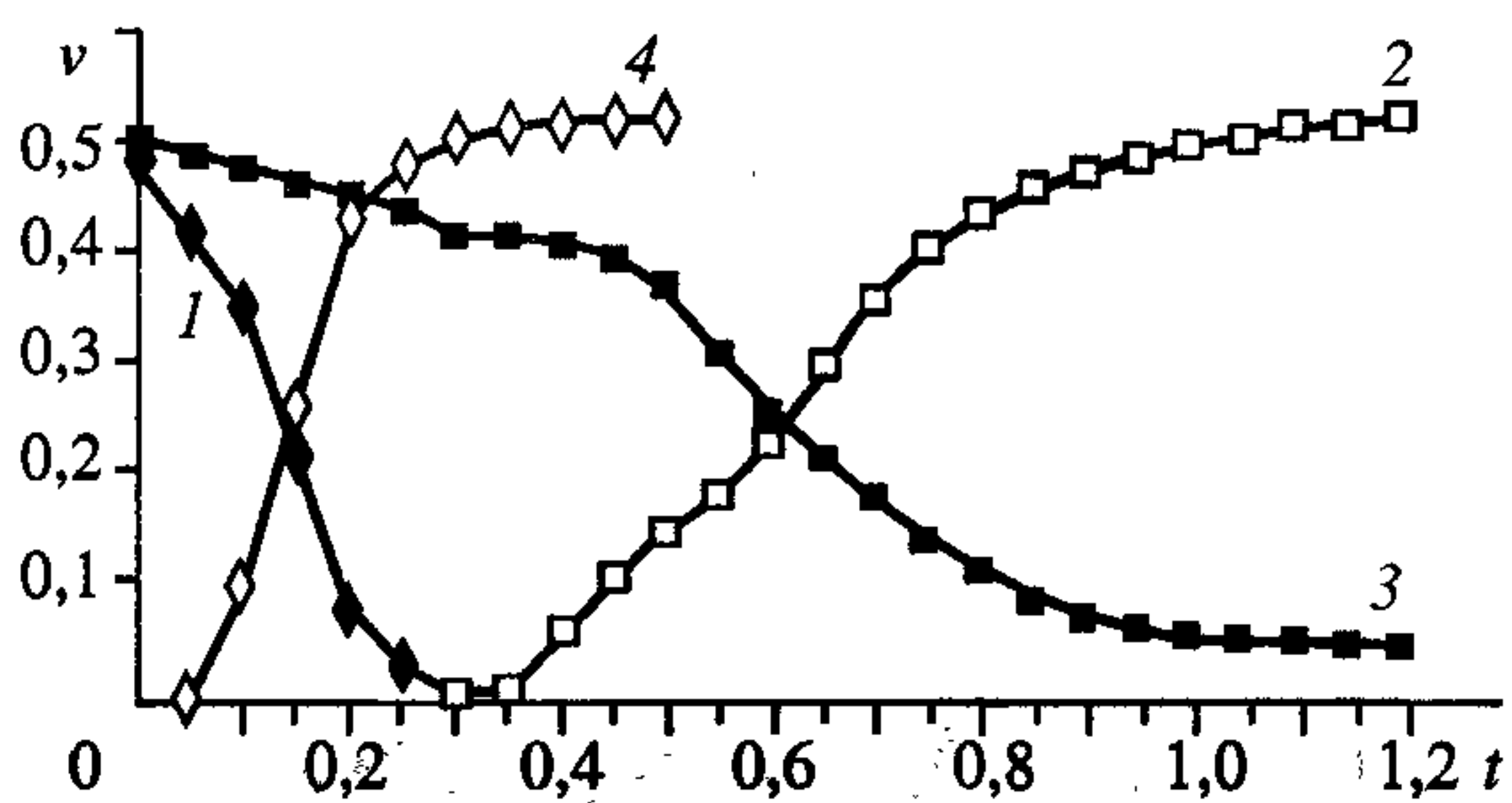


Рис. 6.52. Скорость соударяемых метаемых пластин в зависимости от времени.

1 —  $v_y$  (слой газа); 2 —  $v_m$  (слой газа); 3 —  $v_y$  (слой ВВ); 4 —  $v_m$  (слой ВВ).

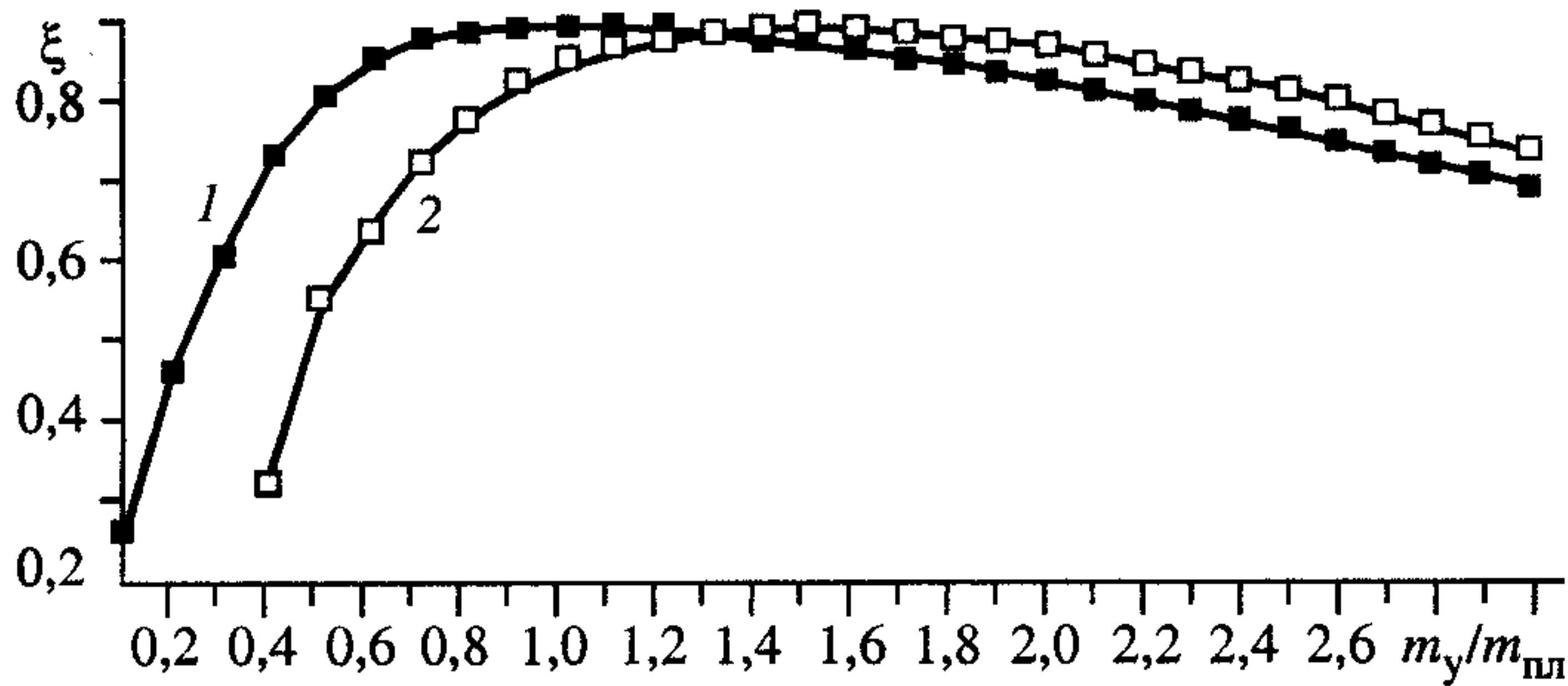


Рис. 6.53. Коэффициент передачи энергии от ВВ к метаемому поршню в зависимости от отношения масс взаимодействующих пластин для схем Забабахина (1,  $\xi_1$ ) и многоступенчатой (2,  $\xi_2$ ).

пластин через газовую прослойку, а когда промежуточный слой — ВВ, скорость уменьшается для обеспечения той же начальной энергии системы. На рис. 6.54 дана зависимость коэффициента передачи энергии  $\xi$  от отношения массы газа или ВВ к массе ударника  $\beta_y$ . Результаты расчетов позволяют сделать вывод, что если кинетическая энергия ударника в 1,2 раза больше энергии ВВ, то схема Забабахина и схема многоступенчатого метода обеспечивают близкие максимальные скорости. В противоположном случае многоступенчатый метод уступает методу Забабахина.

Для оценки скорости метания пластины при высокоскоростном соударении через промежуточный слой газа или ВВ, когда удар не является упругим, воспользуемся соотношением (6.2.15) путем введения некоторого эффективного коэффициента потери энергии  $k$ :

$$v_m = v_y \frac{2}{1 + m_2/m_1} k. \quad (6.4.1)$$

В отличие от работы [32] коэффициент  $k$  не является постоянным. Для инертной газодинамической среды слоя ( $\gamma = 3$ ) массой  $m_r$  зависимость (6.4.1)

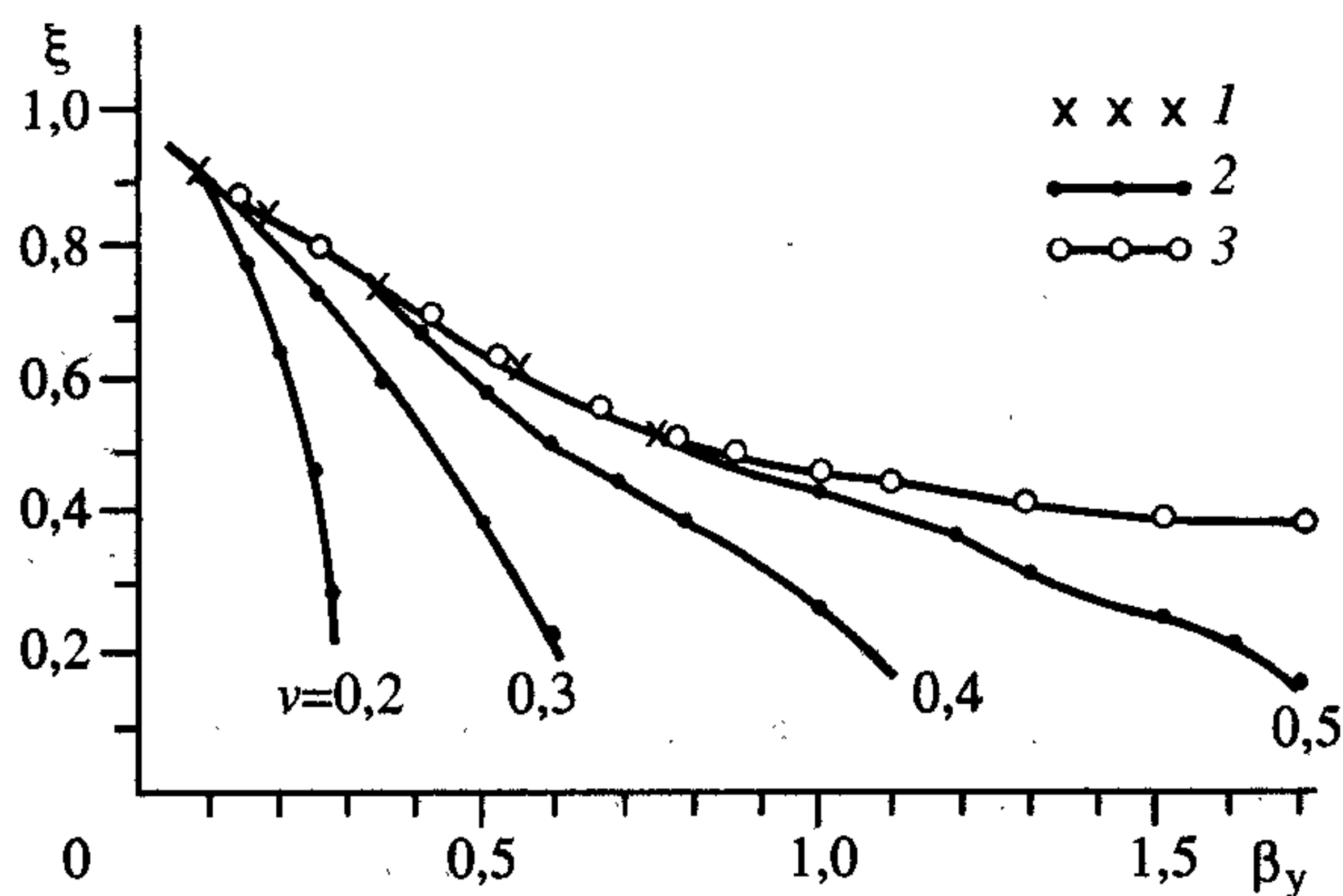


Рис. 6.54. Коэффициент передачи энергии в зависимости от отношения массы промежуточного слоя к массе пластины первого каскада (ударника).

1 —  $v_m = v_y \frac{2}{1 + m_2/m_1} (0,94 - m_r/(m_1 + m_r)^3)$ ; 2 — многоступенчатый метод; 3 — метод Забабахина.



достаточно хорошо аппроксимирует результаты численных расчетов (на рис. 6.54 — крестики) при

$$k = 0,94 - \left( \frac{m_r}{m_1 + m_r} \right)^\gamma. \quad (6.4.2)$$

Для энергетической активной среды (ВВ) массой  $m_{ВВ}$  при экспрессных оценках можно воспользоваться соотношением

$$k = 0,94 - \left( \frac{m_{ВВ}}{m_1 + m_{ВВ}} \right)^\gamma + k_1 \frac{E_{ВВ}}{E_{ВВ} + E_1},$$

где постоянная  $k_1 < 1$ ,  $E_{ВВ}$  — полная начальная энергия ВВ,  $E_1$  — кинетическая энергия ударника.

2. Фрагмент многоступенчатой схемы высокоскоростного метания тел, демонстрирующий процесс концентрации энергии, рассмотрен в работе [42], где кумулятивная струя в устройстве наподобие легкогазовой пушки использовалась в качестве поршня, сжимающего рабочий газ для ускорения твердых тел.

Рассмотрим задачу о движении в трубе несжимаемых поршней (рис. 6.55) массой  $m_1$  и  $m_2$ , разделенных слоем газа с начальным давлением  $P_0$  и показателем адиабаты  $\gamma$ . Пусть в начальный момент времени  $t=0$  поршень массой  $m_1$  имеет скорость  $v_y$  и находится от покоящегося поршня на расстоянии  $x_0$ . Считая процесс сжатия газа адиабатическим и пренебрегая его массой, запишем уравнения движения поршней:

$$m_2 \frac{d^2 X_{II}}{dt^2} = P_0 S x_0^\gamma (X_{II} - X_y)^{-\gamma}, \quad m_1 \frac{d^2 X_y}{dt^2} = -P_0 S x_0^\gamma (X_{II} - X_y)^{-\gamma}, \quad (6.4.3)$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения трубы;  $X_{II}$  — путь ускоряемой пули (поршень  $m_2$ );  $X_y$  — путь кумулятивной струи (поршень  $m_1$ ). Процесс разгона пули кумулятивной струей в таком устройстве распадается на две фазы: 1) сжатие газа в течение времени  $0 - t_*$ ; 2) расширение сжатого между поршнями газа для времени  $t > t_*$  (см. рис. 6.55). При этом

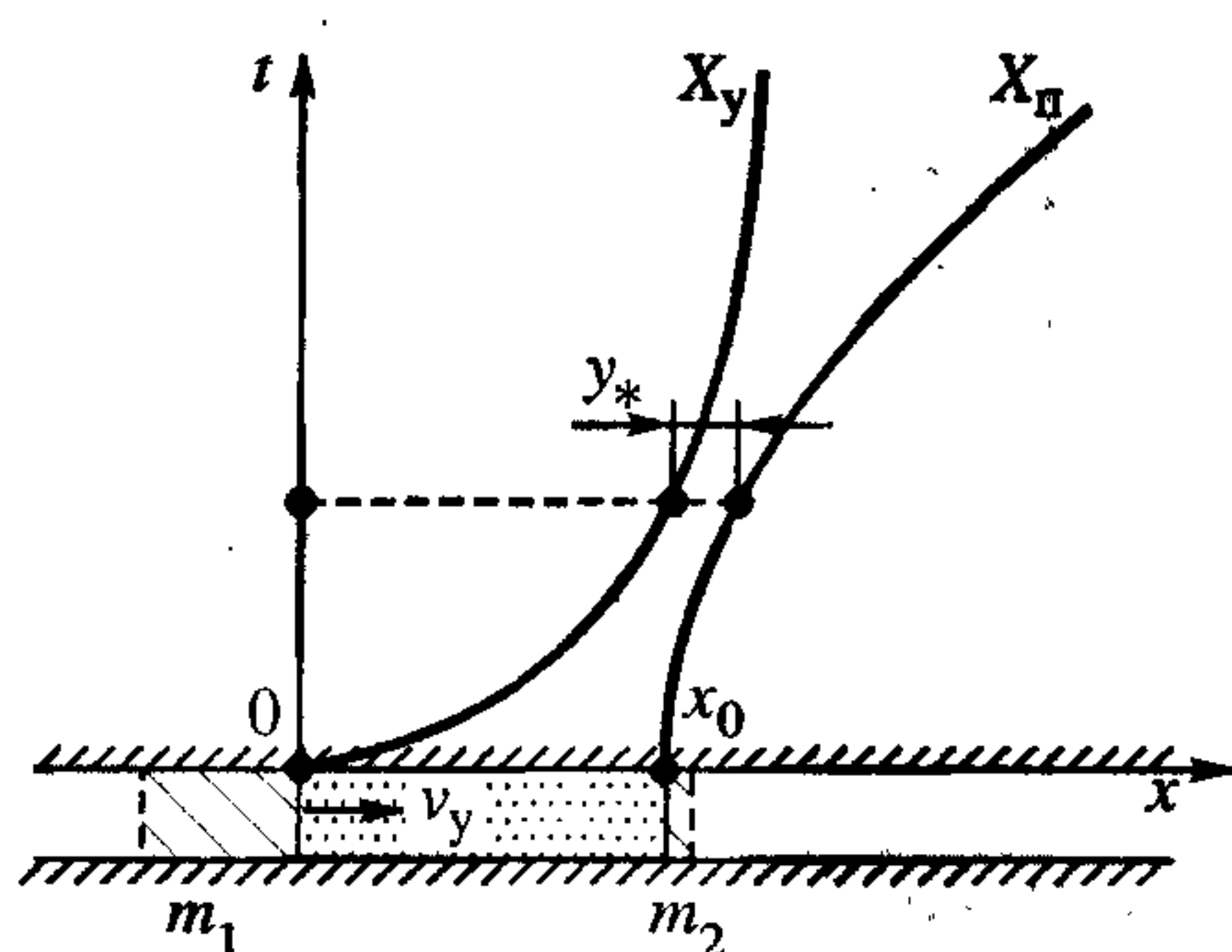


Рис. 6.55. Схема и  $(x - t)$ -диаграмма взаимодействия ударника с преградой через слой газа с давлением  $P_0$ .



кумулятивная струя непрерывно тормозится, а пуля ускоряется. Переход от фазы сжатия рабочего газа к фазе расширения характеризуется равенством скоростей струи и пули:

$$\left. \frac{dX_{\Pi}}{dt} \right|_{t=t_*} = \left. \frac{dX_y}{dt} \right|_{t=t_*} \quad (6.4.4)$$

Решая совместно уравнения (6.4.3) с очевидными начальными условиями, получаем для фазы сжатия  $t \leq t_*$

$$\begin{aligned} \frac{dX_{\Pi}}{dt} &= \frac{m_1}{m_2 + m_1} \left\{ v_y + \sqrt{v_y^2 + \frac{2(m_2 + m_1)P_0 x_0 S}{m_2 m_1 (\gamma - 1)} \left[ 1 - \left( \frac{x_0}{X_{\Pi} - X_y} \right)^{\gamma - 1} \right]} \right\} = \\ &= \frac{\mu}{m_2} \left\{ v_y - \sqrt{v_y^2 + \frac{2\varepsilon_0}{\mu} \left[ 1 - \left( \frac{x_0}{X_{\Pi} - X_y} \right)^{\gamma - 1} \right]} \right\}, \\ \frac{dX_y}{dt} &= \frac{m_1}{m_2 + m_1} \left\{ v_y + \frac{m_2}{m_1} \sqrt{v_y^2 + \frac{2(m_2 + m_1)P_0 x_0 S}{m_2 m_1 (\gamma - 1)} \left[ 1 - \left( \frac{x_0}{X_{\Pi} - X_y} \right)^{\gamma - 1} \right]} \right\} = \\ &= \frac{\mu}{m_2} \left\{ v_y + \frac{m_2}{m_1} \sqrt{v_y^2 + \frac{2\varepsilon_0}{\mu} \left[ 1 - \left( \frac{x_0}{X_{\Pi} - X_y} \right)^{\gamma - 1} \right]} \right\}, \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

где  $\varepsilon_0 = P_0 x_0 S / (\gamma - 1)$ ;  $\mu = m_2 m_1 / (m_2 + m_1)$ .

Пользуясь соотношениями (6.4.4), (6.4.5), можно найти минимальное расстояние, на которое сближаются поршни в фазе сжатия, и давление сжатого газа:

$$y_* = (X_{\Pi} - X_y)_{t=t_*} = x_0 \left[ 1 + \frac{(\gamma - 1)m_2 m_1}{P_0 S x_0 (m_2 + m_1)} v_y^2 \right]^{1/(1-\gamma)} = x_0 \left( 1 + \frac{E}{\varepsilon_0} \right)^{1/(1-\gamma)}; \quad (6.4.6)$$

$$P_* = P_0 \left( \frac{x_0}{y_*} \right)^{\gamma} = P_0 \left( 1 + \frac{E}{\varepsilon_0} \right)^{\gamma/(1-\gamma)}, \quad (6.4.7)$$

где  $E = \mu v_y^2 / 2$ .

Окончательно значение скорости пули получим из соотношений (6.4.3) с учетом начальных условий (6.4.4), (6.4.6):

$$\frac{dX_{\Pi}}{dt} = \frac{m_1}{m_2 + m_1} \left\{ v_y + \sqrt{\frac{2(m_2 + m_1)P_0 x_0 S}{m_2 m_1 (\gamma - 1)} (y_*^{1-\gamma} - y^{1-\gamma})} \right\}, \quad (6.4.8)$$

$$y = X_{\Pi} - X_y.$$

Максимальную скорость метания  $v_m$ , которую может приобрести пуля в таком ускоряющем устройстве, получаем из соотношения (6.4.8) при условии  $y \rightarrow \infty$ :

$$v_m = \frac{m_1}{m_2 + m_1} \left\{ v_y + \sqrt{v_y^2 + \frac{2P_0 x_0 S}{\mu(\gamma - 1)}} \right\}. \quad (6.4.9)$$

Такая оценка показывает, что для достаточно большого различия в массах кумулятивной струи и ускоряемой пули  $m_1 > m_2$  скорость пули может превзойти скорость кумулятивной струи. Для проверки этого принципа ускорения твердых тел были проведены эксперименты с использованием устройства, представленного на рис. 6.56.

Кумулятивный заряд 1 (ТГ 50/50, диаметр 50 мм, высота 36 мм) с полусферической дюралюминиевой облицовкой толщиной 2 мм и наружным диаметром 40 мм устанавливался на некотором расстоянии от стальной диафрагмы 2 на входе в камеру сжатия 3 соосно с ними. Камера сжатия заполнялась продуктами детонации таблетки ВВ 6, которая инициировалась ударом кумулятивной струей после пробития диафрагмы 2. В некоторых экспериментах для ускорения заполнения камеры сжатия таблетка ВВ содержала кумулятивную выемку. Стальная пуля 4 имела буртик толщиной около 0,5 мм. Масса пули колебалась от 0,25 до 0,3 г при длине 4 и диаметре 3 мм. Как камера сжатия, так и ствол 5 изготавливались высверливанием отверстий в массивной ( $\varnothing$  40—50 мм) стальной болванке. Длина ствола не превышала 60 мм, т.е. составляла 20 калибров максимально. Скорость пули, зарегистрированная в экспериментах, около 3 км/с или несколько выше. Скорость определялась по объему кратера в стальной мишени. При этом использовалась зависимость отношения объема кратера к массе пули от квадрата скорости пули для стальных преград при ско-

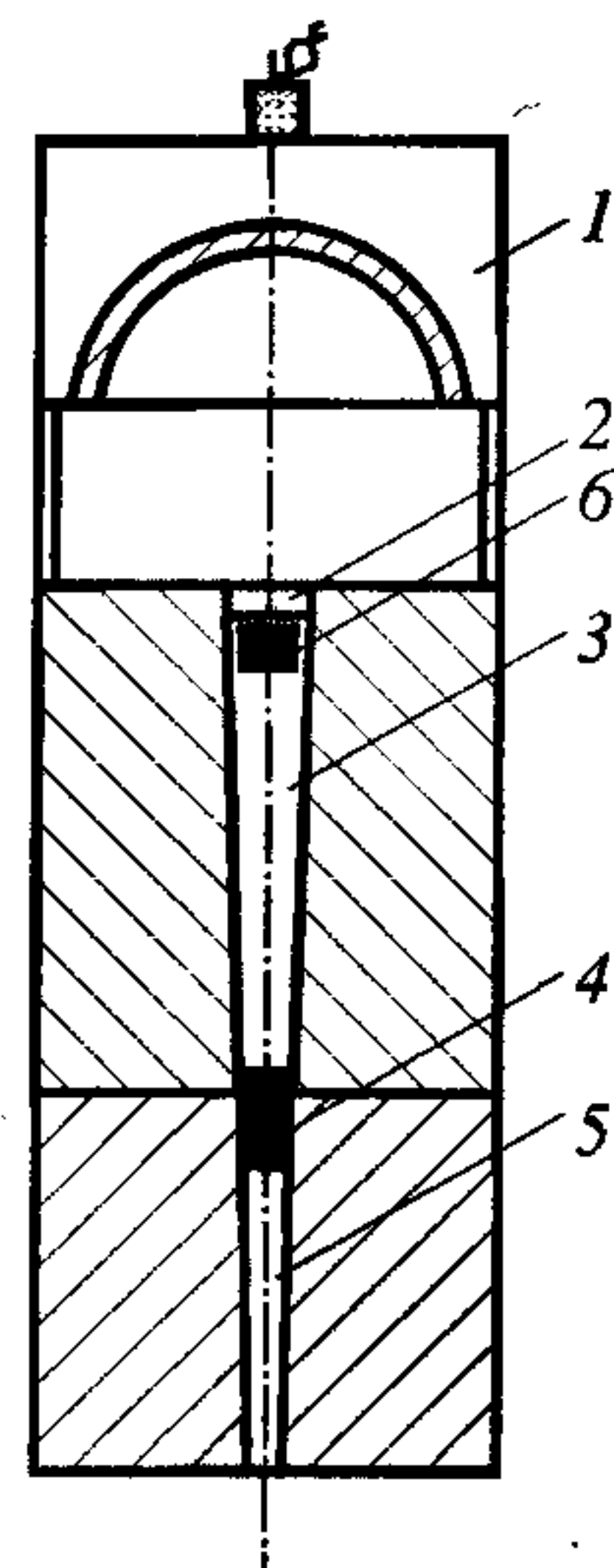


Рис. 6.56. Схема системы метания тел.  
Поясн. см. в тексте.



ростях удара до 5,5 км/с, приведенная в работе [43]. В ряде опытов скорость пули, ее форма и целостность определялись при съемке на рентгеноимпульсной установке. Скорость оказалась равной 2,3—2,5 км/с, что также меньше оценочной при использовании модели адиабатического сжатия (6.4.9). Из этого соотношения следует, что при  $m_2 \ll m_1$  и для реализуемого в настоящих экспериментах случая  $v_y^2 \gg 2P_0 x_0 S / \mu(\gamma - 1)$  скорость пули может достигнуть величины  $v_m \approx 2v_y$ . Но достигнутая величина скорости пули в экспериментах даже меньше начальной скорости струи  $v_y$ . Основная причина, по-видимому, состоит в недостаточной длине ствола. Действительно, для пули массой 0,3 г, диаметром 3 мм необходимо среднее давление  $\sim 3 \cdot 10^4$  атм, которое на пути 60 мм сообщает ей скорость 3 км/с. Подставив величину найденного давления в формулы (6.4.5), (6.4.6), получаем, что пуля покидает ствол еще в фазе сжатия. Что же касается собственно легкогазовых пушек, то у них канал ствола имеет длину порядка 300 калибров (200 калибров — это минимум) [44].

В работе [35] приведены уточненные критерии струеобразования при взрыве кумулятивных зарядов с коническими и клиновидными облицовками, а также дан критерий, касающийся качества образующихся струй, т.е. монолитные или диспергированные струи образуются при определенных режимах соударения. Для образования монолитных струй необходимо, чтобы скорость натекающих струй была меньше скорости звука вещества струи в системе координат, где картина косоугольного соударения пластин стационарная. В лабораторной системе координат, в которой скорость соударения пластин  $U$  направлена по нормали к их поверхности, это условие можно записать в виде  $\operatorname{tg} \alpha = U / c_0$ . Воспользовавшись основным соотношением гидродинамической теории кумуляции, связывающим скорость кумулятивной струи с параметрами соударения, получим

$$v_y = \frac{U}{\operatorname{tg} \alpha} \left( 1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) = c_0 + \sqrt{c_0^2 + U^2}.$$

Таким образом, скорость монолитной кумулятивной струи может превышать более чем в два раза скорость звука вещества струи. Значит, в принципе пушка с использованием кумулятивной струи в качестве поршня способна ускорять бойки до скоростей, более чем в четыре раза превышающих скорость звука в материале струи при нормальных условиях. Необходимо отметить, что



этот гибрид легкогазовой пушки и взрывных ускорителей сочетает в себе преимущества обоих способов ускорения. В отличие от газокумулятивных зарядов, используемых для ускорения твердых тел [45], в кумулятивной пушке вес заряда ВВ на порядок меньше.

3. Вернемся к задаче о соударении двух пластин, разделенных слоем ВВ. Предполагая, что ВВ мгновенно детонирует в момент удара, воспользуемся аналитическим решением (6.4.9), переписав его в виде ( $P_0 = (\gamma - 1)\rho_0 e_0$ ):

$$v_m = v_y \frac{1}{1 + m_2/m_1} \left[ \sqrt{1 + \frac{E_{ВВ}}{E_y} \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)} + 1 \right]. \quad (6.4.10)$$

Заметим, что при  $E_{ВВ} \ll E_y$  из (6.4.10) следует (6.2.15). Хотя (6.4.10) дает совпадающее с расчетными данными представление о качественной зависимости скорости пластины от начальных параметров системы, однако получаемые значения  $v_m$  несколько завышены. Так, например, при

$$\frac{E_y}{E_m} \approx \frac{m_1}{m_2} - 1$$

из (6.4.10) получаем к.п.д. 100%. Это решение получено без учета массы газа, потерь энергии на адиабатическое нагревание среды, на движение ПД. Последнее можно частично учесть в (6.4.10), если в  $E_{ВВ} = m_{ВВ} e_0$  вместо  $m_{ВВ}$  использовать некоторую активную массу ВВ  $m_{ВВ}^a = \alpha_{ВВ} m_{ВВ}$ ,  $\alpha_{ВВ} \leq 1$ , которая эффективно участвует в процессе разгона пластины и торможения ударника. Расчеты показали, что  $\alpha_{ВВ}$  в основном определяется значением среднего коэффициента нагрузки

$$\eta_1 = \frac{m_{ВВ}}{m_1 + m_2}.$$

Зависимость  $\alpha_{ВВ} = \alpha_{ВВ}(\eta)$ , построенная соответствующим обращением выражения (6.4.10) и осреднением значительного количества численных экспериментов в диапазоне  $0,1 < \eta_1 < 1$ , представлена графически на рис. 6.57. Отметим, что при  $\eta_1 > 1$  применение слоя ВВ в качестве разделителя между пластинами является менее эффективным, а применение (6.4.10) неправомерно, так как нельзя пренебрегать массой газообразных ПД. При  $\eta_1 \rightarrow 0$ ,  $\alpha_{ВВ} \rightarrow 0$  формула (6.4.10) переходит в (6.2.15).

Пусть, например, фиксированы массовые пропорции исследуемой трехслойной системы ( $m_1/m_{\text{ВВ}} = \text{const}$ ,  $m_1/m_2 = \text{const}$ ), тогда  $\alpha_{\text{ВВ}} = \text{const}$  и с помощью (6.4.10) можно получить явное выражение для условия максимума

$$\xi_2 = E_{\text{м}} / (E_{\text{у}} + E_{\text{ВВ}}):$$

$$\frac{m_{\text{ВВ}}}{m_1} \frac{2e_0}{v_y^2} = \alpha_{\text{ВВ}} \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right) - 2, \quad \alpha_{\text{ВВ}} = \alpha_{\text{ВВ}}(\eta_1). \quad (6.4.11)$$

Отметим, что поскольку в (6.4.11) слева от знака равенства стоит положительная величина, а  $\alpha_{\text{ВВ}} < 1$ , то одним из необходимых условий максимума  $\xi_2$  в рассматриваемом случае будет  $m_1 > m_2$ , т.е., как и отмечалось выше, масса пластины в очередном каскаде должна убывать.

Результаты представленной методики сравнивались с экспериментальными данными работы [31]. К сожалению, в [31] отсутствуют точные данные по ВВ и приведена только плотность энергии на единицу поверхности  $E_{\text{п}}$ . Поэтому при сравнении полагалось, что  $E_{\text{п}} = 1,72 \text{ кДж/см}^2$  при толщине слоя 3 мм соответствует ВВ типа ТГ 50/50 с  $e_0 = 3,61 \text{ кДж/г}$  и  $\rho_0 = 1,62 \text{ г/см}^3$ , а  $E_{\text{п}} = 2,7 \text{ кДж/см}^2$  при той же толщине — гексогену с  $e_0 = 4,9 \text{ кДж/г}$  и  $\rho_0 = 1,82 \text{ г/см}^3$ . На рис. 6.58 линии соответствуют вычисленному по формуле

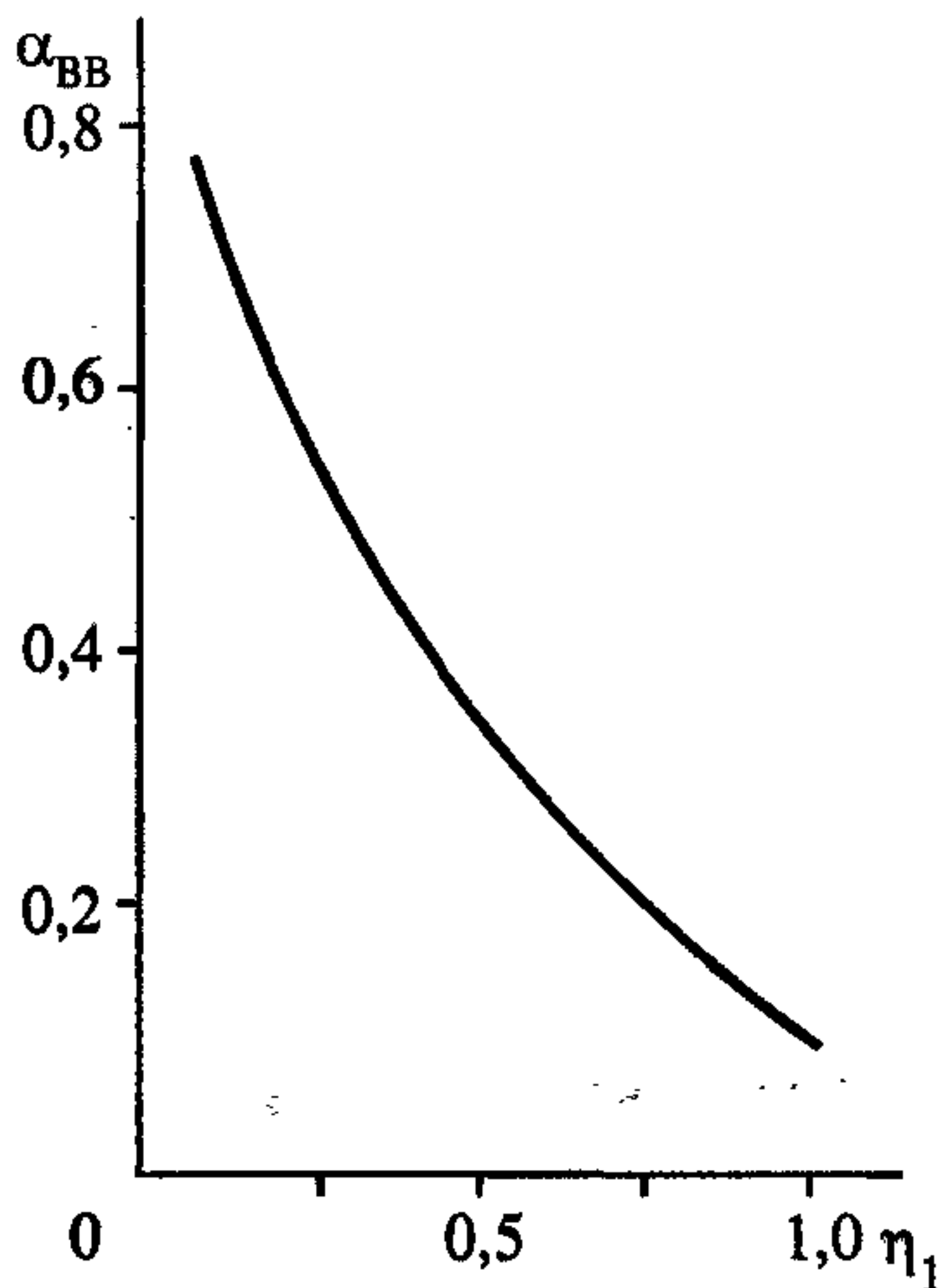


Рис. 6.57. Зависимость поправочного коэффициента от отношения массы ВВ к суммарной массе ударяемого и метаемого поршней.

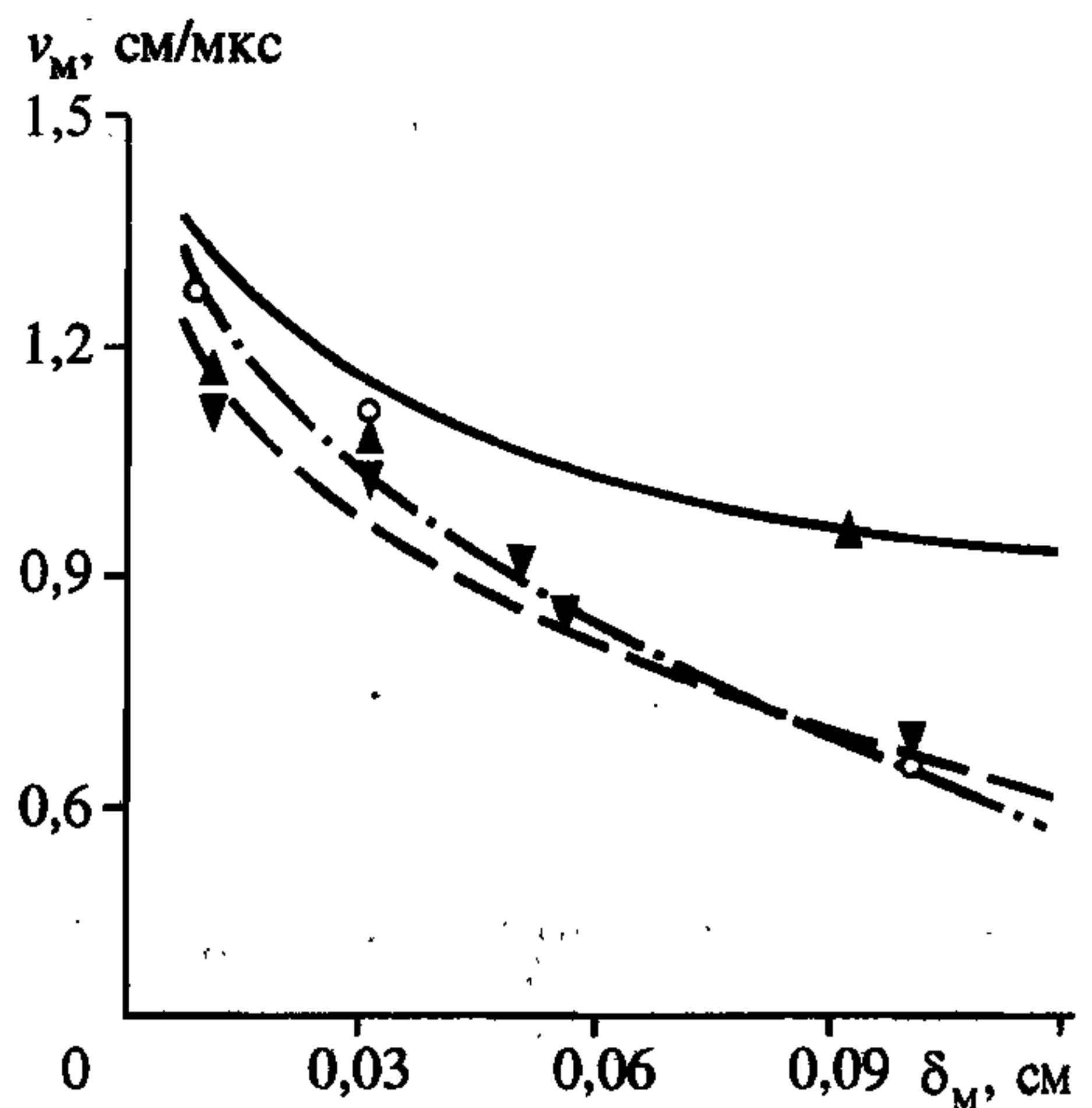


Рис. 6.58. Скорость метания поршня при изменении его толщины  $\delta_{\text{м}}$ .

Поясн. см. в тексте.



(6.4.11) с поправкой  $\alpha_{\text{ВВ}}$  значению скорости  $v_m$  в зависимости от толщины ускоряемой пластины  $\delta_m$ , дискретными символами нанесены экспериментальные данные. Сплошная линия приведена для случая стального ударника толщиной 1,5 мм со скоростью  $v = 0,564$  см/мкс, прокладкой из ТГ 50/50 толщиной 3 мм и метаемой пластиной из алюминия ( $\blacktriangle$  — эксперимент [31]). Штриховая линия построена при тех же параметрах ударника и прокладки, но с медными пластинами ( $\blacktriangledown$  — эксперимент). Штрихпунктир соответствует ударнику с  $v = 0,62$  см/мкс, прокладке из гексогена, свинцовой ускоряемой пластине ( $\circ$  — эксперимент). Некоторое расхождение между экспериментальными данными и методикой для алюминиевых пластин при  $\delta_m < 0,03$  см можно, по-видимому, объяснить особенностями взаимодействия тонкой пластины с зоной химической реакции ВВ. В целом же различие данных не превышает собственной точности ( $\pm 10\%$ ) эксперимента.

Возвращаясь к вопросу о сравнении методов Забабахина и многоступенчатого, рассмотрим многослойную схему, с помощью которой необходимо ускорить пластину массой 1 г (на единицу площади). Как и прежде, соответствующие массы слоев и суммарная энергия сравниваемых систем для каждого метода совпадают. Для примера представим результаты расчетов с семью пластинами. Причем отношения массы очередной пластины к последующей равно 1,25, а отношение массы очередного слоя газа или ВВ к массе ударяемой по слою пластины равно 0,16. Скорость удара по многослойной системе ударником (0,382 г) в схеме Забабахина 0,5 см/мкс, а в многоступенчатой сборке — 0,4554 см/мкс. В том и другом случае получена скорость метаемой пластины 0,737 см/мкс. Эти расчеты выполнены при условии равенства расстояния между соответствующими пластинами для обоих методов. Однако для многоступенчатой схемы размеры зазоров между пластинами можно уменьшить, что позволяет при равных энергетических затратах получить практически ту же скорость за меньшее время.

Любопытно сопоставить расчеты, когда кинетическая энергия ударника в методе Забабахина равна суммарной полной энергии слоев ВВ в многоступенчатом методе. Для рассмотренного выше варианта суммарная масса ВВ 0,225 г, что по энергетике соответствует начальной скорости ударяемой пластины в схеме Забабахина 0,2063 см/мкс. В этом примере получены одинаковые скорости 0,295 см/мкс. Причем при ускорении пластины только продуктами детонации ВВ указанной выше массы без применения многослойной схемы получает-

ся скорость метания 0,1 см/мкс при детонации у свободной границы ВВ и 0,24 — у жесткой стенки.

4. Рассмотрим двухкаскадную схему метания пластин-дисков в двухмерной осесимметричной цилиндрической постановке. Пусть радиусы зарядов ВВ и пластин-дисков совпадают и равны  $r$ . Оценить  $v_y$  (до момента взаимодействия со вторым каскадом) можно известными подходами, например, из [14]. Зная  $v_y$ , для оценки  $v_m$  применим решение (6.4.10) с поправкой величины  $m_{ВВ}^a$ . Для этой цели воспользуемся методикой, интегрально учитывающей разлет ПД с боковых поверхностей заряда [33]. Введем в рассмотрение коэффициент

$$\alpha_{ДВ} = \frac{2S_k}{S} = \frac{r}{r + h_{ВВ}},$$

где  $h_{ВВ}$  — толщина заряда ВВ второго каскада,  $S_k = \pi r^2$  — площадь контакта

пластины и заряда,  $S = 2(\pi r^2 + \pi r h_{ВВ})$  — общая площадь поверхности цилиндрического заряда массой  $m_{ВВ}$ . Определим активную массу заряда второго каскада следующим образом:

$$m_{ВВ}^a = \alpha_{ВВ} \alpha_{ДВ} m_{ВВ},$$

где  $\alpha_{ВВ} = \alpha_{ВВ}(\eta_1)$  определяется по аналогии с одномерным случаем. Тогда (6.4.10) можно переписать:

$$v_m = v_y \frac{1}{1 + m_2/m_1} \times \quad (6.4.12)$$

$$\times \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2\alpha_{ВВ} \alpha_{ДВ} m_{ВВ} e_0}{m_1 v_y^2} \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right)} \right].$$

Справедливость оценок (6.4.12) оценивалась численно в двумерной постановке. Для трехслойных

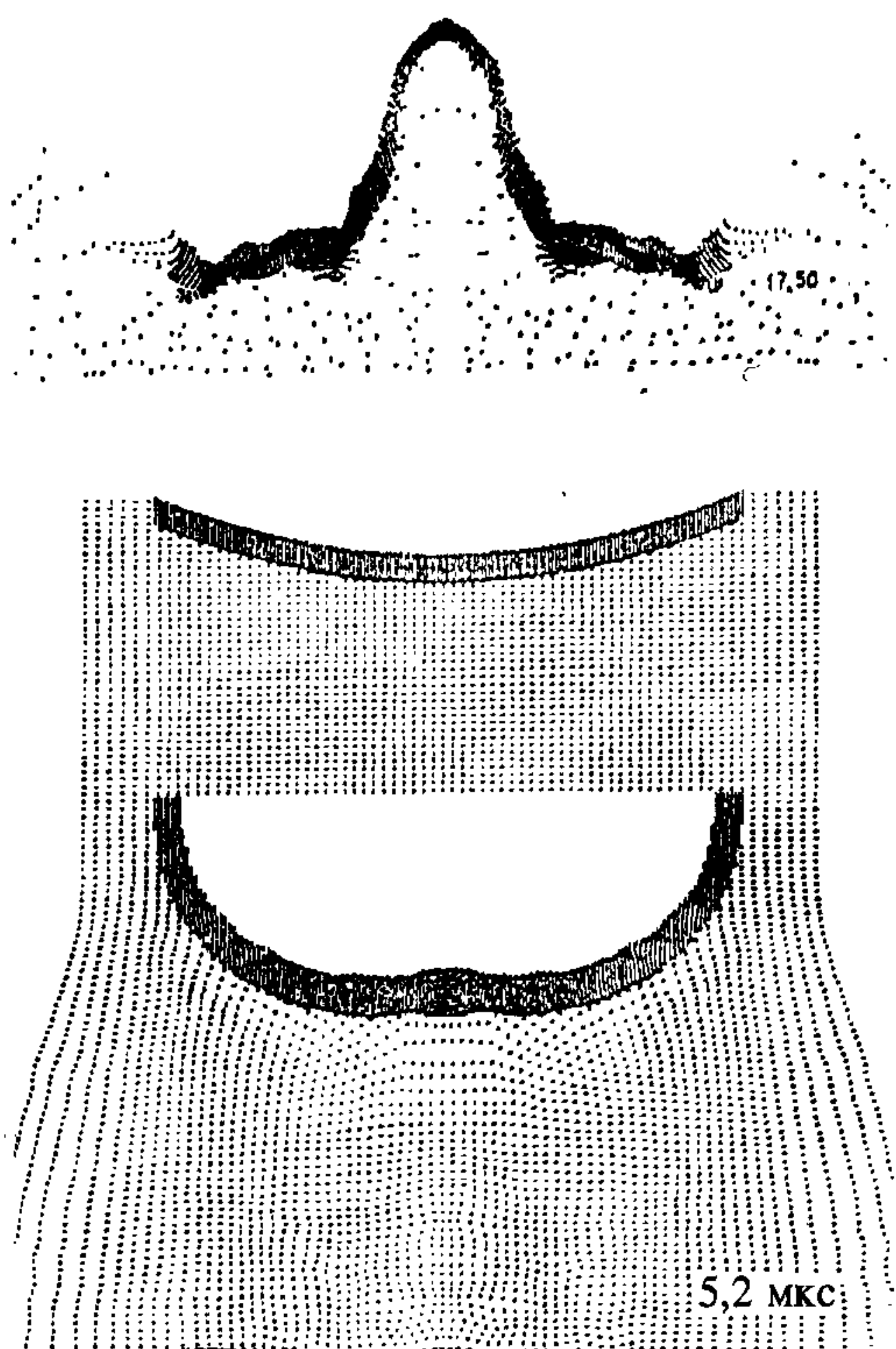


Рис. 6.59. Распределение частиц-масс в ПД и пластинах в процессе двухкаскадного метания при временах 5,2 и 17,5 мкс.



плоскодисковых схем метания вида ударник — ВВ — метаемая пластина (см. рис. 6.58) отмечается удовлетворительное согласование расчетных и оцениваемых по (6.4.12) результатов. Для более сложных систем оценки по (6.4.12) дают в основном завышенные значения. В первую очередь это связано с деформацией пластин-посредников и их разрушением. Используемые на практике приемы ослабления нежелательных двумерных эффектов при метании пластин (введение массивной внешней оболочки, увеличение диаметра заряда ВВ, введение кольца-обтюратора и др.) в конечном итоге приводят к потере полезного радиуса. В настоящей работе, в частности, применен прием, в котором пластина первого каскада выбиралась вогнутой (рис. 6.59), чтобы в момент ее соударения со слоем ВВ второго каскада она имела преимущественно плоский вид. Однако при этом в области оси симметрии происходит дополнительная концентрация энергии, нарушающая плоскую картину течения. Уменьшение влияния боковой разгрузки хорошо реализуется в задачах схождения (схлопывания) к оси симметрии. Пример такого процесса показан на рис. 6.60, где на четыре момента времени показана симметрическая часть двухступенчатой двумерной схемы метания тел взрывом.

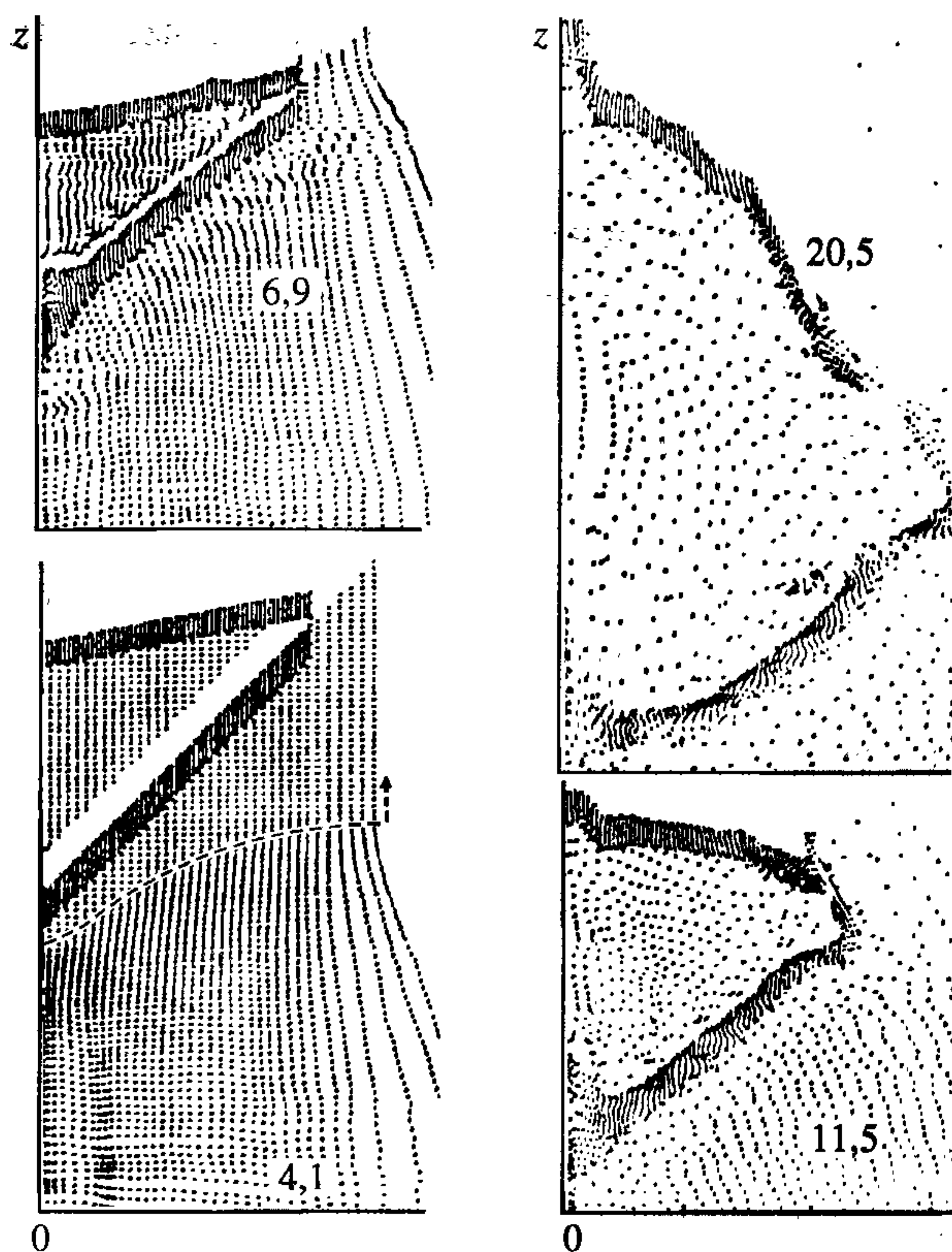


Рис. 6.60. Распределение частиц-масс в ПД и пластинах в процессе двухкаскадного метания при временах 4,1; 6,9; 11,5; 20,5 мкс.

## 6.5. Физические аспекты кумуляции

Кумулятивные струи образуются либо при косом соударении пластин, ускоренных взрывом, либо при взрывном обжатии тонкой конической оболочки,



которая деформируется таким образом, что из нее как бы “выжимается” тонкая высокоскоростная струя, способная внедряться в металлические преграды. Гидродинамическая теория формирования кумулятивных струй и их действия по преграде, предложенная М. А. Лаврентьевым [46] и независимо в [44], основана на модели идеальной несжимаемой жидкости. Принципиально важным шагом автора гидродинамической теории кумуляции явилось применение теории струй к кумулятивным зарядам.

### 6.5.1. Основные результаты гидродинамической теории

Следуя [46], рассмотрим картину симметричного встречного соударения двух плоских или осесимметричных струй идеальной несжимаемой жидкости, движущихся вдоль оси симметрии  $x$  (рис. 6.61). Пусть струя, движущаяся в сторону отрицательного направления оси  $x$ , имеет на бесконечности скорость  $v_1$ , плотность  $\rho_1$ , толщину  $2r_1$ , а встречная струя —  $v_2$ ,  $\rho_2$ ,  $2r_2$ . Течение имеет свободные поверхности  $L_1$  и  $L_2$  и поверхность раздела  $\gamma$  сред с различными плотностями. Для того чтобы картина течения соударяющихся струй была установившейся относительно системы координат  $xOy$ , необходимо, чтобы скорости струй на  $\pm\infty$  удовлетворяли соотношению  $v_2 = \lambda v_1$ , где

$$\lambda = \sqrt{\rho_1/\rho_2}.$$

Картина пробивания реализуется, если рассмотреть схему соударения на рис. 6.61 в системе координат, в которой левая (толстая) струя покоится и играет роль пробиваемой преграды. Тогда правая струя — собственно кумулятивная — имеет скорость  $v_y = v_1 + v_2$ , а скорость места соударения струй (скорость точки  $O$ ), представляющая скорость проникания  $v_0$  струи в преграду:

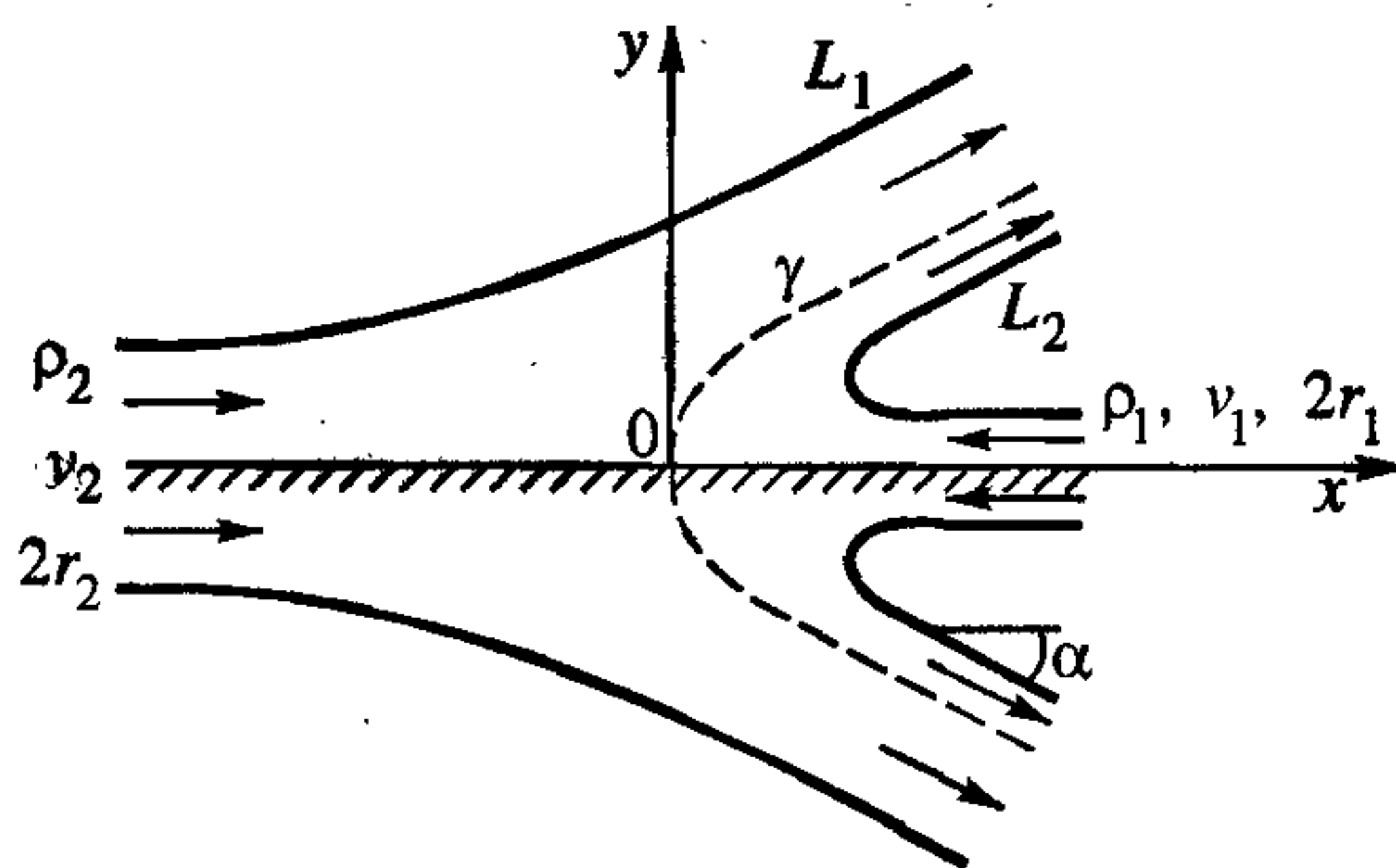


Рис. 6.61. Схема симметричного встречного соударения двух симметричных струй.

ная — имеет скорость  $v_y = v_1 + v_2$ , а скорость места соударения струй (скорость точки  $O$ ), представляющая скорость проникания  $v_0$  струи в преграду:

$$v_0 = v_2 = [\lambda/(\lambda + 1)]v_y.$$

Как видно, скорость проникания всегда меньше скорости струи.

Иначе говоря, в процессе пробивания кумулятивная струя расходится. Соотношение между глубиной пробития  $h$  и длиной струи  $l$  есть  $h = \lambda l$ .

Модель формирования кумулятивной струи получается из рассмотрения схемы соударения двух струй на рис. 6.61, если положить  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ,

$v_1 = v_2 = v$ , поменять у всех скоростей

знаки на противоположные и рассматривать процесс соударения струй в системе координат, в которой вектор скорости  $\vec{U}$  (называемый скоростью метания или обжатия кумулятивной облицовки) направлен внутрь угла соударения пластин (оболочки) под некоторым углом  $\beta = \pi/2$  к поверхности метаемой пластины. В этой системе координат критическая точка  $O$  должна двигаться направо со скоростью  $v_k$  (скорость точки контакта) (рис. 6.62).

Тогда скорость кумулятивной струи есть

$$v_y = v_k + v, \quad (6.5.1)$$

а скорость толстой левой струи ("песта") определяется соотношением

$$v_{II} = v_k - v. \quad (6.5.2)$$

Первое слагаемое в этих формулах  $v_k$  — это скорость перемещения системы координат, в которой картина течения стационарна (см. рис. 6.61). Второе слагаемое — скорость струй на бесконечности и на свободных поверхностях  $L_1$  и  $L_2$ . Из треугольника, составленного векторами  $\vec{U}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{v}_k$  (см. рис. 6.62), следует

$$\frac{U}{\sin \alpha} = \frac{v_k}{\sin \beta} = \frac{v}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Откуда с учетом (6.5.1) и (6.5.2) получаем

$$\begin{aligned} v_y &= U \frac{\sin(\alpha/2 + \beta)}{\sin(\alpha/2)}, \\ v_{II} &= -U \frac{\cos(\alpha/2 + \beta)}{\cos(\alpha/2)}. \end{aligned} \quad (6.5.3)$$

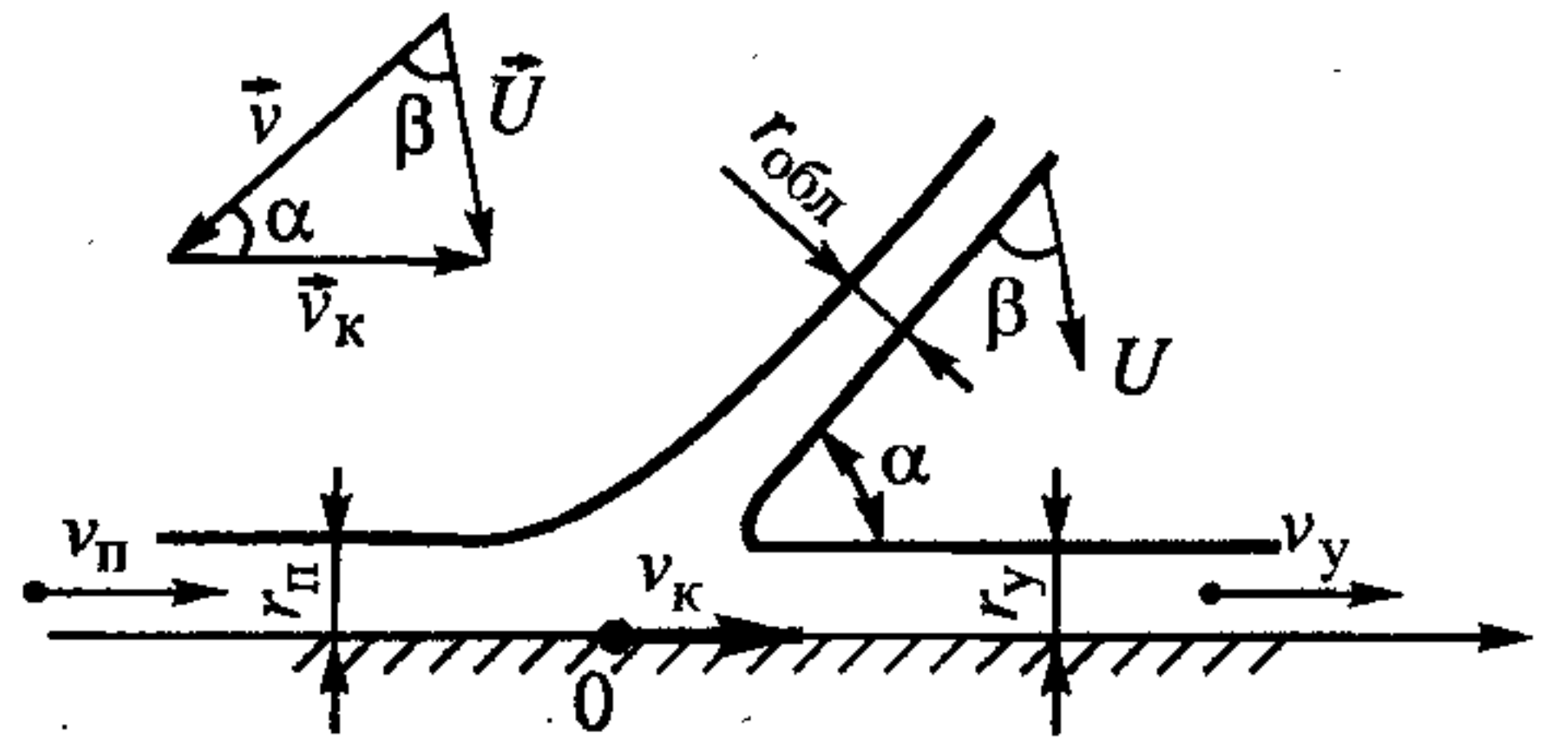


Рис. 6.62. Качественная картина течения несжимаемой жидкости при формировании кумулятивной струи.



Как видно из (6.5.3), при малых углах  $\alpha$  скорость кумулятивной струи может быть очень большой, даже если скорость обжатия  $U$  не слишком велика. Действительно, при  $\alpha \rightarrow 0$   $v_y \rightarrow 2U/\alpha \rightarrow \infty$ , но количество поступающего в струю вещества при этом также стремится к нулю.

Вычислим массу вещества, идущего в кумулятивную струю и пест. Если толщины пластины, струи и песта  $r_0, r_y, r_{\text{п}}$ , то из условий сохранения потоков массы и горизонтальной составляющей количества движения для стационарной картины соударения струй под углом  $2\alpha$  (см. рис. 6.61) получаем

$$r_0 = r_y + r_{\text{п}}, \quad -r_0 \cos \alpha = -r_{\text{п}} + r_y.$$

Откуда следует, что

$$r_y / r_{\text{п}} = \text{tg}^2(\alpha/2). \quad (6.5.4)$$

В работе [46] сделано предположение о том, что вектор скорости метания оболочки  $\vec{U}$  направлен по нормали к своей поверхности. В этом случае максимальный угол соударения  $\alpha$  должен быть меньше  $90^\circ$ , так как при  $\alpha = \pi/2$  пластины движутся вдоль оси  $x$  без соударения друг с другом, и кумулятивная струя не образуется. Поэтому из (6.5.4) следует, что  $r_y < r_{\text{п}}$ . Другое дело, если вектор  $\vec{U}$  направлен к поверхности метаемой пластины не по нормали. Рассмотрим случай, когда  $\beta < \pi/2$  (см. рис. 6.62). Для него соударение пластин прекращается (пластины движутся параллельно оси  $x$ ) тогда, когда угол соударения  $\alpha > \pi/2$ . Из соотношения (6.5.4) получаем, что толщина кумулятивной струи становится больше толщины песта  $r_y > r_{\text{п}}$ . Впервые на это обстоятельство обращено внимание в работе [47]. На практике случай  $\beta < \pi/2$  реализуется в режиме метания пластин скользящей детонационной волной. Легко показать, что вектор скорости метания  $\vec{U}$  направлен по биссектрисе угла  $2\beta$ , образованного пересечением сторон начального угла наклона пластины  $\alpha_0$  к плоскости симметрии (ось  $x$ ) и угла соударения  $\alpha (\alpha > \alpha_0)$ :  $\beta = \pi/2 - (\alpha - \alpha_0)/2$ . Для режима метания скользящей детонационной волной скорость соударения связана со скоростью детонации  $D$  известным выражением

$$U = 2D \sin \frac{\alpha - \alpha_0}{2}.$$

Откуда следует, что для  $U = 1$  км/с,  $D = 7$  км/с и  $\alpha \geq \pi/2$  необходимо иметь

начальный угол  $2\alpha_0$  клиновидной облицовки порядка  $160^\circ$  и более, чтобы реализовался режим, при котором масса вещества, идущая в струю, была больше массы песта. То есть так называемый режим “обратной” кумуляции [47] формируется в кумулятивных зарядах с большими углами раствора облицовок  $2\alpha_0$ .

Интересный результат сравнительно недавно получен в рамках струйной модели идеальной несжимаемой жидкости для несимметричного соударения плоских струй [48, 49]. Гидродинамическая теория кумуляции [46] является частным случаем рассматриваемой задачи, ибо она описывает соударение одинаковых по толщине струй (симметричные соударения).

Интерес к классической задаче несимметричного соударения струй вызван не только принципиальным вопросом о возможности получения решения таких течений, но также и потребностями практики в связи с появлением новых способов обработки металлов взрывом и в первую очередь сварки взрывом [3, 50].

Рассмотрим установившееся течение в результате соударения двух плоских струй  $A_1$  и  $A_2$  идеальной несжимаемой жидкости, имеющих на бесконечности толщины  $h_0$  и  $H_0$  и одинаковые по величине скорости  $v$  (рис. 6.63). Требуется определить параметры двух других образующихся струй  $B_1$  и  $B_2$ .

Примем критическую точку  $O$  за начало системы координат, а ось  $x$  направим навстречу набегающему потоку в струе  $A_1$ . Угол между сходящимися струями  $A_1$  и  $A_2$  обозначим через  $2\alpha$ , а между расходящимися  $B_1$  и  $B_2$  и осью  $x$  — через  $\phi$  и  $\psi$ . Толщина струи  $B_1$  есть  $h$ , а струи  $B_2$  —  $H$  (см. рис. 6.63). На основании законов сохранения потоков массы и импульса для идеальной несжимаемой жидкости имеем

$$h + H = h_0 + H_0, \quad (6.5.5)$$

$$H \cos \psi - h \cos \phi = h_0 + H_0 \cos 2\alpha, \quad (6.5.6)$$

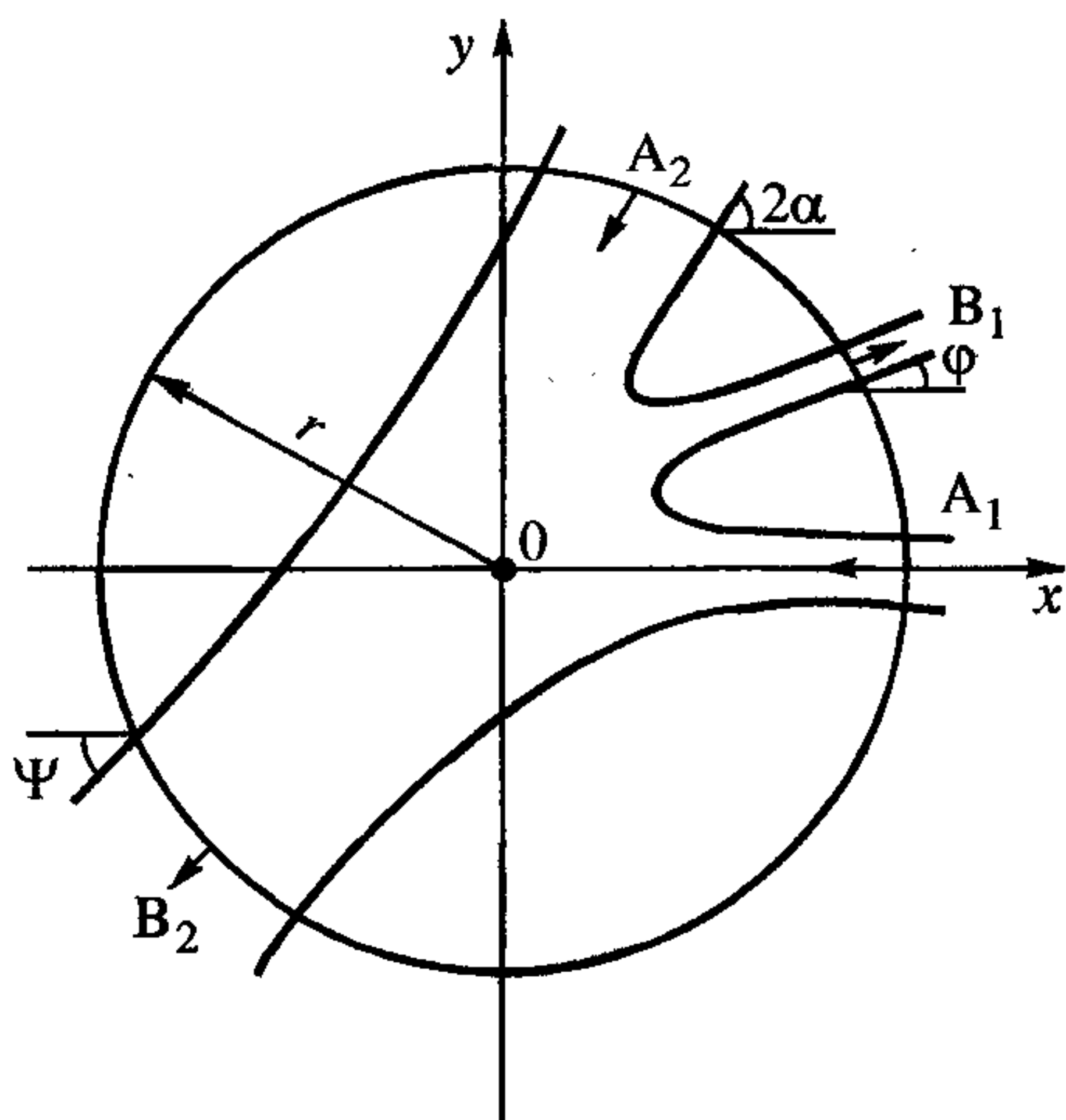


Рис. 6.63. Качественная картина течения несжимаемой жидкости при несимметричном соударении струй.



$$H \sin \psi - h \sin \varphi = H_0 \sin 2\alpha. \quad (6.5.7)$$

Если считать  $h_0$ ,  $H_0$  и  $2\alpha$  заданными, то для отыскания остальных четырех неизвестных  $h$ ,  $H$ ,  $\varphi$  и  $\psi$ , которые определяют асимптотические значения толщин и направления разветвления струй после их соударения, имеем только три соотношения. Таким образом, задача оказывается неопределенной.

Умножим левые части уравнений (6.5.6) и (6.5.7) на величину  $\frac{vr}{vh + vH}$ , а правые на равную ей величину  $\frac{vr}{vh_0 + vH_0}$ , где  $r \rightarrow \infty$ . Тогда получаем следующие соотношения:

$$\frac{M}{m+M} r \cos \psi - \frac{m}{m+M} r \cos \varphi = \frac{m_0}{m_0+M_0} r + \frac{M_0}{m_0+M_0} r \cos 2\alpha, \quad (6.5.8)$$

$$\frac{M}{m+M} r \sin \psi - \frac{m}{m+M} r \sin \varphi = \frac{M_0}{m_0+M_0} r \sin 2\alpha, \quad (6.5.9)$$

где  $m = hv$ ,  $M = Hv$ ,  $m_0 = h_0v$ ,  $M_0 = H_0v$  есть потоки масс на  $\infty$  в единицу времени через поперечные сечения рассматриваемых струй. Нетрудно видеть, что левые и правые части соотношений (6.5.8) и (6.5.9) есть проекции на оси координат радиус-векторов  $\vec{R}_0$  и  $\vec{R}$  центров инерции А масс  $m_0$  и  $M_0$  и В масс  $m$  и  $M$  (рис. 6.64). Следовательно, на основании соотношений (6.5.8) и (6.5.9) имеем

$$\vec{R}_0 = -\vec{R}, \quad \text{где } \vec{R}_0 = \frac{m_0 \vec{r}_{01} + M_0 \vec{r}_{02}}{m_0 + M_0},$$

$$\vec{R} = \frac{m \vec{r}_1 + M \vec{r}_2}{m + M},$$

причем  $\vec{r}_{01}$  и  $\vec{r}_{02}$  — радиус-векторы точек  $m_0$  и  $M_0$ , а  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  — радиус-векторы точек  $m$  и  $M$ ,  $r_{01} = r_{02} = r_1 = r_2 = r$ . Таким образом, радиус-

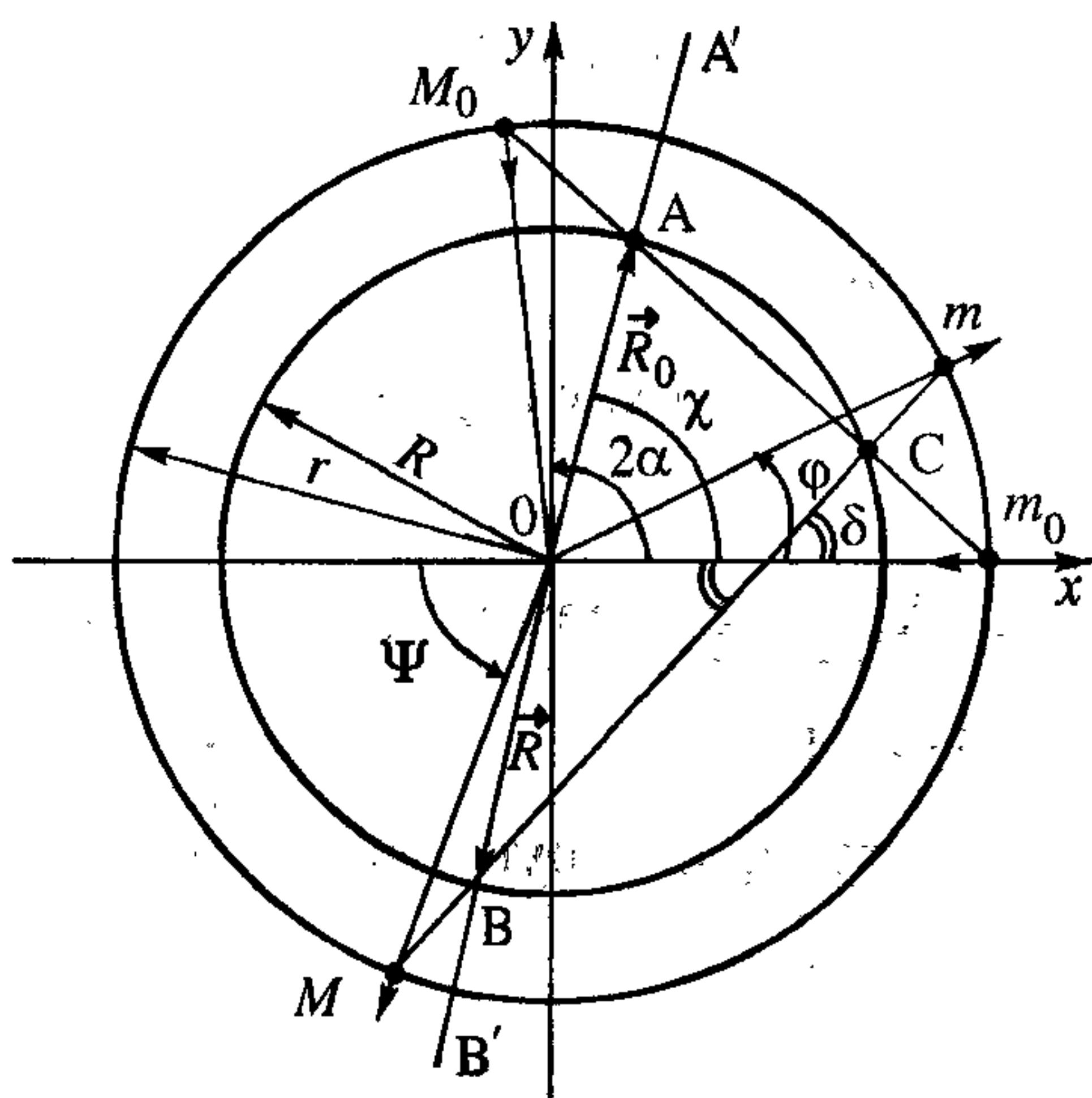


Рис. 6.64. Положение центров инерции в плоскости  $(x, y)$  взаимодействующих масс струй с указанием других характеристик процесса.

векторы  $\bar{R}_0$  и  $\bar{R}$  лежат на одной прямой  $A'B'$ , проходящей через начало координат. Из соотношений (6.5.8) и (6.5.9) легко находится угол наклона  $\chi$  прямой  $A'B'$  к оси  $x$ :

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{R_{0y}}{R_{0x}} = \frac{M_0 \sin 2\alpha}{m_0 + M_0 \cos 2\alpha} = \frac{H_0 \sin 2\alpha}{h_0 + H_0 \cos 2\alpha}, \quad (6.5.10)$$

и отношение радиусов окружностей, на которых лежат выделенные массы жидкости  $m_0$  и  $M_0$  на сходящихся струях, с одной стороны, и их центр инерции  $A$ , с другой:

$$n = \frac{R_0}{r} = \frac{\sqrt{R_{0x}^2 + R_{0y}^2}}{r} = \frac{\sqrt{m_0 + M_0 + 2m_0M_0 \cos 2\alpha}}{m_0 + M_0}. \quad (6.5.11)$$

Будем рассматривать случай, представленный на рис. 6.64, когда  $M_0 > m_0$ . Так как точка  $B$  есть центр инерции масс  $m$  и  $M$ , то все три точки  $m$ ,  $B$ ,  $M$  должны лежать на одной прямой. Отнесем все линейные величины к радиусу окружности  $r$ . Рассмотрим пучок прямых, проходящих через точку  $B\{-n \cos \chi, -n \sin \chi\}$  и лежащих внутри центрального угла  $2\alpha$ , образованного сходящимися струями  $A_1$  и  $A_2$ . Уравнение пучка прямых есть

$$y = \operatorname{tg}\delta(x + n \cos \chi) - n \sin \chi, \quad (6.5.12)$$

где  $\delta$  — угол наклона прямых к положительному направлению оси  $x$ . Пересечение этих прямых с окружностью  $x^2 + y^2 = 1$  позволяет определить координаты точек  $m$  и  $M$ , лежащих на окружности  $r = 1$ :

$$x_1 = \cos \varphi = n \sin \delta \cdot \sin(\chi - \delta) + \cos \delta \sqrt{1 - n^2 \sin^2(\chi - \delta)}, \quad (6.5.13)$$

$$x_2 = \cos \psi = -n \sin \delta \cdot \sin(\chi - \delta) + \cos \delta \sqrt{1 - n^2 \sin^2(\chi - \delta)}. \quad (6.5.14)$$

Так как соотношения (6.5.13), (6.5.14) должны описывать и случай симметричного соударения струй  $m_0 = M_0$ ,  $\varphi = \psi = \alpha$ , то из них с учетом (6.5.10), (6.5.11) получаем, что  $\delta = \alpha$ . Замечая, что  $n \sin(\chi - \alpha) = \frac{M_0 - m_0}{M_0 + m_0} \cdot \sin \alpha$ , можно

упростить эти выражения, приведя их к несколько иному виду:

$$\cos \varphi = \mu \sin^2 \alpha + \cos \alpha \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \alpha}, \quad (6.5.15)$$



$$\cos \psi = -\mu \sin^2 \alpha + \cos \alpha \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \alpha}, \quad (6.5.16)$$

где

$$\mu = \frac{M_0 - m_0}{M_0 + m_0} = \frac{H_0 - h_0}{H_0 + h_0}.$$

Из соотношений (6.5.5)—(6.5.7) и (6.5.15), (6.5.16) определяем толщины  $h$  и  $H$  расходящихся обратной и прямой струй

$$h = \frac{h_0 + H_0}{2} \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \alpha}} \right), \quad (6.5.17)$$

$$H = \frac{h_0 + H_0}{2} \left( 1 + \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \alpha}} \right). \quad (6.5.18)$$

Для симметричного соударения  $h_0 = H_0$  из соотношений (6.5.17) и (6.5.18) имеем

$$h_* = h_0(1 - \cos \alpha), \quad (6.5.19)$$

$$H_* = h_0(1 + \cos \alpha). \quad (6.5.20)$$

Соотношения (6.5.19), (6.5.20) были получены ранее в гидродинамической теории кумуляции [46] для толщин кумулятивной струи  $h_*$  и песта  $H_*$ .

Прямыми вычислениями легко показать, что прямая  $Mm$  (см. рис. 6.64), проходящая через точку В, для которой угол наклона к положительному направлению оси  $x$  равен  $\alpha$ , должна проходить через точку С пересечения прямой  $M_0m_0$  с окружностью радиусом  $R$ . Для этой окружности вписанный угол  $\angle ABC$  опирается на дугу  $AC$ , на которую опирается и центральный угол  $\angle AOC$ . Следовательно,  $\angle ABC = 1/2 \angle AOC = \chi - \alpha$ . С другой стороны, из равнобедренного треугольника  $mOM$  получается, что  $\angle OMm = \frac{1}{2}(\psi - \varphi)$ . Так как угол  $\angle ABC$  есть внешний угол треугольника  $MOB$ , то имеем равенство

$$\chi - \alpha = \chi - \psi + \frac{1}{2}(\psi - \varphi).$$

Откуда окончательно получаем

$$\varphi + \psi = 2\alpha. \quad (6.5.21)$$

Уравнение (6.5.21) является именно тем недостающим уравнением, которое необходимо, чтобы замкнуть систему уравнений (6.5.5)—(6.5.7).

Позже абсолютно такой же результат (соотношения (6.5.15)—(6.5.18) для углов и толщин расходящихся струй) получен в работе [51] на основе концепции упругих и неупругих соударений.

### 6.5.2. КРИТЕРИЙ СТРУЕОБРАЗОВАНИЯ

Гидродинамическая теория кумуляции для любой геометрии соударения всегда предсказывает наличие кумулятивной струи, в то время как эксперименты показывают, что при малых углах соударения кумулятивные струи не образуются. Факт прекращения струеобразования при углах соударения ниже некоторых удалось объяснить сжимаемостью материала соударяющихся пластин [52]. Закон сохранения потока импульса, согласно которому при косом соударении несжимаемых струй обязательно должна образовываться обратная струя, допускает в случае сжимаемого потока также и течение без струи.

Из газодинамики известно, что для сверхзвукового потока ( $v > c_0$ ), ударяющего в стенку под углом  $\alpha$  (рис. 6.65), имеется максимальный угол  $\alpha_1^*$ , при превышении которого присоединенный к точке соударения  $O$  скачок уплотнения (ударная волна —  $УВ$ ) существовать не может.

На рис. 6.66 представлена ударная поляра для сверхзвукового установившегося потока разворачивающегося за косым скачком уплотнения на угол  $\alpha$  в системе координат  $x'Oy'$ . На плоскости годографа точки пересечения  $B_1$  и  $B_2$  векторов  $\vec{v}$  и  $\vec{w}$  с ударной полярой являются годографами одной и той же точки  $O$  плоскости течения: они соответствуют разным сторонам скачка в точке  $O$ . Из рассмотрения ударной поляры следует, что для угла соударения  $\alpha < \alpha_1^*$  в

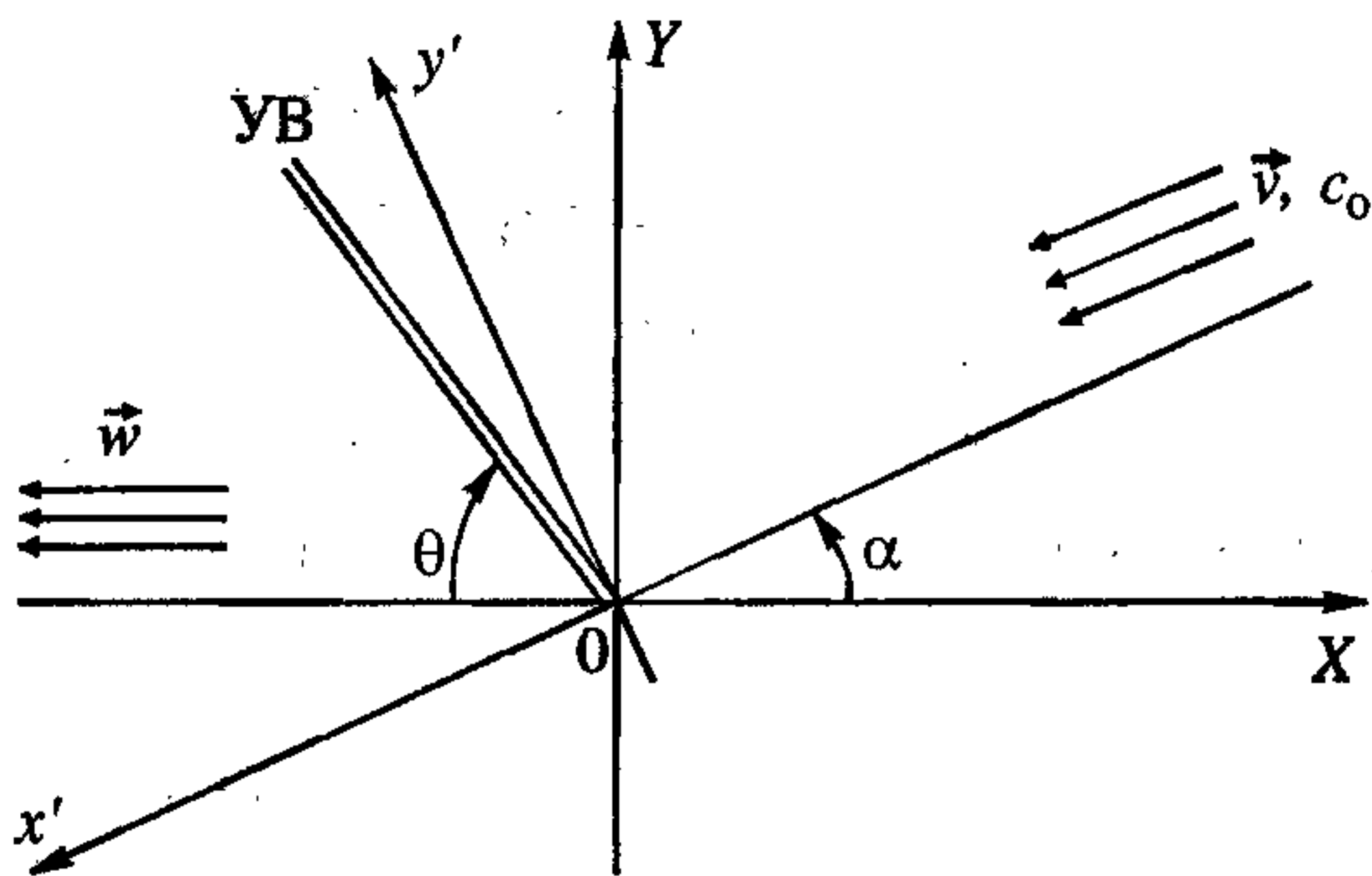


Рис. 6.65. Картина наклонного взаимодействия сверхзвукового потока с недеформируемой стенкой.



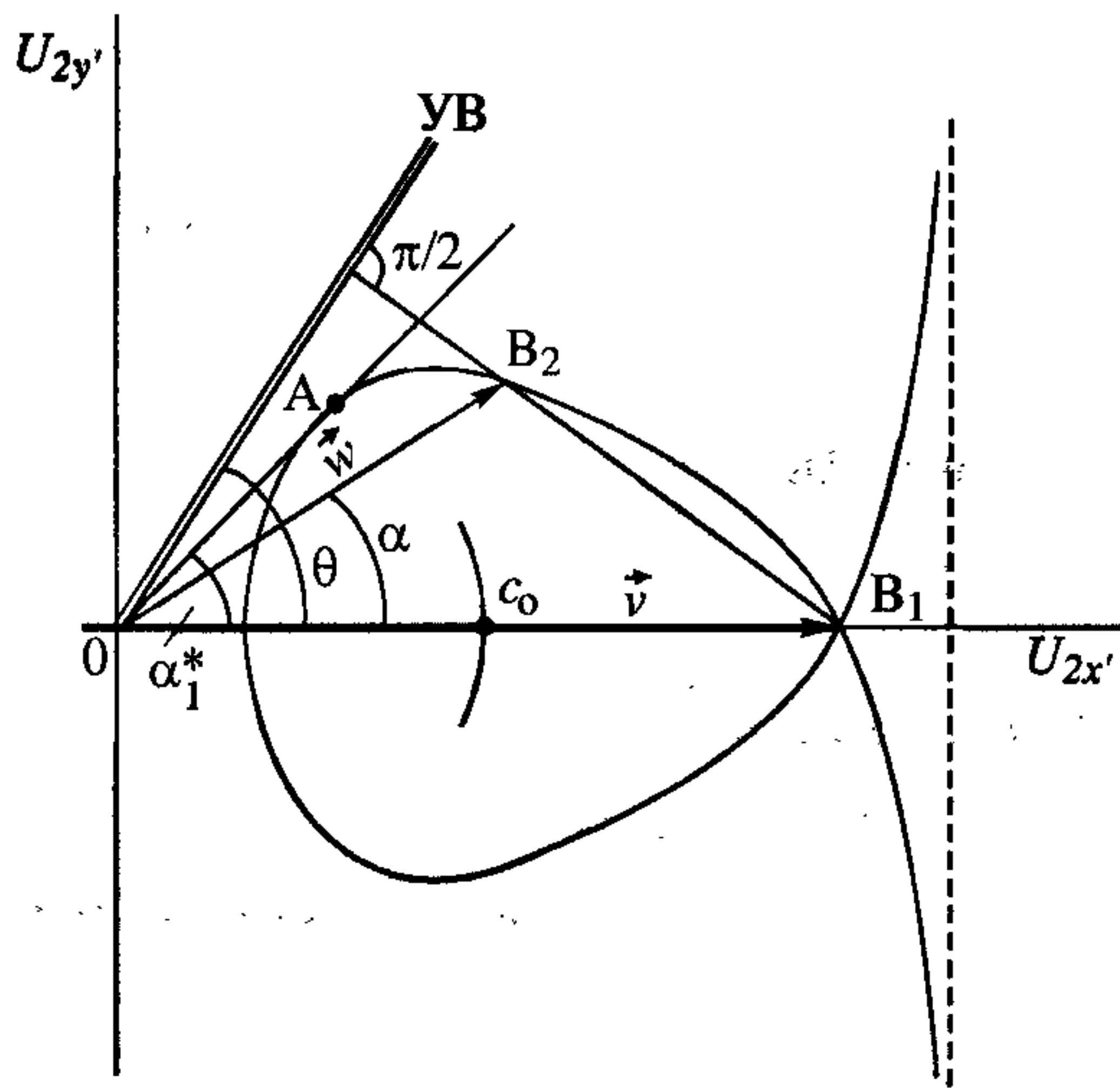


Рис. 6.66. Ударная поляра на плоскости годографа для сверхзвукового установившегося течения, разворачивающегося за ударной волной.

ленная внутрь угла соударения  $2\alpha$  (см. рис. 6.62).

Таким образом, течение без кумулятивной струи возможно лишь в случае, когда в точке соударения находится присоединенный скачок уплотнения. В случае отошедшего скачка всегда образуется кумулятивная струя. Следовательно, если в соответствующей данному соударению струйной задаче скорость падающей струи  $v$  дозвуковая, то обратная струя — кумулятивная — всегда образуется, а если сверхзвуковая, то кумулятивная струя образуется при  $\alpha > \alpha_1^*$  и отсутствует при  $\alpha < \alpha_1^*$ .

Задача о струеобразовании при наклонном соударении пластин (схлопывании облицовки) с применением моделей сжимаемой среды рассматривалась также рядом авторов численно, например, в работах [35, 53, 54]. Пример такого решения (начальная нестационарная стадия и близкое к установившемуся движение) для наклонного сверхзвукового соударения медных пластин при числе Маха  $M = 1,4$  показан на рис. 6.67, где отчетливо видна отошедшая от оси симметрии ударная волна, регулирующая процесс струеобразования. Подобный класс задач решался методом частиц в ячейках в газодинамическом, вязкопластическом и упругопластическом приближениях в условиях ограниченных ресурсов ЭВМ (в 70-е годы это БЭСМ-6, в настоящее время для задач со сложной геометрией и реологией, практически IBM PC AT). При этом на первом этапе исследований выяснилось, что не всегда удается с удовлетворительной

точке соударения  $O$  всегда присутствует скачок уплотнения вплоть до значения  $\alpha = \alpha_1^*$ , когда луч  $OA$  касается ударной поляры в точке  $A$ . При превышении угла соударения  $\alpha$  значения  $\alpha_1^*$  косой скачок уплотнения уходит вверх по потоку — образуется отошедшая ударная волна, взаимодействие которой с внутренней свободной поверхностью набегающей струи заставляет часть набегающего потока в волне разрежения поворачивать в сторону положительных значений оси  $x$ . Появляется кумулятивная струя, направ-

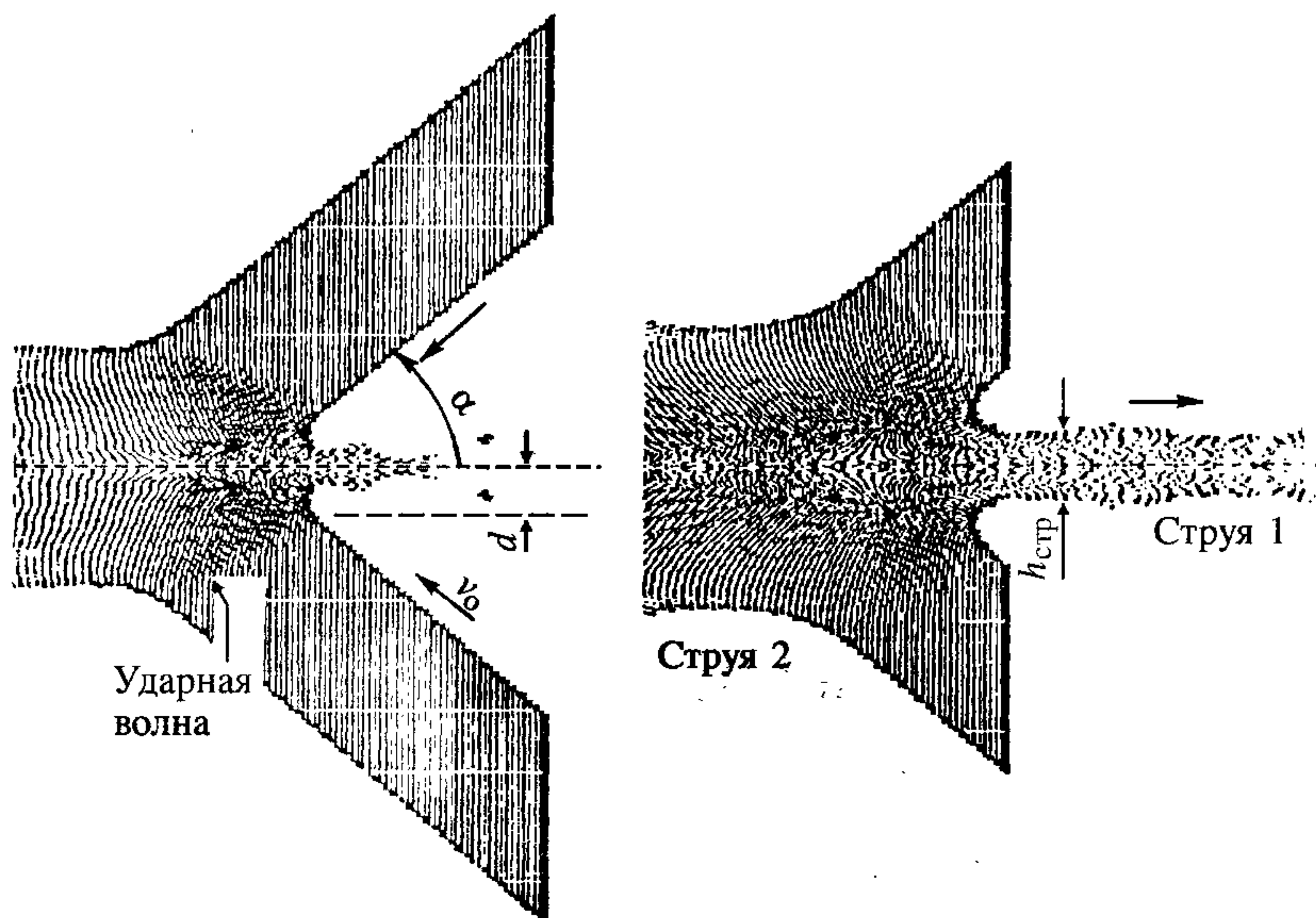


Рис. 6.67. Результаты численного моделирования наклонного соударения пластин в режиме струеобразования.

точностью описать реальный процесс. Это, в частности, связано с тем, что аппроксимационная вязкость, обусловленная пространственным разбиением расчетной области, при неконтролируемых параметрах может существенно изменить решение. Поэтому важно было получить теоретические условия на параметры движения, обеспечивающие удовлетворительную точность вычисления эффектов физической вязкости. В работах [55, 56] для одномерных уравнений Навье—Стокса, описывающих течение нетеплопроводной вязкой сжимаемой жидкости, представлены результаты анализа аппроксимационной вязкости, устойчивости и точности метода PIC, рассматриваемого как вариант метода расщепления. Разностная схема метода, которая определяется в результате предельного перехода, когда число частиц в ячейке стремится к бесконечности, анализируется методом дифференциальных приближений. Получен критерий на сеточное число Рейнольдса, при котором аппроксимационная вязкость, зависящая от пространственного шага сетки, пренебрежимо мала по сравнению с физической:

$$Re_h = \frac{\rho|u|h}{4/3\mu} = \frac{\rho|u|Lh}{4/3\mu L} = Re \frac{h}{L} \ll 2,$$

где  $h$  — шаг сетки,  $L$  — характерный размер.

Следуя работе [35] и выше представленному анализу ударной поляры, оп-



ределим (получено совместно с В. Е. Петренко) значения  $\alpha_1^*$  как функцию скорости  $v = v_0(v_{0n}, v_{0\tau})$  и параметры уравнений состояния, с применением которых проводились численные расчеты:

$$P = a^2(\rho - \rho_0) + (\gamma - 1)\rho e, \quad (6.5.22)$$

$$P = (\gamma - 1)\rho e, \quad (6.5.23)$$

$$P = A[(\rho/\rho_0)^\gamma - 1]. \quad (6.5.24)$$

Для определения величин за фронтом ударной волны в среде с начальными параметрами  $\rho = \rho_0$ ,  $P = 0$ ,  $e = 0$ ,  $v = v_0$  запишем законы сохранения массы, количества движения и энергии:

$$\rho_0 v_{0n} = \rho v_n, \quad (6.5.25)$$

$$\rho_0 v_{0n}(v_{0n} - v_n) = P, \quad (6.5.26)$$

$$v_{0\tau} = W_\tau, \quad (6.5.27)$$

$$\rho_0 v_{0n} \left( \frac{W^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} + e \right) = -PW_n. \quad (6.5.28)$$

Обозначая  $\beta = \rho/\rho_0 - 1$ , заменим (6.5.25), (6.5.26) следующими выражениями:

$$v_{0n} = \left[ \frac{P(\beta + 1)}{\rho_0 \beta} \right]^{1/2}, \quad (6.5.29)$$

$$W_n = \left[ \frac{P}{\rho_0 \beta(\beta + 1)} \right]^{1/2}. \quad (6.5.30)$$

Воспользовавшись кинематическими условиями

$$v_{0\tau} = W_\tau = (v_0^2 - v_{0n}^2)^{1/2}, \quad (6.5.31)$$

$$W = (W_\tau^2 + W_n^2)^{1/2} \quad (6.5.32)$$

и выражениями (6.5.29), (6.5.30), преобразуем (6.5.28) к виду

$$e = \frac{\beta P}{2\rho_0(\beta + 1)}. \quad (6.5.33)$$

Из геометрических соображений имеем

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{v_{0n}}{W_\tau} - \operatorname{arctg} \frac{W_n}{W_\tau} \quad (6.5.34)$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(v_{0n} - W_n)W_\tau}{W_\tau^2 + v_{0n}W_n}. \quad (6.5.35)$$

Подставляя (6.5.29)—(6.5.31) в (6.5.35), получим

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{P[\rho_0 v_0^2 (\beta/(\beta+1)) - P]}{(\rho_0 v_0^2 - P)^2}. \quad (6.5.36)$$

Дополним указанные соотношения уравнением состояния  $P = P(\beta, e)$  или  $P = P(\beta)$ .

При  $\alpha = \alpha_1^*$ , как показано выше, имеем

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{d(\operatorname{tg}^2 \alpha)}{d\beta} = 0. \quad (6.5.37)$$

После дифференцирования при  $\alpha = \alpha_1^*$  получаем

$$\frac{dP}{d\beta} = \frac{P(P - \rho_0 V_0^2)}{(\beta+1)[\beta \rho_0 V_0^2 - P(\beta+2)]}.$$

Выпишем соотношения для определения критических углов при расчетах по уравнениям состояния (6.5.22)—(6.5.24).

1. Для  $P$  и  $\beta$  можно записать следующие два уравнения

$$P = \frac{2\rho_0 a^2 \beta}{2 - (\gamma - 1)\beta},$$

эквивалентное (6.5.22) с учетом (6.5.33), и  $A\beta^2 + B\beta + C = 0$ ,

где

$$A = (\gamma - 3)[2\rho_0 a^2 + \rho_0 v_0^2 (\gamma - 1)],$$

$$B = 2\rho_0 v_0^2 [2 - 3(\gamma - 1)] - 16\rho_0 a^2,$$

$$C = 8\rho_0 (v_0^2 - a^2).$$

Критический угол, соответствующий найденным значениям  $P$ ,  $\beta$  определяется из (6.5.36).



2. Для уравнения состояния (6.5.24) аналогично получаем систему уравнений

$$P^2 [1 + \gamma(\beta + 2)] - P[b(\gamma\beta + 1) - A\gamma(\beta + 2)] - A\gamma\beta b = 0,$$

$$P - A[(\beta + 1)^\gamma - 1] = 0,$$

где  $b = \rho_0 v_0^2$ , которая решена итерационным методом Ньютона.

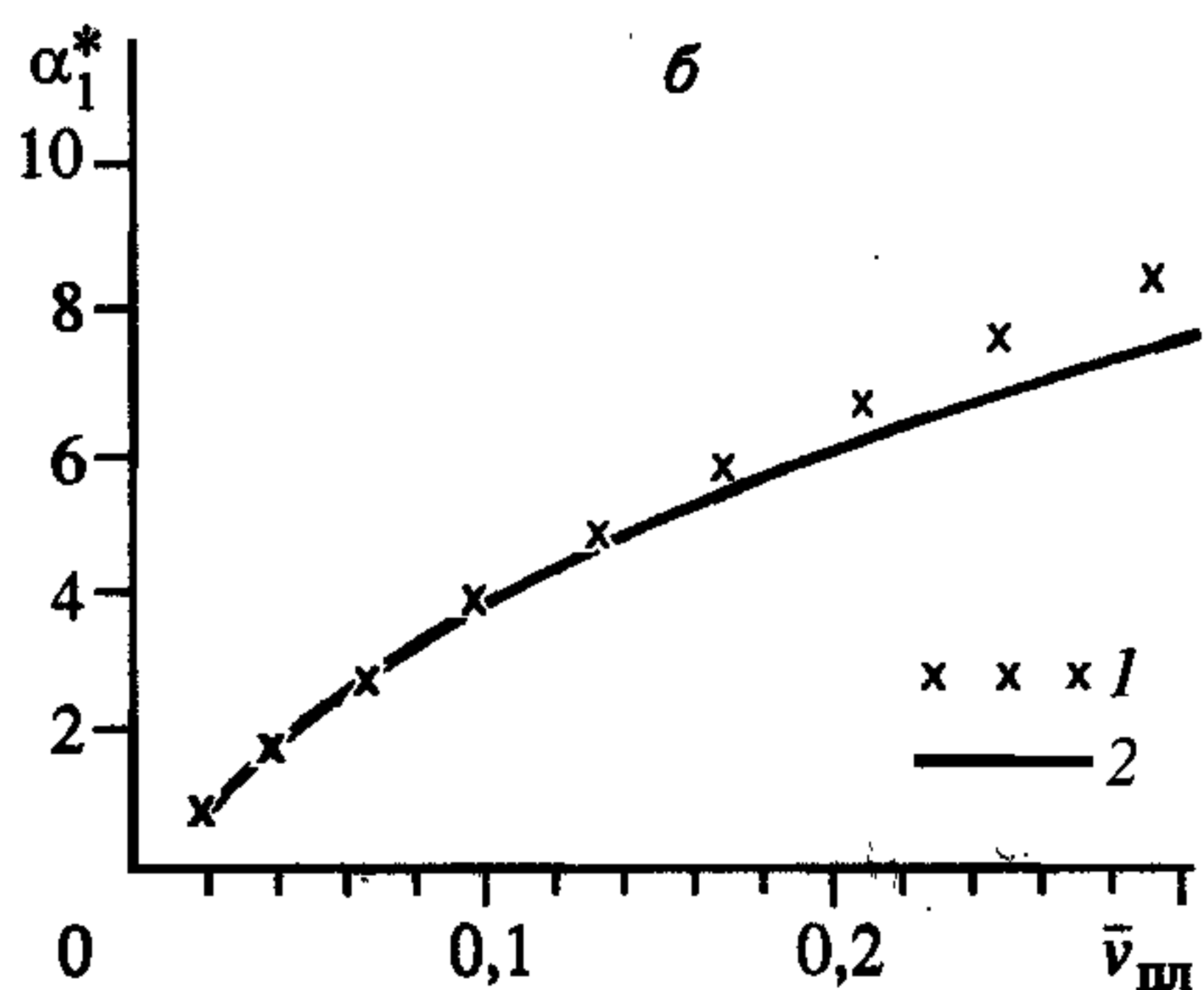
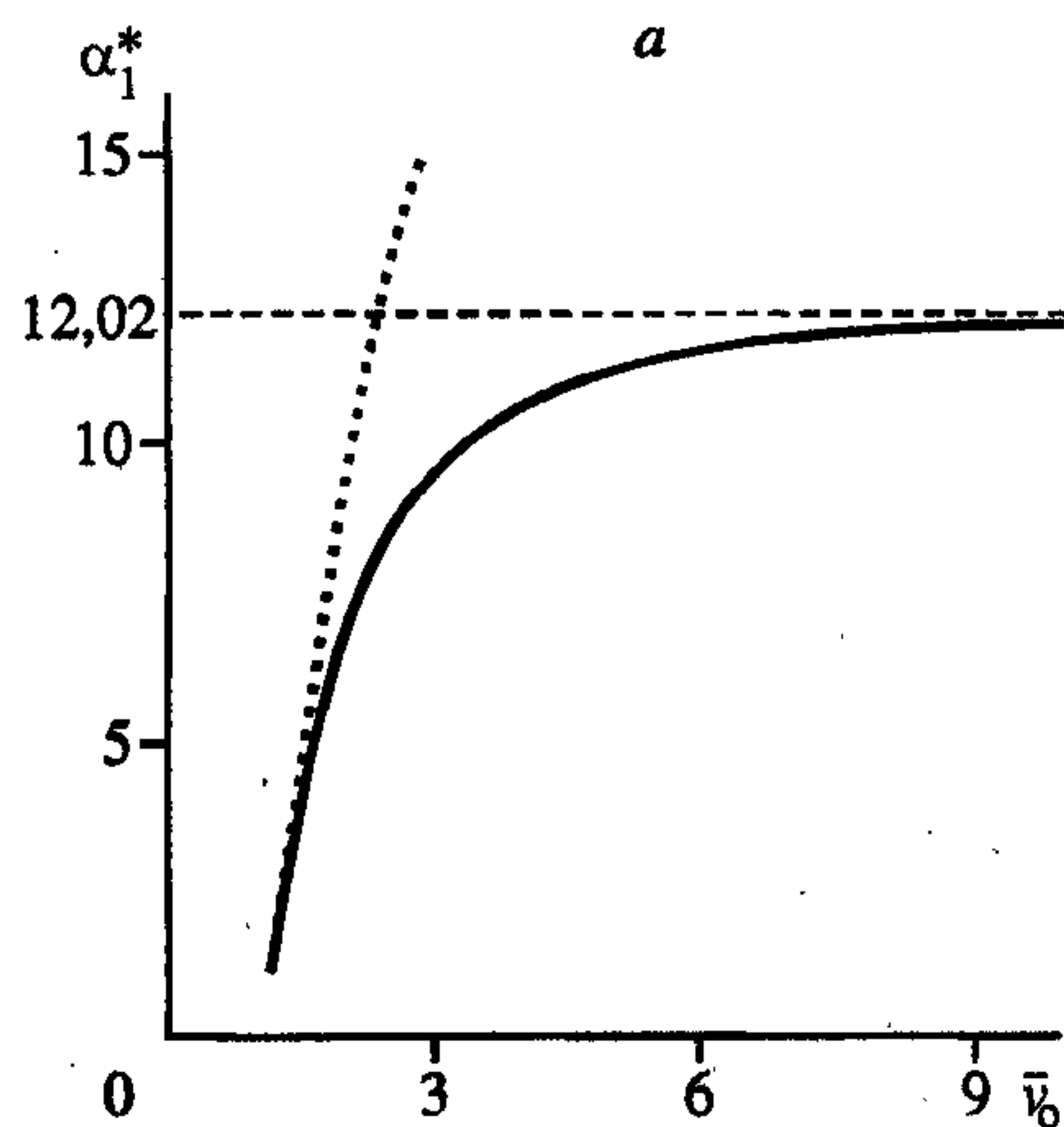


Рис. 6.68. Зависимость критического угла струеобразования от скорости сверхзвукового течения (а) и скорости движения соударяющихся пластин (б).

а — сплошная линия — моделирование с уравнением состояния (6.5.22), штриховая — (6.5.23), точки — (6.5.24). б — сплошная линия — моделирование с уравнением состояния (6.5.22), крестики — (6.5.24).  $\rho_0 = 1$ ,  $a = 1$ ,  $\gamma = 4,8$ . 1 —  $P = a^2(\rho - \rho_0) + (\gamma - 1)\rho e$ ; 2 —  $P = A[(\rho/\rho_0)^\gamma - 1]$ .

3. При рассмотрении уравнения состояния (6.5.23) вместо (6.5.37) используется

$$\frac{d\alpha}{de} = \frac{d(\operatorname{tg}^2 \alpha)}{de} = 0.$$

Выполнив простые выкладки, получаем

$$\beta = \frac{2}{\gamma - 1}, \quad P = \frac{\rho_0 v_0^2}{\gamma}, \quad \alpha_1^* = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right).$$

Зависимости критического угла от скорости  $v_0$  и  $v_{\text{пл}}$  (скорость по нормали к внутренней свободной границе) для уравнений состояния (6.5.22)—(6.5.24) (рис. 6.68) и дают полезную информацию о применимости различных видов уравнений состояния для определения параметров струи. Критическая кривая делит плоскость возможных параметров соударения на две области: ниже кривой находится область соударения без, а выше — со струеобразованием. На рис. 6.69 приведены критические кривые на плоскости  $(U, 2\alpha)$ , где  $U$  — скорость метания пластин, возможных параметров соударения пластин из мягкой стали (а) и алюминия (б).

В экспериментах фиксировался факт

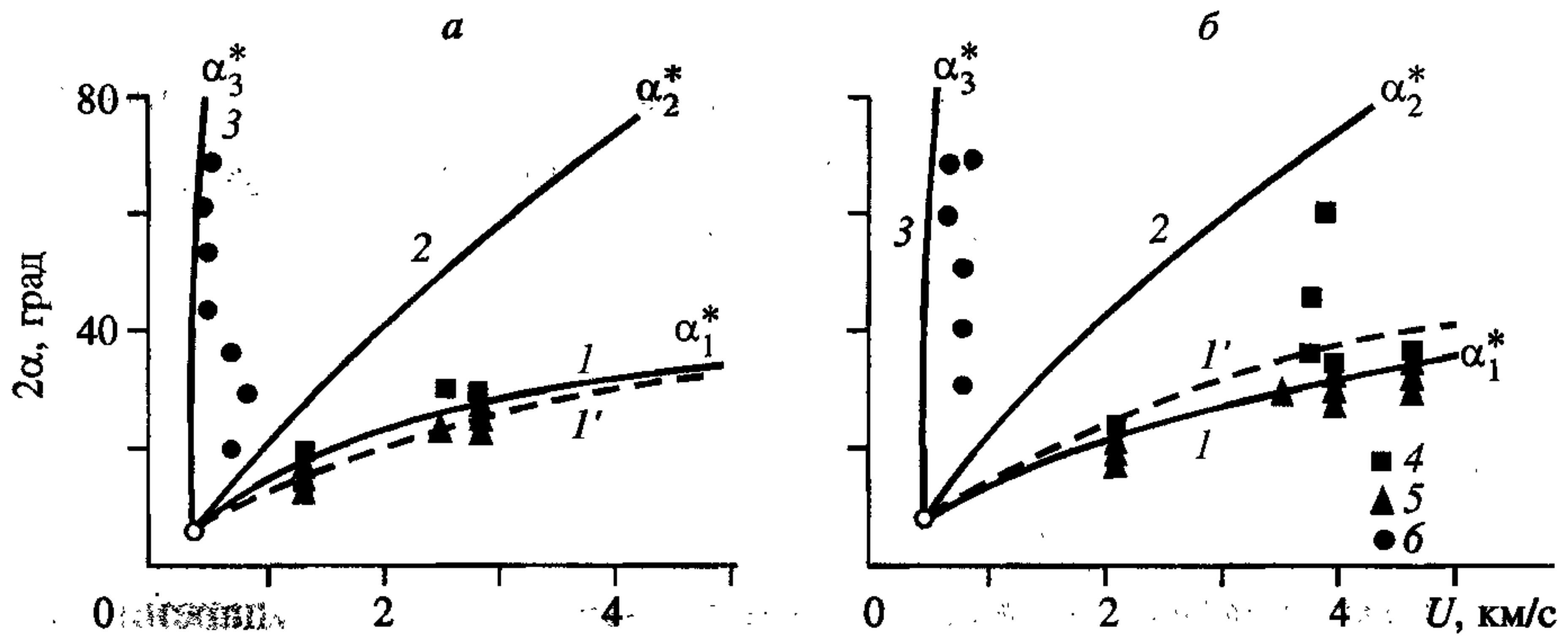


Рис. 6.69. Критические кривые, выделяющие характерные области процесса струеобразования [52].

1, 3 — границы области; 2 — раздел области формирования сплошных и диспергированных струй; 4, 6 — образуется струя; 5 — движение без струи; точки — экспериментальные данные. а, б — см. текст.

наличия или отсутствия струи впереди точки контакта в пространстве между соударяющимися пластинами. Отмечено, что для всех исследованных материалов струя появляется тогда, когда угол между пластинами с точностью до  $3^\circ$  достигает расчетного критического значения. Там же высказано предположение, что такое расхождение связано с использованием несовершенных эмпирических выражений для ударных адиабат материалов. Действительно, если воспользоваться современными, более точными выражениями для ударных адиабат металлов, то получаемые критические кривые 1 (см. рис. 6.69) в точности соответствуют экспериментальным результатам [52].

Критерий струеобразования [52] можно обобщить, если перейти в лабораторную систему координат. Тогда, если фазовая скорость  $v_k$  точки соударения элементов кумулятивной оболочки на оси симметрии меньше местной скорости звука в окрестности точки соударения, то возмущения могут уходить вперед по оболочке и соударение происходит с образованием струи [6, 18]. В противном случае струеобразования не происходит. Этот критерий справедлив как для плоского, так и для осесимметричного случаев соударения. Более строгим будет утверждение, что скорость точки контакта должна быть дозвуковой в системе координат, где “пест” покоится. Тогда условием струеобразования будет

$$v_k - v_H = U / \operatorname{tg} \alpha = v_k \cos \alpha \leq c.$$

Дальнейшие теоретические и экспериментальные исследования [35] под-



твердили справедливость критерия струеобразования, сформулированного в работе [52]. В [35] эти результаты связаны с качественным состоянием кумулятивной струи и сделана попытка распространения ранних результатов по струеобразованию на осесимметричный случай. Все предыдущие результаты никак не касались качества кумулятивных струй: сплошные ли это струи или облако диспергированных частиц, не являлось существенным. Выписанный выше критерий струеобразования касается как тех, так и других струй, причем практически во всех экспериментах [52] струи представляли собой поток частиц материала соударяющихся пластин. Таким образом, при соударении в окрестности над кривой  $\alpha_1^*(U)$  кумулятивная струя представляет собою поток диспергированных частиц. Другой крайний случай — это нормальная монолитная струя с плотностью, равной плотности материала облицовки, реализуется при дозвуковой скорости натекающей на стенку струи  $v \leq c_0$ . Этот случай соответствует гидродинамической модели кумуляции [46]. Тогда в предположении, что скорость соударяющихся пластин  $U$  направлена по нормали к ним, критический угол  $\alpha_2^*$  определяется выражением

$$\alpha_2^* = \text{arctg}(U / c_0), \quad (6.5.38)$$

где  $c_0$  — начальная скорость звука в материале пластин. Таким образом, на плоскости  $(U, 2\alpha)$  имеется еще одна критическая кривая 2 (см. рис. 6.69), которая делит уже определенную область соударения со струей на две: выше этой кривой реализуются сплошные струи, а ниже — распыленные.

### 6.5.3. Скорость кумулятивных струй

При определенных режимах соударения скорость кумулятивных струй оказывается меньше, чем предсказывает гидродинамическая теория. Впервые этот факт отмечен в [52]. В работе [57] при соударении пластин также зарегистрированы струи с меньшей скоростью, чем дает расчет по гидродинамической модели. Это связано с низкой скоростью соударения пластин, когда гидродинамическая модель кумуляции перестает быть справедливой, потому что в этом случае инерционные силы становятся сравнимы с прочностными силами материалов.

Сделаем попытку в рамках гидродинамической модели струеобразования учесть влияние реальной прочности материалов при соударении пластин [6].

Предположим, что существуют некоторые критические параметры соударения, при которых прочность полностью ликвидирует струеобразование. Их можно определить из условия, что при соударении инерционные силы не превосходят сил прочности, так как тогда материал не может перейти в пластическое состояние, но прежде необходимо определить сами эти силы.

Рассмотрим симметричное косое соударение прочных пластин, вектор скорости  $U$  которых направлен по нормали к их поверхности. Предположим, что давление, переводящее материал пластин в пластическое состояние, определяется составляющей скорости, нормальной к плоскости симметрии, а прочностные силы — некоторым параметром  $\sigma$ . Тогда условие струеобразования при наличии прочности опишется выражением

$$1/2\rho U^2 \cos^2 \alpha > \sigma. \quad (6.5.39)$$

Из (6.5.39) находится критическая скорость соударения, при которой прекращается струеобразование:

$$U_* = \sqrt{2\sigma/\rho} \cdot 1/\cos \alpha. \quad (6.5.40)$$

В системе координат, связанной с точкой контакта, этой критической скорости соударения соответствует критическая скорость “втекания” материала

$$v_* = U_* \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2\sigma/\rho} \cdot 1/\sin \alpha. \quad (6.5.41)$$

Отметим, что переход к жидкостной модели справедлив только при условии, что скорость “втекания” материала больше критической скорости (6.5.41), и проведем модификацию гидродинамической модели соударения пластин, отчасти подобную применяющейся для учета прочности материала в задачах проникания. Предположим, что рассматриваемой задаче о соударении прочных пластин в системе координат, связанной с точкой контакта, соответствует струйная гидродинамическая задача, в которой струи уже идеальной жидкости имеют скорость

$$v' = \sqrt{U_*^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - v_*^2}. \quad (6.5.42)$$

Тогда скорость кумулятивной струи в лабораторной системе координат, равная сумме скорости втекания (6.5.42) и скорости точки контакта, с учетом прочности определится из выражения



$$v_c^{\text{II}} = \frac{U}{\sin \alpha} \left( 1 + \sqrt{\cos^2 \alpha - \frac{2\sigma}{\rho U^2}} \right). \quad (6.5.43)$$

Естественно, что данная модифицированная модель носит условный характер, так как она не описывает реальную картину течения, но тем не менее она позволяет в какой-то мере учесть диссипацию энергии, связанную с преодолением сил прочности материала пластин. В качестве некоторого обоснования этой модели заметим, что, во-первых, она описывает прекращение струеобразования при определенных значениях параметров соударения прочных пластин, во-вторых, в отсутствие прочности ( $\sigma = 0$ ) она переходит в обычную гидродинамическую модель, и, в-третьих, при значительном превышении инерционных сил над прочностными она практически совпадает с гидродинамической. При скорости метания  $U = U_*$ , определяемой (6.5.40), формула (6.5.43) дает фазовую скорость точки контакта, а не скорость струи, так как струя в этом случае просто отсутствует.

Нетрудно получить аналогичную (6.5.43) формулу для случая, когда вектор скорости пластин направлен по биссектрисе угла, образованного начальным и динамическим направлениями поверхности пластины, что реализуется в режиме скользящей детонации. Тогда выражение для скорости кумулятивной струи с учетом прочности имеет вид

$$v_c^{\text{II}} = \frac{U}{\sin \alpha} \left[ \cos \frac{\alpha - \alpha_0}{2} + \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha + \alpha_0}{2} - \frac{2\sigma}{\rho U^2}} \right], \quad (6.5.44)$$

где  $\alpha_0$  — начальный угол наклона пластины к плоскости симметрии;  $\alpha$  — динамический угол. В этом случае скорость соударения  $U$  связана со скоростью детонации  $D$  известным выражением

$$U = 2D \sin[(\alpha - \alpha_0)/2]. \quad (6.5.45)$$

В табл. 6.4 приведено сравнение скоростей кумулятивных струй, определенных по (6.5.44) —  $v_c^{\text{II}}$  и по гидродинамической теории —  $v_c^{\text{I}}$ , с результатами работы [57]  $v_c^{\text{э}}$ . Необходимо отметить, что в [57] непосредственно скорость кумулятивных струй в экспериментах не измерялась, а рассчитывалась по измерениям динамического угла соударения и отношения длины струи к длине схлопнувшегося участка пластин. Эти величины измерялись на фотографиях,

Сравнение расчетных и экспериментальных значений скорости кумулятивных струй

Номер опыта	$r^*$	$D$ , км/с	$2\alpha_0$ , град.	$2\alpha$ , град.	$U^3$ , км/с по (6.5.45)	$V_c^3$ , км/с	$V_c^H$ , км/с по (6.5.44)	$V_c^r$ , км/с
Сталь, $\rho = 7,85 \text{ г/см}^3$ , $\sigma = 40 - 50 \text{ кг/мм}^2$								
1	0,39	6,3	60	69	0,495	1,1	1,25-1,1	1,5
2	0,39	6,3	56	63	0,385	1,0	1,3-1,2	1,6
3	0,39	6,3	45	54	0,495	1,4	1,7-1,5	2,0
4	0,39	6,3	35	44	0,495	1,8	2,2-2,1	2,5
5	0,41	6,4	25	37	0,670	3,2	4,2-4,0	4,4
6	0,41	6,4	15	30	0,840	4,4	5,7-5,5	5,9
Алюминий, $\rho = 2,7 \text{ г/см}^3$ , $\sigma = 20 - 30 \text{ кг/мм}^2$								
1	0,48	7,6	56	69	0,860	2,6	2,6-2,5	2,8
2	0,53	6,0	55	68	0,680	1,6	2,2-2,0	2,4
3	0,53	6,0	56	69	0,680	1,7	2,2-2,0	2,2
4	0,53	6,0	45	59	0,730	2,1	2,6-2,4	2,9
5	0,53	6,0	35	50	0,785	2,7	3,2-3,0	3,4
6	0,53	6,0	25	40	0,785	3,4	4,0-3,8	4,3

\* Отношение массы ВВ к массе пластины.

полученных при однокадровой регистрации процесса на рентгеноимпульсной установке. Определение скорости струи таким косвенным путем содержало в данном случае методическую ошибку, которая становилась существенной при малых начальных углах между пластинами. Суть ее заключена в том, что при малых углах наклона пластин длина участка установления процесса, на котором струя вовсе не образовывалась, становилась значительной и, следовательно, неучет этого факта дает существенно заниженные расчетные величины  $v_c^3$ .

Относительно расчета значений  $v_c^r$  и  $v_c^H$ , приведенных в табл. 6.4, отметим следующее. Из данных работы [57] видно, что для одинаковых конструкций разброс в измеренных значениях углов  $(\alpha - \alpha_0)$  поворота пластин приводит к разбросу до 20 % в значениях скорости  $U^3$  метания пластин, которая определяется по формуле (6.5.45) (см. опыты 1—4 и 5, 6 для стали и 2—6 для алюминия в табл. 6.4). В связи с этим при расчете значений  $v_c^H$  (5.44) и  $v_c^r$  (с  $\sigma = 0$ ) ис-



пользовались средние для каждой серии значения угла поворота и соответственно скорости метания. Расчеты показали, что в данных экспериментах следует принять  $\sigma = 40\text{—}50 \text{ кг/мм}^2$  для стали и  $\sigma = 20\text{—}30 \text{ кг/мм}^2$  для алюминия. Эти величины несильно отличаются от условного предела текучести соответственно малоуглеродистой стали (типа Ст. 20, Ст. 30) и алюминиевых сплавов (типа АМц, АМг) и практически совпадают с их пределом прочности (см., например, [58]). Возможно, что найденные значения следует трактовать как динамические пределы текучести этих материалов при данных скоростях деформирования.

Результаты, приведенные в табл. 6.4, показывают, что рассмотренная модификация гидродинамической теории довольно правдоподобно описывает влияние прочности материала пластин на скорость кумулятивных струй. Положительным фактором является то, что для учета прочности она оперирует с реальными механическими характеристиками материалов.

Рассмотрим снова плоскость  $(U, 2\alpha)$  возможных значений параметров соударения пластин (см. рис. 6.69). На ней можно теперь выделить область, в которой реальная прочность металлов должна оказывать влияние на скорость кумулятивных струй. Левая граница  $\alpha_3^*(U)$  этой области (кривая 3), на которой прочность ликвидирует струеобразование, определяется выражением, следующим из (6.5.40):

$$\alpha_3^* = \arccos \sqrt{2\sigma/\rho U^2}. \quad (6.5.46)$$

На рис. 6.69 кривые (6.5.46) построены с  $\sigma = 45 \text{ кг/мм}^2$  для стали и  $\sigma = 25 \text{ кг/мм}^2$  для алюминия. Интересно отметить, что для рассмотренных материалов критическая кривая  $\alpha_2^*(U)$  пересекает кривую  $\alpha_1^*(U)$  (см. рис. 6.69) практически в той самой точке, в которой в [52], в соответствии с оценками пороговых значений для устойчивого скачка, прекращался расчет кривой  $\alpha_1^*(U)$ .

Остановимся на вопросе о максимальной скорости кумулятивных струй. Очевидно, что максимальная скорость сплошных кумулятивных струй будет достигаться на кривой  $\alpha_2^*(U)$ , а пылевидных струй — на кривой  $\alpha_1^*(U)$ . Строго говоря, на самой кривой  $\alpha_1^*(U)$  струя не образуется, поэтому речь идет о некоторой, очень близкой окрестности этой кривой, и надо понимать, что

плотность пылевидной струи при этом близка к нулю. Расчетные значения максимальной скорости сплошных и пылевидных струй приведены в табл. 6.5 в зависимости от скорости соударения пластин (вектор скорости направлен по нормали к пластинам). Для каждого материала первая строка соответствует скорости пылевидных струй, которая определяется по формуле

$$v_c = \frac{U}{\sin \alpha} + \frac{U}{\operatorname{tg} \alpha} = U \operatorname{ctg}(\alpha/2)$$

при  $\alpha = \alpha_1^*$ , вторая строка при  $\alpha = \alpha_2^*$  относится к сплошным струям, максимальная скорость которых по гидродинамической модели определяется выражением, получаемым из этой формулы и (6.5.38):

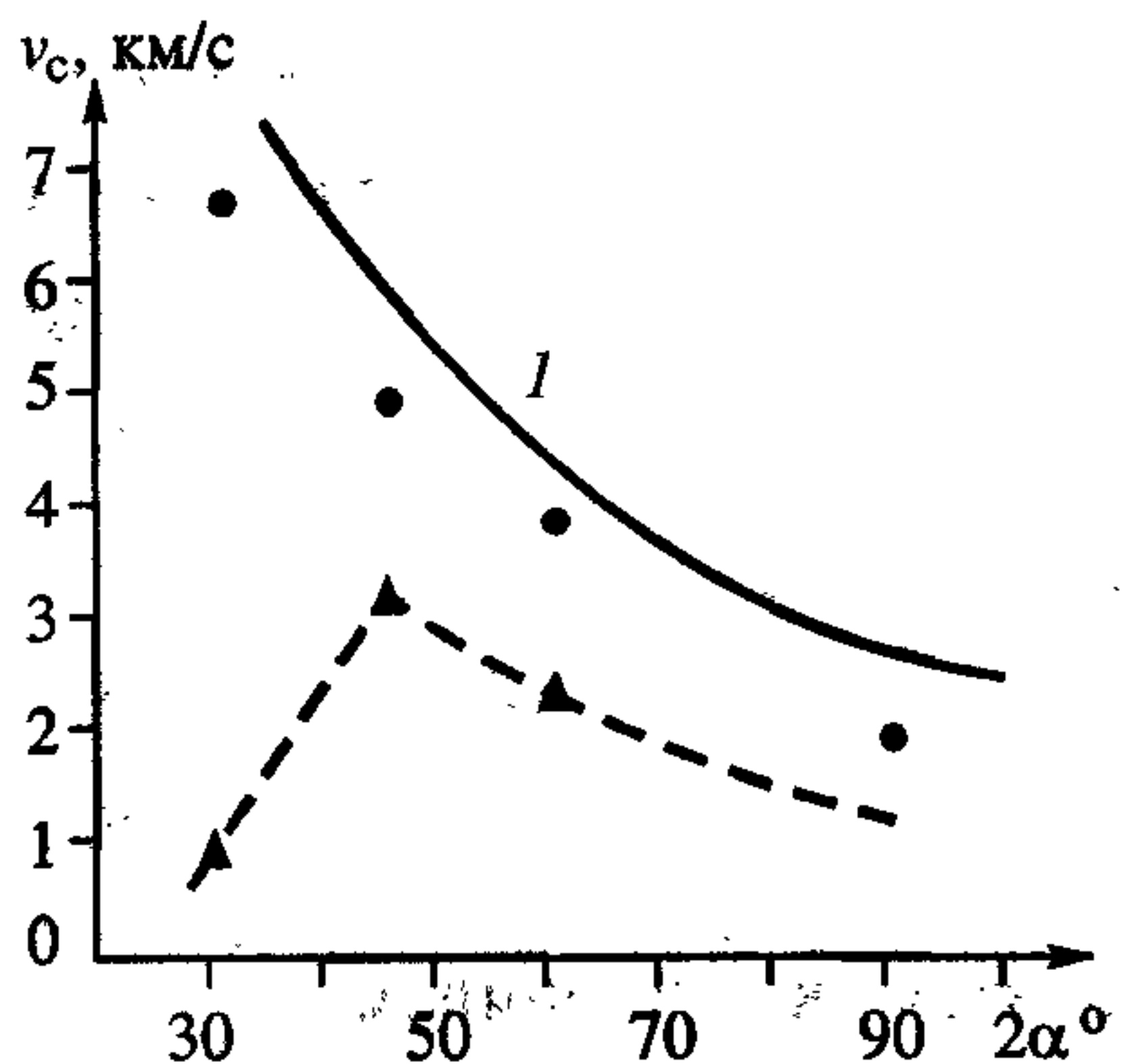
$$v_{\text{смах}} = c_0 + \sqrt{c_0^2 + U^2}. \quad (6.5.47)$$

Таблица 6.5

Расчетные значения максимальной скорости струи

Материал	U, км/с							
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0
Железо (мягкая сталь, $\rho = 7,85 \text{ г/см}^3$ , $c_0 = 5,5 \text{ км/с}$ , $\sigma = 50 \text{ кг/мм}^2$ )	12,5	14,9	17,2	19,5	21,8	24,2	28,8	33,4
	11,1	11,1	11,2	11,3	11,5	11,8	12,3	12,9
	9,3	10,7	11,0	11,3	11,5	11,8	12,3	12,9
Алюминий ( $\rho = 2,7 \text{ г/см}^3$ , $c_0 = 5,25 \text{ км/с}$ , $\sigma = 20 \text{ кг/мм}^2$ )	15,6	17,6	19,7	21,8	23,9	25,9	30,0	34,1
	10,5	10,6	10,7	10,9	11,1	11,3	11,9	12,5
	8,6	10,2	10,5	10,8	11,0	11,2	11,9	12,5
Медь ( $\rho = 8,9 \text{ г/см}^3$ , $c_0 = 3,95 \text{ км/с}$ )	12,8	14,9	17,1	19,2	21,2	23,2	27,4	31,0
	7,9	8,0	8,2	8,4	8,6	8,9	9,5	10,3
Свинец ( $\rho = 11,3 \text{ г/см}^3$ , $c_0 = 2 \text{ км/с}$ )	7,6	9,8	12,0	14,2	16,0	17,8	19,6	21,4
	4,1	4,2	4,5	4,8	5,2	5,6	6,4	7,4





**Рис. 6.70.** Скорость кумулятивной струи в зависимости от угла образующей поверхности облицовки и ее начальной температуры.

Ст. 30ХГА;  $r = 0,74$ ; треугольники —  $T = 25$  °C, точки —  $T = 800$  °C.

ниями (6.5.43) и (6.5.44). Можно исключить механизм диссипации энергии, связанный с преодолением сил прочности материала пластин. Один из таких способов состоит в предварительном нагреве джоулевым теплом облицовки перед взрывом [60]. Результаты эксперимента по измерению скорости струи плоского кумулятивного заряда контактными датчиками представлены на рис. 6.70. Здесь  $r$  — отношение масс ВВ к массе метаемой пластины. Видно, что с ростом температуры облицовки скорость струи стремится к величине, определяемой гидродинамической теорией кумуляции [44, 46] — кривая 1. Так как прочностные характеристики металлов зависят от температуры и уменьшаются с ее ростом, то согласно соотношениям (6.5.43)—(6.5.44) скорость кумулятивной струи должна расти и при  $\sigma \rightarrow 0$  совпадать со скоростью, определяемой гидродинамической теорией кумуляции. Для медной облицовки при  $T = 800$  °C экспериментальные точки практически ложатся на кривую зависимости скорости струи  $v_c$  от угла соударения  $2\alpha$ .

### 6.6. Метание продуктами детонации ВВ облицовок кумулятивных зарядов

Воспользуемся выводами известной работы Р. Шалля [59] о влиянии материала облицовки на величину кратера в преграде при ударе кумулятивной струей: “При взаимодействии струи с преградой глубина образующегося при

Третья строка относится к сплошным струям, скорость которых определяется по формулам (6.5.39) и (6.5.43), т.е. с учетом влияния прочности материалов. Из табл. 6.5 видно, что для реально достижимых скоростей метания пластин максимальная скорость сплошных струй лишь несколько превышает величину  $2c_0$ . Этот результат согласуется с качественным выводом, сделанным в работе [59].

Весьма интересной является возможность управлять процессом диссипации энергии при косом соударении пластин и таким образом влиять на скорость кумулятивной струи, которая дается соотноше-

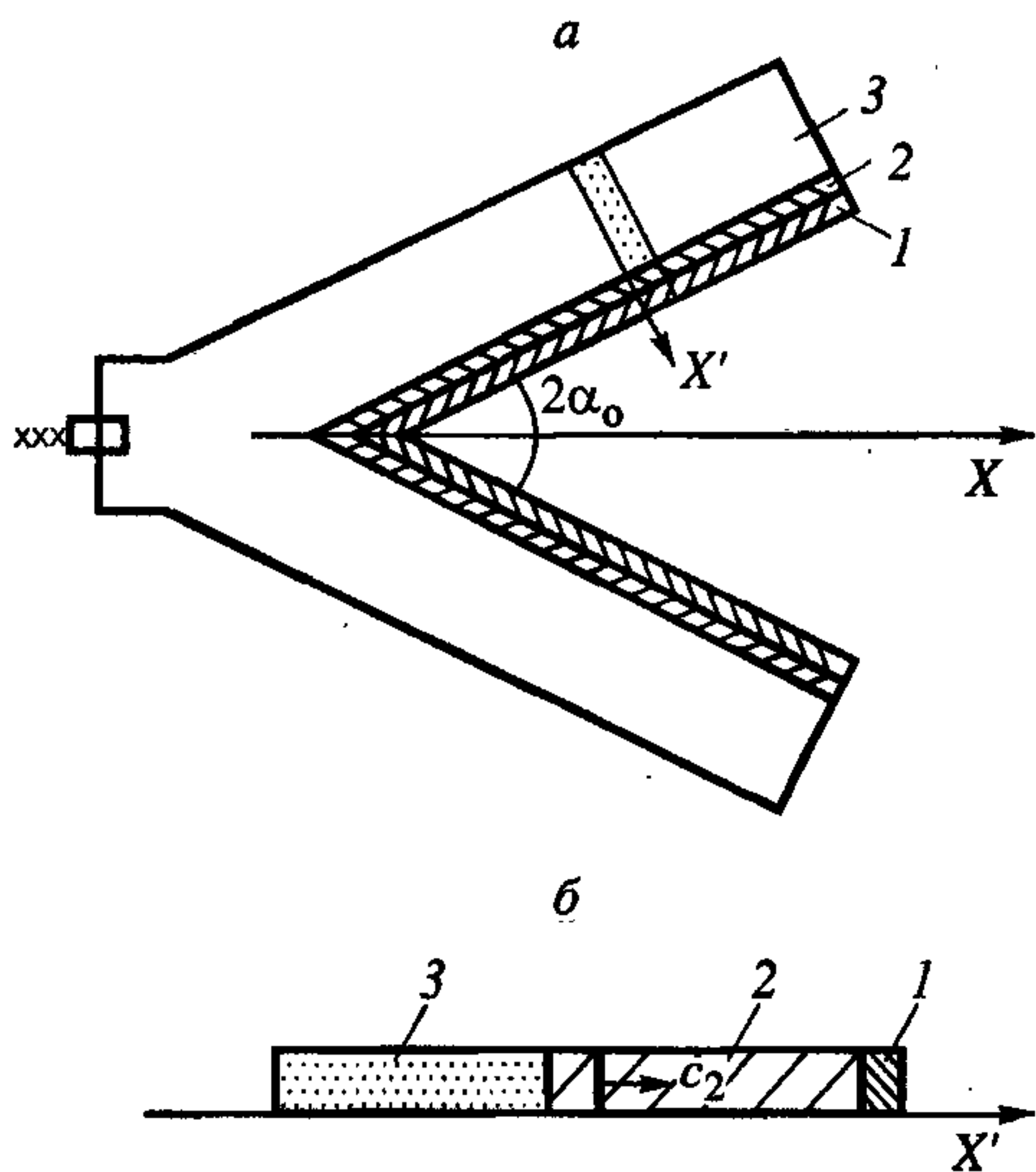
этом кратера зависит от формы заряда и кумулятивной выемки, размеров заряда, состава ВВ, геометрии и свойств облицовки, расстояния до преграды и материала, из которого она изготовлена. Достигаемая глубина поражения преграды существенно зависит от материала, из которого изготовлена облицовка. Тяжелые пластичные металлы, в частности графцентрированные с кубической решеткой группы меди и некоторые сплавы, обладают высокой поражающей способностью. Они образуют сплошные струи, которые при большом удлинении (примерно в 10 раз по сравнению с исходной длиной) не разрываются и сохраняют высокую плотность. Другие металлы, такие, например, как железо, цинк, на начальных стадиях образуют сплошные струи, которые в отличие от описанных выше при растяжении разрываются намного раньше. В кумулятивных зарядах с облицовками из таких металлов поражающее действие достигается при меньших расстояниях до преграды и имеет меньшую величину, чем в случае более пластичных металлов. Хрупкие металлы, такие, например, как вольфрам и титан, а также с высокой пористостью, получаемые спеканием, вообще не образуют сплошных струй, а формируют струи, состоящие из отдельных твердых частиц. Поражающая способность таких струй по сравнению со сплошными значительно ниже”.

Таким образом, можно констатировать, что поражающая способность кумулятивных зарядов с металлическими облицовками сильно зависит от материала облицовок. Рассмотрим, какие физические процессы протекают в материале облицовки при ее метании взрывом заряда ВВ, обратив основное внимание на движение неоднородных облицовок и на вопросы диссипации энергии.

### **6.6.1. Слоистые облицовки**

Так как струя образуется из внутренней части облицовки, а пест, не вносящий вклада в пробивную способность заряда, — из наружной, то в принципе возможно построить кумулятивный заряд со слоеной облицовкой. Чтобы струя обладала хорошей проникающей способностью, внутренний слой облицовки, естественно, должен быть медным. Наружный слой может быть из любого другого металла. Например, для перфораторных кумулятивных зарядов, используемых для торпедирования нефтяных или газовых скважин, необходимо, чтобы пест не забивал канал (каверну), сделанную в породе и обсадных трубах кумулятивной струей. Поэтому слой облицовки, образующий пест, должен со-





**Рис. 6.71.** Схема кумулятивного заряда с биметаллической облицовкой и выделенного модельного участка.

Поясн. см. в тексте.

стоять из материала, который под воздействием продуктов взрыва может сгорать или разрушаться [59].

Рассмотрим картину явления при работе клиновидного кумулятивного заряда с биметаллической облицовкой, изображенного на рис. 6.71, где 1 — внутренний слой облицовки, 2 — наружный слой облицовки, 3 — заряд ВВ. Выделим двумя близкими сечениями, нормальными к поверхности пластин, участок, содержащий облицовку и заряд ВВ (рис. 6.71, б). Пусть толщина внутреннего слоя облицовки значительно меньше наружного, который в свою очередь меньше толщины слоя ВВ.

Проведем анализ картины движения и циркуляции ударных волн в слоях облицовки после прихода в выделенные сечения фронта детонационной волны. Пусть при распаде разрыва на границе 2—3 в слое 2 облицовки распространяется ударная волна с давлением на фронте  $P_*$  и скоростью, равной скорости звука  $c_2$ . В акустическом приближении  $(P, u)$ -диаграмма с центром  $P_0, u_0$  в общем случае имеет вид  $P \pm P_0 = \rho c(u \pm u_0)$ .

Поэтому для ударной волны в слое 2  $P_* = \rho_2 c_2 u_*$ . При достижении ударной волной границы раздела 1—2 слоев облицовки по наружному слою 2 пойдет отраженная волна, а по внутреннему 1 — преломленная, которая, достигнув свободной поверхности 1—0, отразится от нее, затем снова станет взаимодействовать с контактной границей раздела 1—2 и т.д.

Рассмотрим случай  $R_1 < R_2$ , где  $R_i = \rho_i c_i$ . На  $(P, u)$ -диаграмме (рис. 6.72) возможные состояния материалов 1 и 2 облицовки есть прямые  $P_1$  и  $P_2$ , выходящие из точки 0. При выходе ударной волны  $(P_*, u_*)$  на поверхность раздела материалов в обе стороны от контактной поверхности пойдет волна с параметрами  $P_a, u_a$  ( $a$  — точка пересечения прямой  $\tilde{P}_2$ , которая симметрична прямой  $P_2$  относительно  $u = u_*$ , и прямой  $P_1$ :  $\tilde{P}_2 - P_* = R_2(u_* - u)$ ,  $P_1 = R_1 u$ ). Откуда

при  $P_1 = \tilde{P}_2 = P_a, u = u_a$  получаем

$$\begin{aligned} u_a &= \frac{2R_2}{R_1 + R_2} u_*, \\ P_a &= \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2} u_*. \end{aligned} \quad (6.6.1)$$

Налево в слой 2 распространяется волна разрежения от поверхности раздела 1—2, направо — ударная волна. Далее волна с параметрами  $P_a, u_a$  выходит на свободную поверхность облицовки 0—1 и от нее идет волна разрежения — точка N, которая есть точка пересечения прямых  $P=0$  и  $\tilde{P}_1$ , где  $\tilde{P}_1$  — прямая, симметричная прямой  $P_1$  относительно прямой  $u = u_a$ :

$$\tilde{P}_1 - P_a = -R_1(u - u_a). \quad (6.6.2)$$

Из соотношения (6.6.2) с учетом (6.6.1) получаем величину массовой скорости во внутреннем слое 1 облицовки

$$u_1^N = \frac{P_a}{R_1} + u_a = 2u_a = \frac{4R_2}{R_1 + R_2} u_*. \quad (6.6.3)$$

При достижении волной разрежения N поверхности раздела 1—2 между слоями облицовки слой 1 целиком движется со скоростью  $u_1^N$ . Так как  $u_1^N > u_a$  ( $u_a$  — скорость слоя 2 в этот момент времени), то внутренний слой облицовки отделяется от внешнего, и по слою 2 пойдет волна разрежения, которая вызовет в материале 2 состояние, описываемое точкой L — пересечением прямой  $P=0$  с прямой  $\tilde{P}_2 = P_* + R_2(u_* - u)$ . Тогда для  $\tilde{P}_2 = 0$  и  $u = u_2^L$  следует

$$u_2^L = \frac{P_*}{R_2} + u_* = 2u_*. \quad (6.6.4)$$

Сравнивая (6.6.3) и (6.6.4) и имея в виду, что  $R_1 > R_2$ , получаем  $u_2^L < u_1^N$ . Это означает, что в процессе схлопывания в биметаллической облицовке, у которой акустическое сопротивление внутреннего слоя меньше акустического

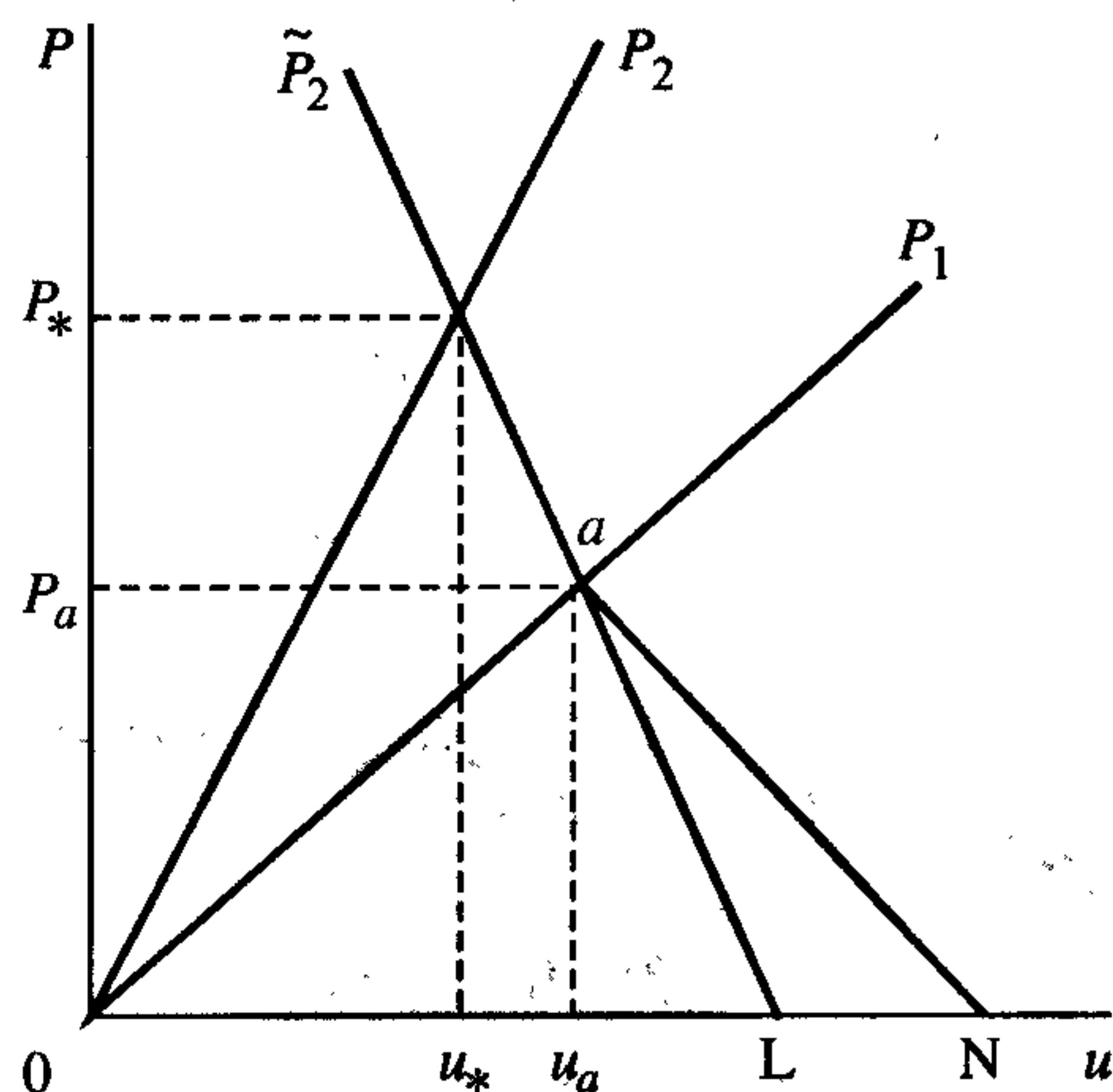


Рис. 6.72. Возможные состояния среды на  $(P, u)$ -диаграмме, когда акустическое сопротивление внутреннего слоя меньше наружного  $R_1 < R_2$ .



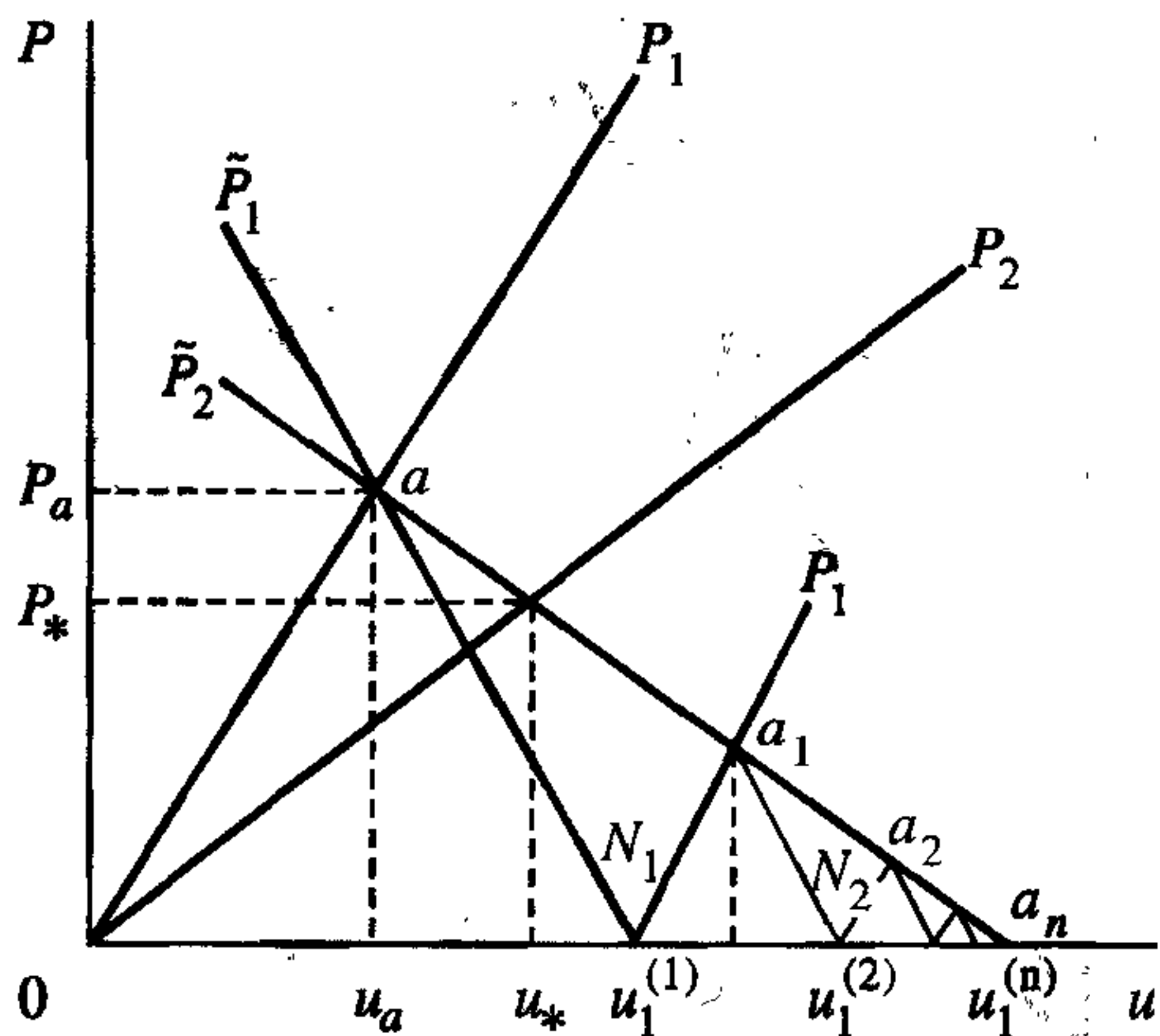


Рис. 6.73. Возможные состояния среды на  $(P, u)$ -диаграмме при  $R_1 > R_2$ .

Далее ударная волна достигает свободной поверхности 0—1 облицовки, и материал слоя 1 за фронтом волны разрежения переходит в состояние  $N_1$ :

$$P = 0, \quad u = u_1^{(1)} : u_1^{(1)} = \frac{P_a}{R_1} + u_a = 2u_a. \quad (6.6.5)$$

При достижении волной разрежения (6.6.5) поверхности 1—2 появляется состояние  $a_1$  — точка пересечения прямых  $\bar{P}_1$  и  $\tilde{P}_2$ . Координаты точки  $a$  на  $(P, u)$ -диаграмме есть

$$u_{a1} = u_a + \frac{2R_1}{R_1 + R_2} u_a, \quad P_{a1} = P_a - \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2} u_a, \quad (6.6.6)$$

где  $u_a$  и  $P_a$  определены, как и прежде, соотношениями (6.6.1). Далее волна с параметрами (6.6.6) достигает свободной поверхности 0—1, отражается и вырабатывается новое состояние  $N_2$  за фронтом волны разрежения:

$$u_1^{(2)} = u_1^{(1)} + \frac{2(R_1 - R_2)}{R_1 + R_2} u_a, \quad (6.6.7)$$

где  $u_1^{(1)}$  выражается соотношением (6.6.5). Из соотношения (6.6.7) следует, что  $u_1^{(2)} > u_1^{(1)}$  для  $R_1 > R_2$ , т.е. происходят непрерывное ускорение материала внутреннего слоя облицовки и подкачка в него кинетической энергии из внешнего

сопротивления внешнего, происходит расслоение последней. Скорость и энергия внутреннего слоя облицовки определяется захваченным импульсом.

Теперь рассмотрим случай  $R_1 > R_2$ , когда акустическое сопротивление внутреннего слоя больше наружного (рис. 6.73). Так же, как и в предыдущем случае, из состояния  $P_*$ ,  $u_*$  при взаимодействии ударной волны с поверхностью 1—2 получаем состояние  $a$ , опреде-

слоя. Дальнейший ход  $(P, u)$ -диаграмм показан на рис. 6.73 пунктирными линиями. Видно, что максимальная скорость внутреннего слоя 1 в пределе достигает скорости, которую имеет слой 2 при переходе из начального состояния

$P_*, u_*$  в состояние  $P=0, u=u_2^{(L)}$ . Это состояние определяется пересечением

прямых  $\tilde{P}_2$  и  $P=0$ :  $u_2^{(L)} = \frac{P_*}{R_2} + u_* = 2u_*$ , где надо учитывать, что  $u_*$  уже

другое, чем в случае  $R_1 < R_2$ . Можно показать, что

$$u_1^{(n)} = 2u_* \frac{R_2}{R_1} \prod_{k=1}^n \frac{2^k}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^k}.$$

Отсюда следует, что для больших значений  $n$   $u_1^{(n)} \rightarrow u_2 = 2u_*$ . Таким образом, внутренний и внешний слои облицовки схлопываются в контакте друг с другом как единое целое, что, несомненно, должно сказываться положительно на параметрах кумулятивной струи.

Для взрывчатого вещества  $(P, u)$ -диаграмму при условии, что  $u \ll D$ , можно представить в виде

$$P_{\text{ВВ}} = \frac{16}{27} \rho_{\text{ВВ}} D^2 (1 - 3u/D),$$

где  $u$  — массовая скорость продуктов детонации,  $D$  — скорость детонации. Тогда начальные параметры ударной волны  $P_*, u_*$  во внешнем слое 2 облицовки определяются следующим образом:

$$u_* = \frac{16}{27} D \left( \frac{16}{9} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_{\text{ВВ}} D} \right)^{-1}, \quad P_* = \rho_2 c_2 u_*.$$

Отсюда для заряда ВВ, состоящего, например, из сплава тротила с гексогеном ТГ 50/50, плотностью  $\rho_{\text{ВВ}} = 1,65 \text{ г/см}^3$  и имеющего скорость детонации  $D = 7,5 \text{ км/с}$ , ударная волна в чисто медной облицовке имеет параметры  $u_* = 0,96 \text{ км/с}$ ,  $P_* = 340 \text{ кбар}$ . Поэтому скорость метания облицовки получается равной  $u_2^{(1)} = 2u_* = 1,92 \text{ км/с}$ . Для биметаллической облицовки, внешний слой которой алюминиевый ( $\rho_2 = 2,7 \text{ г/см}^3$ ,  $c_2 = 5,5 \text{ км/с}$ ), а внутренний медный ( $\rho_1 = 8,9 \text{ г/см}^3$ ,  $c_1 = 4 \text{ км/с}$ ) параметры ударной волны в слое 2  $P_* = 220 \text{ кбар}$ ,  $u_* =$



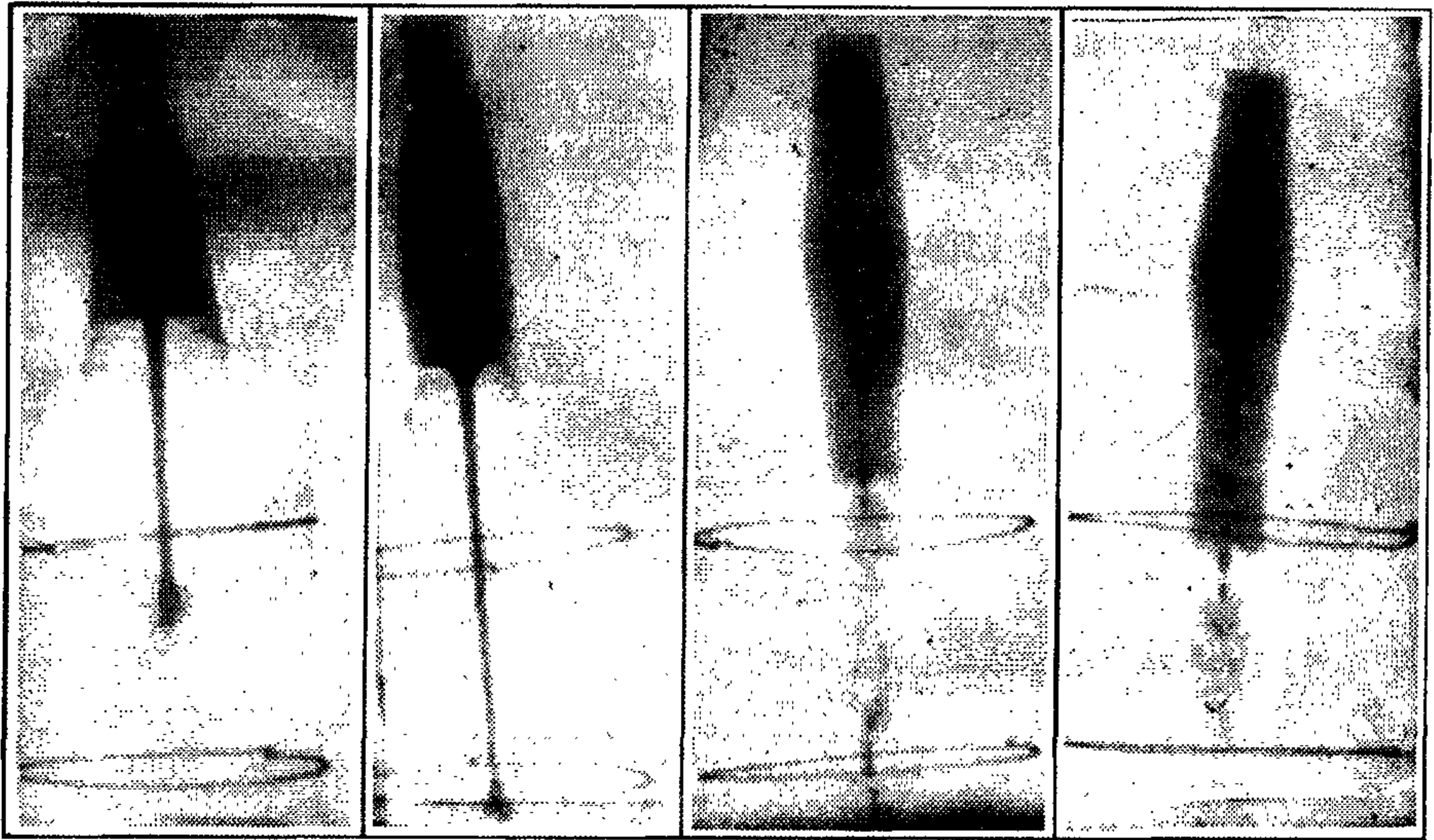


Рис. 6.74. Рентгенограмма процесса схлопывания биметаллической (медь, дюралюминий) кумулятивной облицовки и струеобразования при  $R_1 > R_2$  на моменты времени: 28, 33, 63, 83 мкс (слева направо).

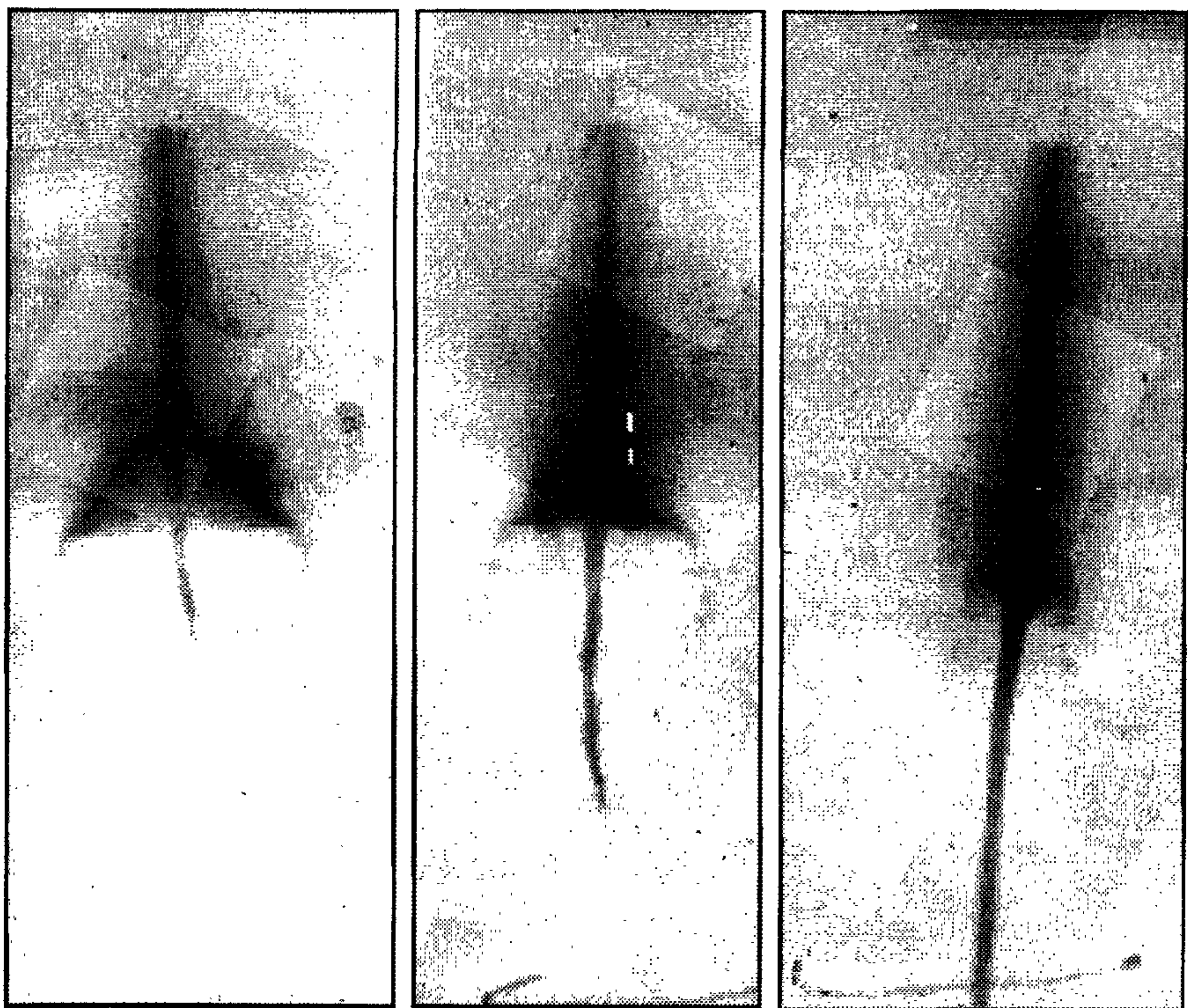


Рис. 6.75. Рентгенограмма процесса струеобразования из трехслойной (медь, дюралюминий, плексиглас) облицовки.  
Слева направо 23, 27, 37 мкс.



$= 1,49$  км/с, что дает окончательно в слое  $1$  величину скорости метания  $u_1^{(1)} = 2u_* = 2,98$  км/с.

Попытки создания кумулятивного заряда с биметаллической облицовкой медь  $1$  — сталь  $2$  не имели успеха из-за снижения пробивного действия заряда. Рассмотренная здесь схема метания сложной оболочки для случая  $R_1 < R_2$  дает объяснение этому факту.

На рис. 6.74—6.76 представлены импульсные рентгенограммы процесса схлопывания слоистых облицовок и струеобразования для случая  $R_1 > R_2$ . В процессе схлопывания биметаллической (слой  $1$  — медный, слой  $2$  — свинцовый) облицовки (см. рис. 6.76) свинцовый пест взрывается.

Сравнительные эксперименты, проведенные с кумулятивными зарядами, имеющими медные облицовки и биметаллические (медь—дюралюминий), когда в каждом сечении облицовки сохраняется ее масса, показали, что проникающая способность кумулятивных зарядов с биметаллическими облицовками такая же, как и для зарядов со сплошными медными.

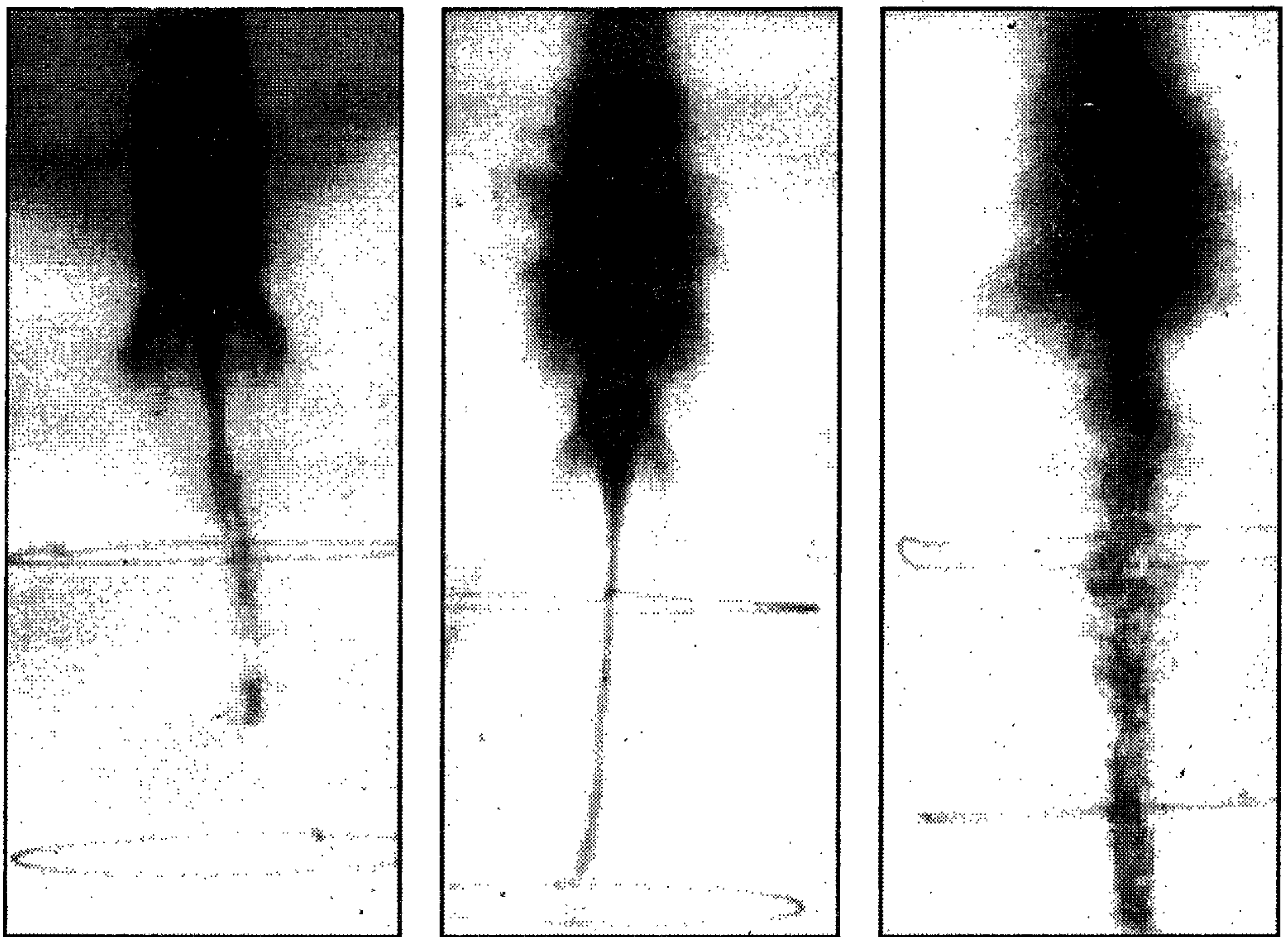


Рис. 6.76. Рентгенограмма процесса струеобразования из двухслойной (медь, свинец) облицовки.



### 6.6.2. Влияние процесса диссипации энергии на метание облицовок и характер кумулятивного течения

Основное различие в работе плоских кумулятивных зарядов и зарядов с осесимметричными облицовками состоит в том, что в процессе метания взрывом клиновидная облицовка не претерпевает сколько-нибудь значительных деформаций. Осесимметричная облицовка, обжимаемая продуктами детонации ВВ, испытывает значительные деформации, при которых происходит скольжение слоев оболочки друг относительно друга. При этом включаются механизмы диссипации энергии, которые существенным образом влияют на процесс схождения оболочки к оси симметрии. Для зарядов с плоскими облицовками диссипация энергии при их ускорении взрывом практически отсутствует даже при метании скользящей детонационной волной, так как не наблюдается проскальзывания слоев в пластине, на что указывают запрессованные в пластину индикаторные проволочки [61]. При косом соударении пластин искажение формы проволочек достигает значительных величин, особенно вблизи поверхности соударения. Значит, диссипация механической энергии возможна только на стадии соударения и струеобразования в плоских зарядах.

В разделе 6.1 показано на примере обжатия взрывом цилиндрических оболочек, что наиболее точно процесс схождения оболочки к оси симметрии описывается моделью ньютоновской жидкости [18]. Следовательно, процесс диссипации энергии из-за действия вязких сил при схлопывании осесимметричных оболочек должен приводить к различию в образующихся кумулятивных струях в зависимости от вида материала оболочки. Кроме того, в рамках этой модели показано, что можно подобрать параметры заряда и цилиндрической оболочки такими, чтобы вся начальная кинетическая энергия оболочки полностью трансформировалась в тепловую энергию и оболочка остановилась на некотором радиусе  $R^*$ .

Известно, что для приближенного расчета кумулятивного заряда коническую облицовку можно разбить сечениями, перпендикулярными оси конуса на ряд колец, и считать, что они движутся независимо друг от друга.

Для инерционного движения кольца вязкой несжимаемой жидкости выше (раздел 6.1) получено уравнение движения для внутреннего радиуса  $R$  цилиндрической оболочки

$$R\dot{R} = (R\dot{R} + 4\mu) \frac{\sqrt{\ln(r_{10}/R_0)}}{\sqrt{\ln(r_1/R)}} - 4\mu, \quad (6.6.8)$$

где  $r_1$  — наружный радиус,  $r_{10}$  — наружный радиус при  $t=0$ ,  $R_0$  и  $\dot{R}_0$  радиус внутренней поверхности оболочки и ее скорость при  $t=0$ . Из условия несжимаемости оболочки следует, что

$$r_1^2 - R^2 = r_{10}^2 - R_0^2 = A^2. \quad (6.6.9)$$

Удельная мощность сил диссипации есть

$$N = \frac{dE}{dt} = 4\mu \frac{(R\dot{R})^2}{r^4},$$

где  $r$  — независимая переменная ( $R \leq r \leq r_1$ ),  $E$  — удельная энергия. Из несжимаемости оболочки следует, что  $r^2(t) = R^2(t) + r_0^2 - R_0^2$ , где  $r_0$  — начальный радиус частицы, находящейся в толще оболочки ( $R_0 \leq r_0 \leq r_{10}$ ). Отсюда находим в адиабатическом приближении для частицы  $r_0$  приращение температуры:

$$\Delta T = \frac{4\mu}{c} \int_0^t \frac{(R\dot{R})^2 dt}{(R^2 + r_0^2 - R_0^2)^2}, \quad (6.6.10)$$

где  $c$  — удельная теплоемкость оболочки. Можно найти приближенное решение уравнения (6.6.10), заметив, что на начальной стадии схлопывания  $\dot{R}$  мало отличается от  $\dot{R}_0$ . Тогда соотношение (6.6.10) примет вид

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 = \frac{4\mu}{c} \dot{R}_0^2 \int_0^t \frac{R^2 dt}{(R^2 + r_0^2 - R_0^2)^2} + \frac{4\mu}{c} \int_0^t \frac{(R\dot{R})^2}{(R^2 + r_0^2 - R_0^2)^2}. \quad (6.6.11)$$

Первый интеграл  $\Delta T_1$  легко находится, если положить  $R = R_0 - \dot{R}_0 t$ :

$$\Delta T_1 = \frac{2\mu \dot{R}_0}{c} \left[ \frac{R_*}{R_*^2 + r_0^2 - R_0^2} - \frac{R_0}{r_0^2} + \frac{1}{\sqrt{r_0^2 - R_0^2}} \operatorname{arctg} \frac{(R_0 - R_*) \sqrt{r_0^2 - R_0^2}}{r_0^2 - R_0^2 + R_0 R_*} \right]. \quad (6.6.12)$$

Для вычисления  $\Delta T_2$ , когда внутренняя поверхность кольца приближается к оси ( $R \rightarrow 0$ ), можно разложить знаменатель соотношения (6.6.8) в ряд и, используя (6.6.9), получить с точностью до  $\varepsilon^2 = (R^2/A^2)^2$  его значение:  $(1/2) \ln(A^2/R^2) = (4/3)(1 - 3\varepsilon)$ . Тогда из уравнения (6.6.8) имеем



$$R^2 = \left( R_*^2 + \frac{b}{a} \right) \exp(-a\tau) - \frac{b}{a}, \quad (6.6.13)$$

где  $a = (2,598/A^2)(R_0\dot{R}_0 + 4\mu)(\ln(r_{10}/R_0))^{1/2}$ ,  $b = 0,667A^2a - 8\mu$ ,  $\tau = t_* - t$ . Из соотношений (6.6.11), (6.6.13) находим  $\Delta T_2$ :

$$\Delta T_2 = -\frac{a\mu}{c} \left( \frac{B}{\exp(-a\tau) + B} - \frac{B}{1+B} + \ln \left( \frac{\exp(-a\tau) + B}{1+B} \right) \right), \quad (6.6.14)$$

где  $B = (r_0^2 - R_0^2 - b/a)/(R_*^2 + b/a)$ . Результаты расчета распределения температуры по толщине медных и железных колец при  $R_* = 0,3R_0$  представлены в табл. 6.6 ( $\Delta T_1$ ), а для медных при  $R = 0,1R_0$  представлены в табл. 6.7 ( $\Delta T_2$ ). Начальная скорость  $\dot{R}_0 = 10^5$  см/с, а также начальные геометрические размеры  $R_0 = 1$  см,  $r_{10} = 1,1$  см для обоих колец одинаковы. Отличаются они только кинематическими коэффициентами вязкости  $\mu$ , величины которых для меди при начальной скорости деформации  $\approx 10^5$  1/с согласно [18, 62] составляют  $(0,7-1,0) \cdot 10^4$  см<sup>2</sup>/с, а для железа —  $(3,8-5,1) \cdot 10^4$  см<sup>2</sup>/с [63]. Скорость деформации для радиального схождения цилиндрической оболочки определяется

выражением  $\dot{\epsilon} = \frac{R_0\dot{R}_0}{\delta_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{A^2 + R^2}} \right)$ , где  $\delta_0 = r_{10} - R_0$ ,  $A^2 = r_{10}^2 - R_0^2$ . При

расчетах теплоемкость меди бралась равной 0,382 Дж/(г·град.), железа — 0,64 Дж/(г·град.).

Таблица 6.6

Распределение температуры по толщине медных и железных колец

( $R_0 = 1$  см,  $r_{10} = 1,1$  см,  $\dot{R}_0 = 10^5$  см/с,  $t_* = 7$  мкс)

Характеристика	$r_0$ , см							
	1,00	1,01	1,02	1,03	1,05	1,07	1,09	1,1
$r(t)$ , см	0,3	0,33	0,36	0,39	0,44	0,48	0,53	0,55
Сu, $\Delta T_1$ , К	1710	1420	1210	1050	830	680	550	510
Сu, $H$ , Дж/г	650	540	460	400	320	260	210	195
Fe, $\Delta T_1$ , К	8450	7000	5990	5200	4110	3370	2730	2540
Fe, $H$ , Дж/г	5410	4480	3830	3330	2630	2160	1750	1630

Распределение температуры по толщине медных колец  
 ( $R_0 = 1$  см,  $r_{10} = 1,1$  см,  $\dot{R}_0 = 10^5$  см/с,  $t = 9,8$  мкс,  $R = 0,1 R_0$ )

Характеристика	$r_0$ , см							
	1,00	1,01	1,02	1,03	1,05	1,07	1,09	1,1
$r(9,8)$ , см	0,1	0,17	0,22	0,26	0,33	0,39	0,45	0,47
Cu, $\Delta T_2$ , К	3990	1340	700	450	230	140	90	80
Cu, $\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2$ , К	5700	2760	1910	1500	1060	820	640	590
Cu, $H$ , Дж/г	2180	1050	730	570	405	310	240	225

Разогрев, обусловленный вязкостью, характеризуется большими неоднородностями диссипации кинетической энергии в тепловую. Наблюдается неравномерный разогрев материала оболочки по толщине, причем максимальный разогрев оболочки достигается на ее внутренней поверхности, и неравномерность разогрева оболочки увеличивается по мере ее схождения к центру.

Для конических облицовок с достаточно большим углом раствора результаты расчета имеют скорее качественный характер, так как скорость обжатия конической облицовки направлена не по нормали к ее оси, а движение будет двумерным.

Из приведенных выше расчетов следует, что скорость роста температуры для медной оболочки  $3 \cdot 10^8$  К/с, для железной —  $10^9$  К/с, для частиц оболочек  $r_0 = 1,01$  см.

В работе [64] показано, что при временах нагрева 0,1—10 мкс возможен перегрев металлической жидкости вплоть до предельно устойчивых состояний, определяемых спинодалью. В реальных условиях перегрев жидкости затруднен тем, что жидкость содержит готовые центры (например, газовые включения). Однако в случае большой мощности подвода энергии, когда доля вещества, испарившегося через свободную поверхность и через поверхность зародышей, невелика, возможен перегрев жидкости и близкий подход к спинодали, которая является границей термодинамической устойчивости существования метастабильной жидкости, соответствующей переходу жидкости в пар. Оценки в [64] показывают, что перегрев метастабильной жидкости, близкий к предельному, возможен при  $T \geq 10^8$  К/с.

При приближении к спинодали из области метастабильной жидкости



флуктуации резко возрастают. При пересечении спинодали происходит потеря термодинамической устойчивости жидкой фазы, и она через взрыв переходит в двухфазное состояние. Здесь переход жидкости в пар в основном определяется не кинетикой испарения через межфазную поверхность, а кинетикой гомогенного образования зародышей пара. Возникновение такого зародыша возможно благодаря флуктуациям в жидкости.

В то же время метастабильная жидкость вплоть до  $T/T_c = 0,88$  ( $T_c$  — критическая температура) обладает значительной устойчивостью по отношению к флуктуациям, которые лишь при приближении к спинодали резко возрастают. При  $T/T_c < 0,88$  переход метастабильной жидкости в двухфазное состояние определяется механизмом гетерогенного образования и роста зародышей пара.

При заданном давлении перегретая жидкость обладает избыточной энтальпией. Для точки спинодали

$$H_s - H_0 = \int_{T_0}^{T_s} C_p dT,$$

где  $H_0$  — энтальпия в точке кипения  $T_0$ ,  $C_p$  — теплоемкость жидкости в метастабильной области. При взрывном переходе эта энтальпия идет на частичное испарение жидкости, отчего температура системы понижается. Доля жидкости, обратившейся в пар, есть  $\beta_s = (H_s - H_0)/\lambda_0$ , а  $\lambda_0$  — теплота парообразования при  $T_0$ . Таким образом, фазовый взрыв характеризуется тепловым эффектом  $H_s - H_0$  и паровыделением  $\beta_s$ .

Расчеты показывают, что для медного кольца (см. табл. 6.6, 6.7) даже внутренний слой не нагревается до температуры спинодали  $T_s$ , которая согласно уравнению спинодали по Фюрту имеет вид  $P/P_c = 10T/T_c - 9$ ; и при  $P = 0$   $T_s = 0,9$ ,  $T_c = 4900$  К. Лишь только при радиусе  $R = 0,1 R_0$ , который близок к радиусу остановки медного цилиндра  $R^* = 0,05 R_0$  [18], температура внутренней поверхности и прилегающей к ней окрестности превышает температуру на спинодали — 5700 К (см. табл. 6.7). При этом возможно взрывное испарение этого слоя с тепловым эффектом  $H - H_0 = 1,1$  кДж/г (см. табл. 6.7) и газовыделением  $\beta = 0,166$ . Для железного цилиндра даже на стадии движения с постоянной скоростью  $\dot{R} = 10^5$  см/с (см. табл. 6.6) слой толщиной  $1 \text{ см} < r_0 < 1,02 \text{ см}$



имеет уже температуру выше, чем температура  $T_s$  спинодали,  $T_s = 5700$  К. Для внутреннего слоя железного цилиндра параметры взрыва  $H - H_0 = 3,4$  кДж/г, а  $\beta = 0,54$ . Тепловой эффект взрыва сравним с эффектом взрыва тротила, который равен 4,2 кДж/г.

Таким образом, для цилиндрического или слабokonического схождения материала облицовки к оси возможен и фазовый взрыв (рис. 6.77). На рис. 6.77 представлена медная трубка ( $r_{01} = 1$  см,  $R_0 = 0,9$  см,  $\dot{R}_0 = 1$  км/с), обжимаемая слоем ТГ 50/50 в режиме скользящей детонации. Измеренный угол схождения облицовки к оси симметрии  $2\alpha$  составляет около  $15^\circ$ . Внутри трубки отчетливо видны отдельные жидкие фрагменты внутренних слоев оболочки, образованные после взрыва этих слоев.

Можно предположить, что конические облицовки с углом раствора  $30^\circ$  и более нагреваются меньше, чем цилиндрические, и потому при их обжатии не наступает фазового взрыва. При этом стальные должны нагреваться значительно сильнее медных. В то же время в случае стальной струи возможен плавный переход в двухфазное состояние через механизм образования и роста зародышей пара, приводящий в конечном счете к разуплотнению материала струи.

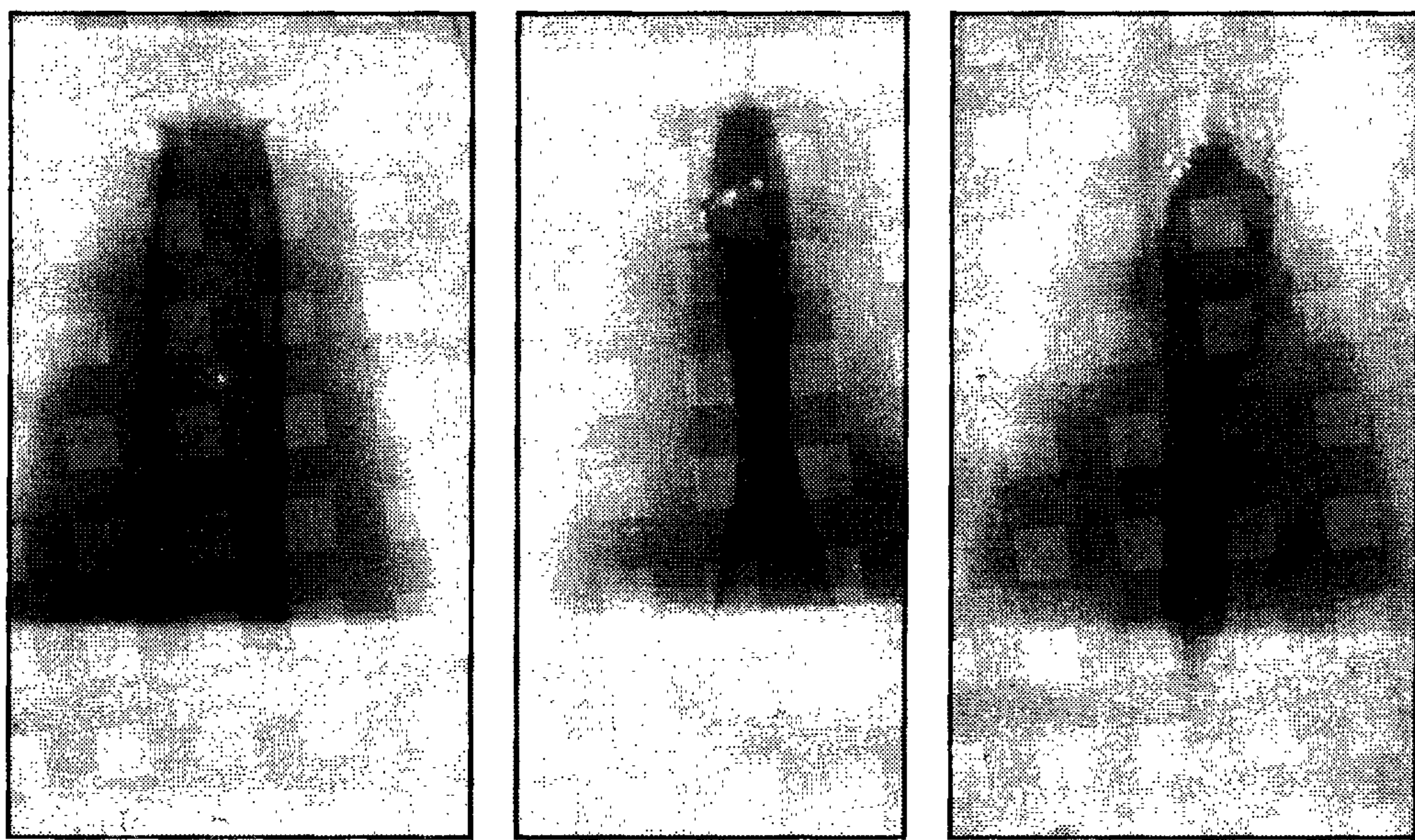


Рис. 6.77. Фазовый взрыв в условиях слабokonического схлопывания медной трубки.

Поясн. см. в тексте.



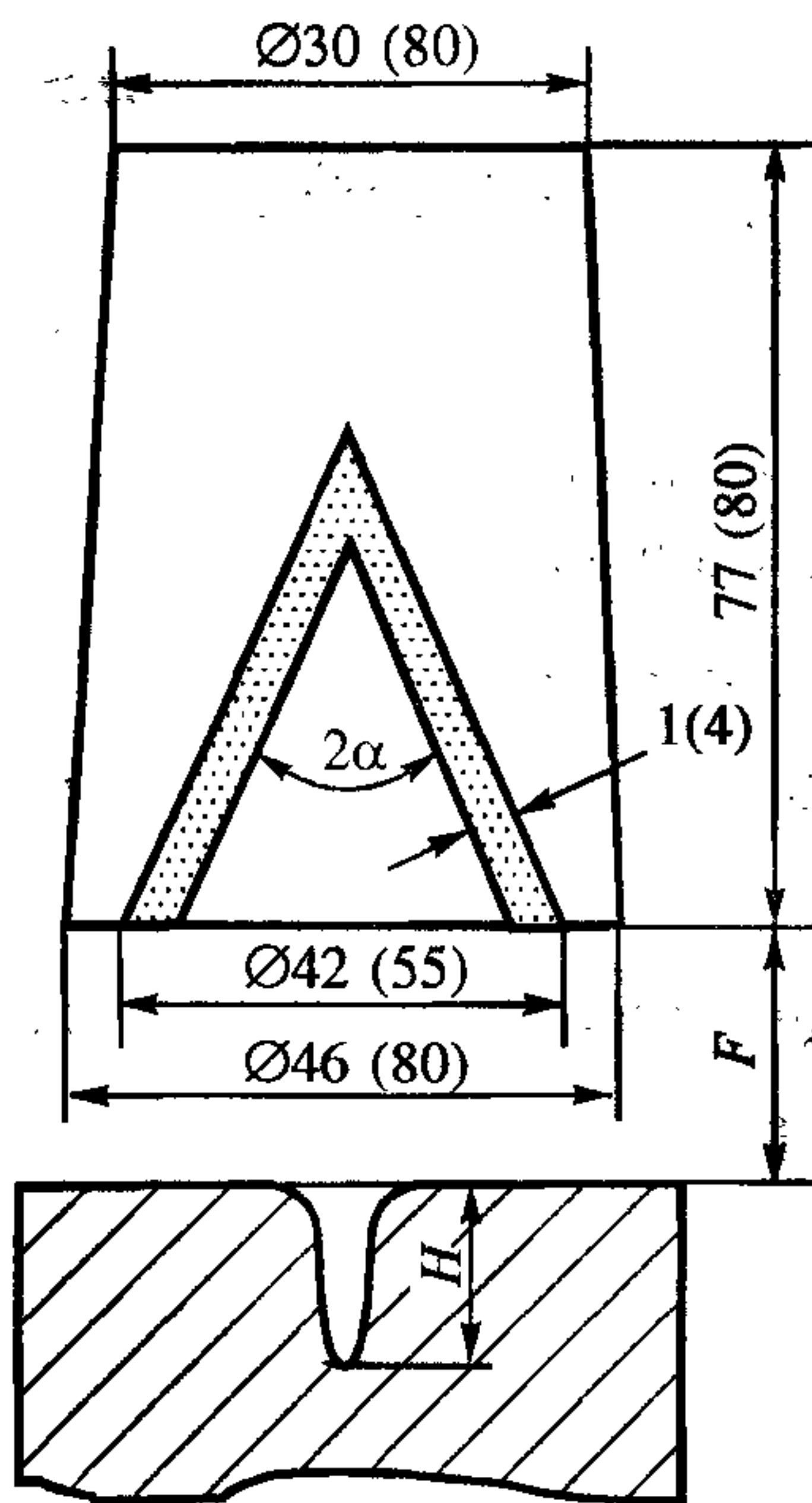


Рис. 6.78. Схема кумулятивного заряда с указанием размеров двух вариантов и элемент преграды с кратером глубиной  $H$ .

Поясн. см. в тексте.

Для выяснения влияния физико-механических свойств материала облицовок на характер образующихся струй проведена серия экспериментов с использованием рентгеноимпульсной съемки. В экспериментах использовался заряд взрывчатого вещества ТГ 50/50, размеры которого приведены на рис. 6.78 (о размерах, указанных в скобках, см. ниже). В нижней части заряда помещалась кумулятивная облицовка из различных металлов. В экспериментах менялись только угол раствора конуса  $2\alpha$  ( $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ) и материал облицовки — различные сорта стали (Ст. 3, Ст. 20, 30ХГСА) и медь марки М-1. Эти металлы имеют мало отличающуюся плотность, что обеспечивает сохранение кинематических характеристик кумулятивных зарядов с разными материалами облицовок. При рентгеноимпульсной съемке в одни и те же моменты времени при наложении негативов друг на друга наблюдается почти полное совпадение картин деформирования облицовок и движения кумулятивных струй. Одновременно фиксировалась глубина проникания струи в стальную преграду.

Эксперименты показали, что стальные струи распадаются на отдельные части, а медные в эти моменты времени продолжают растягиваться без видимых разрывов (рис. 6.79). Удлинение и распад стальной струи сопровождается ее разуплотнением (см. рис. 6.79), а не строчкообразованием, присущим медной струе при большом удлинении. Поэтому глубина внедрения стальных струй в преграды всегда меньше медных. Для зарядов ( $2\alpha = 60^\circ$ ), приведенных на рис. 6.78, при расстоянии  $F = 150$  мм от стальной плиты глубина проникания равна 195 мм для медной струи и 110 мм для стальной. Интересно отметить, что распад стальной струи начинается спустя 20—25 мкс после выхода детонационной волны на вершину конической облицовки и не зависит от угла раствора конуса  $2\alpha_0$  в исследованном диапазоне угла  $30^\circ$ — $60^\circ$ .

Таким образом, при работе кумулятивного заряда с осесимметричными облицовками возможен перегрев материала облицовки, который может возбудить

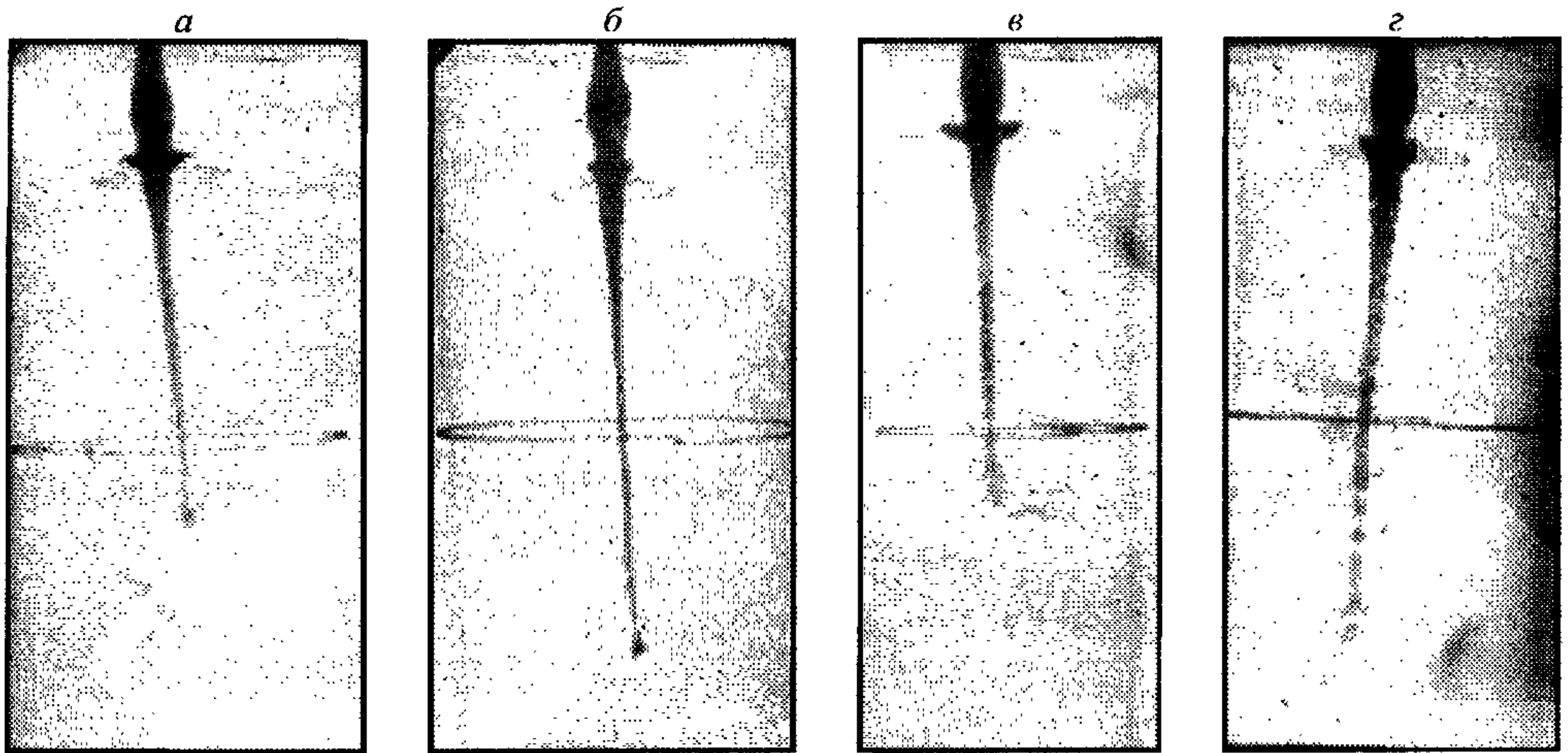


Рис. 6.79. Рентгенограммы струеобразования.

$2\alpha = 60^\circ$ . *а, б* — медные струи; *в, г* — стальные. *а, в* и *б, г* — на одни и те же моменты времени соответственно.

либо сильный фазовый взрыв внутренних слоев облицовки еще на стадии ее обжатия продуктами детонации ВВ (см. рис. 6.77), либо слабый фазовый “взрыв”, приводящий к разуплотнению вещества на стадии образования и движения кумулятивной струи (см. рис. 6.79).

### 6.6.3. Пористые облицовки

В принципе можно избежать перегрева внутренних слоев осесимметричных облицовок, если исключить механизм диссипации энергии перед обжатием кумулятивной облицовки. На одну из таких возможностей было указано выше — это джоулев нагрев облицовки перед ее взрывным обжатием.

Другой способ предварительного нагрева состоит в использовании пористых облицовок с необходимой пористостью  $m = V_{00}/V_0 = \rho_0/\rho_{00}$ , где  $\rho_0$  и  $\rho_{00}$  — плотности сплошного и пористого материала облицовки. Суть способа — в задании такой пористой облицовки, которая обеспечивает температуру нагрева при прохождении по ней ударной волны, необходимую для значительного уменьшения вязкости [60].

Для описания поведения материала пористой облицовки в ударной волне воспользуемся ударной адиабатой в форме Забабахина—Зельдовича, где упругая составляющая давления  $P_x$  взята в форме уравнения Тэта, которое содержит два параметра —  $B$  и  $n$ . Полагая  $V_0/V = 1 + \epsilon$ , где  $\epsilon \ll 1$ , получаем для



$P_x = nB\varepsilon$ , а для ударной адиабаты —

$$P_H = \frac{2nB}{2 - (m-1)\Gamma} \varepsilon, \quad (6.6.15)$$

где  $\Gamma$  — коэффициент Грюнайзена. После выхода ударной волны на свободную поверхность облицовки материал изоэнтропически расширяется в волне разрежения. Такие изоэнтропы  $[P_s(V), E_s(V)]$  можно вычислить из уравнения состояния Ми—Грюнайзена

$$E_s - E_H = \frac{V}{\Gamma} (\rho_s - \rho_H), \quad (6.6.16)$$

где, как обычно,  $E_H, P_H$  — удельная внутренняя энергия и давление на адиабате Гюгонио. Из соотношений (6.6.16)  $E_H = P_H(V_{00} - V)/2$  и  $P_s(V) = -dE_s(V)/dV$  получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dP_s}{dV} + \frac{\Gamma+1}{V} P_s = \frac{\Gamma+2}{2V} P_H + \left( \frac{\Gamma+2}{2} - \frac{m\Gamma V_0}{2V} \right) \frac{dP_H}{dV},$$

которое с учетом малости  $\varepsilon = V_0/V - 1$  преобразуется в выражение

$$\frac{dP_s}{d\varepsilon} - (\Gamma+1)(1-\varepsilon)P_s = a \{ [2 - (m-1)\Gamma] - [2 + (m+1)\Gamma]\varepsilon \}, \quad (6.6.17)$$

где  $a = nB/(2 - (m-1)\Gamma)$ . Его решение при  $\Gamma = \text{const}$

$$\pi_s = \frac{P_s}{\rho_0 c_0^2} = \frac{\pi_* - \varepsilon_*}{1 + (1+\Gamma)\varepsilon_*} + \frac{1 + (1+\Gamma)\pi_*}{1 + (1+\Gamma)\varepsilon_*} \varepsilon. \quad (6.6.18)$$

Здесь константа интегрирования определяется из условия  $P_s = P_H = P_*$  при  $V = V_*(\varepsilon = \varepsilon_*)$ .

Степень расширения материала облицовки в волне разрежения получим из (6.6.18), полагая  $\pi_s = 0$ :

$$\varepsilon_{0k} = -\frac{\pi_* - \varepsilon_*}{1 + (1+\Gamma)\pi_*}. \quad (6.6.19)$$

Скорость звука за фронтом ударной волны  $c_H^2 = dP_H/d\rho$  определяется из (6.6.15)

$$c_H = c_0 \sqrt{\frac{2}{2 - (m-1)\Gamma}}, \quad (6.6.20)$$

а после разгрузки материала в волне разрежения до  $P_s = 0$  из (6.6.18) следует, что для  $c_s^2 = dP_s/d\rho$

$$c_s = c_0 \sqrt{\frac{1 + (1 + \Gamma)\pi_*}{1 + (1 + \Gamma)\epsilon_*}} \quad (6.6.21)$$

Результаты расчета сведены в табл. 6.8. Здесь же приведены температуры нагрева облицовки в ударной волне  $\Delta T_H = (E_H - E_x)/c$  и после разгрузки по изоэнтропе до нулевого давления  $\Delta T_{0k} = \left( E_H - \int_{p_*}^0 p_s dV \right) / c$ . Из таблицы следует, что с ростом пористости растут температуры  $\Delta T_H$ ,  $\Delta T_{0k}$ , а вместе с ними  $|\epsilon_{0k}|$  и скорость звука  $c_s$ .

Последнее обстоятельство было использовано в эксперименте для получения монолитной кумулятивной струи из цилиндрической оболочки, окруженной цилиндром из ВВ. Дело в том, что согласно критерию струеобразования монолитная кумулятивная струя образуется при выполнении условия  $v_k < c_0$ , где  $v_k$  — скорость точки контакта. В телескопическом заряде скорость  $v_k$  равна скорости детонации заряда ВВ. Поэтому для заряда из насыпного гексогена ( $D = 6,2$  км/с) с цилиндрической оболочкой из никеля ( $c_0 = 4,6$  км/с) струи не должно быть. Если же взять пористую никелевую оболочку ( $m = 2,2$ ), то струя всегда образуется, так как скорость звука  $c_s$  (6.6.21) возрастает с ростом пористости. Соответствующая конструкция телескопического кумулятив-

Таблица 6.8

Влияние пористости облицовки (Cu,  $c_0 = 4 \cdot 10^5$  см/с,  $\Gamma = 2$ )

$m$	1,2				1,5				1,9			
	$ \epsilon_{0k} $	$c_s/c_0$	$\Delta T_H$ , К	$\Delta T_{0k}$ , К	$ \epsilon_{0k} $	$c_s/c_0$	$\Delta T_H$ , К	$\Delta T_{0k}$ , К	$ \epsilon_{0k} $	$c_s/c_0$	$\Delta T_H$ , К	$\Delta T_{0k}$ , К
0,01	0,002	1,004	50,7	49,7	0,009	1,02	203	197	0,069	1,12	1824	1700
0,05	0,011	1,02	263	240	0,038	1,06	1036	947	0,18	1,47	9483	8472
0,07	0,014	1,02	376	333	0,049	1,08	1503	1316	0,203	1,60	13500	12130
0,10	0,018	1,03	552	472	0,063	1,11	2208	1880	0,225	1,75	19870	17950
0,15	0,024	1,04	866	710	0,079	1,15	3462	2861	0,246	1,95	31160	28470



ного заряда и рентгеноимпульсная фотография его работы представлены на рис. 6.79. На рентгенограммах видна перегретая кумулятивная струя, которая спустя некоторое время начинает распадаться на отдельные фрагменты.

Для кумулятивных зарядов с пористыми коническими облицовками (см. рис. 6.78, размеры указаны в скобках,  $2\alpha = 60^\circ$ ) в качестве материала облицовок были использованы порошки Ni, Cu, Fe, а заряд ВВ — гексоген насыпной плотности ( $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ ,  $D = 6,2 \text{ км/с}$ ). Для получения конических облицовок с заданной пористостью их заготовки прессовались на статическом прессе.

Проведенная серия экспериментов с зарядами, имеющими пористые облицовки, показала, что в общих чертах характер струйного течения в ряде случаев сохраняется, но есть и отличия. Для порошка никеля насыпной плотности ( $\rho_{00} = 3,2 \text{ г/см}^3$ ) получен обычный случай струйного течения — кумулятивная

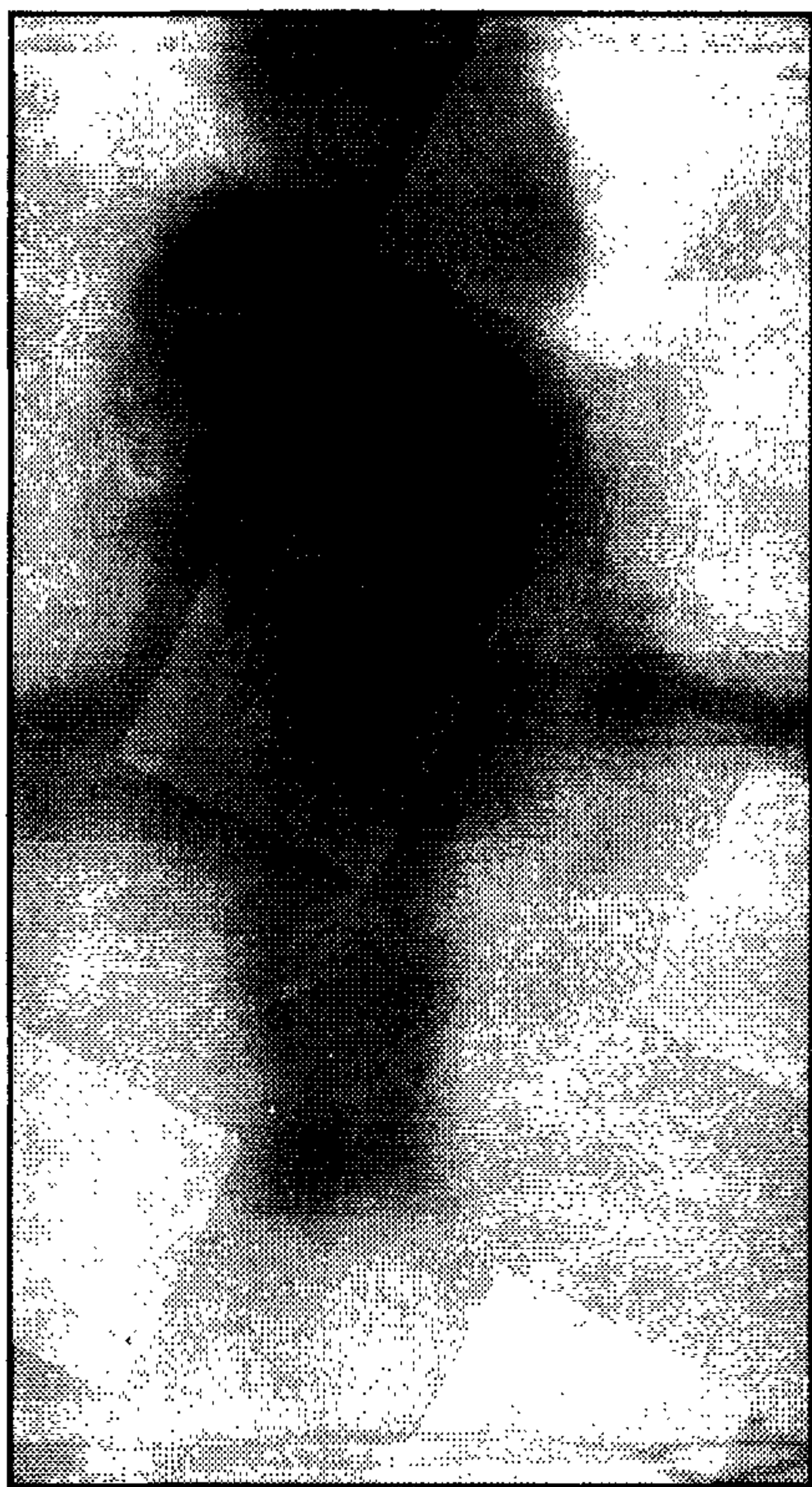


Рис. 6.80. Формирование облака частиц при схлопывании медной облицовки большой пористости (насыпная плотность  $1,8 \text{ г/см}^3$ ).

струя и пест, только распад струи связан с разуплотнением материала струи. Для облицовок с еще большей степенью пористости, например медная с насыпной плотностью  $\rho_{00} = 1,8 \text{ г/см}^3$  ( $m = 4,9$ ), струи как таковой не образуется. Сразу же после начала схлопывания облицовки формируется облако частиц, летящее в направлении оси симметрии и заполняющее все пространство полости кумулятивного заряда (рис. 6.80). На рис. 6.81 представлена зависимость глубины пробития стали от фокусного расстояния  $F$  для медной облицовки. Кривая 1 описывает глубину пробития для заряда с облицовкой насыпной плотности ( $M = 82 \text{ г}$ ,  $\Delta = 7 \text{ мм}$ ,  $\rho_{00} = 1,82 \text{ г/см}^3$ ), а кривая 2 — для прессованной медной облицовки ( $M = 85 \text{ г}$ ,  $\Delta = 3 \text{ мм}$ ,  $\rho_{00} = 3,76 \text{ г/см}^3$ ). Аналогичные зависимости получены для облицовок из порошка никеля (кривые 3, 4). Эти эксперименты указали на существование опти-

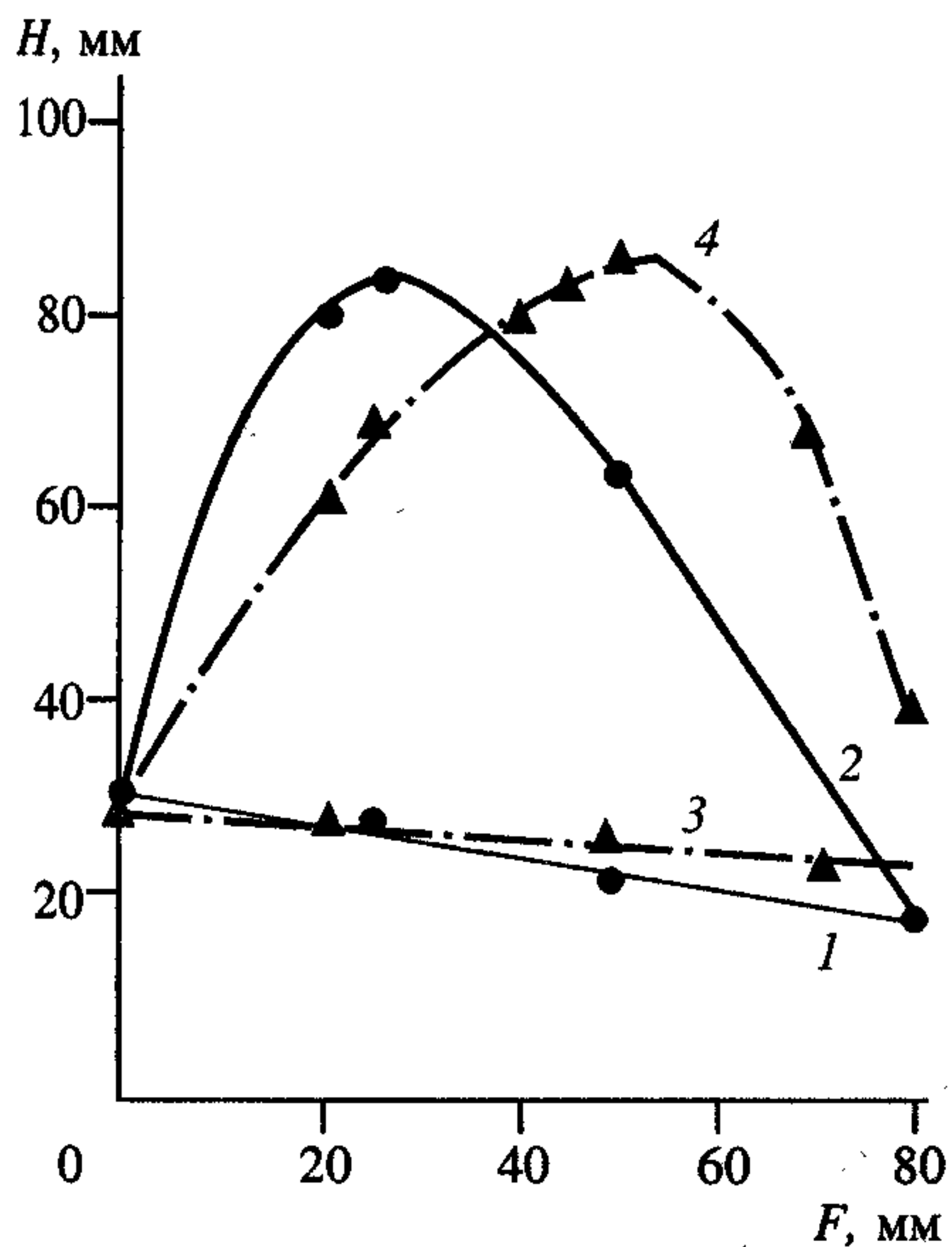


Рис. 6.81. Глубина пробития стальной преграды в зависимости от фокусного расстояния.

Поясн. см. в тексте.

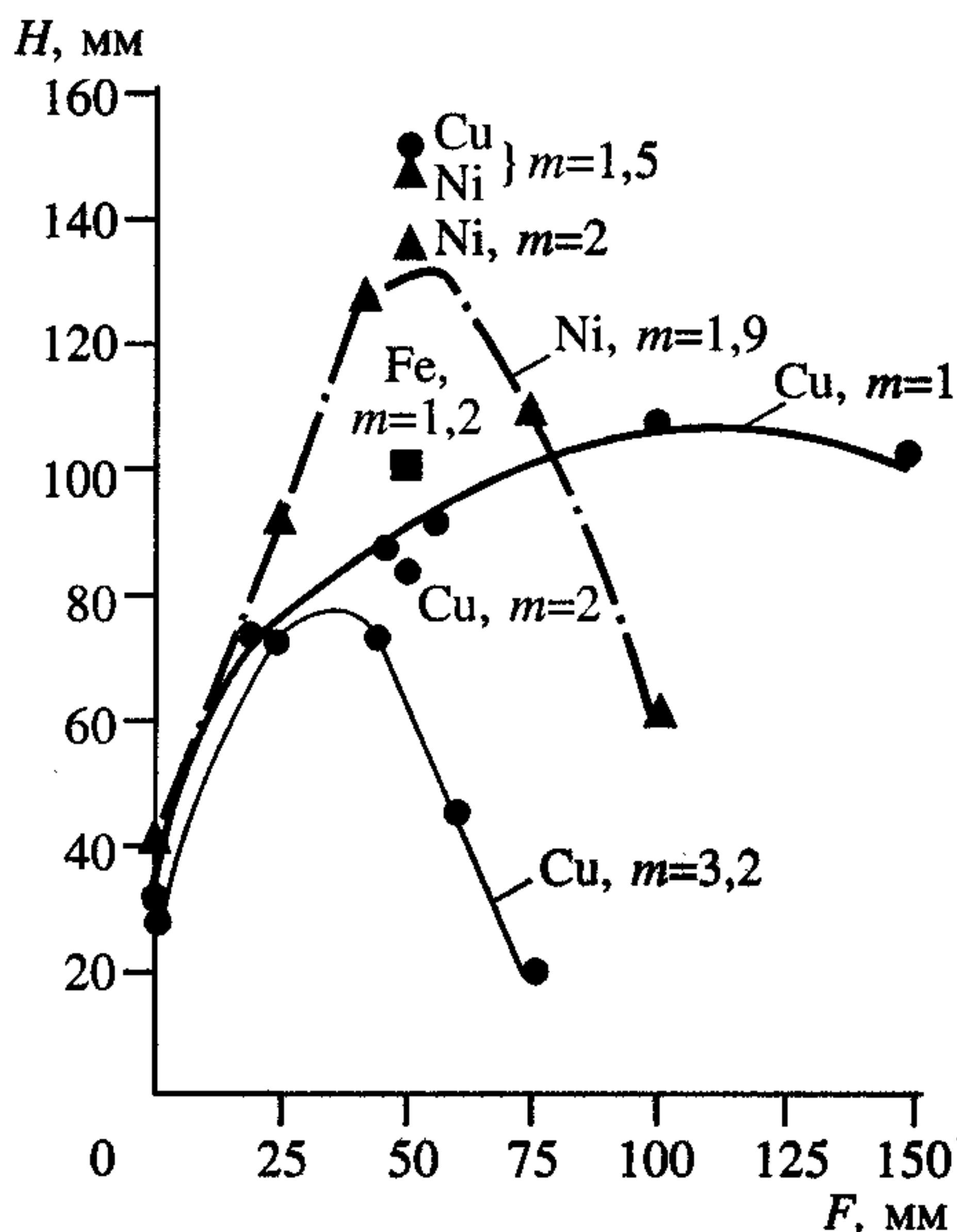


Рис. 6.82. Глубина пробития стальной преграды в зависимости от фокусного расстояния для различных концентраций пор  $m$  медных и никелевых облицовок.

мального фокусного расстояния, как и для кумулятивных зарядов с облицовками из монолитного материала. Кроме того, видна большая разница в глубинах пробития для насыпных и подпрессованных облицовок. Таким образом, глубина пробития в стальной мишени растет с уменьшением пористости.

Зависимость глубины пробития стальной мишени от фокусного расстояния для кумулятивного заряда с медной монолитной облицовкой такой же конструкции представлена на рис. 6.82. Здесь же приведены результаты экспериментов для пористых облицовок из никеля и меди. Отдельными точками указаны глубины внедрения в стальную мишень этих же кумулятивных зарядов (см. рис. 6.78 — размеры в скобках) с насыпным гексогеном с расстояния  $F = 50$  мм: для Cu при  $m = 2$  глубина пробивания  $H = 84$  мм, при  $m = 1,5$   $H = 150$  мм; для Ni:  $m = 2$ ,  $H = 135$  мм и  $m = 1,5$ ,  $H = 150$  мм; для Fe:  $m = 1,2$ ,  $H = 100$ . Каждое из указанных значений  $H$  является усредненной по трем—четырем опытам величиной, а разброс не превышает 10 мм. Любопытно отметить, что с облицовкой из сплошной меди ( $m = 1$ ) и одинаковой с пористой облицовкой массы данный заряд пробивает стальную преграду максимально на глубину  $H = 115$  мм (см. рис. 6.82).

Для аналогичных зарядов с пористыми облицовками из вольфрама насып-





Рис. 6.83. Рентгенограмма кумулятивной струи, формируемой из пористой вольфрамовой облицовки насыпной плотности ( $m = 1,8$ ).

ной плотности ( $m = 1,8$ ) получены компактные кумулятивные струи (рис. 6.83), но, видимо, несколько перегретые.

Если пористость облицовок стремится к величине  $m = 2/\Gamma + 1$  или превышает ее (см. соотношение (6.6.15)), то компактных струй не образуется, что для  $m > 2/\Gamma + 1$  связано с аномальным ходом ударных адиабат  $P_H$ . В этом случае вместо компактной кумулятивной струи образуется струя в виде факела из частиц материала облицовки (см. рис. 6.80), которая в начальный момент заполняет всю полость кумулятивной воронки, а потом постепенно расширяется. Отсюда становится ясно, что для эффективной работы заряда с пористой облицовкой, как для пробивания преград, так и для создания распыленного облака частиц, все параметры облицовки и заряда должны быть определенным образом согласованы друг с другом.

Необходимо отметить, что компактные струи не образуются и для  $m < 2/\Gamma + 1$ , если ударная волна в пористой облицовке достаточно сильна, чтобы нагреть облицовку до температуры, превышающей температуру спинодали  $T_s$ . Например, для облицовки из пористой меди ( $m = 1,9$ ) согласно табл. 6.8 при  $\epsilon = 0,05$  температура достигает 8470 К, что превышает температуру спинодали, равную 5700 К. Правда, давление в ударной волне  $P_H$ , согласно (6.6.15), должно иметь величину 500 кбар. Здесь для меди взяты значения величин  $n = 4$ ,  $B = 250$  кбар и  $\Gamma = 2$ .

#### 6.6.4. Проникание кумулятивных струй

Гидродинамическая теория бронепробивания довольно хорошо описывает процесс внедрения кумулятивных струй в преграды, но при снижении скорости



струй начинается заметное расхождение с экспериментом [66]. Работа [66] — практически единственная, в которой достаточно аккуратно проведена экспериментальная проверка гидродинамической теории проникания. В ней предложена модификация гидродинамической теории, учитывающая влияние прочности материала струи и преграды. В дальнейшем эта модификация развита в [67—71] с упором в основном на проникание бойков. Суть модификации заключается во введении “сопротивления” в уравнение течения:

$$0,5\rho_1(v_c - v_0)^2 = 0,5\rho_2v_0^2 + Y, \quad (6.6.22)$$

где  $v_0$  — скорость проникания, а  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — плотности струи и преграды соответственно. Под  $Y$  обычно подразумевают разность между какими-то прочностными характеристиками материалов бойка и преграды, называемыми часто динамической твердостью (динамическим пределом текучести). Более физично рассматривать  $Y$  как “диссипативное” давление [67], описывающее потери энергии, связанные с упругопластическим течением, сжимаемостью, нагревом преграды и т. п. Тогда  $Y \neq 0$  в соотношении (6.6.22) и при равных значениях прочности бойка и преграды.

Сказанное в основном относится к соударению бойков. Что касается проникания кумулятивных струй, то их прочность, по-видимому, можно не учитывать, так как струя непосредственно перед соударением сильно нагрета и находится в “квазижидком” состоянии. Из уравнения (6.6.22) получаем

$$v_0 = \frac{\lambda v_c}{\lambda^2 - 1} \left[ \lambda - \sqrt{1 + (\lambda^2 - 1) \frac{2H_D}{\rho_2 v_c^2}} \right]; \quad v_0 = 0,5v_c \left( 1 - \frac{2H_D}{\rho v_c^2} \right), \quad (6.6.23)$$

где  $H_D$  — динамическая твердость материала преграды (параметр, учитывающий диссипацию энергии). Второе выражение в (6.6.23) относится к случаю равенства плотностей материалов струи и преграды.

Можно предложить несколько отличную от предыдущей модификацию гидродинамической модели. Предположим, что реальной задаче о проникании струи в прочную преграду соответствует модельная задача, в которой несжимаемая струя с уменьшенной начальной скоростью

$$v'_c = \sqrt{v_c^2 - \frac{2H_D}{\rho_1}} \quad (6.6.24)$$

внедряется в теперь уже идеальную несжимаемую преграду. Тогда скорость проникания  $v_0$  и скорость струи  $v'_c$  с учетом (6.6.24) связаны формулой



$$v_0 = \frac{\lambda}{\lambda + 1} v_c \sqrt{1 - \frac{2H_D}{\rho_1 v_c^2}}. \quad (6.6.25)$$

Сравнение формул (6.6.23) и (6.6.25) показывает, что в обеих модифицированных моделях струя перестает пробивать преграду при одной и той же критической скорости, определяемой выражением

$$v_c^* = \sqrt{2H_D/\rho_1}.$$

Рассмотренные модификации гидродинамической теории проникания носят весьма условный характер, поэтому преждевременно говорить о степени их соответствия процессу внедрения кумулятивных струй.

В табл. 6.9 приведены результаты расчета скорости проникания (в отношении к скорости струи) в зависимости от скорости стальной кумулятивной струи ( $\rho_1 = 7,85 \text{ г/см}^3$ ) для нескольких материалов преград; для каждого материала числитель соответствует расчету по формулам (6.6.23), а знаменатель — по (6.6.25). Видно, что для материалов средней твердости (мягкая сталь, медь) обе модификации при  $v_c = 2-3 \text{ км/с}$  практически выходят за гидродинамическую теорию. Существенное различие между обеими модификациями наблюдается лишь при  $v_c = 1 \text{ км/с}$  (а для прочных материалов —  $1,5 \text{ км/с}$ ) и ниже; для более высоких скоростей обе модификации мало отличаются друг от друга.

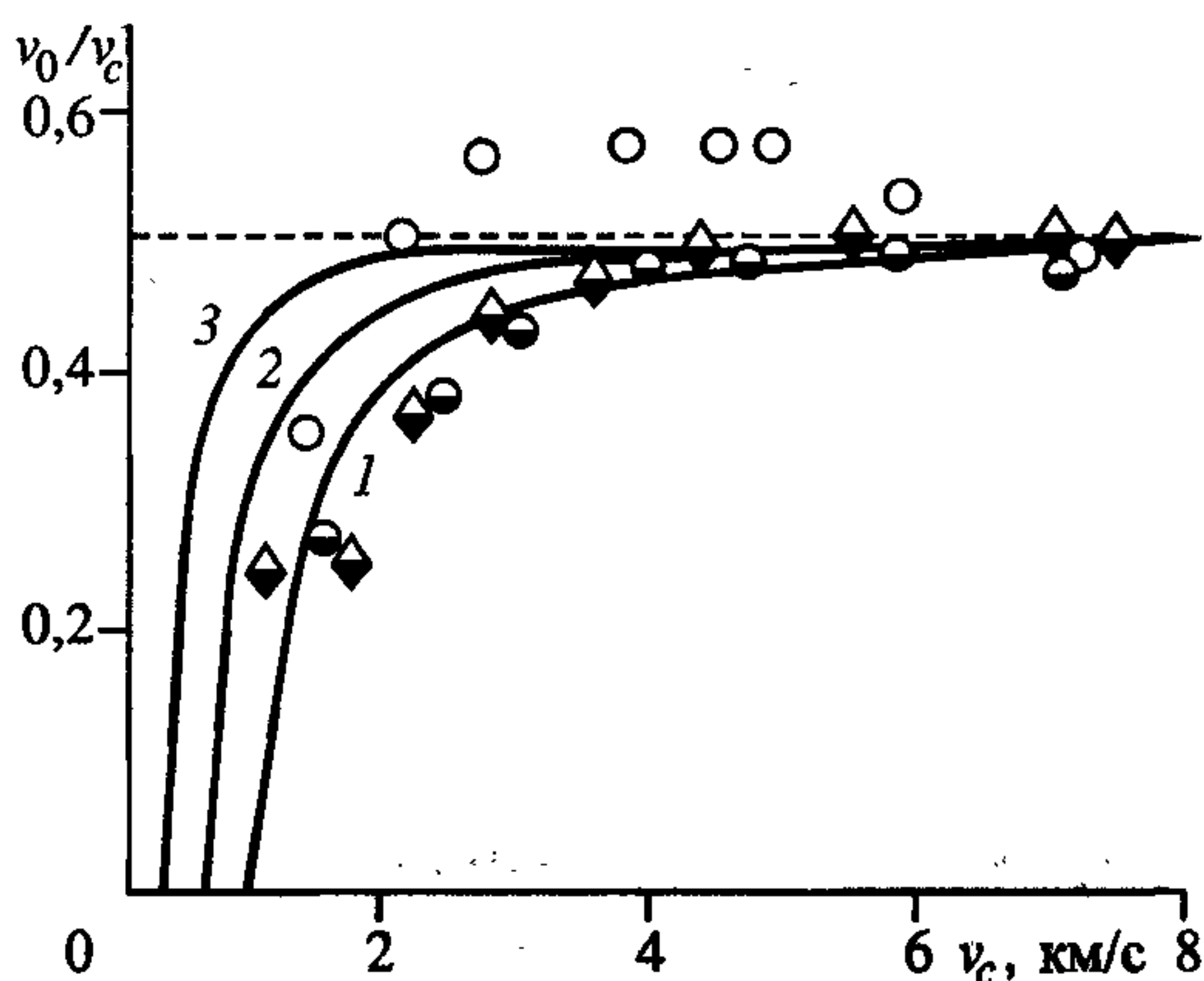
В работе [67] построена экспериментальная зависимость отношения  $v_0/v_c$  от  $v_c$  при внедрении стальной струи в преграду из мягкой стали (рис. 6.84). Экспериментальные точки относятся к кумулятивному заряду, подрываемому с различных фокусных расстояний. Точки для фокусного расстояния  $F=0$  несколько выпадают из общей картины: для некоторой части струи скорость проникания превышает предсказываемую гидродинамической теорией ( $v_0/v_c = 0,57$  — штриховая линия на рисунке). В работе [67] эти результаты просто отброшены, а по остальным точкам проведена усредняющая кривая, на основании которой и сделано заключение о влиянии прочности материала преграды на процесс проникания, которая начинает сказываться для преграды из мягкой стали при скорости стальной струи, равной  $4 \text{ км/с}$ .

Рассмотрим результаты, приведенные на рис. 6.84, с позиций модифицированной гидродинамической теории. Оказывается, что зависимость (6.6.23) хорошо описывает экспериментальные результаты (без  $F=0$ ) при среднем значении  $H_D = 350 \text{ кг/мм}^2$  (кривая 1). Такое значение динамической твердости суще-

Результаты расчета для ряда материалов скорости проникания в зависимости от скорости кумулятивных струй

Материал преграды	v, км/с									
	0,8	1,0	1,5	2	3	4	5	6	7	8
Мягкая сталь ( $\rho_2 = 7,85 \text{ г/см}^3$ , $H_D = 150 \text{ кг/мм}^2$ , $v_c^* = 0,62 \text{ км/с}$ )	$\frac{0,2}{0,32}$	$\frac{0,31}{0,39}$	$\frac{0,41}{0,45}$	$\frac{0,41}{0,47}$	$\frac{0,48}{0,49}$	$\frac{0,49}{0,49}$	$\frac{0,49}{0,50}$	$\frac{0,49}{0,50}$	$\frac{0,50}{0,50}$	$\frac{0,50}{0,50}$
Твердая сталь ( $\rho_2 = 7,85 \text{ г/см}^3$ , $H_D = 350 \text{ кг/мм}^2$ , $v_c^* = 0,94 \text{ км/с}$ )	—	$\frac{0,05}{0,16}$	$\frac{0,30}{0,39}$	$\frac{0,39}{0,44}$	$\frac{0,45}{0,47}$	$\frac{0,47}{0,48}$	$\frac{0,48}{0,49}$	$\frac{0,49}{0,49}$	$\frac{0,49}{0,49}$	$\frac{0,49}{0,50}$
Алюминий ( $\rho_2 = 2,7 \text{ г/см}^3$ , $H_D = 40 \text{ кг/мм}^2$ , $v_c^* = 0,32 \text{ км/с}$ )	$\frac{0,50}{0,58}$	$\frac{0,55}{0,60}$	$\frac{0,59}{0,61}$	$\frac{0,61}{0,62}$	$\frac{0,62}{0,63}$	$\frac{0,63}{0,63}$	$\frac{0,63}{0,63}$	$\frac{0,63}{0,63}$	$\frac{0,63}{0,63}$	$\frac{0,63}{0,63}$
Дюралюминий ( $\rho_2 = 2,8 \text{ г/см}^3$ , $H_D = 140 \text{ кг/мм}^2$ , $v_c^* = 0,6 \text{ км/с}$ )	$\frac{0,24}{0,42}$	$\frac{0,36}{0,50}$	$\frac{0,50}{0,57}$	$\frac{0,55}{0,60}$	$\frac{0,59}{0,61}$	$\frac{0,61}{0,62}$	$\frac{0,61}{0,62}$	$\frac{0,62}{0,63}$	$\frac{0,63}{0,63}$	$\frac{0,63}{0,63}$
Медь ( $\rho_2 = 8,9 \text{ г/см}^3$ , $H_D = 100 \text{ кг/мм}^2$ , $v_c^* = 0,51 \text{ км/с}$ )	$\frac{0,29}{0,37}$	$\frac{0,36}{0,42}$	$\frac{0,43}{0,46}$	$\frac{0,45}{0,47}$	$\frac{0,47}{0,48}$	$\frac{0,48}{0,48}$	$\frac{0,48}{0,48}$	$\frac{0,48}{0,48}$	$\frac{0,48}{0,48}$	$\frac{0,48}{0,48}$

Рис. 6.84. Относительная скорость проникания струи в преграду в зависимости от скорости стальной кумулятивной струи для различных фокусных расстояний  $F$ , см: 0 (1), 2,54 (2), 5,08 (3).





ственно превышает значение динамической твердости для мягкой стали  $H_D \approx \approx 150 \text{ кг/мм}^2$ , которое получено в работе [72]. Соответствующая расчетная кривая 2 для  $H_D = 150 \text{ кг/мм}^2$  приведена на рисунке. Но в таком случае прочность следует учитывать, начиная со скорости 2,5—3 км/с. Для  $H_D = = 50 \text{ кг/мм}^2$  расчетная кривая 3 до скоростей струи, меньших 3 км/с, мало отличается от кривой 2, а учет влияния прочности в этом случае можно начинать лишь со скоростей струи 1,5—2 км/с.

Сопоставление результатов работ [66] и [72] позволило четко зафиксировать, что первое отклонение процесса проникания струи от гидродинамической модели в проведенной серии экспериментов как раз соответствует моменту начала разрыва струи на отдельные кусочки. Но тогда можно предположить, что отмеченное в [72] и приведенное на рис. 6.83 уменьшение отношения  $v_0/v_c$  при  $v_c \approx 4 \text{ км/с}$  является не эффектом прочности, а эффектом “разорванной” струи. Этот эффект определяется двумя факторами. Во-первых, после разрыва струи отдельные ее кусочки за счет различия их скорости постепенно расходятся друг от друга. Так как электроконтактный метод в [66] обеспечивает измерение средней скорости проникания, то измеренная скорость внедрения кусочной струи будет меньше, чем скорость сплошной струи, составленной из этих кусочков. Во-вторых, при определенных условиях струя, состоящая из отдельных кусочков, пробивает меньшую толщину преграды и внедряется в нее с меньшей скоростью, чем сплошная струя. Модель, частично объясняющая этот эффект, будет рассмотрена ниже.

Более правдоподобную оценку пороговой (для учета прочности) скорости струи могли дать результаты для  $F = 0$ , так как в этом случае струя дольше сохраняла свою целостность. В работе [66] для нахождения скорости струи на определенной глубине преграды использовался пересчет. По всей вероятности, в данном случае из-за того, что струя не успевала достаточно растянуться, пересчет для некоторой части струи давал заниженные значения скорости, чем и объясняется превышение отношения  $v_0/v_c$  величины 0,5 (см. рис. 6.84). В действительности же экспериментальные точки для  $F = 0$  не должны лежать выше прямой  $v_0/v_c = 0,5$ . Тогда учет прочности преграды следует начинать со скоростей струи 2—2,5 км/с. Характерно, что такую же оценку этой скорости дает модифицированная гидродинамическая теория с  $H_D \sim 50 — 150 \text{ кг/мм}^2$ . Тем не менее, следует признать, что вопрос о влиянии прочности преграды на внедрение кумулятивных струй слишком мало изучен экспериментально, чтобы можно было делать какие-либо достоверные выводы.

Уменьшение толщины пробиваемой преграды и скорости проникания для кумулятивной струи сразу после ее распада на отдельные кусочки, по сравнению со сплошной, может объяснить следующая физическая модель явления. Пусть кусок струи, длина которого сравнима с толщиной, что дает возможность рассматривать процесс в одномерной постановке, ударяется в неподвижную преграду. Пусть следом за ним на расстоянии  $x_0$  движется другой кусок струи с той же или меньшей скоростью. После удара от поверхности соударения в струю и преграду пойдут ударные волны. Процесс соударения куска струи с преградой, сопровождающийся распространением и взаимодействием ударных волн с поверхностями раздела, удобно рассматривать на плоскости  $(P, u)$  в акустическом приближении (рис. 6.85), подобно вышеописанному [26]. В этом случае ударные адиабаты материалов струи и преграды есть прямые линии, тангенс угла наклона которых к оси и по модулю равен акустическим сопротивлениям их материалов. Начальные состояния преграды и отрезка струи изображены соответственно точками  $O$  и  $C$  (рис. 6.85). Возможные состояния преграды лежат на прямой, проходящей через точки  $O$  и  $B$ , а струи — на прямой, проходящей через точки  $C$  и  $B$ . Точка  $B$  пересечения этих двух прямых определяет параметры ударных волн при соударении струи с преградой. В частности, для массовой скорости за фронтом ударной волны, являющейся в данном случае скоростью внедрения, имеем

$$v_0 = \rho_1 c_1 / (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2) v_c.$$

После того, как ударная волна достигает тыльной свободной поверхности отрезка струи, по нему в сторону контактной поверхности раздела преграда—струя пойдет волна разрежения. Состояние за фронтом волны разрежения в кусочке струи описывается на  $(P, u)$ -диаграмме точкой  $A$  пересечения прямой, проходящей через точку  $B$  симметрично ударной адиабате  $CB$  относительно прямой  $u = v_0$ , с осью абсцисс, что дает массовую скорость

$$v_A = (\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2) / (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2) v_c. \quad (6.6.26)$$

Выражение (6.6.26) определяет и скорость тыльной свободной поверхности

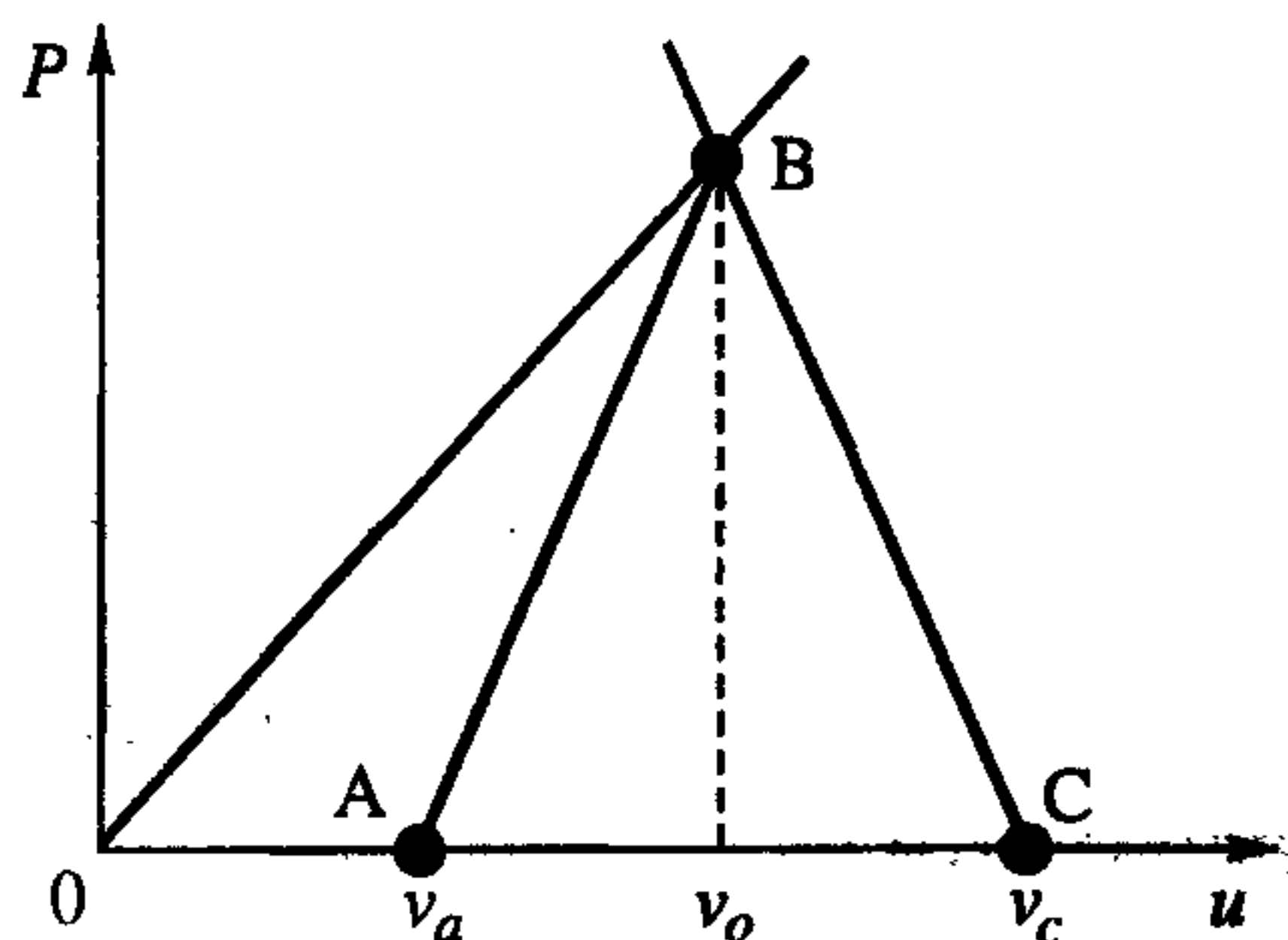


Рис. 6.85.  $(P, u)$ -диаграмма процесса соударения элементов струи с преградой.

Поясн. см. в тексте.



первого куска струи. Если учесть, что последующий кусок кумулятивной струи сохраняет свою первоначальную скорость, которую, например, полагаем равной  $v_c$ , то между ними появляется относительная скорость

$$v = v_c - v_A = 2\rho_2 c_2 / (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2) v_c,$$

и при достаточно малом первоначальном расстоянии между кусочками может произойти их соударение прежде, чем первый кусок сработается по преграде.

Таким образом, очевидно, что распад струи на отдельные кусочки существенно меняет картину процесса по сравнению с прониканием сплошной струи (даже с переменной скоростью по длине струи) и, в частности, снижает среднюю скорость проникания кумулятивной струи. Сказанное выше иллюстрируется рис. 6.86, где качественно представлена  $(x, t)$ -диаграмма процесса движения кусочков струи после срабатывания ее непрерывной части. Здесь  $t_a$  — момент удара первого куска струи о преграду;  $t_b$  — момент выхода ударной волны  $ab$  на его тыльную поверхность;  $t_c$  — примерный момент времени, когда бы произошло срабатывание участка непрерывной струи, равного длине куска;  $t_d$  — фактический момент его полного срабатывания. На рис. 6.86 изображен случай, когда второй кусок струи догоняет первый до его полного срабатывания (в момент  $t_e < t_d$ ), после чего они начнут взаимодействовать между собой, что приведет к дополнительному расходу струи и уменьшению, по сравнению со сплошной струей, глубины пробитой преграды. Соударение между собой элементов разорванной струи при ее внедрении в преграду является одной из

причин возникновения волнистой поверхности канала (результаты численных расчетов удара разнесенными бойками по преграде, включая режимы с увеличением глубины пробития, представлены в пункте 3.3.4.).

Рассмотренная модель, несмотря на ее сугубо качественный характер, позволяет понять физическую природу эффекта “разорванной” струи. В заключение данного раздела еще раз отметим тот огромный вклад, который внесла гидродинамическая тео-

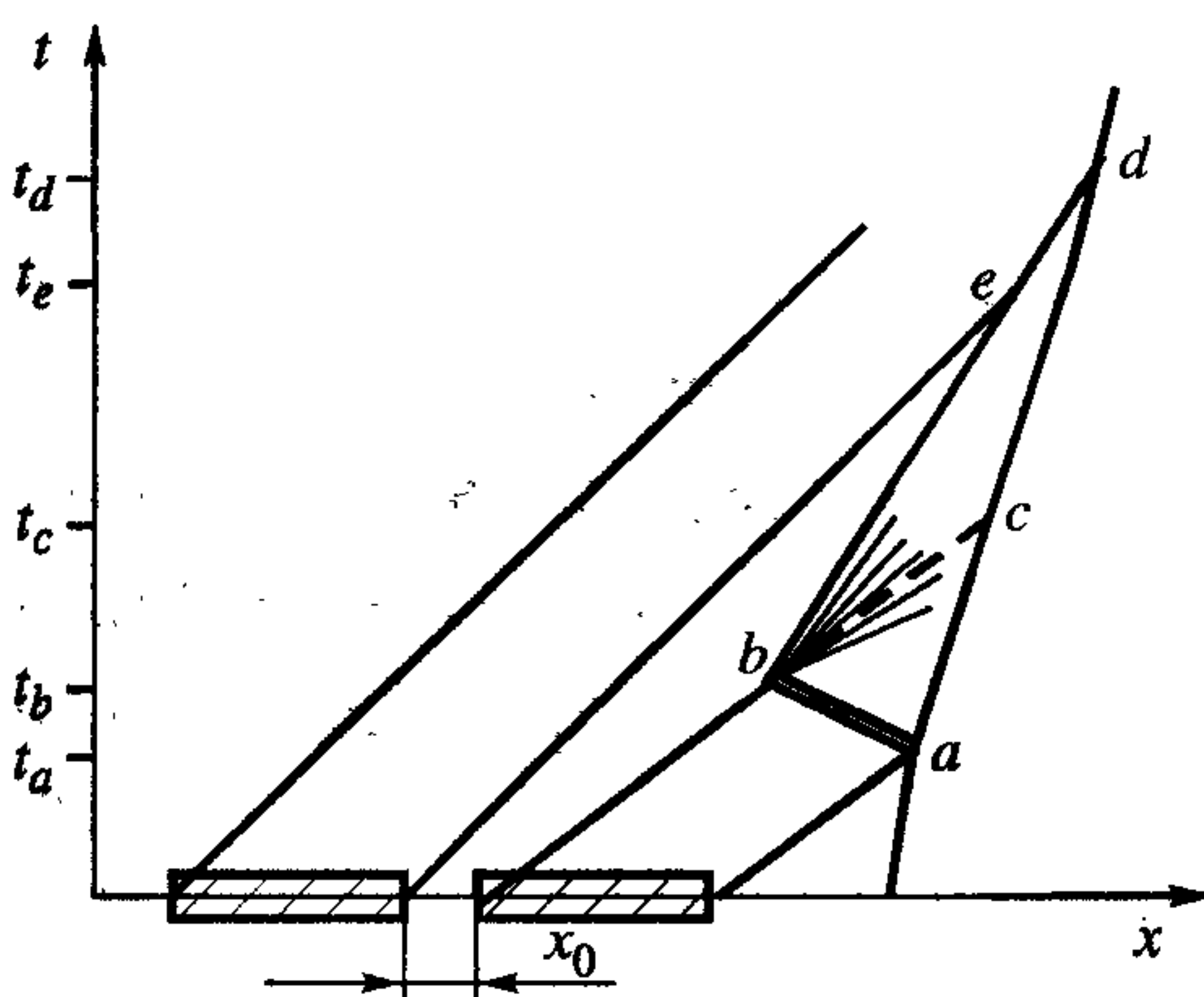


Рис. 6.86. Траектории поверхностей двух ударников, преграды, ударной волны  $(ab)$  и веера волн разрежения  $(bc)$ .

Ост. поясн. см. в тексте.

рия кумуляции в изучение и объяснение кумулятивного эффекта. Ее жизнеспособность подчеркивается и тем, что ряд результатов, которые в принципе не могут быть ею предсказаны (например, критерий струеобразования, эффекты прочности и т. п.), можно качественно и количественно описать соответствующим физически оправданным видоизменением гидродинамической теории.

## 6.7. Метание пологих облицовок

Следуя работам [46, 47] для струйных течений при кумулятивном схлопывании облицовок-пластин, в приближении несжимаемой жидкости можно записать соотношения

$$\frac{m_1}{m_2} = \operatorname{tg}^2(\psi/2), \quad v_1 = 2D \frac{\sin \varphi/2 \cdot \cos \varphi/2}{\sin \psi/2}, \quad (6.7.1)$$

где  $m_1$ ,  $m_2$  — масса струи и песта соответственно,  $2\alpha$  — начальный угол между пластинами,  $\varphi$  — угол отклонения пластины от начального состояния при воздействии на нее продуктов детонации, когда детонационная волна распространяется прямолинейно вдоль образующей облицовки-пластины,  $\psi = \alpha + \varphi$ ;  $v_1$  — скорость струи вдоль плоскости симметрии;  $D$  — скорость детонационной волны. При  $\psi < \pi/2$  получаем описанный выше режим классической кумуляции, но с увеличением  $\alpha$  при  $\psi > \pi/2$  из (6.7.1) следует  $m_1 > m_2$  — режим “обратной” кумуляции [47]. Рассмотрим ряд вопросов численного моделирования процесса, при котором большая масса облицовки распределяется в струю, а точнее — процесс формирования относительно компактного тела, в котором трудно разделить пест и струю. Для удобства дальнейшего изложения материала определимся с терминологией. Пологими (или мелкими, неглубокими) облицовками будем называть клинообразные и конические облицовки, для которых величина начального прогиба (отношение максимальной глубины выемки облицовки  $h_b$  к ее диаметру  $d_b$ , рис. 6.87) меньше 0,3. Относительно компактным телом будем называть целостный элемент, сформированный из пологой облицовки в процессе взрывного метания, для которого удлинение (отношение длины тела  $l_s$  в осевом направлении к его максимальному поперечному диаметру  $d_s$ ) определяется соотношением  $0,5 < l_s/d_s < 2-3$ .



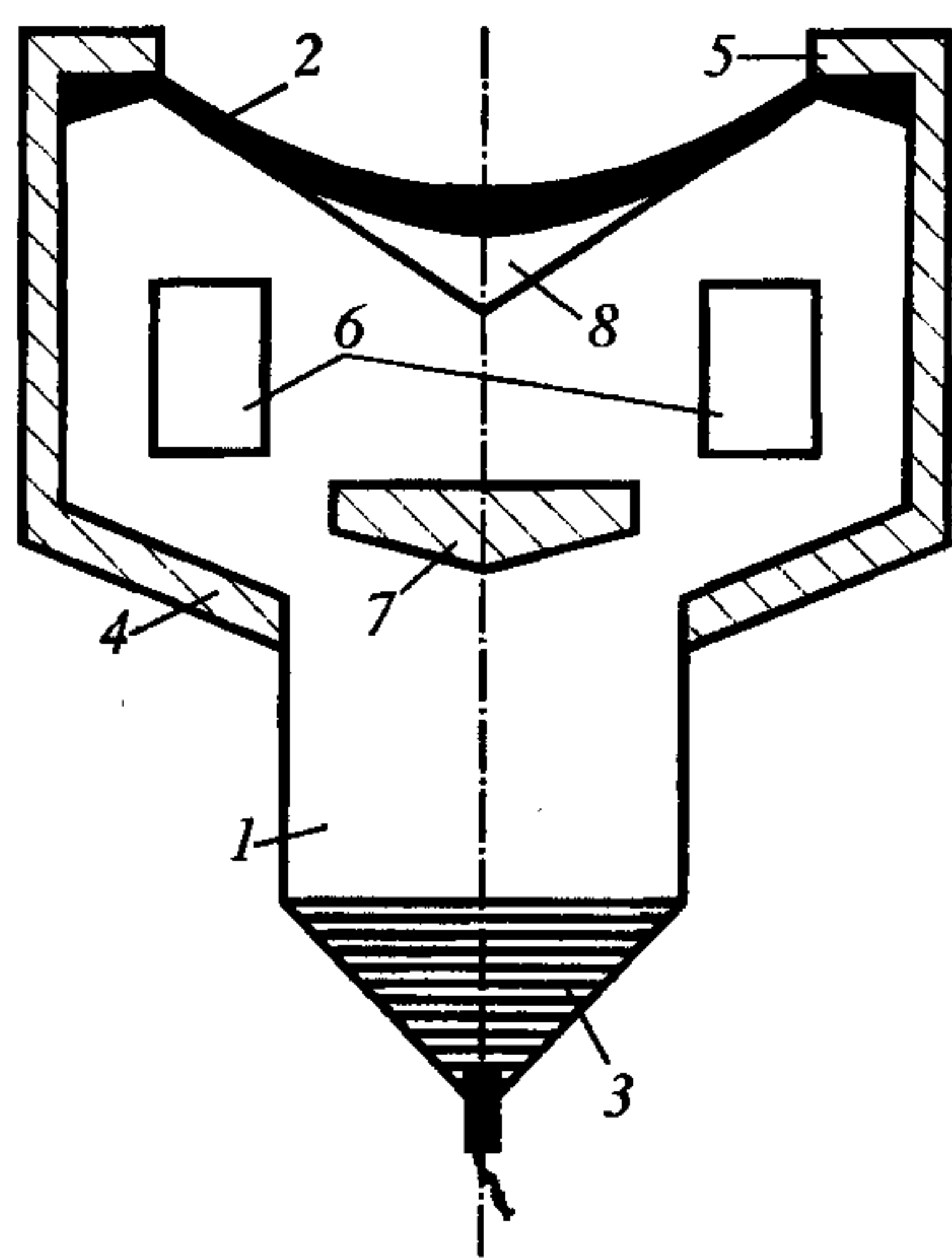


Рис. 6.87. Качественная схема устройства для метания продуктами детонации пологих облицовок.  
Поясн. см. в тексте.

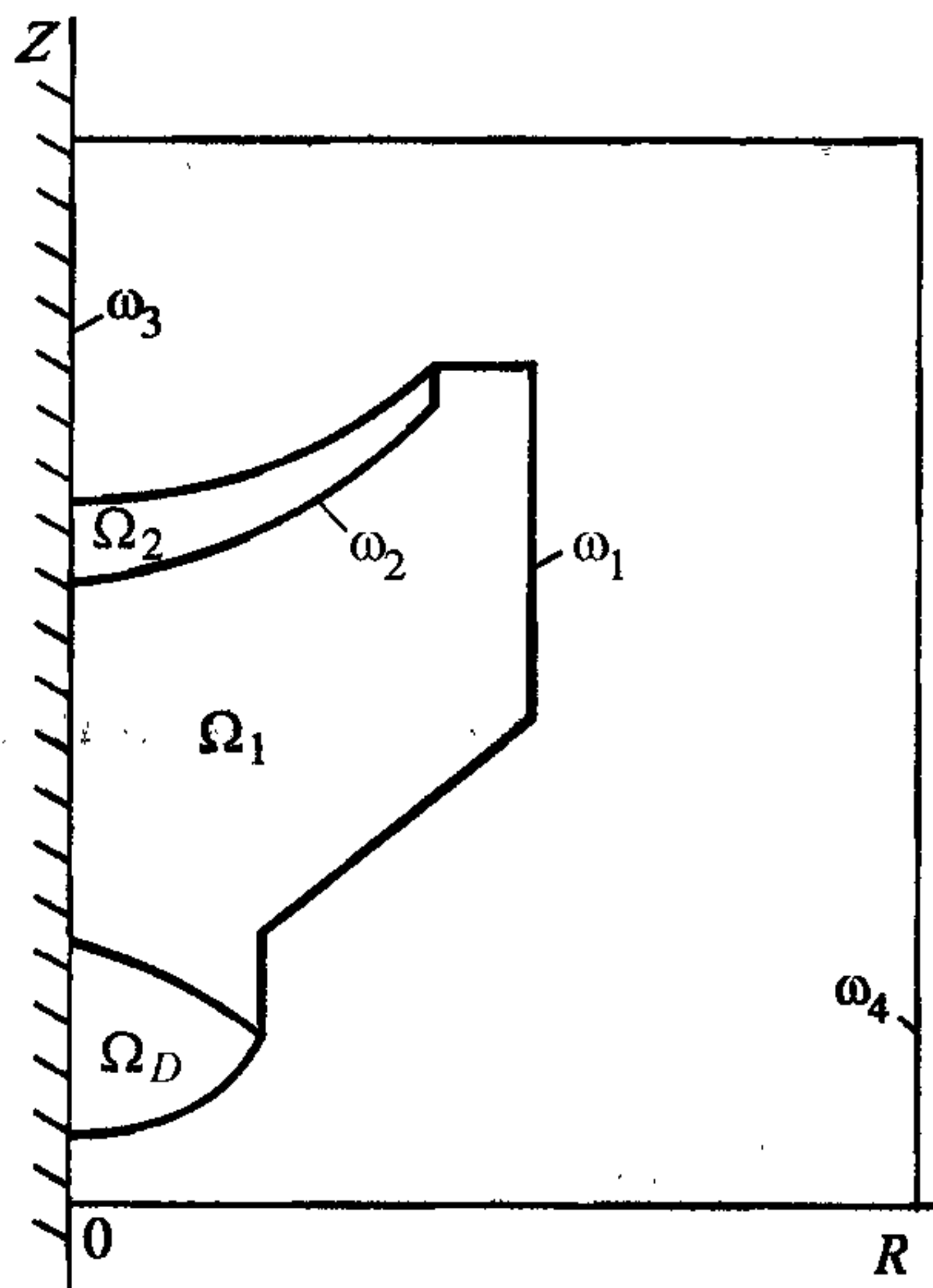


Рис. 6.88. Геометрия задачи метания пологих облицовок, применяемая при математическом моделировании.  
Поясн. см. в тексте.

Будем рассматривать задачу о деформировании металлической полой облицовки 2 (см. рис. 6.87) под действием ПД заряда 1 конденсированного ВВ в двумерной постановке. Вариант схематизированной симметричной части конструкции показан на рис. 6.88, а конкретный вид ее в дальнейшем будем уточнять. Предполагается, что инициирование ВВ осуществляется при  $t = 0$ , а напряжения и деформации в облицовке в начальный момент времени отсутствуют. При достижении детонационной волной (ДВ) поверхности металла развивается ударно-волновой процесс деформирования и метания облицовки. Заряд ВВ может ограничиваться (см. рис. 6.87) оболочкой — корпусом 4, с которым облицовка соединяется специальным узлом крепления 5. Для управления пространственно-временной нагрузкой на облицовку предусматривается введение полости 6 или инертных вставок 7, между ВВ и облицовкой может присутствовать зазор 8.

Система уравнений в цилиндрических координатах  $(r, z, \theta)$ , описывающая плоское ( $v = 0$ ) и осесимметричное ( $v = 1$ ) движение сжимаемой среды, в переменных Эйлера имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{u}{r} \right) = 0,$$

$$\rho \frac{du}{dt} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + v \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{r}, \quad (6.7.2)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + v \frac{\sigma_{rz}}{r},$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \sigma_r \frac{\partial u}{\partial r} + \sigma_z \frac{\partial v}{\partial z} + \sigma_{rz} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) + v \sigma_\theta \frac{u}{r},$$

где  $\frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + v \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $\rho$  — плотность;  $u, v$  — компоненты вектора скорости,

$\sigma_r, \sigma_z, \sigma_{rz}, \sigma_\theta$  — компоненты тензора напряжений,  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия. Для описания движения упругопластической среды применяется модель Прандтля—Рейсса

$$\frac{dS_r}{dt} + \lambda S_r = 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \eta \right) + 2S_{rz} \Xi,$$

$$\frac{dS_z}{dt} + \lambda S_z = 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \eta \right) + 2S_{rz} \Xi, \quad (6.7.3)$$

$$\frac{dS_{rz}}{dt} + \lambda S_{rz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) - (S_r - S_z) \Xi,$$

где  $\eta = \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{u}{r} \right)$ ;  $\Xi = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right)$ ;  $\mu$  — модуль сдвига;  $S_r, S_z, S_{rz}$  —

компоненты девиатора тензора напряжений, связанные с шаровой частью тензора соотношениями  $S_r = \sigma_r + P$ ,  $S_z = \sigma_z + P$ ,  $S_{rz} = \sigma_{rz}$ ,  $P = 1/3(\sigma_r + \sigma_z + \sigma_\theta)$ ;

$\lambda$  — коэффициент Ламе, определяемый с помощью условия текучести Мизеса:

$$S_r^2 + S_z^2 + S_{rz}^2 + S_r S_z \leq Y_0^2 / 3. \quad (6.7.4)$$

Здесь  $Y_0$  — предел текучести. В силу того, что рассматривается двумерный процесс, искомые функции не зависят от  $\theta$ . Члены в (6.7.3), содержащие  $\Xi$ , соответствуют поправкам на поворот. В соответствии с [8] в работе применяется методика приведения напряжений на круг текучести, поэтому полагается  $\lambda = 0$ , а девиаторы корректируются по аналогии с (6.1.6). Система (6.1.2)—(6.7.4) замыкается уравнением состояния в форме Ми—Грюнайзена:



$$P = P_x(\rho) + P_T(\rho_1, \varepsilon_T),$$

$$P_x = c_0^2(\rho - \rho_0), \quad P_T = \Gamma\rho(\varepsilon - \varepsilon_x), \quad (6.7.5)$$

$$\varepsilon_x = -\int_{V_0}^V P_x(V) dV = c_0^2 \left( \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right),$$

где  $P_x$ ,  $P_T$  — “холодная” и “тепловая” составляющие давления,  $\rho_0$  — начальная плотность,  $c_0$  — постоянная материала,  $\varepsilon, \varepsilon_x$  — суммарная внутренняя энергия и удельная внутренняя энергия “холодного” деформирования,  $\Gamma = \Gamma(\rho)$  — коэффициент Грюнайзена.

В характерной для “обратной” кумуляции области возникающих давлений (до 500 кбар) используемые зависимости (6.7.5) удовлетворительно описывают данные экспериментов. Параметры уравнений состояния для рассматриваемых в работе веществ даны ниже в табл. 6.10.

Движение ПД описывается уравнениями газовой динамики (невязкий, не-теплопроводный газ), которые получаются из (6.7.2)—(6.7.5) при  $Y_0 = \mu = 0$ .

При формулировке начальных и граничных условий заметим, что в работе рассматривается осесимметричная задача, поэтому решение ищется в осесимметричной половине области с постановкой соответствующих условий на OZ-линии симметрии. На рис. 6.88 дана геометрия задачи, где  $\Omega_1, \Omega_2$  — соответственно области, занятые ВВ (ПД) и облицовкой,  $\omega_1$  — свободная поверхность,  $\omega_2$  — контактная граница,  $\omega_3$  — ось симметрии,  $\omega_4$  — граница области численного интегрирования. Предполагается, что при  $t=0$  осуществляется инициирование ВВ в области  $\Omega_D$  ( $\Omega_D \in \Omega_1$ ), тогда для (6.7.2)—(6.7.5) ставится следующая начально-краевая задача.

Начальные условия:

$$\rho = \rho_0^{ВВ}, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \varepsilon = \varepsilon_0, \quad P = P_0 \quad \text{при } (r, z) \in \Omega_D,$$

$$\rho = \rho_0^{ВВ}, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad P = 0 \quad \text{при } (r, z) \in \Omega_1 - \Omega_D,$$

$$\rho = \rho_0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \sigma_r = \sigma_z = \sigma_{rz} = 0 \quad \text{при } (r, z) \in \Omega_2, \quad \varepsilon_0 \text{ — калорийность ВВ.}$$

Граничные условия:

на свободных поверхностях —

$$\sigma_{nn} = \sigma_{nt} = 0 \quad \text{при } (r, z) \in \omega_1; \quad (6.7.6)$$

на контактных поверхностях —

$$\sigma_{nn} = -P, \quad \sigma_{n\tau} = 0, \quad w_n^+ = w_n^- \text{ при } (r, z) \in \omega_2, \quad (6.7.7)$$

где  $\sigma_{nn}$  и  $\sigma_{n\tau}$  — нормальная и касательная составляющие вектора напряжений, действующего на площадку границы с нормалью  $n$ ;  $w_n^+$ ,  $w_n^-$  — значения нормальных компонент вектора скорости граничных точек контактирующих сред; на оси симметрии —

$$u = 0, \quad \partial \sigma_r / \partial r = 0, \quad \sigma_{rz} = 0 \text{ при } (r, z) \in \omega_3.$$

При расчете движения контактной границы двух деформируемых тел реализованы условия: полного слипания (биметаллические облицовки)  $\sigma_{nn}^+ = \sigma_{nn}^-$ ,  $\sigma_{n\tau}^+ = \sigma_{n\tau}^-$ ,  $u^+ = u^-$ ,  $v^+ = v^-$  или проскальзывания без трения  $\sigma_{nn}^+ = \sigma_{nn}^-$ ,  $\sigma_{n\tau} = 0$ ,  $w_n^+ = w_n^-$ .

Возможен отток вещества через границу  $\omega_4$ , где ставятся условия непрерывности  $\rho^+ = \rho^-$ ,  $w^+ = w^-$ ,  $e^+ = e^-$ ,  $\sigma_r^+ = \sigma_r^-$ ,  $\sigma_z^+ = \sigma_z^-$ ,  $\sigma_\theta^+ = \sigma_\theta^-$ ,  $\sigma_{rz}^+ = \sigma_{rz}^-$  при  $(r, z) \in \omega_4$ .

Ясно, что в этом случае граница  $\omega_4$  выбирается на соответствующем удалении от областей, где развиваются большие градиенты течения (отток ПД вдали от облицовки). Если рассматривается вариант с оболочкой, инертными вставками, полостями, то применяются те же условия на соответствующих границах.

Задача решается численно модифицированным методом частиц в ячейках или совместным методом потоков и частиц. Как и в классической схеме Ф. Харлоу, система уравнений расщепляется на две:

$$1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + v \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r}, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + v \frac{\sigma_{rz}}{r}, \end{aligned} \quad (6.7.8)$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \sigma_r \frac{\partial u}{\partial r} + \sigma_z \frac{\partial v}{\partial z} + \sigma_{rz} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) + v \sigma_\theta \frac{u}{r};$$

$$2) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{u}{r} \right) = 0, \quad (6.7.9)$$



$$\rho \frac{du}{dt} = 0, \quad \rho \frac{dv}{dt} = 0, \quad \rho \frac{d\varepsilon}{dt} = 0.$$

Система уравнений (6.7.8) решается конечно-разностным методом [73—75], а (6.7.9) — с применением модели частиц в ячейках [73].

В предлагаемой модификации метода добавляется этап расчета компонент девиатора тензора напряжений. Предполагая на первом этапе отсутствие потоков среды, конвективные производные опускаются, в (6.7.8) полагается  $\lambda = 0$  и разностная схема имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{rij} &= S_{rij}^n + 2\mu[\zeta_1(\tilde{u}_{i+1/2j} - \tilde{u}_{i-1/2j}) - \hat{\eta}] + 2S_{rzij}^n \cdot \hat{\varepsilon}, \\ \tilde{S}_{zij} &= S_{zij}^n + 2\mu[\zeta_2(\tilde{v}_{ij+1/2} - \tilde{v}_{ij-1/2}) - \hat{\eta}] + 2S_{rzij}^n \cdot \hat{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (6.7.10)$$

$$\tilde{S}_{rzij} = S_{rzij}^n + \mu[\zeta_2(\tilde{u}_{ij+1/2} - \tilde{u}_{ij-1/2}) + \zeta_1(\tilde{v}_{i+1/2j} - \tilde{v}_{i-1/2j})] - (S_{rij}^n - S_{zij}^n) \cdot \hat{\varepsilon},$$

где  $\hat{\eta} = 1/3 [\zeta_1(\tilde{u}_{i+1/2j} - \tilde{u}_{i-1/2j}) + \zeta_2(\tilde{v}_{ij+1/2} - \tilde{v}_{ij-1/2}) + \nu\tau\tilde{u}_{ij}/r_i]$ ,  $\hat{\varepsilon} = 1/2[\zeta_2(\tilde{u}_{ij+1/2} - \tilde{u}_{ij-1/2}) - \zeta_1(\tilde{v}_{i+1/2j} - \tilde{v}_{i-1/2j})]$ .

Далее учитываются конвективные производные с учетом направления потока среды. Так, для типичного случая деформирования облицовки на начальной стадии  $u_{ij} \leq 0$ ,  $v_{ij} \geq 0$  запишем:

$$\tilde{\tilde{S}}_{ij} = \frac{1}{h_1 h_2} [A_1 \tilde{S}_{ij} + A_2 \tilde{S}_{ij+1} + A_3 \tilde{S}_{i+1j} + A_4 \tilde{S}_{i+1j+1}],$$

где  $A_1 = (h_1 - \Delta r)(h_2 - \Delta z)$ ,  $A_2 = (h_1 - \Delta r)\Delta z$ ,  $A_3 = \Delta r(h_2 - \Delta z)$ ,  $A_4 = \Delta r\Delta z$ ,  $\Delta r = |\tilde{u}| \cdot \tau$ ,  $\Delta z = |\tilde{v}| \cdot \tau$ .

Далее производится корректировка компонент девиатора тензора напряжений на круг текучести (выше полагалось  $\lambda \equiv 0$ ):

$$S_r^{n+1} = \tilde{\tilde{S}}_r \frac{Y_0}{\sqrt{3I}}, \quad S_z^{n+1} = \tilde{\tilde{S}}_z \frac{Y_0}{\sqrt{3I}}, \quad S_{rz}^{n+1} = \tilde{\tilde{S}}_{rz} \frac{Y_0}{\sqrt{3I}},$$

при  $I = \left(\tilde{\tilde{S}}_r\right)^2 + \left(\tilde{\tilde{S}}_z\right)^2 + \left(\tilde{\tilde{S}}_{rz}\right)^2 + \tilde{\tilde{S}}_r \cdot \tilde{\tilde{S}}_z > Y_0^2 / 2$ . (6.7.11)

При невыполнении условия (6.7.11) полагается

$$S_r^{n+1} = \tilde{\tilde{S}}_r, \quad S_z^{n+1} = \tilde{\tilde{S}}_z, \quad S_{rz}^{n+1} = \tilde{\tilde{S}}_{rz}.$$

После этого определяются полные напряжения, предварительно вычислив  $p^{n+1}$ , и на этом заканчивается расчет временного шага.

Описанный в [55] алгоритм пересчета плотности применялся и для расчета двумерных течений. После вычисления  $\rho^{n+1}$ ,  $u^{n+1}$ ,  $v^{n+1}$  в конце временного шага определяется плотность в каждой ячейке из уравнения неразрывности:

$$\hat{\rho}_{ij}^{n+1} = \rho_{ij}^n - \frac{\tau}{h_1} [(\rho u)_{i+1/2j}^{n+1} - (\rho u)_{i-1/2j}^{n+1}] - \frac{\tau}{h_2} [(\rho v)_{ij+1/2}^{n+1} - (\rho v)_{ij-1/2}^{n+1}],$$

где  $(\rho u)_{i+1/2j}^{n+1} = \begin{cases} \rho_{ij}^{n+1} u_{i+1/2j}^{n+1}, & \text{если } u_{i+1/2j}^{n+1} \geq 0, \\ \rho_{i+1j}^{n+1} u_{i+1/2j}^{n+1}, & \text{если } u_{i+1/2j}^{n+1} < 0, \end{cases}$

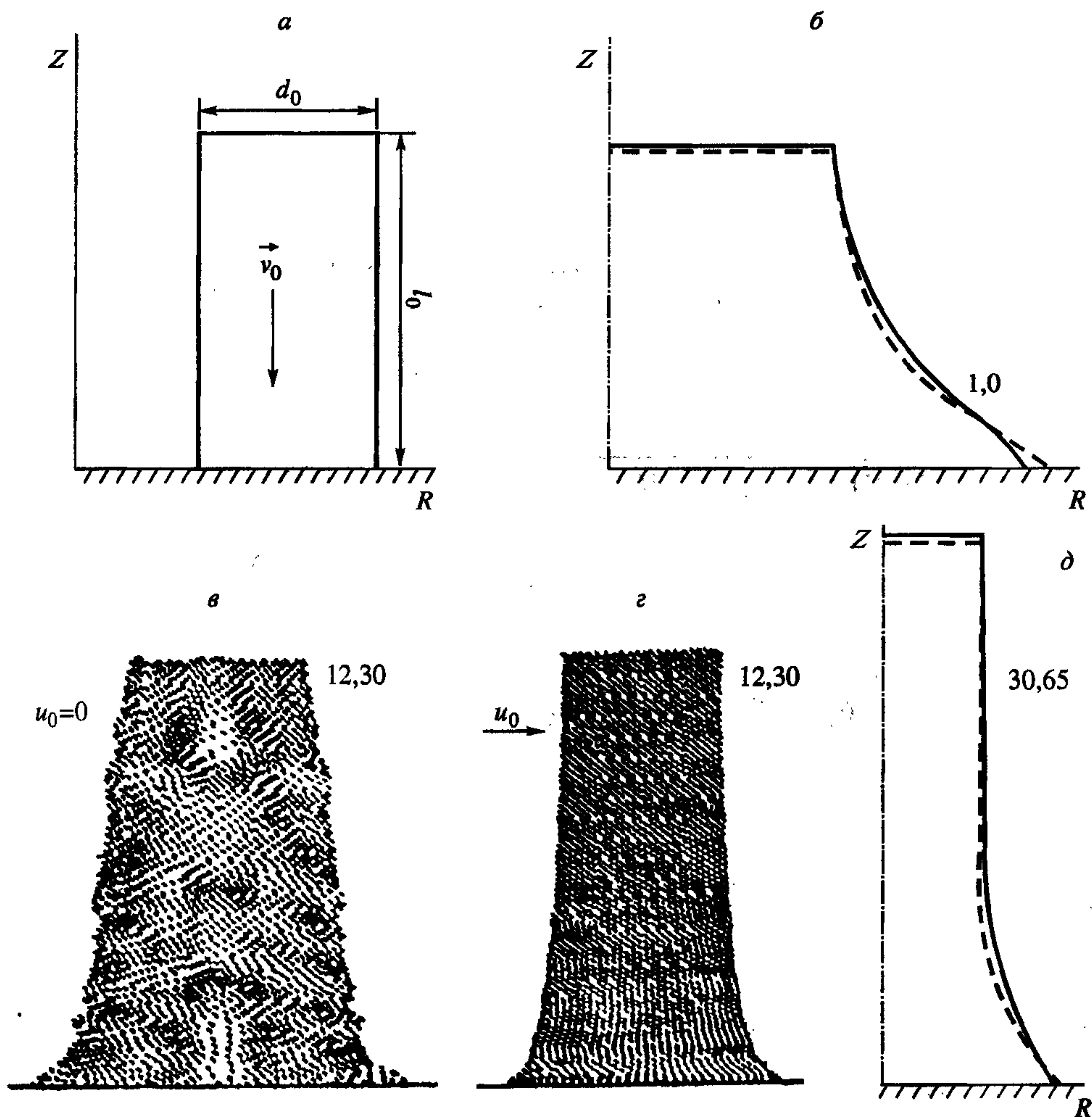


Рис. 6.89. Профиль стального стержня, ударяющего по стальной преграде. Поясн. см. в тексте.



$\hat{p}$  используется при вычислении давления на  $(n + 1)$ -м слое. Применение этой процедуры существенно уменьшает осцилляции решения. Однако основная причина (дискретность массы в PIC) сохраняется. Поэтому естественно здесь также применить совместный метод потоков и частиц в ячейках [74].

Численная методика широко тестировалась на классе точных решений, проведены сравнения результатов расчетов с другими численными решениями и с экспериментальными данными. Часть этих сопоставлений для характерных рассматриваемому процессу задач представлены на рис. 6.89—6.91.

Рассмотрим процесс удара стального стержня со скоростью  $v_0 = 0,2$  см/мкс по недеформируемой стенке в двумерной постановке (длина тела  $l_0 = 0,6$  см, диаметр  $d_0 = 0,6$  см). На рис. 6.89, а указан профиль деформируемого тела на  $t = 1$  мкс при расчете по методу частиц в ячейках (сплошная линия) и мето-

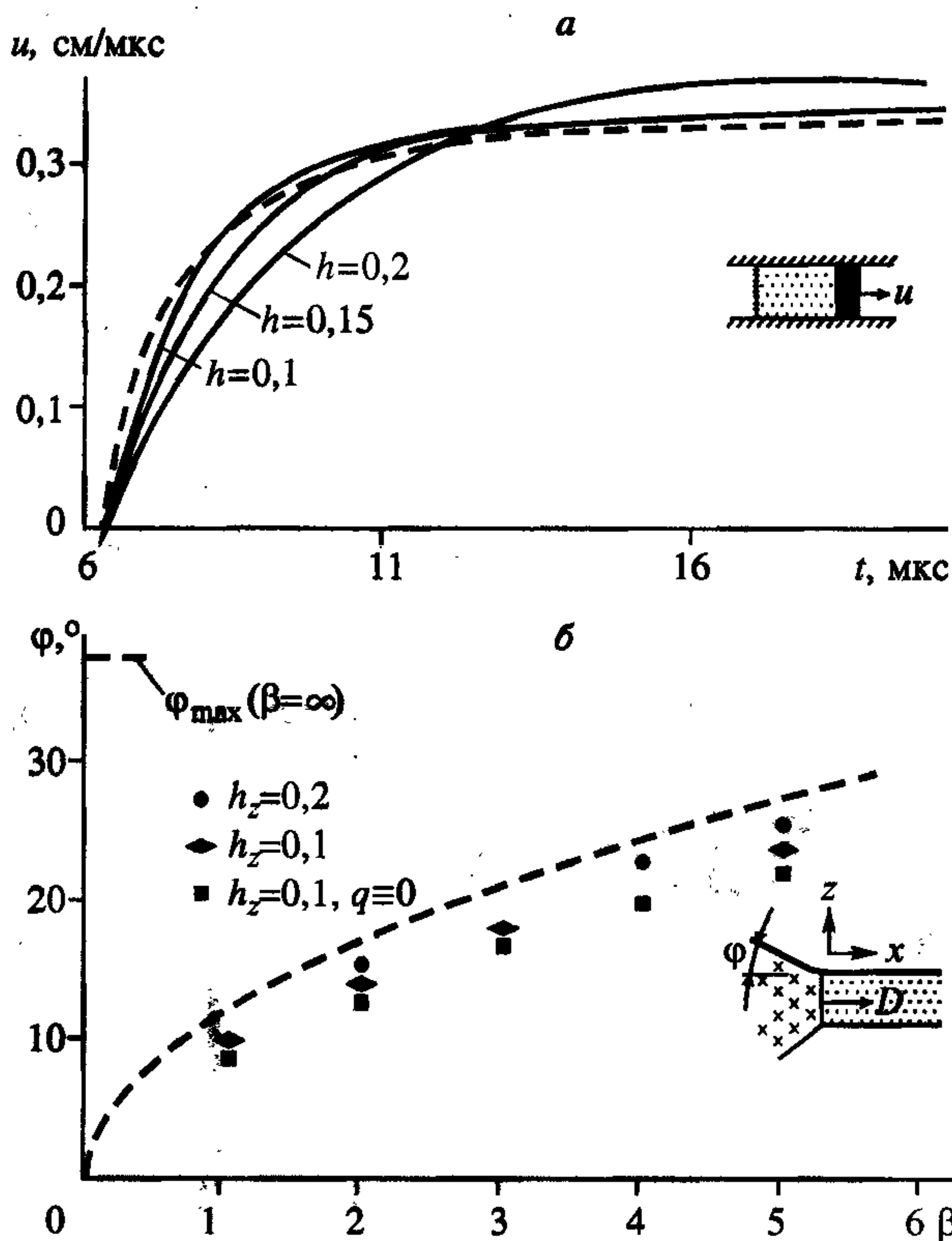


Рис. 6.90. Скорость поршня в трубе, метаемого продуктами детонации, в зависимости от времени (а) и угол поворота пластины продуктами детонации ВВ при движении детонационной волны вдоль метаемого тела (б).

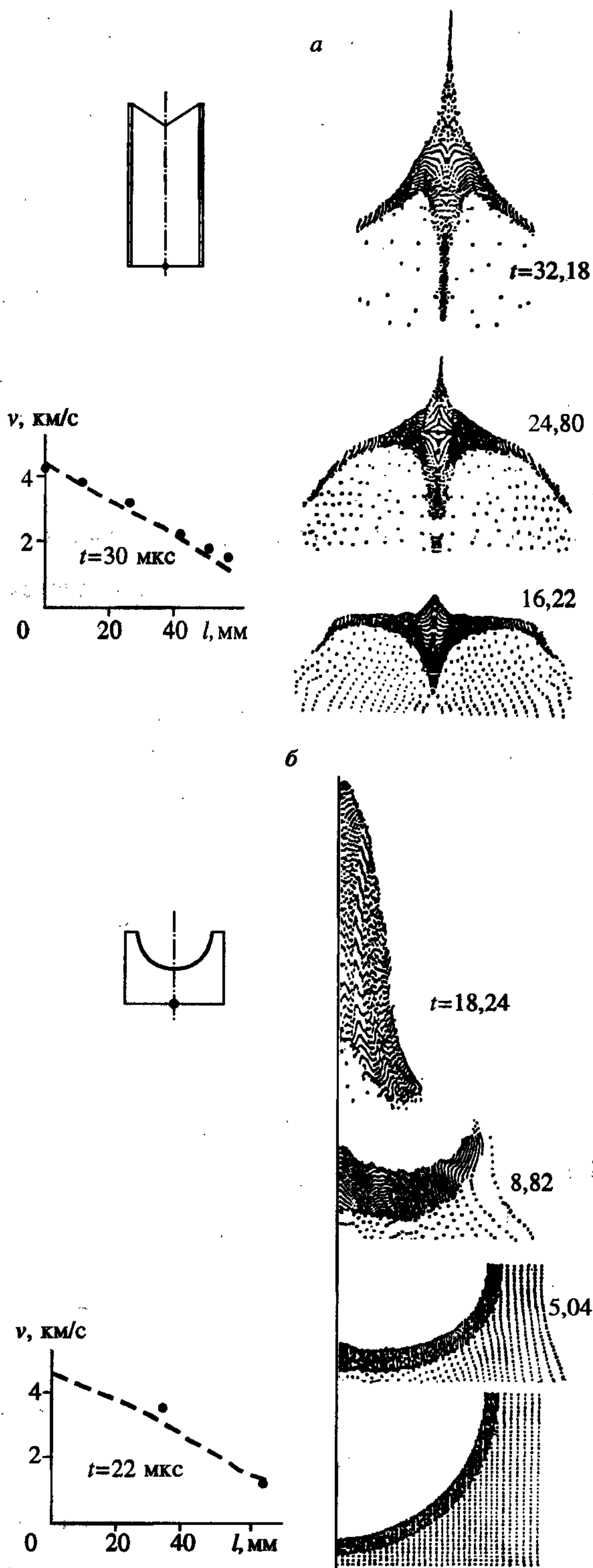
Ост. поясн. см. в тексте.

ду Уилкинса (штриховая линия). При данных параметрах ударного нагружения достигается давление порядка 700 кбар ( $Y_0 = 12$  кбар), поэтому упругие свойства среды на начальной стадии имеют второстепенное значение. Возьмем теперь меньшую скорость удара  $v_0 = 0,0252$  см/с ( $l_0 = 2,347$  см,  $d_0 = 0,762$  см), предварительно напомним, что в застойных областях в силу развития неустойчивости для метода PIC характерны существенные численные флуктуации функций течения. На рис. 6.89, б показано распределение частиц при  $t = 12,3$  мкс. Указанные эффекты численной неустойчивости в зоне торможения потока как бы “раз-

рыхляют" тело. Расчет выполнен на сетке  $h_r \times h_z = 0,1 \times 0,1$  см, число частиц в ячейке  $N = 6 \times 7 = 42$  шт.,  $\tau = 0,05$  мкс.

Поэтому решим ту же задачу, но во всех точках стержня при  $t = 0$  зададим радиальную составляющую скорости  $U_0$  так, чтобы по возможности на каждом временном слое имел место переток частиц из ячейки в ячейку. На рис. 6.89, *г* показано распределение частиц при  $t = 12,3$  мкс ( $U_0 = 0,3$  см/мкс, нерегулярность расположения частиц связана с тем, что рисуется каждая третья частица). Видим, что качество решения улучшилось, т.е. для рассматриваемых задач высокоскоростного метания этот факт положителен. На рис. 6.89, *д* показана форма тела при  $t = 30$  мкс, когда основные ударно-волновые процессы закончились (развитие формоизменения завершилось), сплошная линия — расчет по методу РИС, конечная длина стержня 1,997 см, штрих — по методу Уилкинса, длина 1,976 см.

Рис. 6.91. Сравнение результатов численных расчетов с экспериментальными данными [42, 76].





Прежде чем представить результаты счета следующих тестов, кратко опишем применяемые модели детонации мощных конденсированных взрывчатых веществ, имеющих характерные параметры: плотность  $1,6—1,8 \text{ г/см}^3$ , удельная энергия взрыва (калорийность)  $\varepsilon_0 = 3—5 \text{ кДж/г}$ , скорость детонационной волны  $D = 0,7—0,9 \text{ см/мкс}$ . В модели стационарной ( $D = \text{const}$ ) детонации фронт детонационной волны (ДВ) имеет вид сегмента сферы с радиусом  $R = D \cdot t$  и центром в точке инициирования. При  $t = 0$  в заданной области мгновенно выделяется энергия взрыва, в дальнейшем, когда оцениваемый фронт стационарной ДВ достигает центра эйлеровой сетки в области ВВ, в ней происходит мгновенное выделение энергии. При моделировании нестационарной детонации применяется прием достижения критического сжатия ВВ. В этом случае непрореагировавшее ВВ описывается уравнением состояния (6.7.5). Если в процессе ударного нагружения плотность в рассматриваемой области (ячейке) ВВ достигает критического значения  $\rho_{\text{кр}}^*$ , осуществляется мгновенное выделение энергии в ячейке и переход на уравнение состояния идеального газа. Величина  $\rho_{\text{кр}}^*$  в большой степени влияет на амплитуду формируемой детонационной волны, а параметры уравнения состояния — на скорость ее распространения.

Одним из серьезных вопросов в рассматриваемом классе задач является моделирование разрушения облицовки. В настоящее время построен ряд моделей разрушаемой среды при динамических условиях нагружения. В области численного моделирования здесь известны отечественные работы В. Н. Аптукова, Н. Х. Ахмадеева, Н. М. Белова, А. И. Гулидова, В. Л. Загускина, Г. И. Канеля, А. Б. Киселева, Б. П. Крюкова, А. И. Корнеева, В. Н. Кукуджанова, В. Ф. Куропатенко, Л. А. Мержиевского, В. А. Одинцова, Т. Н. Платовой, А. И. Рузанова, А. И. Садырина, В. М. Фомина, В. Е. Фортова и др. Среди зарубежных авторов отметим L. Berthoff, R. Bjork, Y. Curran, J. Johnson, W. Johnson, J. Hallquist, J. Hermann, G. Luttwak, L. Seaman, M. Wilkins и другие.

В настоящей работе применяется простейший способ моделирования разрушения: растягивающие напряжения ограничены предельным значением  $\sigma_p$ , при достижении которого материал разрушается. А для учета разупрочнения разрушаемой среды применяется модель из работы [77]. Вводится функция

$$F(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{при } \eta > \eta_1, \\ \frac{\eta - \eta_2}{\eta_1 - \eta_2} & \text{при } \eta_2 < \eta < \eta_1, \\ 0 & \text{при } \eta < \eta_2, \end{cases} \quad (6.7.12)$$

где  $\eta = \rho/\rho_0$ ,  $\eta_1, \eta_2$  — постоянные материала.

С применением этой функции корректируются  $P, Y_0, \mu$ :  $P = P(\rho, \varepsilon) \cdot F(\eta)$ ,  $Y = Y_0 \cdot F_1(\eta, \varepsilon)$ ,  $\mu = \mu \cdot F_1(\eta, \varepsilon)$ , где  $F_1(\eta, \varepsilon) = F_1(\eta) \max\{0, 1 - \varepsilon/\varepsilon_{пл}\}$ ,  $\varepsilon_{пл}$  — удельная энергия плавления металла.

Следующий серьезный вопрос численного моделирования высокоскоростного взаимодействия тел с применением эйлеровых сеток — реализация краевых условий на свободных и контактных границах в многомерной задаче. Применительно к методу PIC для задач газовой динамики наиболее полно этот вопрос рассмотрен Н. Н. Анучиной [75]. При расчете импульсного взаимодействия деформируемых сред с учетом прочности возникают дополнительные трудности.

Для маркировки свободных и контактных границ вводятся частицы-маркеры, которые метят границы. Они имеют нулевую массу и равноправно с обычными частицами участвуют в вычислительном процессе. Удастся достаточно точно реализовать граничные условия (6.7.6) и (6.7.7) с привлечением маркеров для слабо деформируемых сред. В общем же случае, когда наблюдаются большие деформации среды, образование новых свободных и контактных границ, схлопывание прежних и их исчезновение, принципиально усложняется алгоритм. Поэтому решено применить континуальный подход с использованием многокомпонентных ячеек, который, как показали методические расчеты, себя в дальнейшем оправдал (хотя и здесь есть место для критики).

Пусть, например, в расчетной ячейке  $(i, j)$  находятся продукты детонации и металл с известными массами  $M_1, M_2$ . Полагая равенство давлений

$$P_1 = P_2 = P_{эф}, \quad (6.7.13)$$

в соответствии с [75] имеем

$$M_1/\rho_1 = M_2/\rho_2 = V, \quad (6.7.14)$$

где  $V$  — объем ячейки,  $\rho_n$  — пока не известная плотность  $n$ -й среды,  $n = 1, 2$ . Определив  $P_n = P(\rho_n, \varepsilon_n)$  по (6.7.5) с учетом того, что при расчете  $\varepsilon_n$  контактирующие вещества на данном временном слое приобретают и одинаковое приращение внутренней энергии, из (6.7.13) и (6.7.14) имеем систему уравнений для определения  $\rho_1, \rho_2$  и следовательно для вычисления эффективного давления в ячейке  $P_{эф}$ . Эффективные напряжения в смешанной ячейке для каждой компоненты девиатора тензора напряжений определяются соотношением

$$S_{эф} = \sum_n \frac{M_n}{M} S_n,$$



где  $M$  — масса ячейки, а девиаторы  $S_n$  определяются с применением описанной выше процедуры со своими  $\mu_n, Y_{0n}$ .

Рассмотрим следующий тест — метание стальной пластины толщиной 0,5 см продуктами детонации ТГ 50/50 толщиной  $l_{\text{ВВ}} = 5$  см в одномерной постановке (инициирование осуществлено на свободной поверхности, значение коэффициента нагрузки  $\beta = 5$ ). Расчетная зависимость среднemasсовой скорости пластины от времени показана на рис. 6,90, а сплошными линиями при расчете на различной расчетной сетке (изменяется шаг сетки  $h$ ). Здесь же показано аналитическое решение [14]:

$$U = D \left[ 1 + \frac{\xi - 1}{\beta \xi} - \frac{l_{\text{ВВ}}}{D \cdot t} \xi \right],$$

$$\bar{\beta} = \frac{16}{27} \beta, \quad \xi = \left[ 1 + 2\beta \left( 1 - \frac{l_{\text{ВВ}}}{D \cdot t} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Известно, что метод РС из-за применения модели частиц достаточно удовлетворительно определяет интегральные характеристики движения. При расчете деформирования и метания сложных элементов конструкции, когда не удается выбрать мелкую расчетную сетку, стоит принципиальный вопрос о точности. Представленный тест демонстрирует влияние шага сетки на набор скорости пластины. Видим, что когда на пластину приходится всего две ячейки, ошибка по конечной скорости достигает 3%, а при одной ячейке — 10%. Считаем это хорошим качеством метода, который удовлетворительно моделирует интегральные характеристики движения среды.

Оценим далее качества расчета начальной стадии метания стальной пластины толщиной 0,2 см скользящей детонационной волной (плоская двумерная постановка), распространяющейся в ТГ 50/50, толщиной от 1 до 5 см. На рис. 6.90, б дана зависимость угла отгиба пластины  $\varphi$  от  $\beta$ , пунктиром показаны результаты расчета задачи по методике [78] для несжимаемой пластины в установившемся режиме. Двумерный расчет проведен до стадии установления (это 4 мкс с момента инициирования ВВ). Значения  $\varphi$ , полученные в численных расчетах, несколько меньше оцениваемых по методике [78]. Но с уменьшением расчетной сетки в направлении, перпендикулярном вектору скорости детонационной волны, наблюдается сходимость решения. Одна из причин различия заключается в проявлении вязкостных свойств метода. Здесь можно выделить

четыре проявления расчетной вязкости: 1) искусственная вязкость, вводимая аддитивно к давлению для повышения устойчивости метода; 2) при вычислении скорости частицы применяется линейная интерполяция по скоростям соседних ячеек; 3) односкоростная модель расчета смешанных ячеек; 4) аппроксимационная вязкость метода, имеющего первый порядок аппроксимации.

Когда шаг сетки  $h_z = 0,2$  см в газе соизмерим с толщиной пластины, значение угла поворота  $\varphi$  оказывалось на 25 % меньше оцениваемого (на рис. 6.90 квадратики), а при  $h_z = 0,05$  см — на 5 %. Размер  $h_z$  в меньшей степени влияет на  $\varphi$ . Угол разлета ПД со стороны свободной поверхности равен  $35^\circ$ , что соответствует оценке из [79]  $\varphi = 37^\circ$  при  $\gamma = 3$ .

Перейдем теперь к расчету тестовых задач деформирования облицовок в режиме “обратной” кумуляции. Рассмотрим процесс взрывного обжатия конической медной облицовки с параметрами из работы [76] с учетом детонации ВВ, заключенного во внешнюю оболочку (см. рис. 6.91, а). Облицовка имеет толщину 0,2 см,  $2\alpha = 120^\circ$ , ВВ ТГ 50/50, диаметр 4,2 см, высота 10 см, инициирование в осевой точке на свободной поверхности, корпус-оболочка имеет толщину 0,15 см. В работе [76] отмечено, что в процессе деформирования облицовки реализуется переходный режим движения — около 40 % длины струи на начальной стадии формируется по схеме классической кумуляции ( $\psi < \pi/2$ ), а остальная часть — по схеме “обратной” кумуляции ( $\psi > \pi/2$ ). В процессе деформирования наблюдается разрушение облицовки на периферии из-за действия боковых волн разрежения и на оси — из-за градиента скорости струи. Значения скорости облицовки и ее профиль удовлетворительно согласуются с экспериментом.

Рассмотрим взрывное обжатие дюралюминиевой полусферической облицовки толщиной 0,2 см, наружным диаметром 4 см с выемкой в заряде ТГ 50/50 диаметром 5 см и высотой 3,6 см, инициирование осуществлено в осевой точке на свободной поверхности ВВ. Расчетные данные сопоставляются на рис. 6.91, б с экспериментальными, полученными Ю. А. Тришиным [42]. В этом режиме деформирования происходит одновременное выворачивание полусферы и натекание металла на ось симметрии. Около 22 мкс после инициирования формируется конусообразное тело длиной  $\sim 4,5$  см и с затупленной вершиной. Расчет данного режима схлопывания с применением лагранжевых методик не прост, так как в формируемом теле возникают зоны больших сдвиговых деформаций (см. рис. 6.91, б при  $t = 18,24$  мкс).



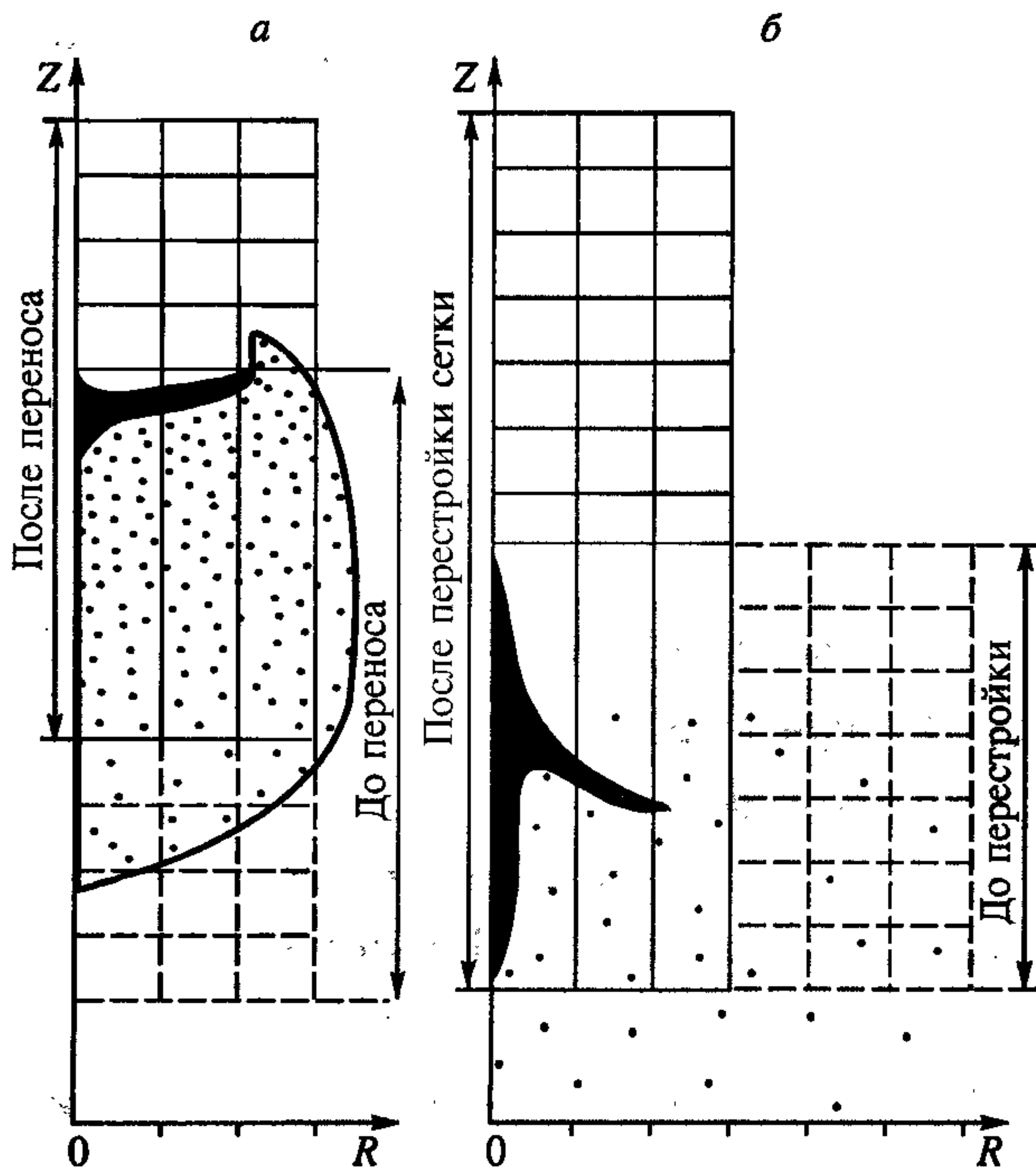


Рис. 6.92. Схема перестройки эйлеровой сетки при расчете движения формируемого твердого тела на большие расстояния.

На этом закончим демонстрацию тестовых расчетов, которые дают представление о точности методики при расчете данного класса задач. В заключение лишь заметим, что характерное время деформирования облицовки достигает 100 мкс, т.е. требуется вести расчет на достаточно большую глубину по времени, а для этого необходима большая расчетная сетка, что не удается реализовать на имеющейся персональной (на время выполнения работы — БЭСМ-6) ЭВМ. Поэтому предложен и реализо-

ван алгоритм перестройки эйлеровой сетки, которая подстраивалась в темпе расчета к деформируемому телу. В методическом цикле исследований отработаны критерии переноса, а сама идея легко видна из рис. 6.92. Здесь сетка подстраивалась перед телом и отбрасывались ячейки на периферии, т.е. общее количество ячеек в области численного интегрирования сохранялось.

### 6.7.1. О совместном применении численного и аналитического решения для моделирования обратной кумуляции

Опыт создания и эксплуатации программ расчета рассматриваемых многомерных процессов показывает, что число расчетов можно существенно сократить, если применять аналитические и инженерные решения при оценке характерных параметров движения. Исходя из физических особенностей процесса, результатов известных экспериментальных данных и численных расчетов, можно выделить ряд допущений, упрощающих постановку задачи. Например,

на начальной стадии схлопывания облицовки взрывные нагрузки значительно превышают прочностные характеристики металла, и, как следствие этого, численный расчет по различным моделям для материала облицовки на начальном этапе обжатия дает близкие результаты. Существует опыт использования одномерного аналитического решения для описания двумерного процесса деформирования. Так, в работе [80] предложена схема расчета формы оболочки, в которой при метании ПД реализуется заданное поле скоростей. Ввиду предполагаемого постоянства скорости (по модулю и направлению) отдельного элемента оболочки, этот подход описывает начальную стадию движения. Как показано ниже, основные идеи методики [80] с некоторыми изменениями пригодны и для анализа деформирования осесимметричных цилиндрических облицовок (получено совместно с А. М. Гладышевым). Действительно, хотя при схлопывании облицовки траектории отдельных элементов отклоняются от прямолинейных, но для режимов обратной кумуляции и, соответственно, неглубоких выемок, фокусное расстояние достаточно велико, и траектории до точки фокуса в меньшей степени, чем при классической кумуляции, отличаются от прямых. Изменение модуля вектора скорости во времени можно частично учесть, например, задавая определенный закон действия ПД на рассматриваемый элемент облицовки.

Сделаем следующие допущения:

1. ПД, взаимодействуя с облицовкой, сообщают элементу скорость, направленную в начальный момент по внутренней нормали к срединной поверхности (рис. 6.93, *a*).

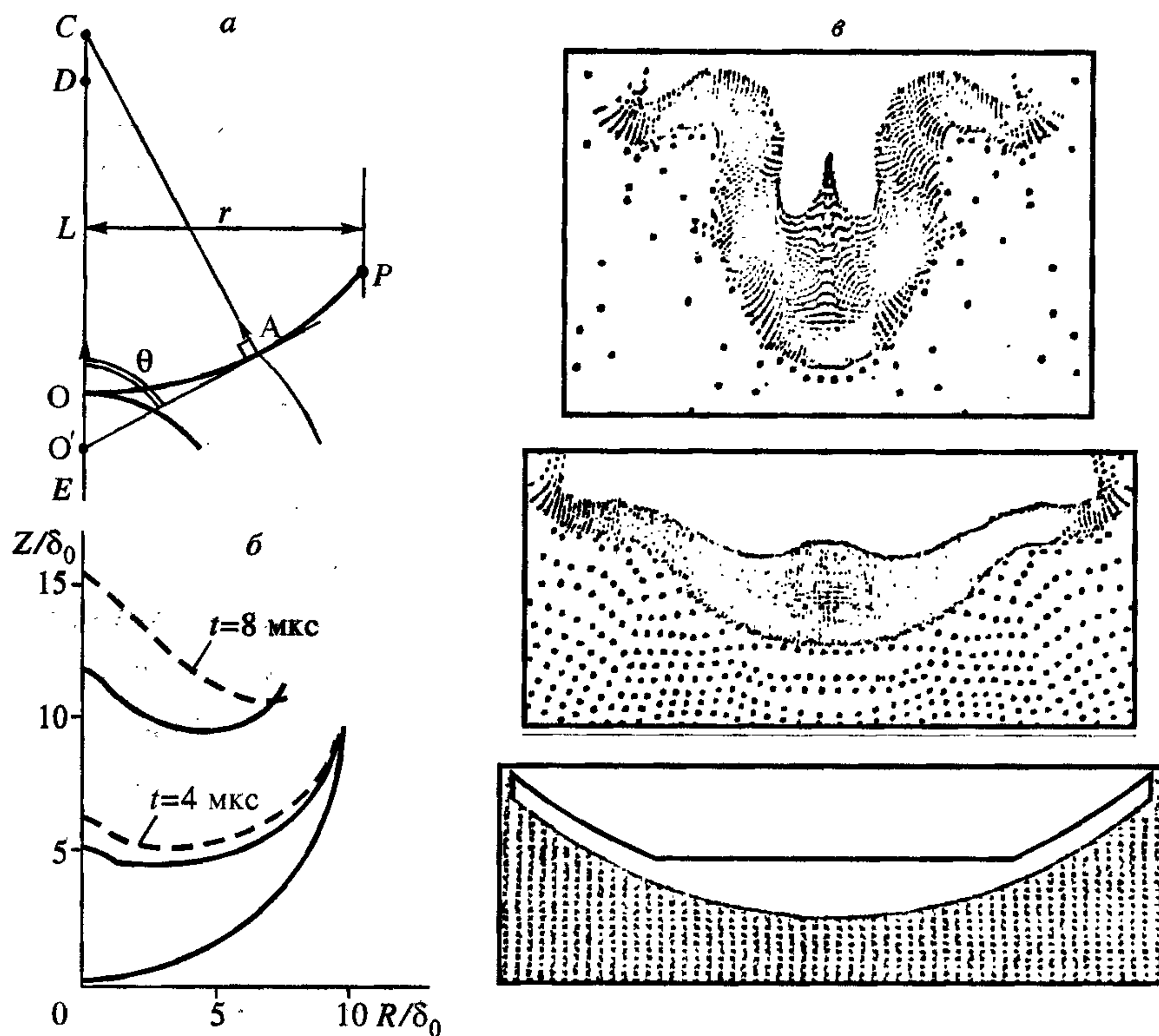
2. Отдельные объемы металла не взаимодействуют между собой, и их траектории до точки схождения к оси считаются близкими к прямолинейным.

3. Сила, действующая на элемент облицовки с площадью контакта  $S$ , описывается законом падения давления в отраженной от преграды детонационной волне [14]:

$$F(t) = P_0 S \left( \frac{t^*}{t - t_1 + t^*} \right)^3, \quad t \geq t_1, \quad (6.7.15)$$

где  $P_0$  — начальное давление ПД на границе контакта,  $t^*$  — характерное время разгрузки,  $t_1$  — время, за которое детонационная волна проходит от точки  $O$  на оси симметрии до рассматриваемого элемента  $A$  ( $t_1 = 0$  для точки  $O$ , см. рис. 6.93, *a*). Обозначая индексом  $A$  величины, относящиеся к рассматриваемому элементу облицовки, и вводя линию перемещений  $AC$ , имеем следующее уравнение движения:





**Рис. 6.93.** Геометрия схлопывания сферической облицовки (жирная линия):  
*a* — схема задачи; *б* — сопоставление численного (штриховая линия) и аналитического (сплошная линия) решений; *в* — частицы-массы облицовки и продукты детонации на три момента времени в численном расчете.

$$\frac{d^2 X_A}{dt^2} = \frac{P_0}{\delta_A \rho} \left( \frac{t^*}{t - t_1 + t^*} \right)^3$$

с начальными условиями

$$\left. \frac{dX_A}{dt} \right|_{t=t_1} = 0, \quad X_A|_{t=t_1} = 0,$$

где  $X_A$  — путь, пройденный элементом облицовки к моменту времени  $t$  ( $t \geq t_1$ ),  $\delta_A$  — средняя толщина элемента  $A$ ,  $\rho$  — плотность металла,  $t = 0$  соответствует началу движения точки  $O$ . Откуда, интегрируя, имеем

$$X_A(t) = \frac{P_0}{2\delta_A \rho} t^* \frac{(t - t_1)^2}{(t - t_1 + t^*)} \quad (t \geq t_1). \quad (6.7.16)$$

Рассмотрим стадию установления, когда  $\frac{d^2 X_A}{dt^2} \approx 0$ ,  $t \gg t^*$ . Пусть центральный элемент  $O$  за время  $T$  прошел расстояние  $L$  до точки  $D$ , а элемент  $A$  к этому моменту времени перешел в точку  $C$  на оси симметрии. Будем считать точку  $C$  кумулятивным фокусом, тогда точки  $D$  и  $C$  по определению близки:  $|DC| \ll L$ , и, вводя в рассмотрение угол  $\theta$  в прямоугольном треугольнике  $CO'A$ , имеем  $|OO'| \ll L$ , так как облицовка мелкая. Отсюда с учетом (6.7.16):

$$\frac{X_A(T)}{X_0(T)} \approx \frac{L \sin \theta}{L} = \frac{\delta_0}{\delta_A} \left(1 - \frac{t_1}{T}\right)^2 \left(1 + \frac{t_1}{T - t_1 + t^*}\right). \quad (6.7.17)$$

Таким образом, средняя линия облицовки постоянной толщины будет располагаться примерно на окружности диаметром  $L$ . Считая, что  $T \gg t_1$  и, оставляя в (6.7.17) члены первого порядка по  $t_1/T$ , получим

$$\sin \theta \approx \frac{\delta_0}{\delta_A} \left(1 - \frac{t_1}{T}\right). \quad (6.7.18)$$

Если положение средней линии на некотором участке близко к прямой ( $\theta = \text{const}$ ), тогда при удалении от осевой точки  $O$  (и соответственно, с ростом  $t_1$ ) толщина облицовки, задаваемая соотношением (6.7.18), должна нелинейно убывать. Угол подхода средней линии к оси симметрии, определяемый из (6.7.18), всегда близок к  $\pi/2$ .

Геометрический способ построения начального положения средней линии с помощью соотношения (6.7.18) следующий. Выбрав на свободной поверхности ПД на оси симметрии точку инициирования  $E$ , вершину облицовки  $O$  и значение желаемого времени достижения кумулятивного фокуса  $T$ , для различных моментов времени  $t_1$  отмечается положение фронта детонационной волны, по (6.7.18) вычисляется необходимое значение угла  $\theta$  и находится точка пересечения луча  $OA$  с соответствующим положением фронта.

Так, например, для схемы, рассмотренной в работе [42], полагая  $T = 10$  мкс,  $\delta_0/\delta_A = 1$ ,  $t_1$  принимает значения от 0 до 3 мкс, а угол  $\theta$  — от  $\pi/2$  до  $\pi/4$  соответственно. На рис. 6.93, б сплошной линией представлены результаты численного расчета (положение средней линии на моменты 0,4 и 8 мкс) в рассматриваемой выше постановке. Штрихом отмечено положение средней линии для тех же моментов времени, рассчитанное с использованием решения (6.7.16). Начальное давление на границе контакта с алюминиевой пластиной



полагалось  $P_0 \approx 280$  кбар [14]. Из (6.7.16) при  $t = 10$  мкс,  $t_1 = 0$ ,  $t^* = 2$  мкс имеем  $L \approx 4$  см. Значение  $t^*$ , учитывающее как торцевую, так и боковую разгрузки, изменяется для различных участков облицовки от 2 до 0,4 мкс при удалении от оси симметрии. Предполагается, что все элементы двигаются в точку фокуса прямолинейно.

В качестве факторов, объясняющих некоторое различие в результатах, можно отметить следующее. В аналитическом решении не принимались во внимание цилиндрическая постановка задачи и взаимодействие элементов облицовки между собой при схлопывании к оси. Закон падения давления в отраженной детонационной волне (6.7.15) не учитывает, что часть энергии ПД идет на разогрев металла, угол подхода детонационной волны к облицовке меняется, движение самой облицовки вызывает более быстрое падение давления в ПД.

Заметим, что информация о средней скорости метания, о перемещении средней линии во времени, естественно, не может в полной мере отразить картину деформирования облицовки. Например, на рис. 6.93, в представлены результаты расчета (положение отдельных частиц металла и ПД) по взрывному обжатию облицовки с параметрами, близкими к [81], но с утолщением области оси симметрии. Если в [81, 82] для облицовки со сферической формой переменной толщины наблюдалось концентрическое сжатие, а затем выброс вещества из центра, то в примере, представленном на рис. 6.93, в, процесс деформирования протекает иначе. На этапе первоначального сжатия образуется струя, которая при последующем движении подавляется стягивающейся к оси симметрии периферийной частью. Постепенно формируется T-образное тело, ориентированное широкой частью вперед по направлению взрывного метания. В ряде задач представленное решение позволяет все же на базе, например, определенного численного эксперимента определить  $t^*$  для различных участков облицовки, и далее, не учитывая заряд ВВ, можно приближенно оценить тенденцию процесса деформирования другой облицовки, несколько отличающейся от базовой.

С помощью решения (6.7.16) попытаемся по исходной геометрии задачи критериально оценить области реализации трех следующих режимов движения формируемой пологой облицовки (рис. 6.94): 1 — выворачивание облицовки наружу; 2 — плоское взрывное метание и близкие к нему режимы радиального “смятия”; 3 — захлопывание периферийных частей облицовок вперед по направлению взрывного метания.

Рассмотрим две крайние точки: точку  $O$ , расположенную на пересечении средней по толщине линии облицовки с осью симметрии  $OZ$ , и точку  $P$  на периферии облицовки, удаленную от оси на расстояние  $r$  (см. рис. 6.93).

В предположениях, сделанных ранее, расстояние, пройденное за некоторое фиксированное время  $t$  отдельным элементарным участком облицовки, описывается решением (6.7.16). Например, для точки  $O$

$$X_0(t) = \frac{P_0}{2\delta_0\rho} t_0^* \frac{t^2}{t+t_0^*}, \quad t \geq 0.$$

Пусть режим выворачивания облицовки определяется соотношением между длинами перемещений, пройденных точками  $O$  и  $P$  за некоторое достаточно большое время  $t$ . Определим параметры переходного 2-го режима (плоское деформирование), когда, очевидно, точки  $O$  и  $P$  проходят практически одинаковое расстояние вдоль оси симметрии  $OZ$ :

$$X_0(t) \approx X_p(t). \quad (6.7.19)$$

Выберем отрезок времени  $t$ , достаточный для наступления стадии установления  $dx^2/dt^2 \rightarrow 0$ , тогда  $t \gg t_1$ ,  $t \gg t_p^*$ ,  $t \gg t_0^*$ . Из (6.7.19) и с учетом (6.7.16), пренебрегая членами вида  $t_1/t$ ,  $t_0^*/t$ ,  $t_p^*/t$ , получим

$$\frac{t_0^*}{\delta_0} \approx \frac{t_p^*}{\delta_p}. \quad (6.7.20)$$

Сделаем оценку характеристик параметров разгрузки  $t_0^*$  и  $t_p^*$ . Рассмотрим сначала движение ПД вблизи оси симметрии.

Как известно [14], при изоэнтропном разлете ПД конденсированных ВВ у недеформируемой стенки в одномерном плоском случае

$$T_0^* \approx h_0/D, \quad (6.7.21)$$

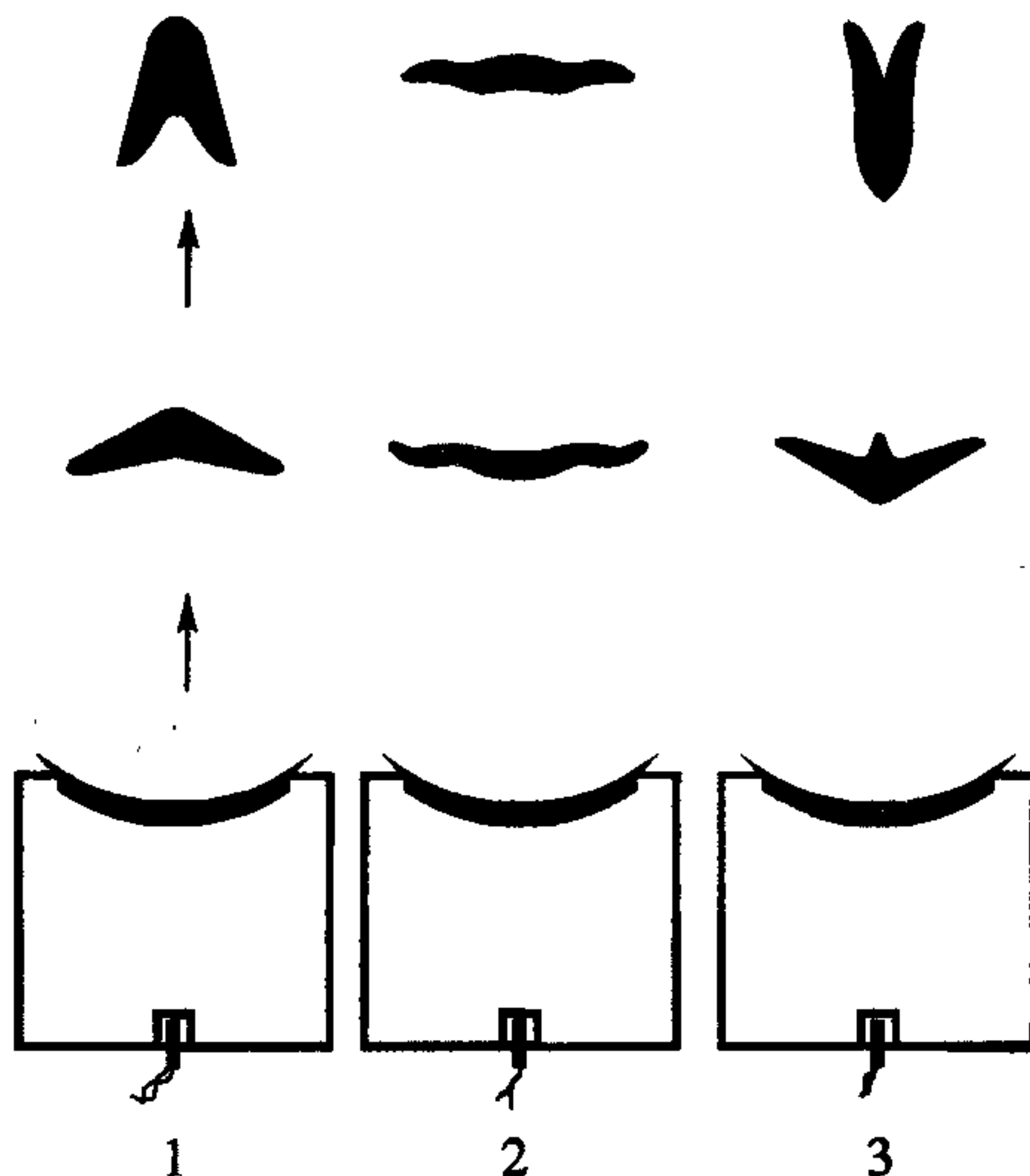


Рис. 6.94. Три режима деформирования пологих облицовок из многочисленного класса возможных конфигураций.

Поясн. см. в тексте.



где  $h_0$  — высота заряда ВВ вдоль оси симметрии,  $D$  — скорость детонации. Однако в двумерном случае с цилиндрической симметрией эта величина меньше, так как зависит от распространяющейся с боковой поверхности заряда ВВ к центру радиальной волны разрежения, т.е. можно записать, что

$$t_0^* = \xi h_0/D, \quad (6.7.22)$$

где  $\xi \leq 1$  — коэффициент, интегрально учитывающий двумерную геометрию конструкции. В частности, при  $r \gg h_0$ , когда влиянием боковой разгрузки можно пренебречь, имеем переход к одномерному случаю с  $\xi = 1$ . Для встречающихся на практике зарядов ВВ с высотой, равной диаметру, из анализа результатов численного моделирования имеем  $\xi = 0,3$ . При  $h_0 \gg r$  естественно от высоты заряда  $h_0$  перейти к его радиусу  $r$ , т.е. при пренебрежении тыльной разгрузкой имеем по аналогии с (6.7.21)

$$t_0^* \approx r/D,$$

откуда с учетом (6.7.22) получим  $\xi = r/h_0$ . Обобщая все эти случаи, можно, как показывают результаты численных экспериментов, положить в (6.7.22) для рассматриваемых цилиндрических зарядов ВВ

$$\xi = r/(r + h_0).$$

Отметим, что это значение непосредственно связано с размерами активной части заряда. Рассмотрим теперь точку Р на периферии облицовки. Расчеты показывают, что закон падения давления в ПД вблизи точки Р в меньшей степени зависит от высоты заряда  $h$  и в основном определяется ударно-волновыми процессами на периферии в радиальном направлении. Так, например, если облицовка снаружи окружена слоем ВВ радиуса  $\Delta r$  (вместо оболочки-корпуса), то при  $\Delta r < h$

$$t_p^* = \Delta r/D,$$

а в случае присутствия относительно тонкой внешней оболочки толщиной  $\delta_1$  и плотностью  $\rho_1$  величину  $\Delta r$  можно оценить, используя, например, принцип эквивалентности, заменяя инертную оболочку соответствующим внешним слоем ВВ толщиной  $\Delta r$ . Тогда

$$\Delta r = \delta_1 \rho_1 / \rho_{ВВ}.$$

Здесь  $\rho_{ВВ}$  — начальная плотность ВВ.

Таким образом, окончательно получим следующую оценку исходных параметров задачи, при которых реализуется “плоский” режим взрывного метания облицовки:

$$\frac{r}{r+h_0} \frac{h_0 \delta_p}{\Delta r \delta_0} = 1. \quad (6.7.23)$$

Соответственно режим выворачивания облицовки наружу реализуется при

$$\frac{r}{r+h_0} \frac{h_0 \delta_p}{\Delta r \delta_0} > 1.$$

В противном случае осуществляется захлопывание периферийных частей облицовки вперед.

Отметим, что при отсутствии внешней оболочки-корпуса толщину дополнительного слоя ВВ приближенно можно выбрать из соотношения  $r/\Delta r \approx 4$ . Тогда для заряда с  $h_0 \approx 2r$  из (6.7.23) получим  $\delta_p \approx 0,37\delta_0$ . При  $\delta_p > 0,37\delta_0$  имеем режим выворачивания наружу, при  $\delta_p < 0,37\delta_0$  облицовка захлопывается вперед. Это согласуется с характерными экспериментальными данными и результатами численного моделирования.

Вернемся к рассмотрению параметра  $\beta$ , характеризующего степень отбора пластиной энергии ВВ, который в основном определяется коэффициентом нагрузки  $\eta$ . Для одномерной задачи в случае свободного оттока ПД в вакуум со стороны, противоположной пластине, анализ функции  $\beta = \beta(\eta)$  представлен в разделе 6.2. На рис. 6.95 представлены значения  $\beta$ , полученные из численных расчетов взрывного метания пластин в одномерной постановке для случая, когда слева от плоскости инициирования располагается массивная свинцовая пластина (линза), а слева между ПД и ускоряемым телом в начальный момент времени имеется зазор шириной  $\Delta$  см. В расчетах параметры пластин не менялись: толщина свинцовой линзы и метаемого стального диска соответственно 2 и 0,2 см.

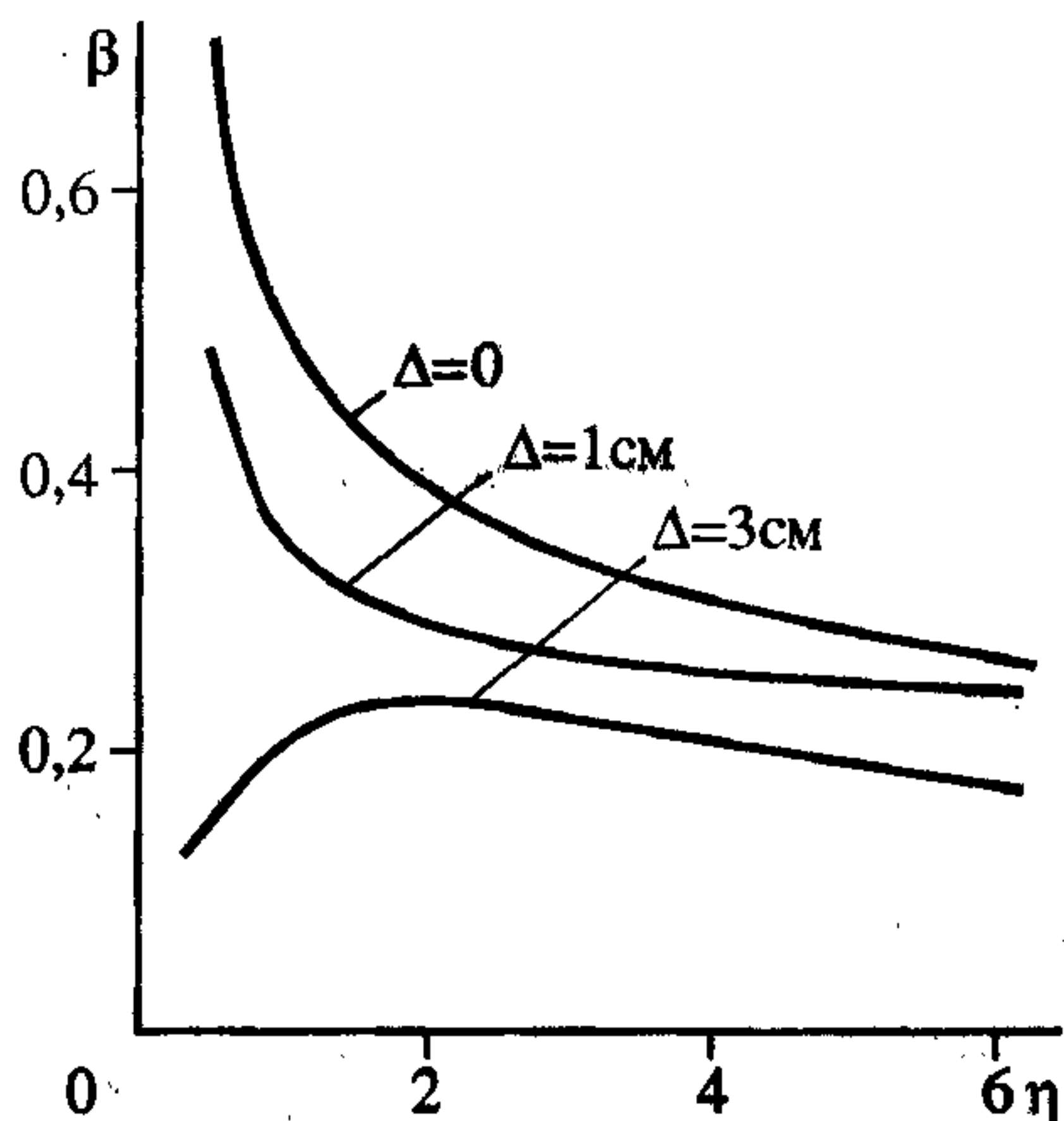


Рис. 6.95. Эффективность передачи энергии ПД  $\beta$  к метаемому телу в зависимости от коэффициента нагрузки  $\eta$ .

Поясн. см. в тексте.



Изменение  $\eta$  определялось изменением толщины слоя ВВ. С ростом  $\Delta$  наблюдается уменьшение  $\beta$ , связанное с падением давления в области разлетающихся в зазор ПД.

Отметим, что в экспериментальных исследованиях по взрывному метанию для получения одномерной картины течения, как правило, используется генератор плоской детонационной волны, который, подобно поршню, также сдерживает разгрузку с торцевой стороны заряда и тем самым влияет на процесс разгона тел, оптимальные характеристики системы и др., что затрудняет непосредственное сравнение расчетных и экспериментальных данных в указанной выше постановке задачи.

Рассмотрим задачу взрывного метания в двумерной постановке. Пусть имеется открытый (без внешней оболочки) осесимметричный цилиндрический заряд ВВ высотой  $h$  радиусом  $r$ , ускоряющий пластину толщиной  $\delta$  и того же радиуса  $r$ . Инициирование производится в осевой точке на свободной поверхности заряда. Проведенная в настоящей работе серия двумерных численных расчетов модифицированным методом частиц в ячейках позволила сделать вывод о возможности использования простых соотношений для оценки кинематических характеристик задачи путем введения вместо  $\eta$  некоторого эффективного коэффициента нагрузки  $\eta^*$ .

Действительно, предполагая равномерность потока импульса разлета ПД с поверхности заряда ВВ, введем подобно [14] объем активной массы заряда, интегрально учитывающий его конфигурацию:

$$V_a = \frac{S_k}{S} V_{ВВ},$$

где  $V_{ВВ}$  — начальный объем ВВ,  $S$  — общая площадь его поверхности,  $S_k$  — начальная площадь контакта ПД и пластины. Тогда в одномерном случае при истечении ПД слева в вакуум имеем  $S = 2S_k$ ,  $V_a = 0,5V_{ВВ}$ , а для открытого цилиндрического заряда  $V_a = 0,5(r/(r+h))V_{ВВ}$ . Воспользовавшись этим, введем в рассмотрение эффективный коэффициент нагрузки

$$\eta^* = 2 \frac{S_k}{S} \eta = \frac{r}{r+h} \eta = \xi \frac{h}{k}, \quad (6.7.24)$$

где  $\xi = r/(r+h)$ ,  $k = \delta\rho/\rho_{ВВ}$ ,  $\eta = h/k$ . Определим среднюю скорость деформируемой пластины как

$$u^* = \left( \frac{1}{M} \int_V u^2 \rho dV \right)^{1/2},$$

где  $V, M$  — объем и масса пластины,  $u$  — массовая скорость. Предполагая, что действие на пластину заданной активной массы ВВ не зависит существенно от конкретных геометрических параметров задачи, воспользуемся решением [14]:

$$\frac{u}{D} = 1 + \frac{27}{16\eta} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{32}{27}\eta} \right), \quad (6.7.25)$$

определяющим  $u(\eta)$  для оценки значения  $u^*(\eta^*)$ . Границы применимости такого подхода исследованы численно в интервале  $0,2 \leq \beta \leq 7$  (при этом  $\eta$  меняется от 0,5 до 25). Проведены двумерные расчеты цилиндрических открытых систем для различных  $r, h, \delta, \rho_{ВВ}, \rho, e_0$ . Вычисление  $u^*$  осуществлялось суммированием кинетических энергий частиц, соответствующих пластине. Сопоставление аналитической зависимости  $u^*(\eta^*)$  и результатов расчетов дает их хорошее согласие. Как следствие этого, наблюдается удовлетворительное совпадение (рис. 6.96) расчетных (точки) и полученных по формуле (6.2.2) (сплошная линия) КПЭ, где для двумерных систем вместо  $\beta$  нанесены значения  $\beta^*(\eta^*)$ :

$$\beta^*(\eta^*) = \frac{8(u^*)^2}{D^2\eta^*}, \quad \beta = \xi\beta^*.$$

Предполагая справедливость зависимостей (6.7.25) и (6.2.2) для  $\beta^*$ , рассмотрим способы повышения эффективности действия цилиндрического заряда путем изменения его геометрических характеристик.

а. Пусть фиксированы  $\rho_{ВВ}, D, V_{ВВ}, \delta, \rho$  и требуется выбрать оптимальные  $r$  и  $h$ , при которых достигается наивысшая скорость метания  $u^*$ . Для этого найдем в силу монотонности зависимости (6.7.25) максимум  $\eta^*$ . Тогда из условий  $d\eta^*/dr = 0, d^2\eta^*/dr^2 < 0$  при известной величине  $k$ , подставляя в (6.7.24)  $h = V_{ВВ}/\pi r^2$ , получим  $r = (V_{ВВ}/2\pi)^{1/3}$  или  $r = h/2$ .

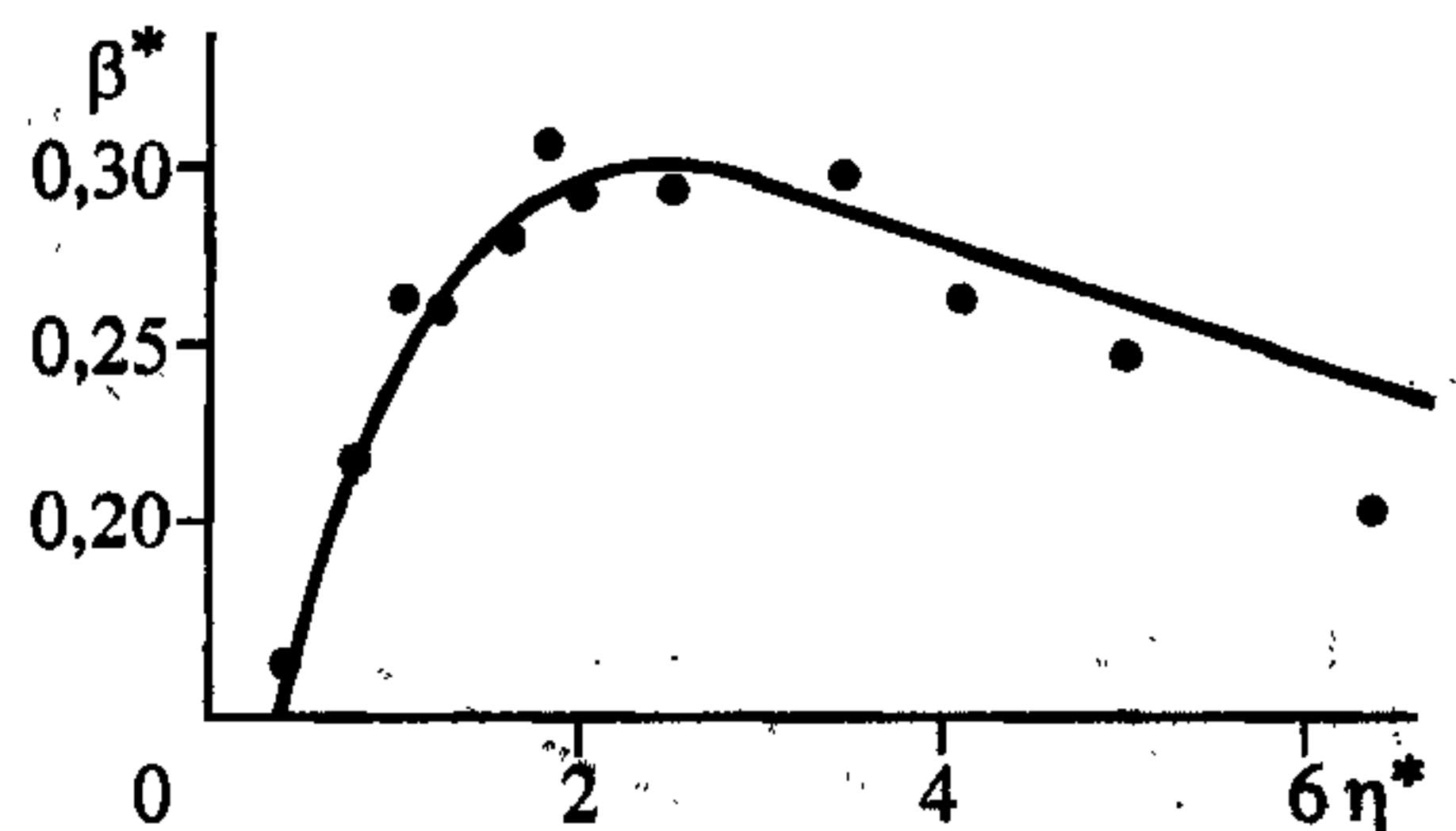


Рис. 6.96. Коэффициент передачи энергии  $\beta^*$  в зависимости от коэффициента нагрузки  $\eta^*$ .

Точки — результаты численных расчетов, линия — приближенная формула.



б. Пусть фиксировано отношение  $r/h$  (т.е.  $\xi = \text{const}$ ). Поскольку для рассматриваемых цилиндрических зарядов  $u^*$  является функцией  $\eta^*$ , то значение  $\beta^*(\eta^*)$  определяется формулой (6.2.2) при замене  $\eta$  на  $\eta^*$ . Тогда максимум  $\beta$ , как и  $\beta^*$ , достигается при  $\eta^* = 81/32$ , что можно записать в виде

$$\delta = h\xi \frac{32}{81} \rho_{\text{ВВ}} / \rho. \quad (6.7.26)$$

На рис. 6.97 представлены графики зависимости (6.7.26) при  $h = 4r$  между близкими к оптимальным по КПЭ толщиной пластины  $\delta$  и радиусом заряда  $r$  для некоторых материалов пластины (параметры ВВ:  $\rho_{\text{ВВ}} = 1,65 \text{ г/см}^3$ ,  $D = 0,81 \text{ см/мкс}$ ).

с. Пусть фиксированы  $r$  и  $k$ . Тогда условия максимума  $\beta$  по  $h$  приводят к соотношению

$$h^2(32r + 27k) + h(32r^2 + 54kr) - 81kr^2 = 0$$

для определения  $h$ ,  $0 \leq h < r$ .

Отметим отдельные аспекты численного решения рассматриваемых в настоящем разделе задач. При моделировании разрушений растягивающие напряжения ограничивались величиной  $\sigma_{\text{кр}}$ , равной динамическому пределу прочности данного материала на разрыв. Непрореагировавшее ВВ описывалось “холодным” уравнением состояния твердого тела в виде

$$P = c_0^2(\rho - \rho_0),$$

а при достижении плотности в ячейке некоторого критического значения  $\rho^* = 0,95\rho_n$ , где  $\rho_n$  — теоретическое значение плотности за нормальной детонационной волной, осуществлялся мгновенный переход на уравнение состояния идеального газа

$$P = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$$

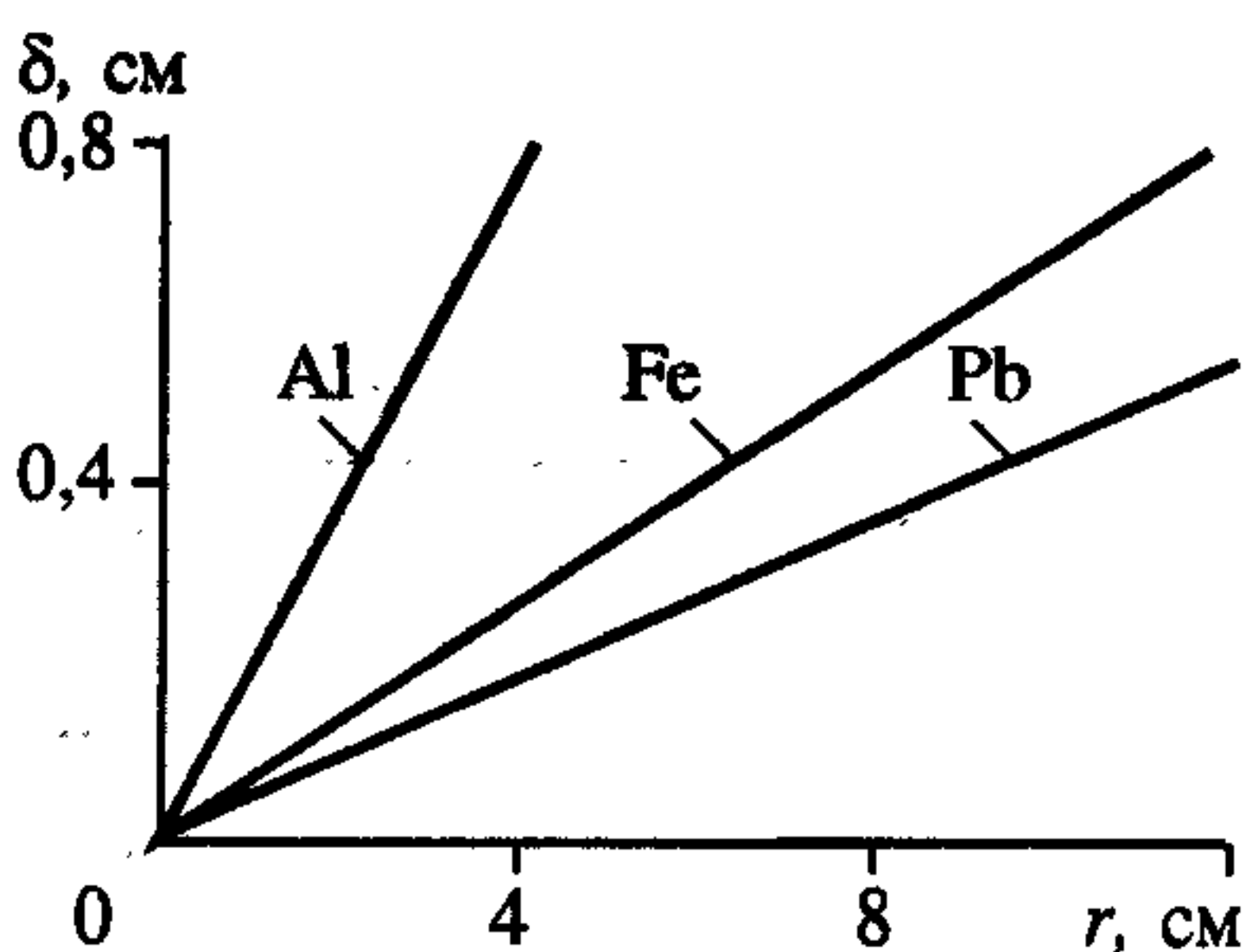


Рис. 6.97. Зависимость (6.7.26) для трех материалов.

с одновременным выделением соответствующей энергии взрыва в данной ячейке. Правильность подбора параметров уравнения состояния для ВВ контролировалась по выходу детонационной волны на автомобильное решение. Заметим, что для постоянного  $\gamma = \gamma_0$  при численном решении задачи взрывного

разгона тел с учетом зазора наблюдается эффект завышения скорости метания пластин по сравнению с данными эксперимента. Действительно, для малых плотностей ПД при  $\rho_{ВВ} \rightarrow 0 \gamma \rightarrow 1,4$  [14], поэтому в расчетах полагалось

$$\gamma = \begin{cases} 1,4 + (\gamma_0 - 1,4)\rho/\rho_0, & \rho < \rho_0, \\ \gamma_0, & \rho \geq \rho_0. \end{cases}$$

### 6.7.2. Численное исследование деформирования и взрывного метания пологих облицовок

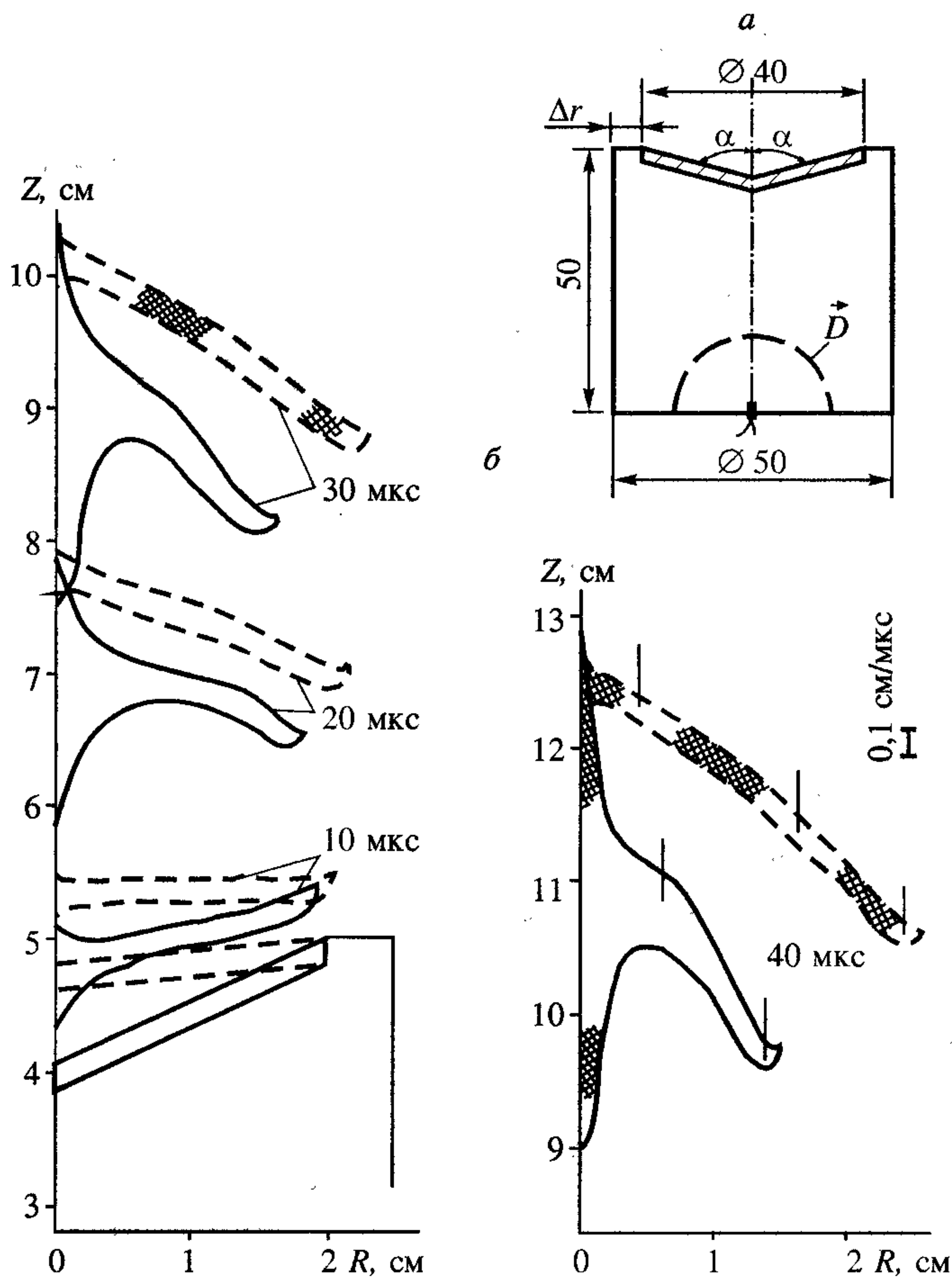
Рассмотрим несколько типичных результатов расчетов процесса взрывного метания и деформирования пологой облицовки. За основу выбраны параметры следующей конструкции: ВВ — ТГ 50/50,  $D = 0,76$  см/мкс, высота и диаметр цилиндрического заряда 50 мм, детонация на тыльной поверхности ВВ в осевой точке, облицовка — медь или мягкая сталь, радиус облицовки вдоль оси ОР 20 мм, характерная ее толщина 2 мм, характерный прогиб  $P_r = 0,1—0,2$ , коэффициент нагрузки  $\approx 5$ .

Влияние исходного прогиба конической облицовки на процесс ее деформирования демонстрирует рис. 6.98. Динамика движения медной облицовки с  $2\alpha = 130^\circ$ ,  $P_r = 0,23$  показана на рис. 6.98, б сплошной линией, а с  $2\alpha = 170^\circ$   $P_r = 0,05$  — штриховой. С увеличением  $P_r$  естественно усиливается кумулятивный эффект, причем при  $P_r = 0,23$  радиальная составляющая скорости на момент времени 10 мкс около  $u \approx 0,06$  см/мкс. При  $t = 30$  мкс скорость лидирующей части  $v \approx 0,27$  см/мкс, а “песта” — 0,15 см/мкс (область разрушенной среды заштрихована).

При увеличении угла ( $2\alpha = 170^\circ$ ) в процессе импульсной нагрузки вектор перемещений элементов облицовки приобретает радиальную компоненту  $u$ , направленную от оси симметрии. Так, в крайней периферийной области облицовки  $u = 0,017$  см/мкс при  $t = 20$  мкс. Даже у оси симметрии  $u > 0$ . При  $t \approx 30$  мкс образуются зоны разрушенной среды.

При промежуточном значении прогиба облицовки из мягкой стали  $P_r = 0,125$  ( $\gamma_0 = 7$  кбар,  $\mu = 810$  кбар,  $2\alpha = 150^\circ$ ) скорость  $u$  не превышает 0,03 см/мкс и в процессе метания облицовка деформируется в относительно компактное тело (рис. 6.99). Основное отличие движения этой облицовки от





**Рис. 6.98.** Влияние начального прогиба конической облицовки на процесс ее деформирования.

Поясн. см. в тексте.

медной состоит в том, что она имеет более высокую скорость и более слабый эффект струеобразования у оси из-за худших пластических свойств стали по сравнению с медью (при  $t = 40$  мкс скорость стальной оболочки  $0,212$  см/мкс, медной —  $0,195$ ).

Одним из возможным способов уменьшения градиентов импульсной нагрузки на облицовку является введение зазора с ВВ. Результаты расчета деформирования медной конической облицовки толщиной  $2$  мм с  $2\alpha = 140^\circ$  и конусообразным зазором показаны на рис. 6.100. Газокумулятивный поток ПД приводит сначала к внешнему изгибу, а потом к выворачиванию с последующим разрушением облицовки (штрих — глубокий зазор с  $2\alpha = 170^\circ$ , сплошная

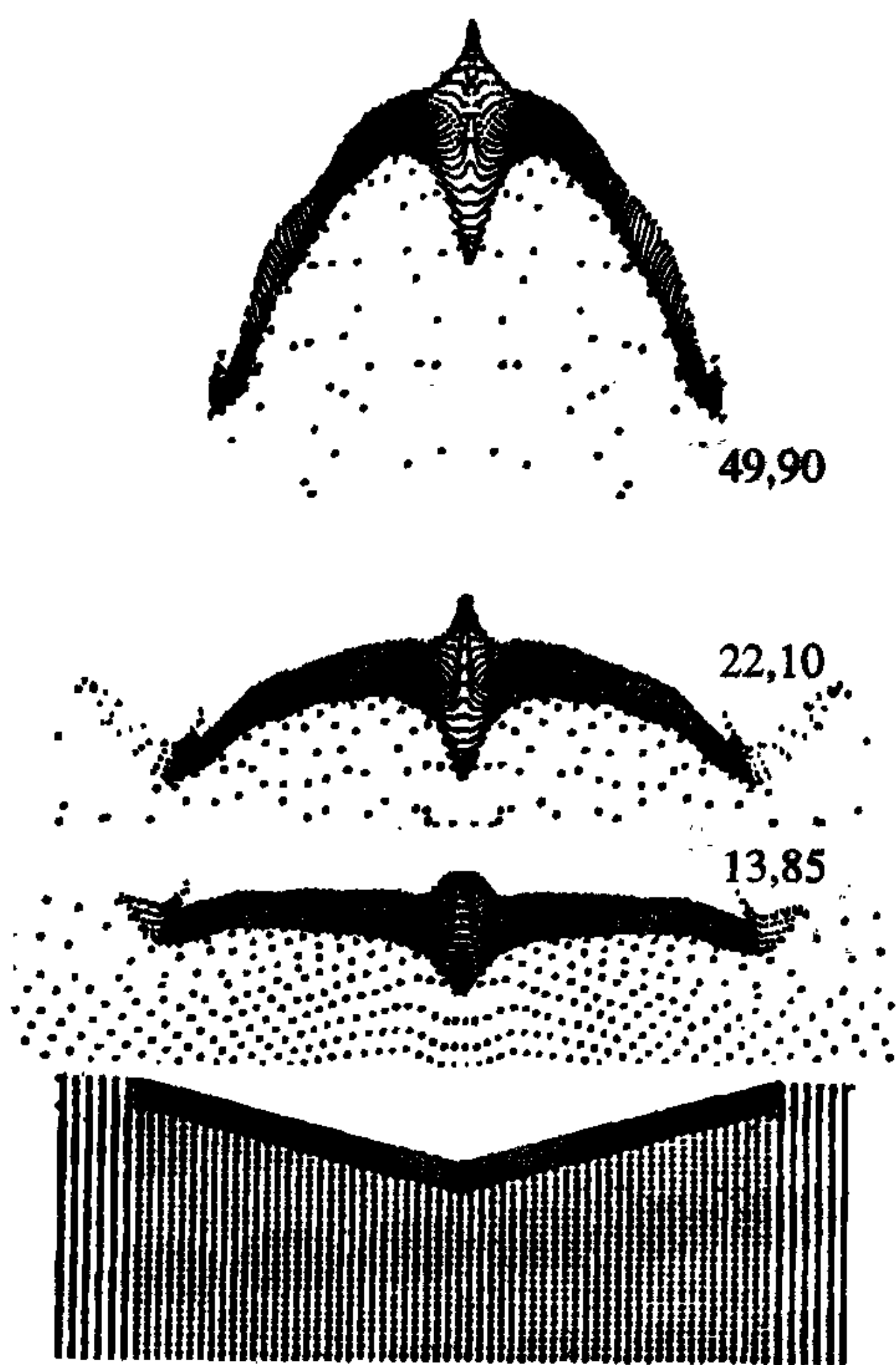


Рис. 6.99. Результаты численного расчета деформирования пологой облицовки под действием продуктов детонации ВВ.

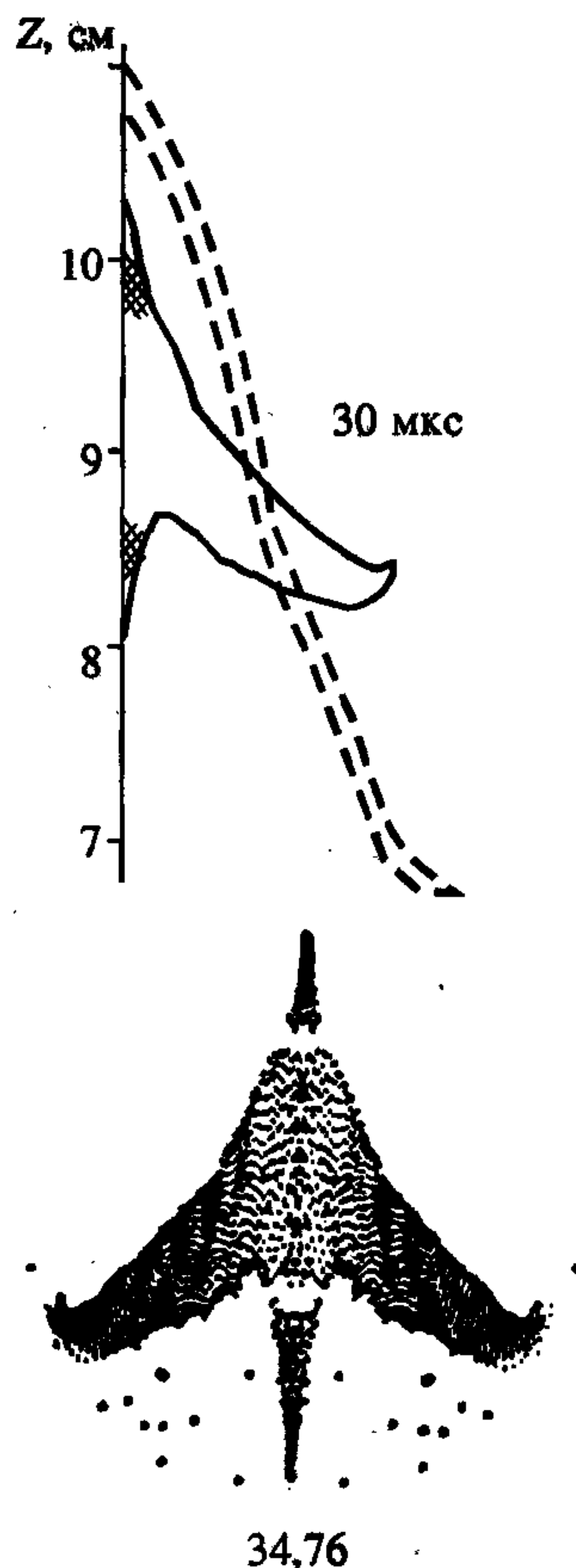


Рис. 6.100. Влияние зазора между ВВ и облицовкой на процесс деформирования метаемого тела.

линия — с  $2\alpha = 90^\circ$ , когда поток не успевает сформироваться и реализуется более “мягкий” режим деформирования). Масса разрушаемого материала составляет около 6% от всей массы облицовки.

Другой способ формирования целостного удлиненного элемента — это использование пологих облицовок, профиль которых у оси симметрии характеризуется углом  $\alpha$ , близким к прямому. В этом случае  $\alpha + \varphi/2 \geq \pi/2$  (где  $\varphi$  — угол разворота соответствующего фрагмента облицовки) интенсивность схлопывания в области оси мала на начальном этапе, а струя и “пест” практически не различаются [42].

Рассмотрим движение облицовок, имеющих  $P_r = 0,1 \div 0,18$ . Пусть профиль облицовки (мягкая сталь) сферический, т.е. облицовка — сегмент сферы радиуса  $R_1 = 3$  см ( $P_r = 0,18$ , сплошная линия на рис. 6.101) или  $R_1 = 5$  см ( $P_r =$



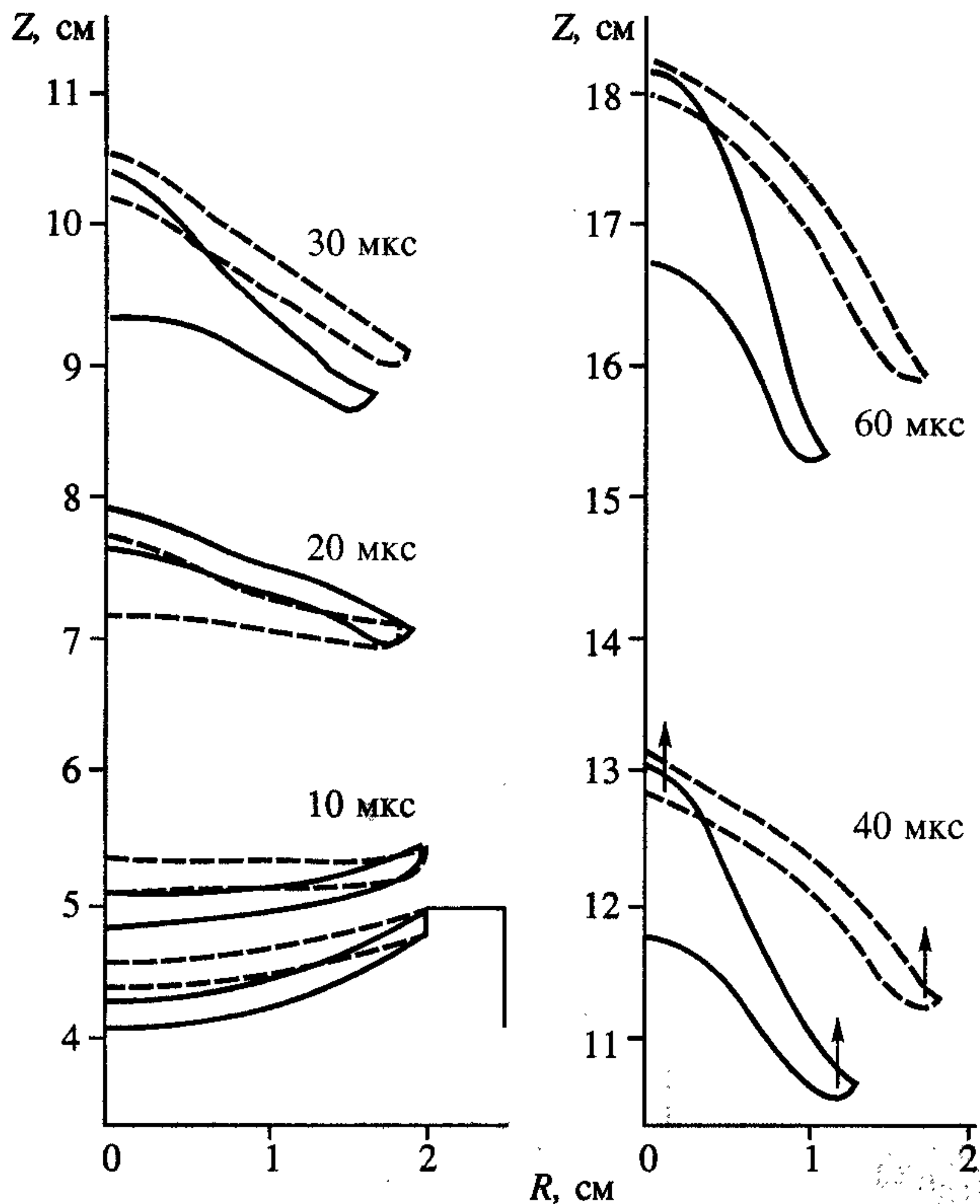


Рис. 6.101. Расчет деформирования сферических облицовок с разными прогибами.

= 0,1, штрих). В этих случаях при  $t = 40$  мкс происходит выворачивание облицовки наружу с образованием целостного элемента, который имеет затупленную вершину и полость в основании. Здесь деформирование среды осуществляется с меньшими градиентами, чем при конусообразных телах с тем же начальным прогибом. Несмотря на имеющееся в начале движения отличие в осевой компоненте скорости (при  $P_r = 0,18$  и  $t = 20$  мкс  $v^{\max} = 0,23$  см/мкс,  $v^{\min} = 0,18$  см/мкс), в процес-

се деформирования происходит постепенное выравнивание скорости.

Расчеты показали, что наибольшее удлинение целостных стальных тел, формируемых из сферической облицовки, равно  $3 \div 3,5$ . Однако в ряде случаев (например, [83]) можно достичь большего удлинения (до 5), если деформировать взрывом пологую облицовку, утончающуюся к периферии от оси симметрии. В этом случае осуществляется захлопывание периферийных частей облицовки вперед по направлению движения, а образующаяся на начальной стадии кумулятивная струя оказывается внутри формируемого тела. Интенсивность подобного процесса существенно зависит от геометрических и физических характеристик облицовки. На рис. 6.102 штриховой линией показаны результаты расчета процесса деформирования конусообразной медной облицовки, толщина которой уменьшается от 2,7 мм на оси до 0,8 мм на периферии ( $P_r = 0,133$ ). Действие боковой разгрузки со стороны свободной поверхности и градиент осевой скорости металла приводят к достижению критических напряжений, и формируемое тело разделяется на фрагменты. Сплошной линией на рис. 6.102

показана стальная облицовка с  $P_r = 0,09$ , являющаяся сегментом гиперboloида (толщина изменяется от 2 мм у оси до 0,65 на периферии). Относительная монотонность функции течения при компактировании среды приводит к целостному элементу (при  $t = 60$  мкс его скорость 0,23 см/мкс). Особенностью тел, сформированных захлопыванием облицовки вперед по ходу движения, является их невысокая аэродинамическая устойчивость при движении в атмосфере.

Из многообразия рассмотренных схем метания продемонстрируем две, из которых в одной применяется многоступенчатый метод, а в другой — облицовка имеет утолщение в области оси симметрии или зазор с ВВ.

Начальная геометрия первой конструкции приведена на рис. 6.103. Инициирование заряда ТГ 50/50 первой ступени при  $t=0$  осуществляется по внешней окружности в тыльной части заряда, а ВВ второго каскада детонирует вследствие его компрессии стальной конической облицовкой с начальным углом раствора  $2\alpha = 90^\circ$ . Схождение ДВ на оси симметрии обуславливает относительно повышенные давления в этой области течения, развитие нестационарного режима детонации. Так, например, в момент  $t=5$  мкс выхода фронта ДВ к вершине облицовки второго каскада имеем  $P=510$  кбар. Развитие здесь эффектов кумулятивного течения металла демпфируется действием ПД второго каскада. Облицовка второй ступени более пологая:  $2\alpha = 160^\circ$ . Пересжатый режим детонации второго каскада, его замкнутость и отсутствие свободных поверхностей приводят к тому, что обе облицовки на более поздней стадии

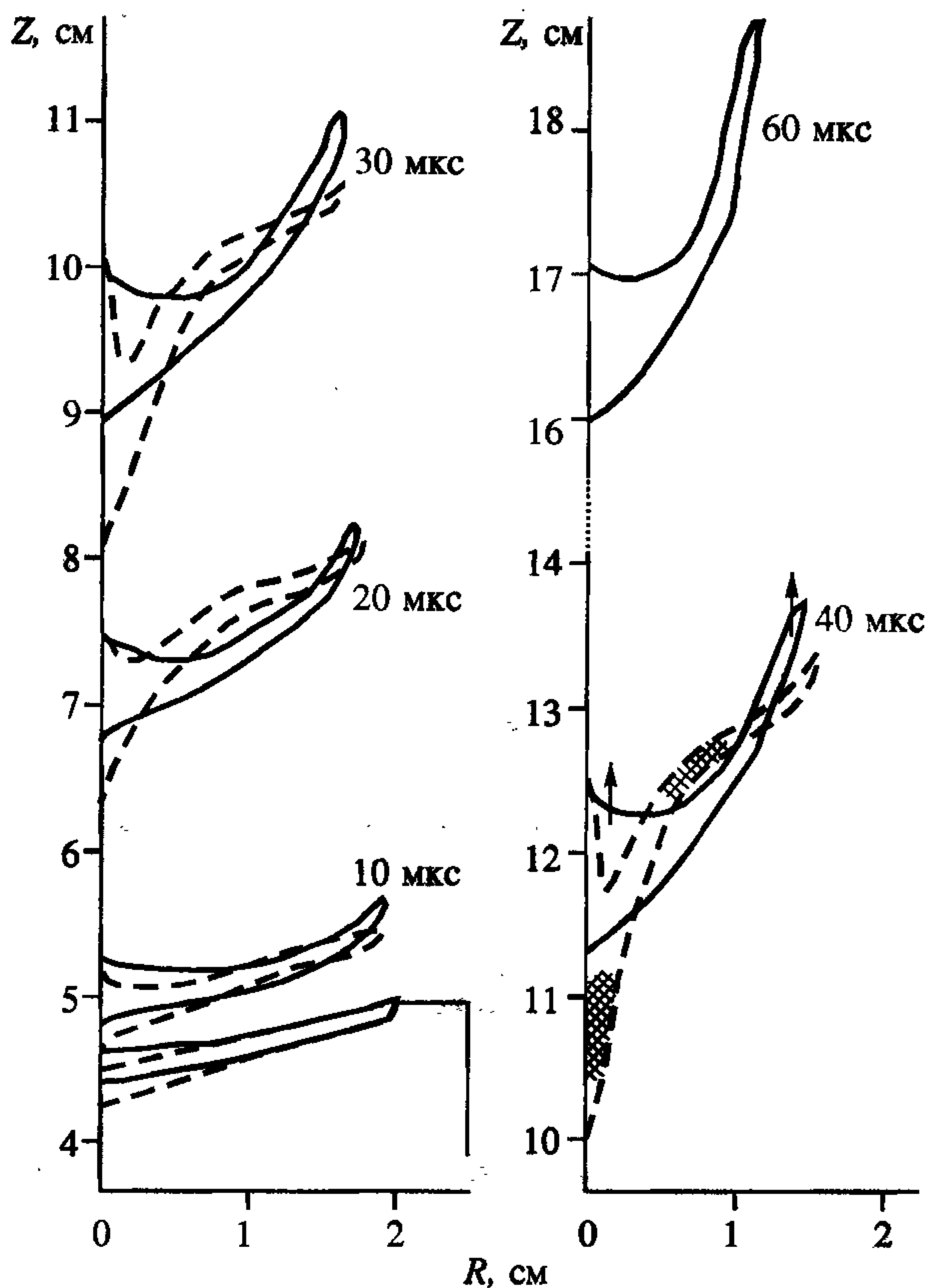
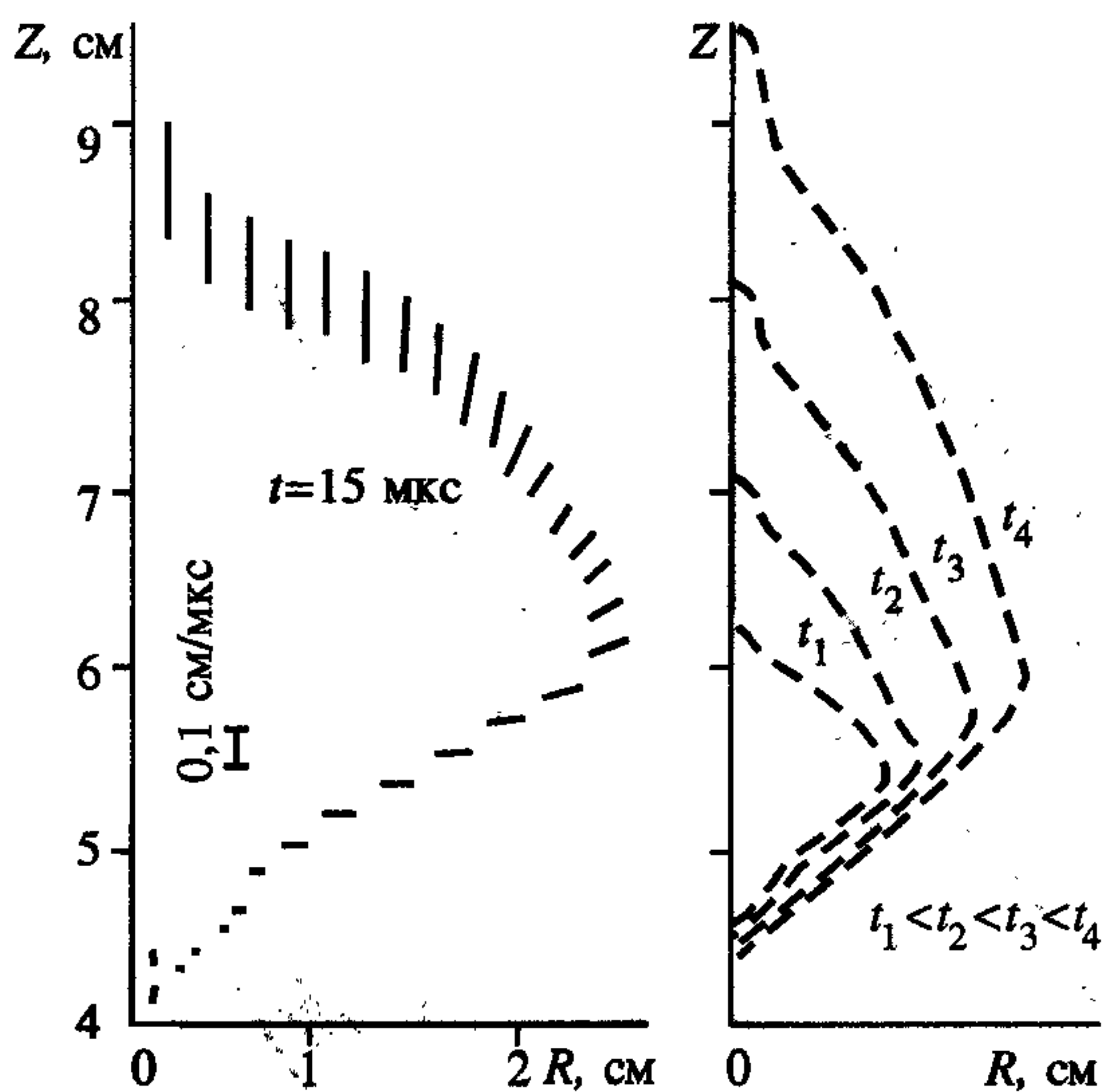


Рис. 6.102. Метание пологих облицовок, утончающихся на периферии от оси симметрии, при различной степени прогиба.





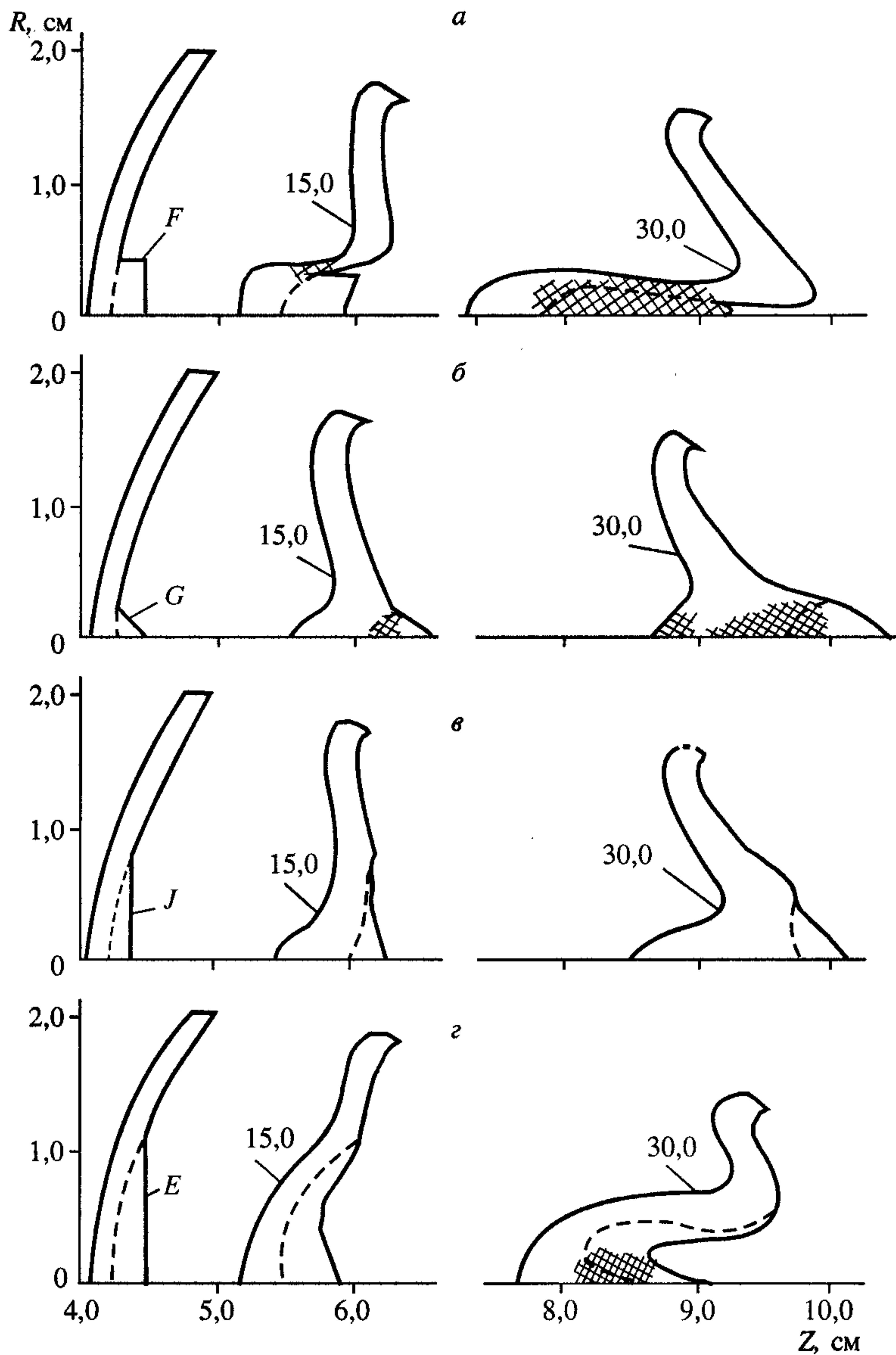
**Рис. 6.103.** Поле характерных векторов скорости и распределение в пространстве элементов облицовок в двухступенчатой схеме (см. рис. 6.60).

Поясн. см. в тексте.

“раскрываются”, разрушаясь и образуя объемный поток частиц. На рис. 6.103 нанесены также отдельные вектора скорости различных участков облицовки на момент времени  $t=15$  мкс, распределение частиц-масс на три момента времени и показана динамика разлета облицовок. Наблюдаемый эффект “выдавливания” центральной части второй облицовки обусловлен наличием вблизи оси симметрии локальной концентрации значительной энергии сходящихся ДВ и, соответственно, повышенным давлением в ПД.

Известно, что при деформировании взрывом облицовки из мягкой стали или меди постоянной толщины и являющейся сегментом сферы с прогибом  $0,12 \div 1,18$  и соответствующим зарядом ВВ удастся получить целостные тела со смещенным вперед центром масс и выпуклой головной частью. С целью увеличения массы металла в головной части формируемого тела рассмотрим облицовку, имеющую в начальный момент времени утолщение в приосевой области с внешней стороны.

На рис. 6.104 показана динамика деформирования указанной облицовки (время отсчитывается от момента инициирования цилиндрического заряда ТГ 50/50 в осевой точке на свободной поверхности). Высота и диаметр заряда ВВ — 50 мм. Штриховой линией отмечено положение условной внутренней границы дополнительной массы металла, добавленной к двухмиллиметровой облицовке из мягкой стали постоянной толщины с прогибом  $0,18$  и являющейся сегментом сферы радиуса 30 мм. Динамика деформирования облицовки с введением дополнительного диска толщиной, соизмеримой с толщиной облицовки, показана на рис. 6.104, а. Здесь процесс на начальной стадии близок к внедрению ударника (т.е. дополнительной массы) в преграду (облицовку). На рисунке заштрихованы области, где растягивающие напряжения достигли кри-



**Рис. 6.104.** Результаты численных расчетов деформирования полой облицовки, имеющей утолщение в области оси симметрии (заштрихованы области разрушенной среды).

*F, G, J, E* — дополнительная масса металла.

тических значений и среда находится в разрушенном состоянии.

При введении дополнительной массы конической формы (рис. 6.104, б) за счет интерференции ударных волн и волн разрежения на участке *G* происходит





### **6.7.3. Взрывное метание и деформирование пологой облицовки, аэродинамика сформированного тела и его удар по преграде**

Процессы взрывного метания пластин, облицовок, оболочек, как правило, связаны с последующим ударом тел о преграду или исследуемые образцы материалов. Причем если расстояние от заряда до преграды составляет десятки калибров, то на конечные результаты могут повлиять и силы аэродинамического сопротивления воздуха. Действительно, как известно из результатов экспериментальных исследований, процесс обжата продуктами детонации тонкой осесимметричной облицовки и полет сформированного взрывом тела в атмосфере зачастую характеризуются неустойчивостью, которая может проявляться различным образом, например: в придании деформируемой облицовке в процессе ее схлопывания формы, существенно отличной от осесимметричной; в появлении у формируемого тела (или у образовавшихся при его разрушении фрагментов) отличных от нуля моментов вращения относительно одной или нескольких пространственных осей.

Причины возникновения неустойчивости для рассматриваемой задачи весьма многообразны. Это, например, неустойчивость, связанная с несовершенством технологии изготовления конструкции, приводящая к нарушению исходной осесимметричности (смещение точки инициирования от оси симметрии, нарушение центровки размещения облицовки, разноплотность ВВ и др.). Кроме того, сама сложная физика явления предполагает наличие различных локальных возмущающих факторов. Это может быть и ячеистая структура распространения детонации, нестационарность процесса схлопывания металла к оси симметрии, неравномерное распределение повреждений в материале облицовки, и многое другое.

В общем случае для исследования динамической устойчивости движения формируемых взрывом тел необходимо рассматривать весь процесс взрывного обжата облицовок и их разгона в целом — все последовательные стадии деформирования металла и нестационарного полета тела в атмосфере в трехмерной постановке и с учетом возможных возмущающих факторов. На современной вычислительной технике осуществление даже единичного подобного численного эксперимента представляется весьма затруднительным. Однако заметим, что если при взрывном обжате облицовки сформировалось тело, характеризующееся целостностью и большим запасом аэродинамической статиче-



ской устойчивости, то для него, по-видимому, нецелесообразно проводить весь сложный комплекс расчетов. Очевидно, что в конечном итоге такое тело будет двигаться практически поступательно. Для определения условий устойчивого аэродинамического движения ставится задача трехмерного вязкого обтекания различных наиболее характерных тел сверхзвуковым потоком газа при наличии отличного от нуля угла атаки. Ее решение, в частности, позволяет определить для рассматриваемых модельных элементов коэффициент продольной статической аэродинамической устойчивости.

В плане численного моделирования комплексной задачи от момента детонации ВВ до завершения процессов удара с преградой в литературе практически отсутствует ее решение в полной постановке.

С учетом имеющегося в ИТПМ СО РАН опыта численного решения задач аэродинамики, удара и метания тел была осуществлена физико-математическая постановка комплексной задачи о деформировании пологой оболочки при воздействии на нее продуктов взрыва, разгоне формируемого тела, его полете в атмосфере и взаимодействии с преградой. Здесь фактически стоял вопрос о применении разработанных комплексов программ [84—87] к предлагаемой постановке, сделав необходимые модификации.

С учетом особенностей рассматриваемых процессов (большие деформации, ударные и детонационные волны, разрушение, пограничный слой и т.д.) расчет каждого этапа движения выполняется методом, отражающим специфику процесса. Многолетний опыт специалистов научной школы Н. Н. Яненко показал, что алгоритмы, построенные на основе методов расщепления, перестраиваемых и подвижных конечно-разностных сеток, метода частиц в ячейках, гибридных методик, позволяют достаточно эффективно решать названный класс задач механики сплошной среды [88].

На рис. 6.106 представлена качественная геометрия комплексной задачи [88]. На первой стадии производится расчет взрывного метания облицовки в двумерной постановке (задача 1, рис. 6.106, а), на второй — определяются аэродинамические характеристики осесимметричного метаемого тела, движущегося под углом атаки (задача 2, рис. 6.106, б), на третьей — моделирование высокоскоростного удара тела с металлической преградой (задача 3, рис. 6.106, в).

Целью решения данной задачи является:

замкнуть в единую расчетную цепочку следующие последовательные физические процессы: взрывное обжатие облицовки, разгон формируемого тела,

его полет в атмосфере и взаимодействие с преградой;

определить аэродинамические характеристики обтекаемого потоком газа модельного элемента, в частности, его коэффициент продольной статической устойчивости.

Для описания движения сжимаемой упруговязкопластической теплопроводной среды при отсутствии внешних сил запишем систему дифференциальных уравнений (для простоты в декартовых эйлеровых координатах  $x_1, x_2, x_3$ ) в векторном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial W^\alpha}{\partial x_\alpha} = 0,$$

где вектора

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ \rho \varepsilon \end{pmatrix}, \quad W^\alpha = \begin{pmatrix} \rho v_\alpha \\ \rho v_\alpha v_1 - \sigma_{\alpha 1} \\ \rho v_\alpha v_2 - \sigma_{\alpha 2} \\ \rho v_\alpha v_3 - \sigma_{\alpha 3} \\ \rho v_\alpha \varepsilon - \sum_{\beta=1}^3 v_\beta \sigma_{\alpha \beta} + q_\alpha \end{pmatrix} \quad (6.7.27)$$

( $\alpha = 1, 2, 3$ ). Здесь  $v_1, v_2, v_3$  — компоненты вектора скорости  $v$  по соответствующим координатам;  $\rho$  — плотность;  $\varepsilon = e + |v|^2/2$  — полная удельная энергия;  $q = -\zeta \partial T / \partial x_\alpha$ ;  $T$  — температура, К;  $\zeta = \zeta(T)$  — коэффициент теплопроводности;  $\|\sigma_{\alpha\beta}\|$  — тензор напряжений, связанный с девиаторной частью  $\|S_{\alpha\beta}\|$  по формуле  $\sigma_{\alpha\beta} = -P\delta^{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}$ ;  $P = -1/3 \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_{\alpha\alpha}$ , где  $P = P(\rho, e)$  — гидростатическое

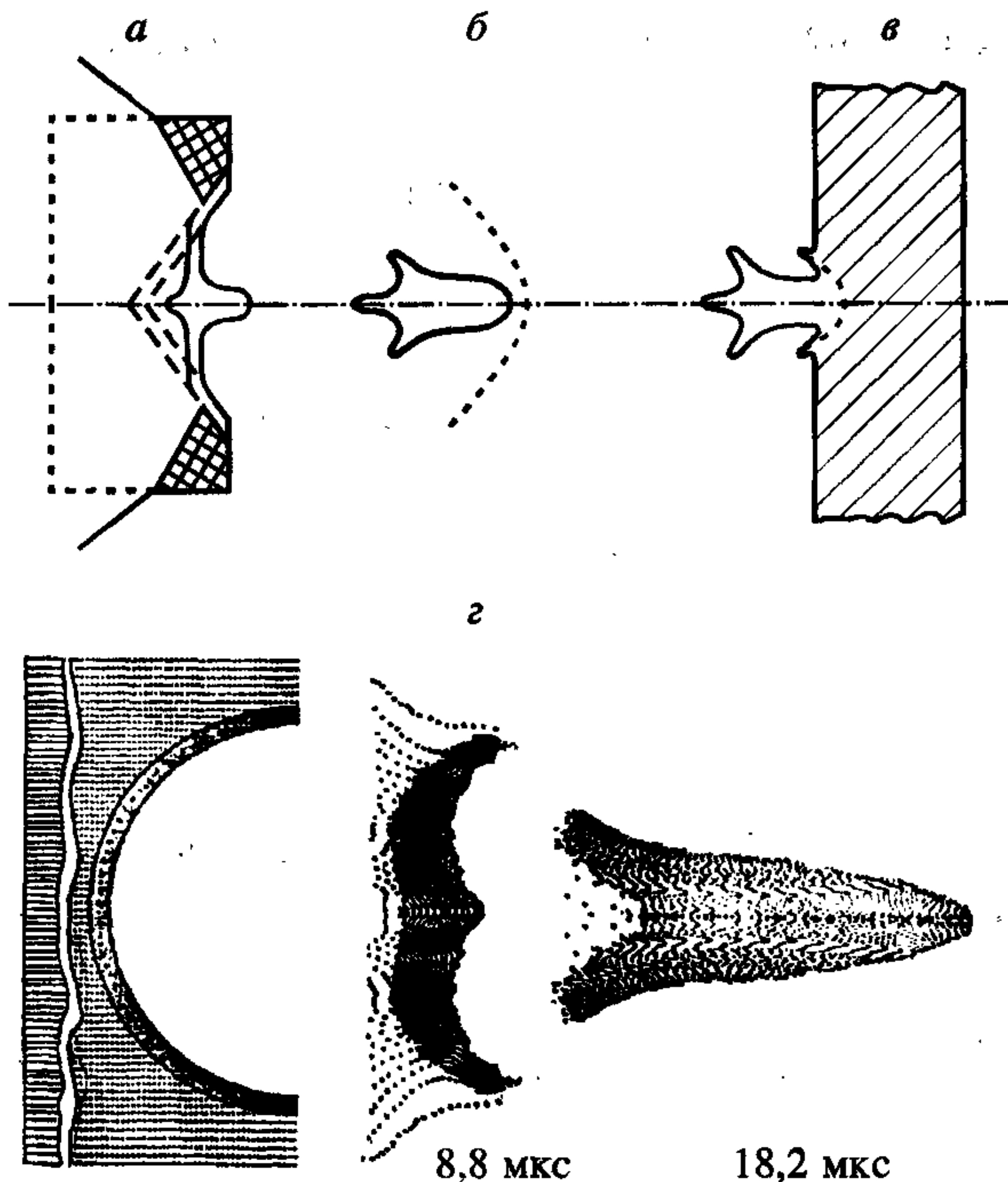


Рис. 6.106. Качественная картина задачи о метании пологой облицовки и соударении сформированного в процессе движения тела с преградой (а—в, задачи 1—3 соответственно) и пример расчета формирования аэродинамически устойчивого тела (г).



давление, определяемое из уравнения состояния рассматриваемого материала;  $\delta^{\alpha\beta}$  — символ Кронекера.

Конкретизация математических моделей заключается в определении компонент девиатора тензора напряжений  $S_{\alpha\beta}$ . Рассмотрим характерные для рассматриваемой задачи замыкания системы (6.7.27):

1. Вязкая теплопроводная жидкость —

$$S_{\alpha\beta} = 2\eta(\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} - 1/3\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}\delta^{\alpha\beta}) + \xi\delta^{\alpha\beta}\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}, \quad \zeta \neq 0, \quad (6.7.28)$$

где  $\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}\right)$  — компоненты тензора скоростей деформаций,  $\eta, \xi$  —

коэффициенты вязкости. Система (6.7.27)—(6.7.28) есть уравнения Навье—Стокса.

2. Продукты детонации — идеальный нетеплопроводный газ  $P = (\gamma - 1)\rho e$ ,  $\zeta = 0$ ,  $S_{\alpha\beta} \equiv 0$ ,  $\gamma$  — показатель политропы.

3. Идеальная упругопластическая среда —

$$\frac{DS_{\alpha\beta}}{Dt} + \lambda S_{\alpha\beta} = \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}, \quad (6.7.29)$$

где  $\frac{D}{Dt}$  — производная по Яуману. Модель Прандтля—Рейсса  $S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \leq 2/3 Y_0^2$ ,

$\lambda = 0$  — в упругой области и  $\lambda \neq 0$  — в пластической. Соответствующее замыкание системы (6.7.27) и постановка начально-краевых условий выбираются в зависимости от рассматриваемого физического процесса, применяемого метода, обеспечения необходимой точности.

**Задача 1.** Применена модель идеальной детонации (геометрически стационарная или модель детонирования по критическому сжатию). Движение ПД описывается уравнениями газовой динамики. Для описания напряженно-деформированного состояния облицовки применяется модель Прандтля—Рейсса. Задача решается методом частиц в ячейках, модифицированным для расчета упругопластических течений с применением методики перестройки эйлеровой сетки.

**Задача 2.** Применена модель сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Область численного интегрирования делится на сегменты, в каждом из которых применяется необходимая модель процесса в двумерной или трехмерной постановке [86]. Последовательное решение задачи в каждом сегменте позво-

шении уравнений Навье—Стокса использовалась сетка  $N_1 \times N_2$  с сильным сгущением узлов к поверхности тела в зону пограничного слоя (см. рис. 6.107). Во второй подобласти (“боковая поверхность”) применялись сетки  $N_1 \times N_2 = 17 \times 11$  (равномерная) при решении уравнений Эйлера и  $N_1 \times N_2 = 31 \times 19$  с сильным сгущением к поверхности тела при решении уравнений Навье—Стокса. Число маршевых сечений вдоль оси тела определялось балансом точность — время счета и, как правило, изменялось от 30 до 50.

С целью оценки влияния донного сопротивления тела на положение центра давления для одной из конфигураций был также проведен расчет обтекания кормы тела и ближнего следа за ним.

Вообще говоря, при расчете течений с высокими числами Рейнольдса для детального изучения структуры обтекания тел требуется несколько большее число узлов сетки (что невозможно было сделать на БЭСМ-6), однако интегральные аэродинамические характеристики (коэффициенты сопротивления, подъемной силы, момента тангажа, центра давления) вычисляются с приемлемой точностью. Эти аэродинамические параметры определяются в основном характером обтекания головной части тела, формирующей головной скачок уплотнения, и возникающим на хвостовой части (“юбочке”) тела вторичным скачком, достаточно интенсивным с наветренной и более слабым с подветренной стороны течения. При больших углах ( $\beta > 10^\circ$ , рис. 6.108) атаки существенное влияние на аэродинамические характеристики оказывает также течение на всей боковой поверхности как с наветренной (возможно возникновение дополнительных скачков уплотнения), так и с подветренной (при отрыве потока от поверхности) стороны.

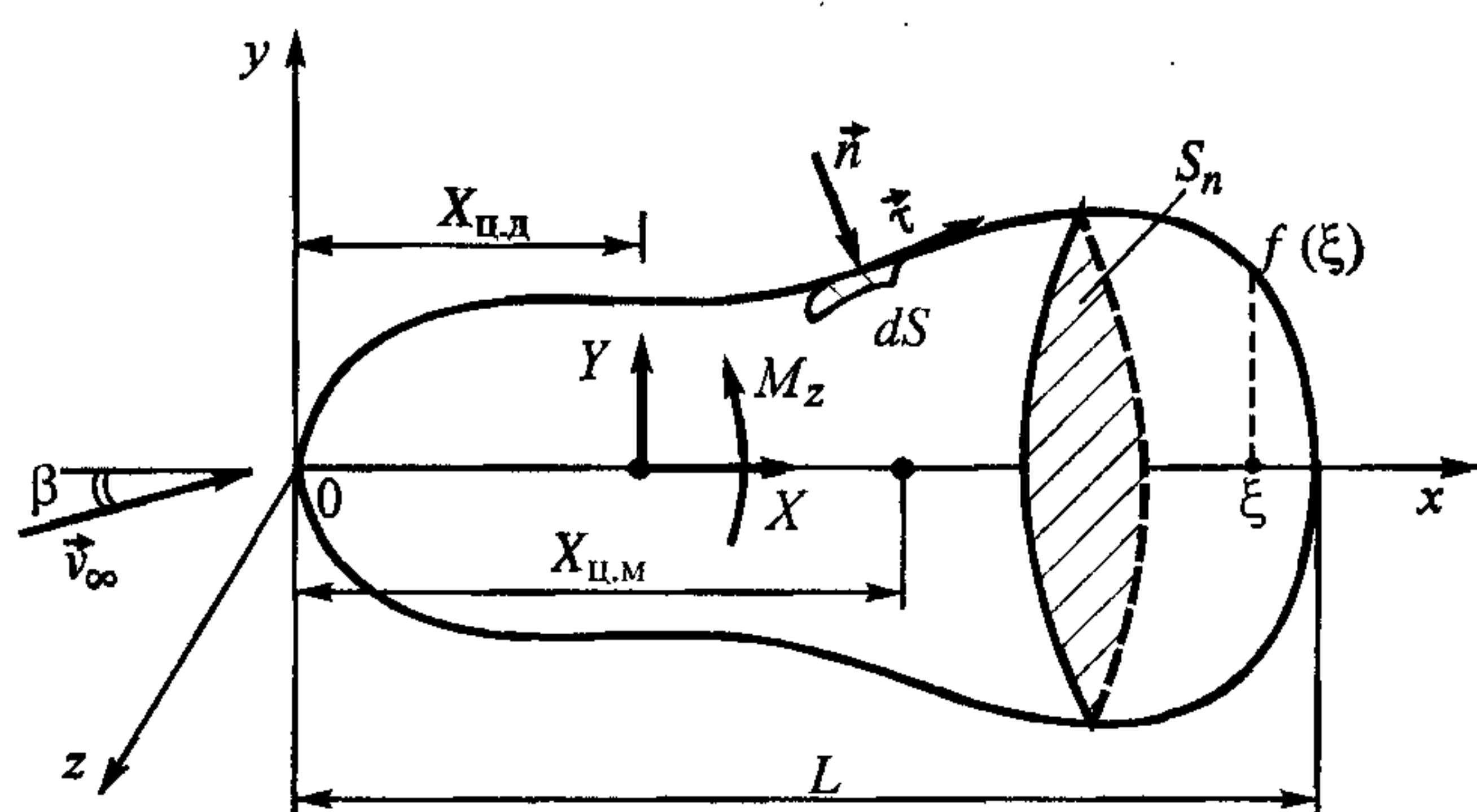


Рис. 6.108. Схема постановки задачи для численного моделирования обтекания тел газом под углом атаки  $\beta$  со скоростью  $\bar{v}_\infty$ .

Поясн. см. в тексте.

**Задача 3.** Для описания динамического поведения соударяющихся тел применена модель Прандтля—Рейсса. Задача решается двумя методами: модифицированным методом частиц в ячейках и методом свободных элементов [89]. В этой методике уравнения (6.7.27), (6.7.29) механи-



ки сплошной среды записываются в лагранжевых переменных, а численная реализация указанной модели осуществляется с помощью процедуры приведения напряжений на круг текучести. Для описания разрушения вводятся критерии по максимальным: напряжению на растяжение, деформации на растяжение, напряжению на сдвиг или по предельному значению внутренней энергии. При выполнении одного или нескольких критериев и достижении определенной величины “разрыхления” разрушенный материал в каждой ячейке заменяется набором твердых частиц, сохраняющих суммарную массу и импульс материала ячейки на данный момент времени. В дальнейшем частицы могут взаимодействовать на границах с неразрушенным материалом, обмениваясь с ним импульсом [89].

Замкнув в единую расчетную цепочку численного моделирования последовательные физические явления по обжатию облицовки, разгону деформируемого тела, его полету в атмосфере и взаимодействию с преградой, удастся комплексно исследовать сложный многопараметрический процесс высокоскоростного взаимодействия сред.

Представим конкретные результаты численного расчета комплексной задачи, в том числе данные по статической продольной аэродинамической устойчивости метаемого осесимметричного тела стилизованной формы.

Прежде чем приступить к описанию результатов расчета, определимся с обозначениями и сделаем несколько замечаний с использованием известных понятий аэродинамики. Рассмотрим для простоты изложения плоское обтекание осесимметричного тела. Ось симметрии обозначаем через  $Ox$  (см. рис. 6.108), перпендикулярное направление —  $Oy$ . Пусть угол атаки  $\beta$  — это угол между направлением вектора скорости набегающего потока на бесконечности и осью  $Ox$ . Набегающий поток на бесконечности дополнительно характеризуется следующими параметрами:  $\rho_\infty$  — плотность,  $v_\infty$  — модуль вектора скорости,  $P_\infty$  — гидростатическое давление. Введем величину скоростного напора:

$$q_\infty = P_\infty \frac{v_\infty^2}{2}.$$

Выделим на поверхности тела элементарную площадку  $dS$ , обозначим через  $\vec{n}$  и  $\vec{\tau}$  соответственно вектора нормали и касательной к площадке  $dS$  в рассматриваемой точке плоскости  $(x, y)$ . Тогда при обтекании тела потоком вязкого газа на площадку  $dS$  действует сила, обусловленная наличием вязкого тре-

ния и гидростатическим давлением. Обозначим с помощью  $\tilde{P}$  и  $\tilde{c}$  давление и силу трения в рассматриваемой точке поверхности и введем соответствующие местные коэффициенты давления и трения по формулам

$$P = \frac{\tilde{P} - P_\infty}{q_\infty}, \quad c_{fx} = \frac{\tilde{c}}{q_\infty}.$$

Пусть  $L$  — длина тела вдоль  $Ox$ ,  $S_n$  — площадь наибольшего (миделевого) сечения. Тогда на тело с общей площадью поверхности  $S$  действуют лобовое сопротивление и подъемная сила [86] вида

$$X = c_x q_\infty S_n, \quad Y = c_y q_\infty S_n,$$

где

$$c_x = \int_S (\bar{P} \cos(n, x) + c_{fx} \cos(\tau, x)) \frac{dS}{S_n},$$

$$c_y = \int_S (-\bar{P} \cos(n, y) + c_{fy} \cos(\tau, y)) \frac{dS}{S_n}$$

— коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы соответственно. Так как вектор набегающего потока и ось симметрии тела находятся в плоскости  $(x, y)$ , будем считать, что  $\cos(n, z) = \cos(\tau, z) = 0$ , отсутствуют боковая сила и так называемые моменты крена и рыскания. Однако, очевидно, что при нулевом угле атаки у тела даже с осесимметричным профилем из-за разного воздействия набегающего потока на верхнюю и нижнюю поверхности возникает отличный от нуля момент тангажа  $M_z$  (момент вращения вокруг оси  $Oz$ )

$$M_z = m_z q_\infty S_n L,$$

где

$$m_z = \int_S \{ [\bar{P} \cos(n, y) - c_{fy} \cos(\tau, y)] x - [\bar{P} \cos(n, x) + c_{fx} \cos(\tau, x)] y \} dS / (S_n L).$$

Если ввести в рассмотрение центр давления (некоторая гипотетическая точка, через которую проходит равнодействующая аэродинамических сил), тогда расстояние от передней кромки тела до центра давления определяется по формуле

$$X_{ц.д} = -m_z L / c_y.$$

Здесь предполагается, что угол  $\beta$  достаточно мал и направление подъемной си-

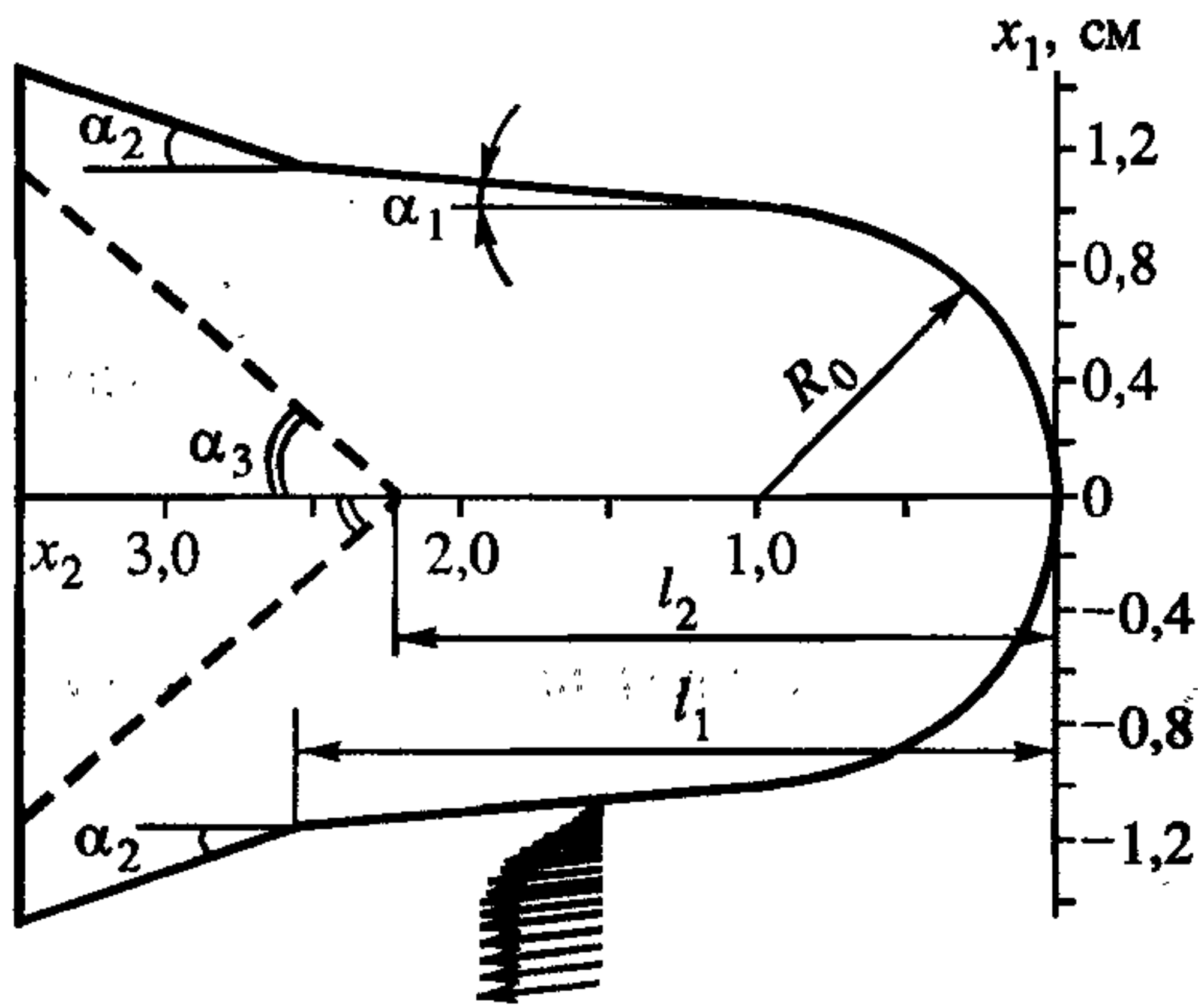


лы  $Y$  практически коллинеарно оси  $Oy$ . Заметим, что для осесимметричной конфигурации обтекаемого тела точка центра давления совпадает с фокусом [90]. Если обозначить расстояние от передней кромки тела до точки центра масс через  $X_{ц.м}$  (см. рис. 6.108), то в качестве критерия статической продольной устойчивости для осесимметричного модельного элемента будем использовать величину  $K$ :

$$K = (X_{ц.м} - X_{ц.д})/L.$$

При  $K < 0$  тело считается статически устойчивым, а при  $K > 0$  — неустойчивым.

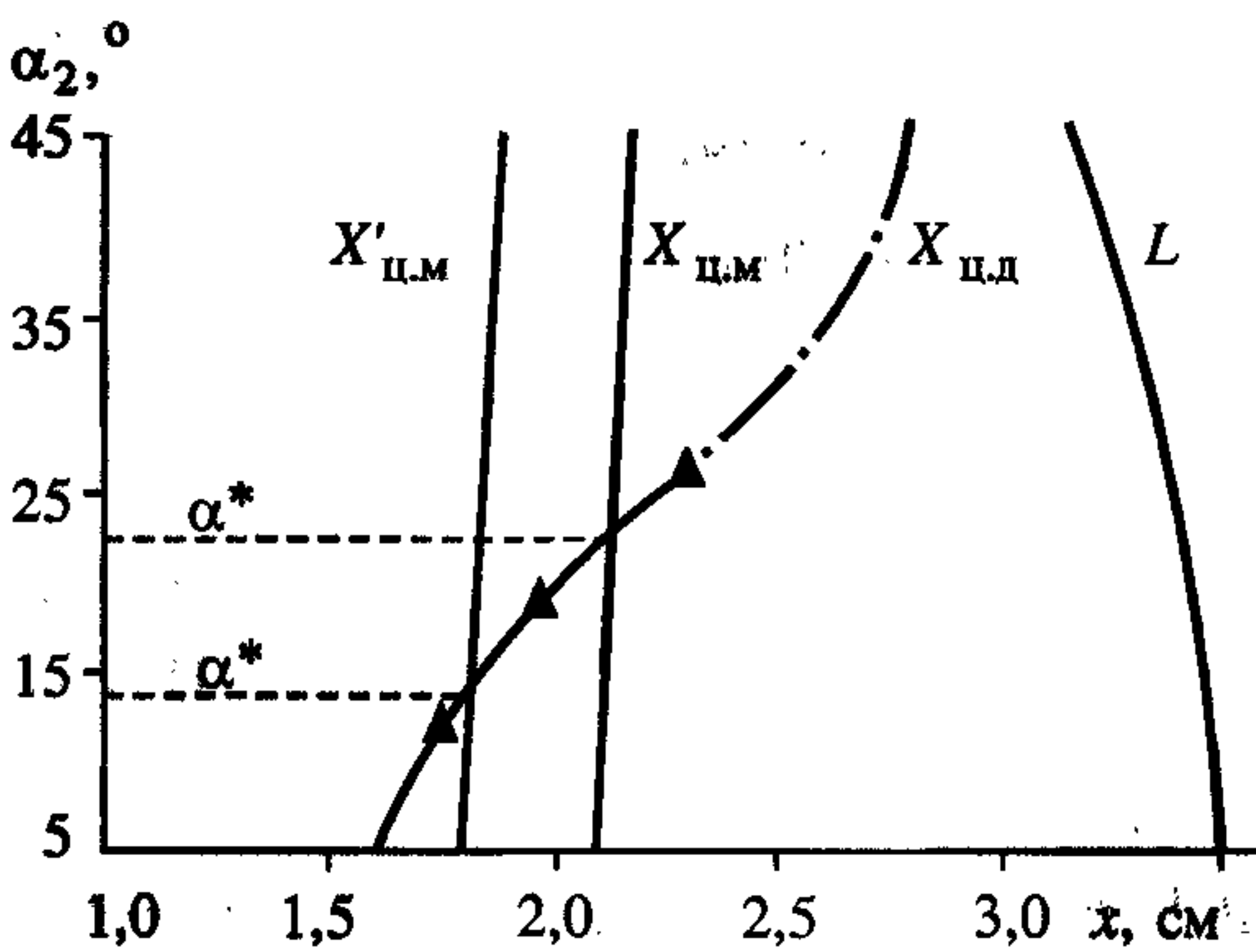
В общем случае момент тангажа и, соответственно, положение центра давления зависят от угла атаки  $\beta$ . Однако применительно к задаче взрывного метания облицовок можно считать, что значение  $\beta$  не должно быть произвольным и достаточно мало. Действительно, во-первых, угол  $\beta$  характеризует то отклонение системы метания тел от осесимметричного процесса, которое изначально на практике принято сводить к минимуму. Во-вторых, относительно достоверная информация о степени статической устойчивости тела может быть получена из результатов численного эксперимента при малых  $\beta$ . Например, если даже при  $\beta$ , близких к  $0^\circ$ , возникает дестабилизирующий момент тангажа, естественно предположить, что с учетом простой геометрии обтекаемого тела и при больших значениях  $\beta$  элемент будет вести себя неустойчиво. С другой стороны, тело, обладающее значительным запасом продольной аэродинамической устойчивости, будет стремиться принять положение равновесия, характеризующееся уменьшением угла  $\beta$ . И, наконец, на справедливость сделанных выше предположений об отсутствии существенного ограничения общности задачи при рассмотрении только малых углов атаки набегающего потока указывает, в частности, тот факт, что, как следует из анализа результатов численных экспериментов, при разных  $\beta$  получались практически одинаковые значения коэффициента статической устойчивости  $K$  для рассматриваемых тел. Задача о взрывном метании и деформировании облицовок рассмотрена выше. В настоящем разделе представлены лишь отдельные расчеты. При этом заметим, что вид рассматриваемых модельных тел (рис. 6.109) достаточно характерен при их формировании взрывом из пластичных медных и стальных облицовок с прогибом 0,14—0,18 и они являются фрагментами сфер. В этом случае для элемента характерна затупленная головная часть и наличие полости в кормовой части. На рис. 6.91 показана динамика деформирования полусферической дю-



**Рис. 6.109.** Характерная форма обтекаемого газом тела, штриховой линией выделена зона конической полости.

Характерная форма обтекаемого газом тела, штриховой линией выделена зона конической полости. Набегающего потока газа следующие:  $\rho_\infty = 1,2249 \cdot 10^{-3}$  кг/м<sup>3</sup>,  $T_\infty = 273$  К,  $v_\infty = 2,35$  км/с,  $M_\infty = 7$ ,  $Re = 1,6 \cdot 10^6$ ,  $\mu = 1,7894 \cdot 10^{-5}$  Па·с,  $K_n = 4,4 \cdot 10^{-4}$ ,  $P_r = 0,72$ . В расчетах варьировались угол “юбочки”  $\alpha_2$  (от 5 до 25°) и угол атаки набегающего потока  $\beta$  (от 0 до 10°).

Общая структура рассчитанного стационарного потока характеризуется, в частности, наличием отошедшего скачка уплотнения перед телом, формированием вихревой области течения за телом. На рис. 6.110 приведены кривые зависимости положения центра масс и центра давления от угла  $\alpha_2$ , полученные



**Рис. 6.110.** Зависимость координат центра давления  $X_{ц.д}$  и центра масс  $X_{ц.м}$  от угла раствора “юбочки”.

$X'_{ц.м}$  — для движения тела, имеющего коническую полость в хвостовой части.

ралюминиевой облицовки, относящейся к этому классу тел.

Численные расчеты задачи вязкого обтекания выполнены для серии тел, базовая конфигурация которых изображена на рис. 6.109. Геометрические характеристики обтекаемого модельного тела следующие:  $R_0 = 1$  см;  $l_1 = 2,5$  см;  $l_2 = 2$  см;  $\alpha_1 = 5^\circ$ . Длина тела  $L$  с возрастанием угла  $\alpha_2$  уменьшалась, при этом положение центра масс  $X_{ц.м}$  изменялось незначительно. Параметры набегающего потока газа следующие:

интерполяцией расчетных данных. Штриховой линией отмечено расположение центра масс при наличии конической полости в хвостовой части тела при  $\alpha_3 = 40^\circ$ .

Расстояние от носика тела до центра масс  $X_{ц.м}$  на оси симметрии определялось с помощью соотношения  $2V(X_{ц.м}) = V(L)$ , где  $V(x) =$

$$= \pi \int_0^x f^2(\xi) d\xi \text{ — объем тела вращения от носика до радиального сечения, } x = \text{const, } f(\xi) \text{ — функция, опи-}$$

сания,  $x = \text{const}$ ,  $f(\xi)$  — функция, опи-



сывающая конфигурацию тела в плане (см. рис. 6.109),  $0 < \xi < L$ . В частности, для полусферической головной части тела с радиусом  $R$  имеем  $V_1 = 2/3 \pi R^3$ .

Для линейного участка длиной  $l$ , например,

$$f = \frac{R_2 - R_1}{l} \xi + R_1,$$

$$V_2(x) = V_1 + \pi \int_0^l \left( \frac{R_2 - R_1}{l} x + R_1 \right)^2 dx = V_1 + \pi l / 3 (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2),$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — соответствующие радиусы правого и левого радиальных сечений, между которыми заключен объем рассматриваемого линейного участка.

Расчеты показали, что при углах атаки  $\beta < 10^\circ$  полученные значения коэффициента статической устойчивости  $K$  различаются слабо, но при  $\beta > 10^\circ$  происходит существенное изменение аэродинамических характеристик тела. В этом случае с наветренной стороны возникают дополнительные скачки уплотнения, а с подветренной — возможен отрыв потока от поверхности тела.

При рассмотренных параметрах газового потока и тела наличие полости в кормовой части элемента не оказывает существенного влияния на аэродинамические характеристики течения (в частности на положение центра давления).

Из анализа результатов численных экспериментов следует, что нейтральными с точки зрения коэффициента продольной статической устойчивости для рассмотренной геометрии являются значения угла  $\alpha_2^* = 13^\circ$  и  $\alpha_2^* = 22^\circ$  для модельного тела соответственно с конической каверной в хвостовой части и без нее. При  $\alpha_2 < \alpha_2^*$  имеем область статической неустойчивости, при  $\alpha_2 > \alpha_2^*$  — область относительной продольной устойчивости. Штрихпунктирной линией на рис. 6.110 представлена экстраполяция расчетных данных для  $\alpha_2 > 25^\circ$ . Отметим, что непосредственный численный расчет маршевым методом для таких геометрий тела затруднен вследствие образования перед “юбочкой” области дозвукового течения за отраженной ударной волной.

#### **6.7.4. Формирование аэродинамических стабилизаторов у метаемых взрывом тел**

Одним из самостоятельных вопросов в рассматриваемой задаче является получение в процессе деформирования облицовки конусообразных стабилиза-

торов в хвостовой части формируемого взрывом тела. Остановимся на двух режимах движения, когда удастся получить целостные тела. В первом режиме приосевые участки облицовки ускоряются быстрее, чем периферийные. Происходит выворачивание облицовки наружу, сопровождающееся при определенных условиях образованием слабоконической затупленной головной части и формированием полости в основании тела. Центр масс таких тел располагается ближе к носовой области, что обеспечивает относительную аэродинамическую устойчивость при движении тела в атмосфере. При другом режиме более тонкие периферийные участки облицовки ускоряются быстрее приосевых, происходит захлопывание облицовки вперед по направлению ее движения. Известны режимы, когда в этом случае формируются “гантелеобразные” тела. Но если периферийные области облицовки не схлопываются, то в лидирующей части формируется полость, а основная масса среды сосредотачивается в хвостовой части тела. Ясно, что такой элемент не обладает аэродинамической устойчивостью.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением такого режима деформирования, при котором облицовка выворачивается наружу. В этом случае при характерных параметрах набегающего потока воздуха  $M > 5$  наличие, например, полости в хвостовой части тела на оси симметрии практически не влияет на аэродинамику вязкого обтекания, в частности, на положение центра давления.

Естественно предположить, что для получения конических стабилизаторов определенной формы в хвостовой части тела необходимо так воздействовать на периферийную часть облицовки, чтобы с одной стороны придать ей большее ускорение (по сравнению с участками, расположенными ближе к оси симметрии), а с другой — избежать захлопывания всей облицовки вперед, т.е. сохранить в основном первый режим деформирования металла — выворачивание наружу.

Наиболее простым, по-видимому, из рассмотренных далее способов воздействия на процесс деформирования периферийной части облицовки является уменьшение на некотором участке ее толщины с целью получения на начальной стадии движения большего ускорения.

Рассмотрим для примера медную облицовку (табл. 6.10) с прогибом 0,14 постоянной толщины 2 мм, являющуюся сегментом сферы радиуса 40 мм. В качестве ВВ возьмем цилиндрический заряд ТГ 50/50, инициируемый в осевой точке на свободной поверхности. Как показывают результаты численного эксперимента, при деформировании такой облицовки примерно к 50 мкс с момен-



Начальные параметры задачи

Материал	$\rho_0, \text{г/см}^3$	$c_0, \text{см/мкс}$	$\Gamma_0$	$Y_0, \text{кбар}$	$\mu, \text{кбар}$
Медь	8,93	0,396	2,3	4,2	460
Сталь	7,85	0,461	1,9	6,8	820
Алюминий	2,78	0,544	2,1	2,3	250
Латунь	8,52	0,411	2,2	5,1	480
Парафин	0,91	0,146	0,7	0	—

та инициирования образуется тело с затупленной вершиной и полостью в основании. Динамика положения границ облицовки постоянной толщины представлена на рис. 6.111, а сплошной линией. Угол  $\alpha_1$  слабо меняется вдоль образующей и составляет на момент времени 50 мкс  $\alpha_1 \approx 15^\circ$ , средне-массовая скорость метания тела — около 2 км/с. Будем точку А (точку сопряжения разных геометрических профилей облицовки, см. рис. 6.111) располагать на расстоянии  $0,7r_0$  от оси симметрии, где  $r_0$  — радиус облицовки вдоль направления оси  $OR$ . Правее точки А внешняя сторона облицовки образована прямолинейным отрезком  $[AP]$ . Значение  $\delta_p$  соответствует толщине облицовки (в направлении  $Oz$ ) в периферийном сечении, наиболее удаленном от оси симметрии. Толщина облицовки  $\delta_p$  с изменением внешнего угла  $\theta_1$

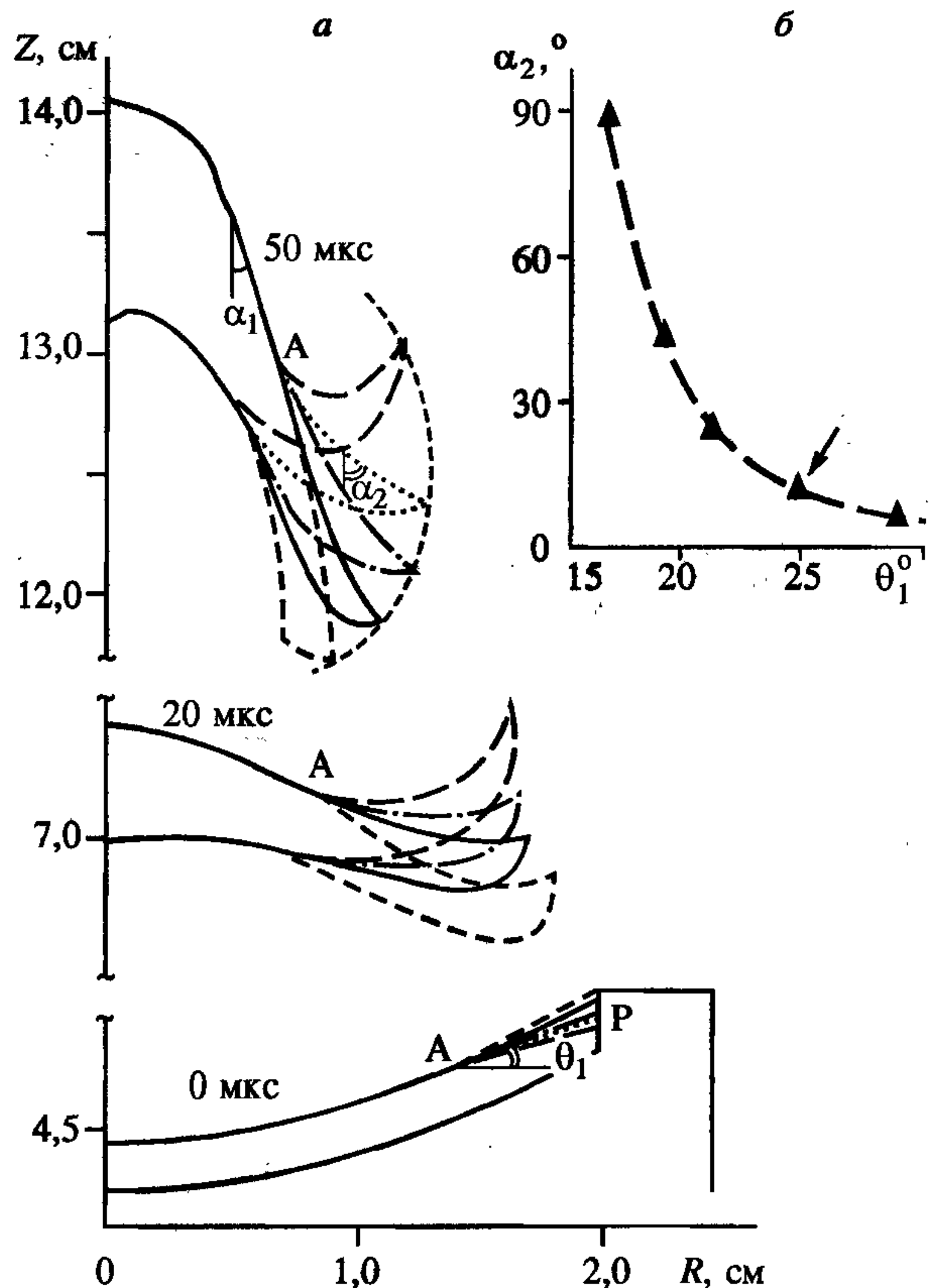
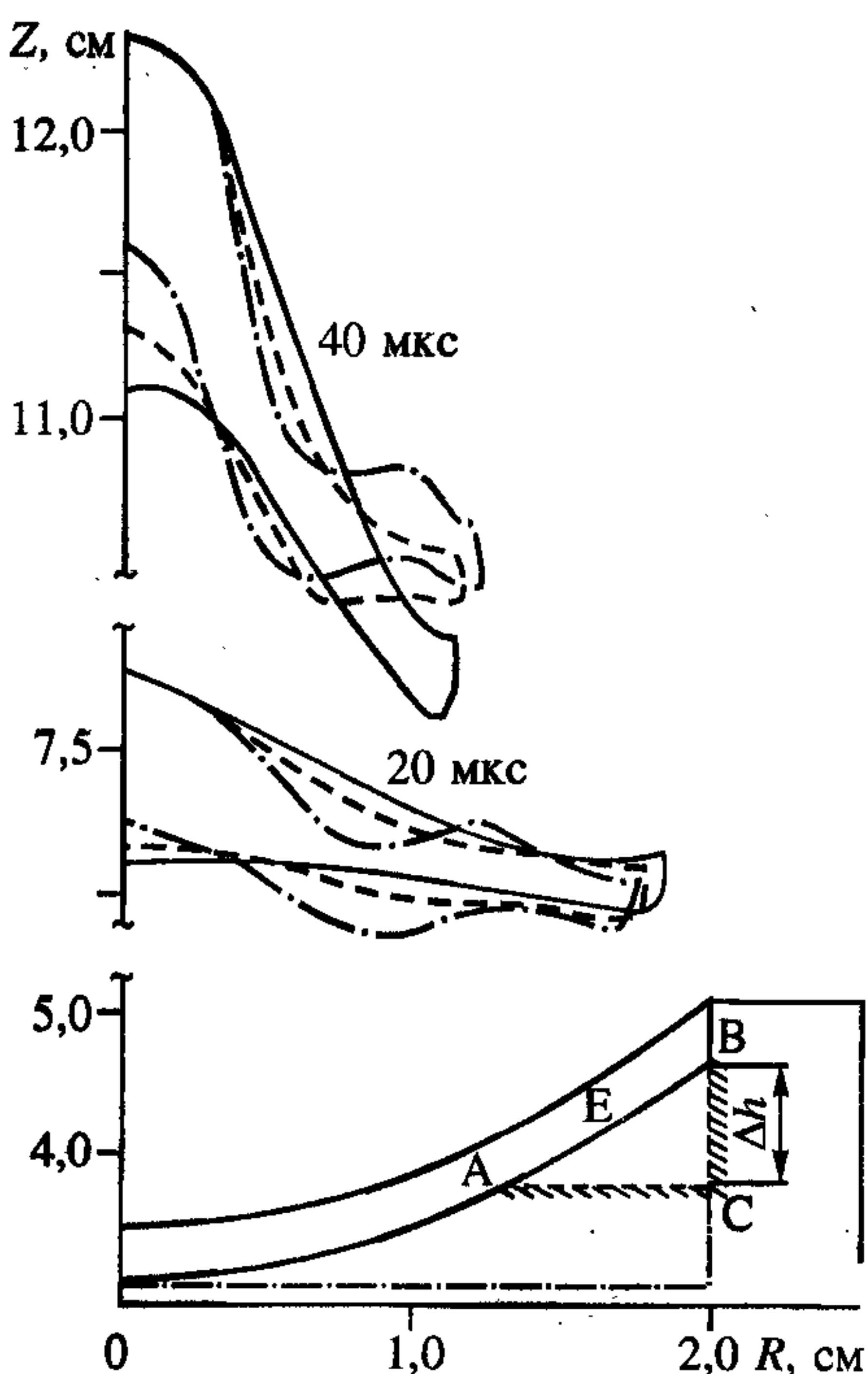


Рис. 6.111. Контуры деформированной облицовки (а) с уменьшаемой ее толщиной в периферической части на три момента времени (0; 20; 50 мкс) и зависимость (б) среднего угла деформированной “юбочки” от начального угла  $\theta_1$ .

от  $17^\circ$  до  $29^\circ$  варьировалось, соответственно, от 1 до 2,5 мм. Параметры заряда ВВ в рассматриваемом примере не менялись.

На рис. 6.111, б пунктиром нанесена кривая, интерполирующая результаты численных экспериментов (треугольники) для значения некоторого среднего вдоль "юбочки" угла  $\alpha_2$ . Стрелкой на рисунке отмечена точка, соответствующая деформированию облицовки постоянной толщины. При этом начальный угол  $\theta_1 \approx 25^\circ$ .

Заметим, что при  $\delta_p > \delta_0$  (т.е. с утолщениями на периферии) формируется "юбка-тюльпан" с  $\alpha_2 < \alpha_1 \approx 15^\circ$ . При  $\delta_p < 0,4 \delta_0$  ( $\theta_1 < 15^\circ$ ) тонкая периферийная часть облицовки разрушается уже на начальной стадии движения. И наоборот, при  $\delta_p > 1,3 \delta_0$  ( $\theta_1 > 32^\circ$ ) более массивная периферийная часть облицовки в процессе взрывного разгона отстает от центральной. Это приводит к значительным растягивающим напряжениям в соответствующей области течения и к последующим разрушениям.



**Рис. 6.112.** Влияние полости в периферической области облицовки на динамику (время 0; 20; 40 мкс) деформирования пологой облицовки.

Поясн. см. в тексте.

Другим возможным способом воздействия на параметры формирующего течения является введение на периферии начальных зазоров между зарядом ВВ и облицовкой. Ниже представлены результаты соответствующих численных экспериментов.

Пусть имеется цилиндрический заряд ТГ 50/50, инициируемый при  $t = 0$  в осевой точке на свободной поверхности. Рассматривается облицовка толщиной 2 мм, являющаяся сегментом сферы радиуса 40 мм из мягкой стали. На рис. 6.112 сплошной линией показана динамика деформирования рассматриваемой облицовки на моменты времени 20 и 40 мкс при отсутствии исходного зазора между ВВ и металлом. Введем прямоугольную полость ABC между зарядом ВВ и облицовкой, в которой при движении детонационной волны в волнах раз-



режения со стороны AC и BC формируется газовый поток, создающий локально повышенное давление. Это несколько усиливает процесс радиального схлопывания облицовки в области точки E. Но, с другой стороны, введение зазора приводит к потере части импульса, передаваемого от ПД к деформируемому телу, что уменьшает интенсивность натекания центральных участков металла и приводит к отставанию периферийных областей. Сочетание этих факторов дает усиление общей тенденции выворачивания облицовки наружу и способствует формированию “излома” профиля деформируемого тела.

На рис. 6.112 штриховая линия соответствует облицовке при ее метании, когда имеется зазор  $BC = \Delta h = 4$  мм, а штрихпунктирная —  $\Delta h = 7$  мм (в этом случае точка лежит на оси симметрии). При  $\Delta h < 3$  мм образование излома выражено слабо, точка столкновения потоков E сдвигается к положению угловой точки В. При  $\Delta h > 7$  мм ВВ на оси симметрии перестает контактировать с облицовкой, наблюдаются заметные потери импульса, воздействующего на облицовку как в осевом, так и в радиальном направлении.

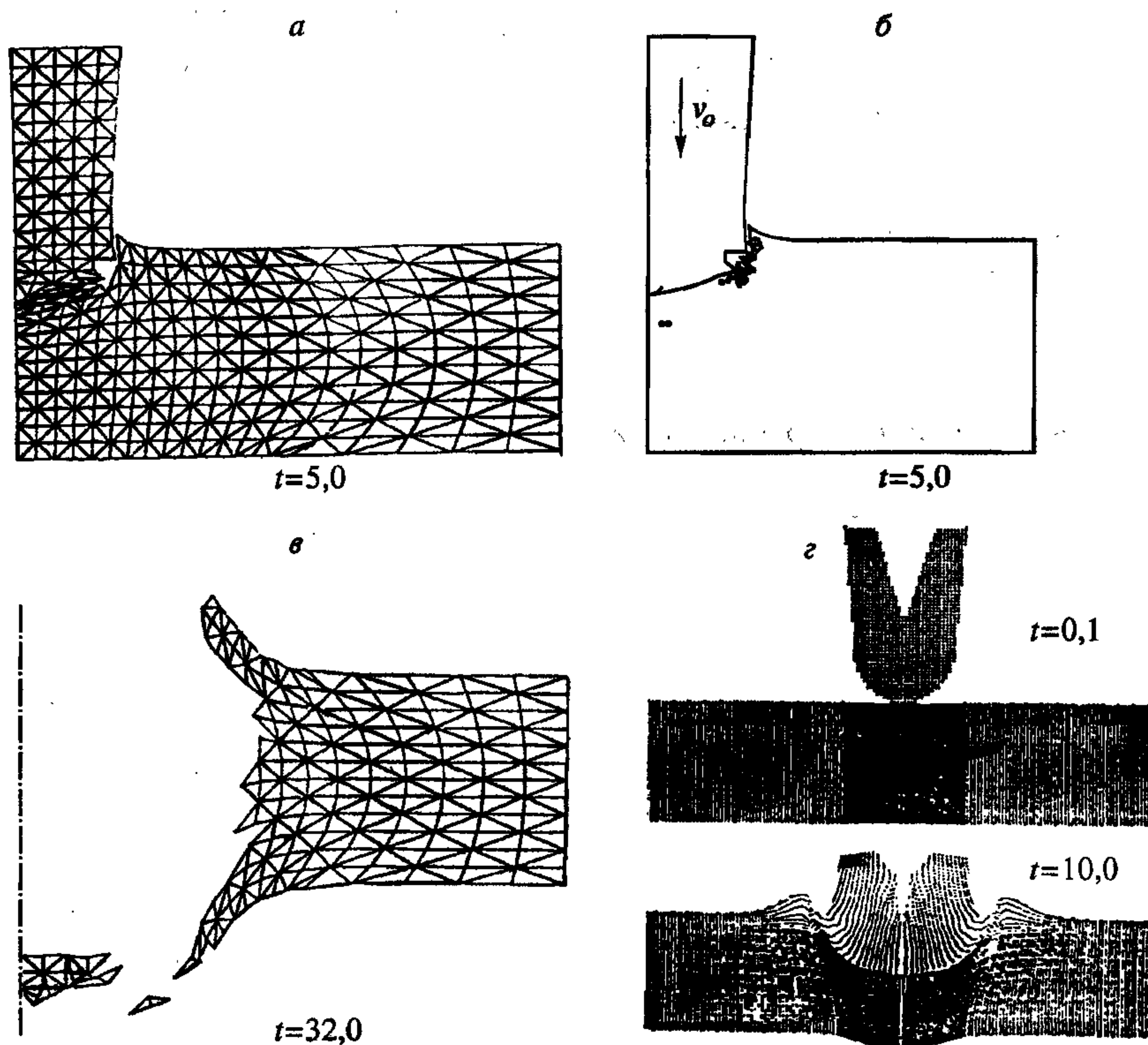


Рис. 6.113. Результаты расчета методами свободных элементов [89] (а—е) и PIC [73] (z) — два процесса соударения сформированного взрывом тела о преграду.

В плане формирования целостных аэродинамических устойчивых тел из пологих облицовок заслуживают внимание и подходы, представленные на рис. 6.98, 6.99.

Результаты расчетов ударного взаимодействия тела из меди ( $\alpha_1 = 5^\circ$ ) со стальной преградой, имеющей толщину 2,4 см (скорость удара 0,23 см/мкс), представлены на рис. 6.113. Задача решена методом [89] в осесимметричном двумерном приближении с учетом разрушения. На рис. 6.113, а—в приведена разностная сетка неразрушенных частей тела на различные моменты времени. Отдельные расчеты (рис. 6.113, г) выполнены также с применением метода частиц в ячейках.

В заключение отметим, что в рамках созданного комплекса алгоритмов и программ решены далеко не все вопросы численного моделирования рассматриваемого процесса, например:

не всегда удается “дожать” ряд облицовок до формы, наблюдаемой в эксперименте. Среди основных причин этого — возникновение в области “юбочки” трехмерной неустойчивости схлопывания к оси симметрии малоскоростной в радиальном направлении части облицовки (образуются гофры);

на обтекаемом теле не должно возникать обширных дозвуковых зон течения (ограничения маршевого метода);

требуется развитие модель разрушения среды.

## Литература к главе 6

1. **Одинцов В. А., Чудов Л. А.** Расширение и разрушение оболочек под действием продуктов детонации// Проблемы динамики упругопластических сред. М.: Мир, 1975. — С. 85—154.
2. **Мержиевский Л. А., Титов В. М., Фадеев Ю. В. и др.** Высокоскоростное метание твердых тел// ФГВ. — 1987. — Т. 23, № 5. — С. 77—82.
3. **Дерибас А. А.** Физика упрочнения и сварки взрывом. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1972. — 344 с.
4. **Альтшулер Л. В., Трунин Р. Ф., Крупников К. К. и др.** Взрывные лабораторные устройства для исследования сжатия веществ в ударных волнах// УФН. — 1996. — Т. 166, № 5. — С. 575—581.
5. **Лёконт К.** Высокоскоростное метание// Физика быстропротекающих процессов. Т. 2. — М.: Мир, 1971. — С. 247—275.
6. **Кинеловский С. А., Тришин Ю. А.** Физические аспекты кумуляции// ФГВ. — 1980. — Т. 16, № 5. — С. 26—40.
7. **Канель Г. И., Молодец А. М., Воробьев А. А.** О метании пластин взрывом// Там же. — 1974. — Т. 10, № 6. — С. 884—891.
8. **Уилкинс М. Л.** Расчет упругопластических течений// Вычислительные методы в гидродинамике. — М: Мир, 1967.— С. 212—263.



9. Кинеловский С. А., Матюшкин Н. И., Тришин Ю. А. Схождение кольца к центру под действием продуктов взрыва// Динамика сплошной среды. Вып. 5/ Ин-т гидродинамики СО АН СССР. — Новосибирск, 1970. — С. 23—32.
10. Кинеловский С. А., Матюшкин Н. И., Тришин Ю. А. О движении цилиндрического поршня к центру// Там же. Вып. 7. — С. 105—114.
11. Кинеловский С. А., Матюшкин Н. И., Тришин Ю. А. Движение цилиндрического поршня, окруженного слоем расширяющегося газа// Там же. — С. 115—124.
12. Забабахин Е. И. Ударные волны в слоистых средах// ЖЭТФ. — 1965. — Т. 49, № 2. — С. 642—646.
13. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. — М.: Наука, 1971. — 854 с.
14. Баум Ф. А., Орленко Л. П., Станюкович К. П. и др. Физика взрыва. — М.: Наука, 1975. — 704 с.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. — М., 1954. — 788 с.
16. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Физматгиз, 1963. — 632 с.
17. Теоретические и экспериментальные исследования явления кумуляции// Механика. Вып. 4(20). — М.: ИЛ, 1953. — С. 101—120.
18. Матюшкин Н. И., Тришин Ю. А. О некоторых эффектах, возникающих при взрывном обжатии вязкой цилиндрической оболочки// ПМТФ. — 1978. — № 3. — С. 99—112.
19. Ильюшин А. А., Огибалов П. М. Уругопластические деформации полых цилиндров. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1960. — 224 с.
20. Забабахин Е. И. Явления неограниченной кумуляции. Механика в СССР за 50 лет. Т. 2. — М.: Наука, 1970. — С. 313—342.
21. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем// Докл. АН СССР. — 1949. — Т. 65, № 6. — С. 779—782.
22. Сапожников Г. А. Влияние облицованной полости в заряде на движение оболочек// Аэрогазодинамика быстропротекающих процессов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1979. — С. 71—78.
23. Одинцов В. А., Селиванов В. В., Усович С. С. Метание оболочек полыми зарядами// ПМТФ. — 1976. — № 3. — С. 161—164.
24. Евстропьев-Кудреватый В. В., Кожушко А. А., Сапожников Г. А. и др. Последовательное соударение ударников с преградой. Численные методы решения задач теории упругости и пластичности// Мат-лы 12 Всесоюз. конф-ции. — Новосибирск, 1992. — С. 264—270.
25. Биченков Е. И., Лобанов В. А. Ускорение металлических пластин взрывом// ФГВ. — 1974. — Т. 10, № 2. — С. 292—294.
26. Лаптев В. И., Тришин Ю. А. Увеличение начальной скорости и давления при ударе по неоднородной преграде// ПМТФ. — 1974. — № 6. — С. 128—132.
27. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. — М.: Наука, 1987. — 464 с.
28. Куропатенко В. Ф. Уравнение состояния продуктов детонации конденсированных ВВ// Численные методы механики сплошной среды. — 1977. — Т. 8, № 6. — С. 68—71.
29. Альтшулер Л. В., Трунин Р. Ф., Урлин В. Д. и др. Развитие в России динамических методов исследований высоких давлений// УФН. — 1999. — Т. 169, № 3. — С. 323—344.
30. Trebinski R., Trzcinski W., Wlodarczyk E. O napędzaniu ciał rozdzielonych płaskimi

- warstami materialu wybuchowego// Biul. WAT. J. Dabrowskiego. — 1979. — V. 28, N 8. — P. 121—136.
31. **Иванов А. Г., Коротченко М. В., Новицкий Е. З. и др.** Разгон пластин до гиперзвуковых скоростей. Устройство// ПМТФ. — 1982. — № 2. — С. 86—90.
  32. **Иванов А. Г., Новицкий Е. З., Огородников В. А. и др.** Разгон пластин до гиперзвуковых скоростей. Неустойчивость при торможении в воздухе// Там же. — 1980. — № 2. — С. 90—93.
  33. **Fowles G. R., Leung C., Rablie R.** Acceleration of flat plates by multiply staging// High-pressure science and technology sixth airapt conference. — 1979. — N 2. — P. 911—916.
  34. **Баум Б. А.** Металлические жидкости — проблемы и гипотезы. — М.: Наука, 1979. — 120 с.
  35. **Chou P. C., Carleone J., Karpp R.** Criteria for jet formation from impinging shells and plates// J. Appl. Phys. — 1976. — V. 47, N 7. — P. 2975—2981.
  36. **Имховик Н. А., Мачнева И. П., Соловьев В. С.** Влияние состава и энергетических характеристик взрывчатых веществ на скорость метания плоских ударников в двухступенчатой каскадной схеме// Хим. физика. — 1998. — Т. 17, № 1. — С. 83—96.
  37. **Имховик Н. А., Мачнева И. П., Соловьев В. С.** Влияние характеристик основного и промежуточного зарядов взрывчатого вещества на скорость пластин в каскадной схеме// Оборонная техника. — 1997. — № 8—9. — С. 28—36.
  38. **Батьков Ю. В., Ковалев Н. П., Ковтун А. Д. и др.** Разгон металлических пластин до скоростей более 10 км/с// Техн. физика. — 1997. — Т. 356, № 6. — С. 765—767.
  39. **Болчан, Коуэн.** Метод разгона плоских пластин до большой скорости// Приборы для научных исследований. — 1964. — Т. 4, № 8. — С. 3—10.
  40. **Зарембо Л. К., Красильников В. А.** Введение в нелинейную акустику. — М.: Наука, 1966. — 519 с.
  41. **Тришин Ю. А., Фоминых А. Г.** О метании слоистых тел с помощью кумулятивной струи// Механика быстропротекающих процессов. Вып. 62. — Новосибирск, 1983. — С. 146—151.
  42. **Тришин Ю. А.** Ускорение твердых тел кумулятивными струями// ПМТФ. — 1980. — № 5. С. 145—149.
  43. **Эйчелбергер Р., Кайнике Дж.** Высокоскоростной удар// Физика быстропротекающих процессов. Т. 2. — М.: Мир, 1971. — С. 204—246.
  44. **Birghoff G., Mac Daugal et. al.** Explosives with lined cavities// J. Appl. Phys. — 1948. — V. 19, N 6. — P. 563—582.
  45. **Титов В. М., Швецов Г. А.** Лабораторные методы высокоскоростного метания твердых тел взрывом// ФГВ. — 1970. — Т. 6, № 3. — С. 401—404.
  46. **Лаврентьев М. А.** Кумулятивный заряд и принцип его работы// УМН. — 1957. — Вып. XII, № 4. — С. 41—56.
  47. **Титов В. М.** Возможные режимы гидродинамической кумуляции при схлопывании облицовок// Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 247, № 5. — С. 1082—1084.
  48. **Тришин Ю. А.** О несимметричном соударении струй// Динамика сплошной среды. — 1985. — Вып. 73. — С. 116—121.
  49. **Тришин Ю. А.** Несимметричное соударение струй идеальной несжимаемой жидкости// ПМТФ. — 1986. — № 5. — С. 40—44.
  50. **Биченков Е. И., Дерibas А. А., Седых В. С., Тришин Ю. А.** Сварка взрывом. Народнохозяйственное использование взрыва// СО АН СССР. — 1962. — С. 1—26.



51. Кинеловский С. А. Концепция упругих—неупругих взаимодействий струйных потоков и соударение струй идеальной несжимаемой жидкости/ ФГВ. — 1994. — Т. 30, № 3. — С. 75—86.
52. Walsh G. M., Shreffler R. G., Willig F. G. Limiting condition for jet formation in high velocity collisions// J. Appl. Phys. — 1953. — V. 24, N 3. — P. 349—359.
53. Harlow F., Pracht W. Formation and penetration of high-speed collapse jets// J. Phys. of Fluids. — 1966. — V. 9, N 10. — P. 1951—1959.
54. Петренко В. Е., Сапожников Г. А. Численное решение задачи о симметричном соударении пластин// Мат-лы 5 научн. конф-ции по математике и информатике. Ч. 2. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1975.
55. Петренко В. Е., Сапожников Г. А. Об устойчивости и точности метода частиц в ячейках для течений вязкой жидкости// Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1975. — С. 95—111.
56. Петренко В. Е., Сапожников Г. А. Об усилении устойчивости метода частиц в ячейках для течений вязкой жидкости// Численные методы механики сплошной среды. — 1976. — Т. 7, № 4. — С. 130—148.
57. Годунов С. К., Дерibas А. А., Мали В. И. О влиянии вязкости материала на процесс образования струй при соударениях металлических пластин// ФГВ. — 1975. — Т. 11, № 1. — С. 3—18.
58. Справочник по авиационным материалам. — М.: Оборонгиз, 1958. — 263 с.
59. Шалль Р. Физика детонации// Физика быстропротекающих процессов. Т. 2. — М.: Мир, 1971. — С. 276—349.
60. Тришин Ю. А. Влияние процесса диссипации энергии на характер кумулятивного течения// Докл. междунар. конф-ции “IV Забабахинские чтения”. Снежинск, Челябинская область, 1995. — С. 23—30.
61. Лаптев В. М., Рубцов М. В., Тришин Ю. А. Об использовании модели вязкой жидкости для описания высокоскоростных струйных течений металлов// ФГВ. — 1984. — Т. 20, № 1. — С. 80—86.
62. Шехтер Б. И., Шушко Л. А., Крысько С. Л. Исследование процесса обжатия облицовки удлиненного кумулятивного заряда и формирование элементов кумулятивного ножа// Там же. — 1977. — Т. 13, № 2. — С. 244—254.
63. Минеев В. Н., Савинов Е. В. Вязкость и температура плавления алюминия, свинца и хлористого натрия при ударном сжатии// ЖЭТФ. — 1967. — № 3. — С. 629—636.
64. Мартынюк М. М. Фазовый взрыв метастабильной жидкости// ФГВ. — 1977. — Т. 13, № 2. — С. 213—229.
65. Забабахин Е. И., Забабахин И. Е. Явления неограниченной кумуляции. — М.: Наука, 1988. — 172 с.
66. Eichelberger R. Experimental test of the theory of penetration by metallic jets// J. Appl. Phys. — 1956. — V. 27, N 1. — P. 63—68.
67. Беляков Л. В., Витман Ф. Ф., Златин Н. А. О процессе соударения деформируемых тел и его моделирования// ЖТФ. — 1964. — Т. 34, № 10. — С. 519—522.
68. Алексеевский В. П. К вопросу о проникании стержня в преграду с большой скоростью// ФГВ. — 1966. — Т. 2, № 2. — С. 99—106.
69. Тейт А. Теория торможения длинных стержней после удара по мишени// Механика. Вып. 5. — М., 1968. — С. 125—137.
70. Сагомоян А. Я. Проникание. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974. — 299 с.
71. Витман Ф. Ф., Златин Н. А., Иоффе Б. С. Сопротивление деформированию металлов при скоростях  $10^6—10^2$  м/с// ЖТФ. — 1949. — Т. 19, № 3. — С. 300—303.

72. Eichelberger R. J., Pugh E. M. Experimental verification of the theory of jet formation by charges with lined conical cavities// J. Appl. Phys. — 1952. — V. 23, N 5. — P. 537—542.
73. Харлоу Ф. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики// Вычислительные методы в гидродинамике. — М.: Мир, 1967. — С. 316—342.
74. Сапожников Г. А. Совместный метод потоков жидкости и частиц в ячейках для расчета газодинамических течений// Вопросы разработки и эксплуатации прикладных программ. — Новосибирск, 1981. — С. 89—97.
75. Анучина Н. Н. О методах расчета сжимаемой жидкости с большими деформациями// Численные методы механики сплошной среды. — 1970. — Т. 1, № 4. — С. 3—84.
76. Горшков Н. Н. Применение гидродинамической теории для описания формирования струи при “обратной” кумуляции// ФГВ. — 1983. — Т. 19, № 2. — С. 130—132.
77. Luttwak G. et. al. Effects of hypervelocity jet on layered target// Int. J. Engng. Sci. — 1982. — V. 20, N 8. — P. 947—961.
78. Уткин А. В., Гордополов Ю. А., Михайлов А. Н. Метание пластин продуктами взрыва скользящей детонационной волны// ФГВ. — 1979. — Т. 15, № 3. — С. 101—106.
79. Defourneaux M., Jacques L. Explosive deflection of a linear as a diagnostic of detonation flows// Proc. 5th Int. Symp. on Detonation. 1970. — Proceeding Washington, 1972. — P. 457—469.
80. Самарин Ю. П., Сычев Н. И. Расчет формы оболочки вращения, в которой при метании детонационной волной реализуется заданное поле скоростей// Математическая физика. — Куйбышев, 1976. — С. 104—109.
81. Ях К. Численный анализ задач классической и обратной кумуляции// ПМТФ. — 1987. — № 2. — С. 123—129.
82. Carter W. New developments in shaped charge technology// Petroleum Engineer Interaction. — 1978. — V. 50, N 4. — P. 24—34.
83. Arvidsson B. et al. Computational modeling of explosively formed hypervelocity penetrators// Proc. 8th Int. Conf. on High Energy Rate Fabrication. — 1984. — P. 71—74.
84. Гулидов А. И., Фомин В. М., Яненко Н. Н. Численное моделирование проникания тел в упругопластическом приближении// Проблемы математики и механики. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1983. — С. 71—81.
85. Гладышев А. М., Сапожников Г. А., Фомин В. М. Численный расчет взрывного обжатия тонких конических облицовок методом частиц в ячейках. Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Мат-лы 8 Всесоюз. конф-ции. — Новосибирск, 1984. — С. 103—109.
86. Ковеня В. М., Тарнавский Г. А., Черный С. Г. Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1990. — 246 с.
87. Gulidov A. I., Sapozhnikov G. A., Fomin V. M. Numerical simulation of high-speed bodies interaction/ University of Tsukuba. — 1990.
88. Гладышев А. Н., Гулидов А. И., Ковеня В. М. и др. Взрывное метание, аэродинамика и удар твердого тела. Численный эксперимент// Моделирование в механике. — Т. 5, № 2. — С. 7—19.
89. Гулидов А. И., Шабалин И. И. Метод свободных элементов. — Новосибирск, 1994. — 32 с. (Препринт/ СО РАН. ИТПМ; № 9-94).
90. Краснов Н. Ф. Аэродинамика. Т. 1. — М.: Высш. школа, 1976. — 384 с.



## ПРИЛОЖЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ К ОПИСАНИЮ ДИНАМИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

---

### 7.1. Основные положения

В большинстве современных подходов к описанию динамического разрушения твердых тел [1—9] используется концепция, согласно которой разрушение представляет собой процесс зарождения и развития в материале дефектов (повреждений), причем интенсивность и длительность этого процесса определяются временной историей изменения напряженно-деформированного состояния материальных частиц, составляющих деформируемое тело. В качестве меры указанных повреждений предлагаются тензорные [1, 4, 10], векторные [11] или скалярные [8, 12—21] величины, имеющие различный физико-механический смысл. Однако в прикладных расчетах, с учетом сравнительно малой изученности динамических процессов неоднородного разрушения и недостаточности экспериментальных данных о процессах разрушения в условиях сложного напряженно-деформированного состояния, наибольшее применение нашли скалярные меры повреждения [1, 4, 9, 14—25].

В формальной схеме представления моделей механики повреждаемой сплошной среды (МПСС) принципиальными являются следующие два момента. Во-первых, это выбор конкретной физико-механической величины в качестве меры повреждения и формулировка адекватных ей кинетических уравнений, описывающих количественные изменения меры при деформировании и разрушении материала. Во-вторых, это формулировка согласованных с выбранной мерой повреждения уравнений, описывающих процесс деформирования поврежденной сплошной среды.

При моделировании сравнительно простых и наиболее изученных процессов одномерного динамического разрушения отколом в качестве меры повреждения используется обычно скалярный параметр, при достижении которым предельного (порогового) значения происходит разрушение. В простейших случаях таким параметром является либо интеграл по времени от некоторой функции наибольшего растягивающего напряжения, либо само время действия

такого напряжения [1, 3, 5, 13, 26, 27]. Для более общих случаев разрушения мера повреждения в преобладающем большинстве работ ассоциируется с объемом микротрещин или микропор [7—9, 14, 16, 18—20, 22—25], хотя иногда ее вводят и как величину типа удельной диссипации энергии [19], как величину, физико-механический смысл которой может меняться на разных стадиях процесса разрушения [15], или даже просто как некую формальную интегральную величину, характеризующую поврежденность [9, 21].

Важнейшим преимуществом представления поврежденной среды как сплошной среды с дефектами типа микропор и микротрещин, которое и обусловило широкое применение соответствующей меры повреждения, является сочетание возможности проведения, хотя бы и после опыта, экспериментальных измерений меры повреждения материала в состоянии неполного (частичного) разрушения с фактом экспериментально подтверждаемой корреляционной зависимости процесса разрушения от объема микропор в материале [7, 8].

В качестве математических моделей деформирования среды с микропорами и микротрещинами наиболее часто используются уравнения однофазных пористых сред [8, 9, 16—19, 22—25, 28—31] либо формально двухфазных, но по сути близких по описанию к однофазным [1, 23, 32]. Простейшие модели деформирования пористых сред [29—31, 33, 34] формулируются лишь для гидростатической компоненты напряженного состояния, что существенно ограничивает рамки их применения. Различные обобщения этих моделей на случай учета девиаторной составляющей напряженно-деформированного состояния приводятся в работах [16—19, 22—25, 35—41].

## **7.2. Модели деформирования пористой среды**

**Соотношения для шаровых составляющих.** В основу почти всех отмеченных выше теорий упругопластического деформирования пористых сред при динамическом нагружении положены соотношения так называемой  $P$ - $\alpha$ -модели Хермана—Кэррола—Холта [31, 33] либо некоторые следствия этой модели. Если ограничиться рассмотрением поведения умеренно пористых сред, каковыми являются поврежденные сплошные среды, и величин нагрузок, не превосходящих 10—20 ГПа, то основные представления, используемые при формулировке указанной модели, можно пояснить следующим образом.



Зависимость давления  $P_p$  в пористой среде от удельного объема  $V$  представляется в параметрическом виде посредством введения некоторого параметра  $\alpha$ , характеризующего степень пористости материала, с помощью двух функций:

$$P_p = f(v, \alpha), \quad \alpha = g(P_p). \quad (7.2.1)$$

Наиболее часто параметру  $\alpha$  придают смысл относительного объема сплошного вещества (матрицы) в пористом теле [28]

$$\alpha = V_s/V, \quad (7.2.2)$$

где  $V_s$  — удельный объем матричного материала (материала, в котором поры отсутствуют).

Конкретный вид зависимости  $\alpha = g(P_p)$ , характеризующей необратимое уплотнение, получают либо аппроксимацией экспериментальных данных [33, 34], либо расчетно-аналитическим путем, исходя из анализа сжатия сферического слоя [23, 29, 30]. Известны следующие представления функции  $g$  для  $\alpha$ , определенной согласно выражению (7.2.2):

$$\alpha = 1 - \exp\left(\frac{3P}{2\sigma_T}\right),$$

$$\alpha = 1 - (1 - \alpha_e) \exp\left(\frac{P - P_e}{R}\right),$$

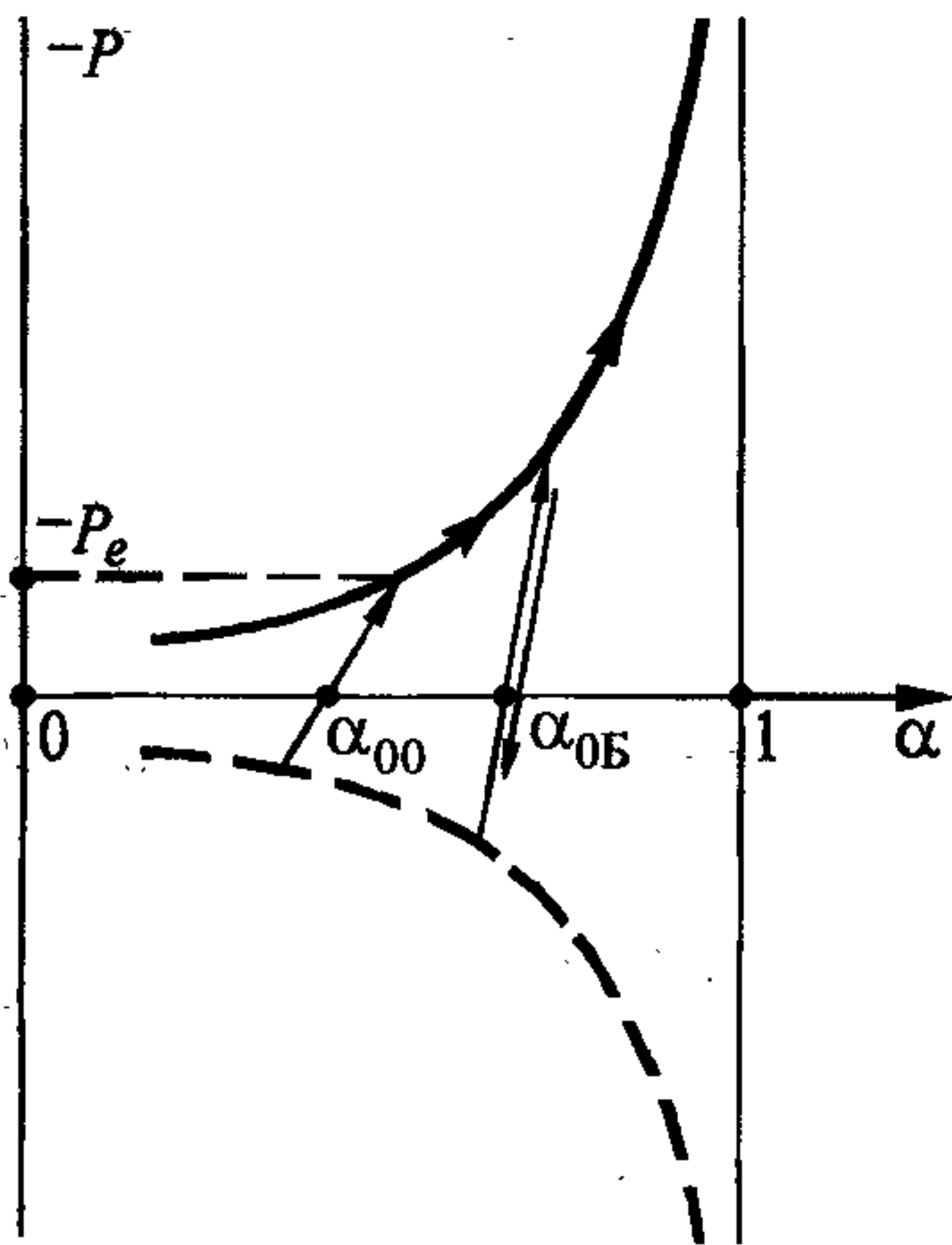
$$\alpha = 1 - (1 - \alpha_0) \exp\left[1,67 \Delta e_i \operatorname{sh}\left(\frac{3P}{2\sigma_T}\right)\right],$$

$$\alpha = 1 - (1 - \alpha_e) \left[\frac{P_{s0} - P}{P_{s0} - P_e}\right]^2,$$

(7.2.3)

представленные в работах [8, 31, 33, 34], соответственно, причем давление  $P$  считается положительным при растяжении.

Схематично вид зависимости давления в пористой среде от  $\alpha$ , используемой в  $P - \alpha$ -модели, изображен на рис. 7.1 сплошной линией. Значком  $P_e$  на рисунке отмечен начальный предел обратимого (упругого) деформирования пористого материала, а предел, после которого наступает полное закрытие пор



**Рис. 7.1.** Схема уплотнения пористой среды.  
Поясн. см. в тексте.

и происходит переход материала в сплошное (беспоровое) состояние с  $\alpha = 1$ , достигается асимптотически при больших давлениях  $P$ . Из любой точки кривой необратимого уплотнения пор  $\alpha = g(P)$  возможны промежуточные упругие разгрузки и повторные нагрузки с последующим выходом на эту же кривую. На рис. 7.1 линии обратной нагрузки — разгрузки отмечены для исходного (точка  $\alpha_{00}$ ) и промежуточного (точка  $\alpha_{0Б}$ ) состояний пористой среды. Иногда кривые необратимого уплотнения аппроксимируются зависимостями, характеризующимися тем, что полное закрытие пор наступает при конечных величинах давлений  $P = P_{S0}$  [33] (см. соответствующее соотношение в (7.2.3)).

Более детальная схема поведения пористого материала под нагрузкой включает в себя кроме стадии упругого (обратимого) деформирования и стадии полной пластичности, сопровождаемой необратимым уплотнением среды и уменьшением объема пор, также некоторый промежуточный режим деформирования (неполная пластичность) [8, 23, 29, 32]. Однако о значимости промежуточного режима в литературе существуют противоречивые мнения. В работе [23], например, показано, что учет режима деформирования неполной пластичности может изменить кривые нагружения пористого материала, а в работе [8] утверждается, что при деформировании реальных материалов этим режимом можно пренебречь.

Для аппроксимации функции  $P_p = f(V, \alpha)$  из (7.2.1) используют обычно уравнение ударной адиабаты  $P_s(V_s)$  беспорового твердого тела (материала матрицы). Отметим здесь два следующих представления:

$$P_p = P_s(V_s) = P_s(V, \alpha), \quad (7.2.4)$$

$$P_p = P_s(V_s) = \alpha P_s(V, \alpha), \quad (7.2.5)$$

в работах [31, 33] соответственно.

Формально параметризация (7.2.1) предоставляет большой произвол в вы-



боре вида функций  $f$  и  $g$ . Однако если параметр  $\alpha$  имеет конкретный физико-механический смысл, например, определяемый выражением (7.2.2), то указанный произвол фактически снимается. Действительно, тогда функция  $g$ , хотя бы в принципе, может быть определена экспериментально либо построена расчетно-аналитическим путем. А если из (7.2.1) исключить параметр  $\alpha$ , то получим обычную зависимость  $P_p(V)$ , которая также может быть получена экспериментально для произвольного значения исходной пористости  $\alpha$ . Этими двумя экспериментами функция  $f$  определяется однозначно, тем самым и в целом зависимости  $f$  и  $g$  в параметризации (7.2.1) определяются однозначно с точностью, которую обеспечивает расчетно-аналитическая или аппроксимационная модель, принятая при нахождении  $\alpha = g(P)$ .

Для получения согласованной аппроксимации (7.2.1) рассмотрим элементарный объем пористого тела  $dV$ , находящийся в состоянии, характеризуемом параметрами  $V, P_p, \alpha, V_s$ . Предполагается, что для указанного объема справедливы все обычно принимаемые гипотезы механики сплошной среды. В частности, неоднородности поля напряжений и деформаций, обусловленные наличием пор, игнорируются и рассматриваются усредненные по объему  $dV$  значения напряжений и деформаций. При всестороннем сжатии объема  $dV$  приращения удельного объема пористого тела  $dV$ , приращения удельного объема материала матрицы  $dV_s$  и приращения, вызванные изменением объема пор, связаны соотношением:

$$dV_s = \alpha dV + V d\alpha. \quad (7.2.6)$$

Используя (7.2.2) и (7.2.6), введем некоторую вспомогательную сплошную среду (беспоровую и деформирующуюся одновременно с пористой средой в соответствии с изменением удельного объема  $V_s$ ), эквивалентную пористой среде [41]. Эквивалентность здесь заключается в постулируемом равенстве скоростей производства внутренней энергии в элементарных объемах пористого и вспомогательного сплошных тел. Полагая, что уравнение состояния вспомогательной среды идентично уравнению состояния материала матрицы пористого тела и что работа, совершаемая при всестороннем сжатии пористого тела, аккумулируется только материалом матрицы, рассмотрим выражение

$$P_p \cdot dV = P_s \cdot dV_s, \quad (7.2.7)$$

представляющее собой равенство приращений внутренних энергий в элемен-

тарных объемах пористой и равной ему по массе вспомогательной сплошных сред. Заметим, что для реальных материалов в рассматриваемых диапазонах изменения давлений и пористости различием между адиабатическим, изоэнтропическим и изотермическим сжатиями пористой среды можно пренебречь [35, 42].

Из равенства (7.2.7), как частные случаи, могут быть получены соотношения (7.2.4), (7.2.5). Если предположить, что поры в пористом теле заполнены несжимаемым материалом, т.е. абсолютный объем пор в процессе деформирования не меняется, то из (7.2.6) вытекает, что  $dV_s = dV$ . С учетом этого из (7.2.7) следует зависимость (7.2.4). Ясно, что подобное предположение о характере деформирования свободных пор приведет к сильному завышению давления в пористой среде. Поэтому для согласования с экспериментальными данными параметризации (7.2.1) в целом приходится искажать реальную зависимость  $\alpha = g(P)$ . В работе [31] показано, что принятие зависимости (7.2.4) может привести к физически несостоятельным следствиям, в частности, скорость распространения волн изменения объема в пористом теле  $C$  может оказаться выше аналогичной скорости  $C_0$  для сплошного материала.

Более реальным является другое допущение, согласно которому поры деформируются так, как если бы они были заполнены тем же самым материалом, что и материал матрицы. Соотношение (7.2.6) для этого случая приводится к виду  $dV_s = \alpha dV$ , а из (7.2.7) теперь следует зависимость (7.2.5), которая в [31] была получена из других соображений. Очевидно, что при гидростатическом сжатии пористой среды рассматриваемое допущение также занижает степень закрытия пор и ведет к завышению давления.

Для получения соотношения, определяющего давление в пористой среде в рамках параметризации (7.2.1), при использовании уравнения кривой изотропного сжатия материала матрицы, и согласованного с экспериментальными зависимостями  $\alpha = g(P)$  и выражением  $\alpha = V_s/V$ , необходимо в (7.2.7) подставить полное выражение  $dV_s$  из (7.2.6).

После очевидных преобразований из (7.2.7) находится следующее выражение для давления в пористой среде:

$$P_p(V) = (\alpha + \alpha' \partial P / \partial V) P_s(V, \alpha), \quad (7.2.8)$$

где  $\alpha' = \partial g / \partial P_p$ . При динамическом деформировании пористой среды в упру-



гой области имеет место зависимость  $\partial P_p / \partial V = -C^2 / V^2$ , где  $C(\alpha)$  — акустическая скорость волн изменения объема в пористой среде. Предполагая, что модуль объемного сжатия пористой среды определяется соотношением  $K = C^2 / V$ , выражение (7.2.8) можно представить так:

$$P_p(V) = (\alpha - \alpha'K)P_s(V, \alpha) = (\alpha - \alpha' C^2 / V)P_s(V, \alpha). \quad (7.2.9)$$

Дифференцируя (7.2.9) вдоль линий упругой нагрузки — разгрузки, будем иметь:

$$C^2 = -V^2 \left( (\alpha - \alpha'K) \frac{\partial P_s \partial V_s}{\partial V_s \partial V} + P_s \frac{\partial (\alpha - \alpha'K)}{\partial V} \right). \quad (7.2.10)$$

Полагая, что обратимые процессы нагрузки — разгрузки близки к линейным, т.е.  $\partial P_p / \partial V \approx \text{const}$  и  $\alpha' \approx \text{const}$ , выражение (7.2.10) после некоторых преобразований приобретет следующий вид:

$$C^2 = \left( 1 - \frac{\alpha'K}{\alpha} \right)^2 K_0 V + 2\alpha'K P_s V, \quad (7.2.11)$$

где  $K_0$  — модуль объемного сжатия материала матрицы, а  $\alpha'$  характеризует наклон линий обратимой нагрузки — разгрузки. В рассматриваемом диапазоне нагрузок  $P_s \ll K_0$ , поэтому вторым слагаемым в (7.2.11) по сравнению с первым можно пренебречь, что позволяет получить зависимость  $\alpha'(C)$  для режима упругого деформирования:

$$\alpha' = \alpha / K (1 - C / C_0) = 1 / K_0 (C_0 / C - 1) C_0 / C. \quad (7.2.12)$$

С учетом этой зависимости соотношение (7.2.9) представляется следующим образом:

$$P_p(V) = \alpha C / C_0 P_s(V, \alpha). \quad (7.2.13)$$

Для сравнения соотношений (7.2.4), (7.2.5) и (7.2.13) укажем значения множителей  $\alpha_{00}$  и  $C / C_0$  для двух разнотипных материалов: пористого алюминия [28] —  $\alpha_{00} = 0,78$ ,  $C / C_0 = 0,52$  и керамики на основе BeO [42] —  $\alpha_{00} = 0,94$ ,  $C / C_0 = 0,94$ . Приведенные данные подтверждают существенные отличия в величинах давлений в пористой среде, предсказываемых формулами (7.2.4), (7.2.5) и (7.2.13), при одной и той же зависимости  $\alpha = g(P)$ .

Заметим, что использование соотношений (7.2.8), (7.2.9), (7.2.13) оставляет физический смысл параметра  $\alpha$  адекватным выражению (7.2.2), поэтому легко можно учесть наличие внутреннего давления в порах. Для этого следует в правую часть (7.2.7) добавить соответствующее приращение внутренней энергии, связанное с деформированием вещества, находящегося в порах.

**Соотношения для девиаторных компонент.** Обращаясь к более сложным видам напряженного состояния и путям нагружения изначально пористых сред, следует отметить, что основной объем экспериментальных данных о поведении пористых сред относится к случаям одноосной деформации сжатия (состояние в плоских волнах сжатия) [28—30, 43]. Важные для теории и приложений сведения о нестационарном деформировании пористых сред в условиях растяжения и о влиянии на сопротивление деформированию девиаторных компонент тензора напряжений явно недостаточны. Вместе с тем даже при одноосной деформации при уплотнении пористых сред наблюдается качественно различное поведение девиаторной составляющей напряжений. Для ряда пористых материалов, например, при уплотнении твердых керамик, происходит частичное или полное снижение сдвиговой прочности, поскольку адиабаты Гюгонио для них при высоких напряжениях сближаются с кривыми изотропного сжатия [42]. В то же время сравнение аналогичных адиабат для пористых металлов свидетельствует о прогрессирующем упрочнении при их уплотнении [43]. Отметим здесь также сравнительно высокие начальные значения предела упругости Гюгонио  $\sigma_{HEL}$  малопористых керамических материалов, что приводит в зоне частичного уплотнения к существенному влиянию на сопротивление деформированию девиаторной компоненты тензора напряжений.

Обобщение зависимостей, используемых для связи шаровых компонент типа (7.2.4), (7.2.5), (7.2.13), на напряженно-деформированное состояние с девиаторными компонентами в литературе проводится чаще всего с помощью одного из двух близких подходов. Согласно первому из них используется критерий текучести типа Грина:

$$F = \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} + \varphi \sigma^2 - 2/3 (\psi \sigma_T^s)^2, \quad \psi \sigma_T^s = \sigma_T^p \quad (7.2.14)$$

и ассоциированный с ним закон течения для упругопластически деформирующейся среды, допускающий необратимые изменения объема [8, 9, 36, 38, 41]. В (7.2.14)  $\sigma'_{ij}$  — девиатор напряжений;  $\sigma$  — среднее напряжение;  $\sigma_T^p, \sigma_T^s$  — пределы текучести пористой и вспомогательной сплошных сред;  $\varphi, \psi$  —



функции параметра  $\alpha$ . Второй подход связан с введением дополнительной зависимости предела текучести от давления в традиционных соотношениях ассоциированной теории течения [8, 19, 23, 39, 40]:

$$F = \sigma'_{ij}{}^p \sigma'_{ij}{}^p - 2/3 (\sigma_r^s(\alpha, \sigma))^2. \quad (7.2.15)$$

Из наличия явной зависимости предела текучести от давления в (7.2.15) следует, что в рассматриваемой пористой среде также допускаются необратимые деформации объема. Отметим далее, что принятая форма пластических потенциалов (7.2.14), (7.2.15) указывает на принятие гипотезы, согласно которой деформирование пористой среды в условиях строго девиаторного напряженно-деформированного состояния не влечет за собой необратимых изменений объема, а всестороннее растяжение—сжатие не приводит к изменению девиаторной компоненты напряженно-деформированного состояния материала.

При установлении связей напряжений с деформациями соотношения (7.2.14) и (7.2.15) дополняются законом Гука для приращений тензора упругих деформаций, а приращения тензора необратимых деформаций  $de_{ij}^n$  определяются ассоциированным законом течения вида  $de_{ij}^n = d\lambda \partial F / \partial \sigma_{ij}$ .

Рассмотрим далее равенство внутренних энергий, связанных с работой девиаторной составляющей напряжений, в упомянутых выше элементарных объемах пористой и вспомогательной сплошных сред. Предполагая, как и ранее, что внутренняя энергия при деформировании аккумулируется лишь веществом матрицы пористого тела, а деформирование происходит в упругой зоне, т.е. напряжения и деформации в пористой и сплошной средах связаны законом Гука, указанное равенство можно представить в следующем виде:

$$G_s e'_{ij}{}^s e'_{ij}{}^s V_s = G_p e'_{ij}{}^p e'_{ij}{}^p V, \quad (7.2.16)$$

где  $G$  — модуль сдвига,  $e'_{ij}$  — девиатор деформаций, а индексы  $s$  и  $p$  идентифицируют сплошную и пористую среды соответственно. Предположим затем, что тензоры скорости деформаций в элементарных объемах пористой и сплошной сред подобны, т.е.

$$\dot{e}_{ij}^s = \beta \dot{e}_{ij}^p. \quad (7.2.17)$$

Свертка (7.2.17) с единичным тензором  $\delta_{ij}$  при учете соотношений (7.2.2), (7.2.6), (7.2.12) после несложных преобразований приводит к следующему вы-

ражению для  $\beta$ :

$$\beta = C/C_0. \quad (7.2.18)$$

Если в зависимости  $C(\alpha)$  в зоне упругого деформирования пористой среды пренебречь изменениями скорости в силу малости изменения параметра  $\alpha$ , то будем иметь  $C(\alpha) = C(\alpha_0) = \text{const}$ , где  $\alpha_0$  — текущая пористость среды в состоянии разгрузки ( $P_p = 0$ ). При этом из (7.2.17), (7.2.18) вытекает, что подобны будут также тензоры деформаций и их девиаторные составляющие:

$$e_{ij}^s = C/C_0 e_{ij}^p, \quad e'_{ij}^s = C/C_0 e'_{ij}^p. \quad (7.2.19)$$

Отсюда и из (7.2.16) следует, что модули сдвига пористой и матричной сплошных сред связаны зависимостью:

$$G_p = \alpha_0 C^2/C_0^2 G_s. \quad (7.2.20)$$

При линейной аппроксимации кривой изотропного сжатия сплошного вещества модули  $K$  и  $K_0$  будут связаны такой же зависимостью.

Зависимость модуля сдвига  $G$  для пористой керамики на основе  $Al_2O_3$ , соответствующая формуле (7.2.20), изображена на рис. 7.2 сплошной линией, точки — экспериментальные данные из [42]. Здесь же представлены аналогичные данные для модуля объемного сжатия  $K$  и

продольного модуля при одноосной деформации  $L = K + 4/3G$ . Хорошее соответствие значений упругих модулей, подсчитанных по формуле (7.2.20), экспериментальным данным наблюдается для пористого железа (рис. 7.3), а также и для других пористых материалов, данные о которых приведены в работе [44].

С физико-механической точки зрения соотношения (7.2.20) представляются более содержательными по сравнению с обычно используемыми зависимостями модулей от коэффициента пористости типа  $G_p = \alpha G_s$  (см., например, [40]), поскольку в приведенных соотношениях наряду с чисто концентрацион-

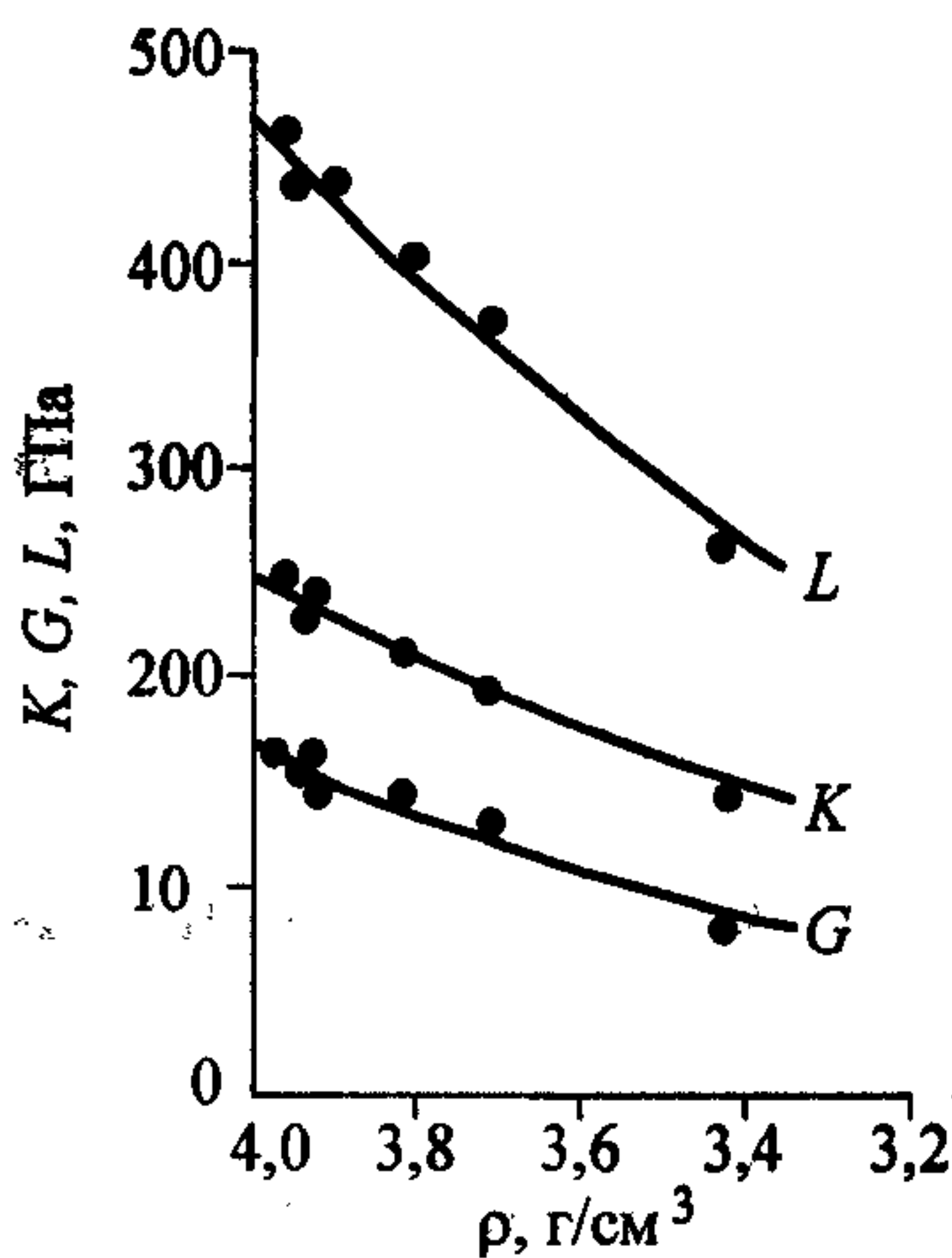


Рис. 7.2. Модули упругости керамики.

Поясн. см. в тексте.



ной характеристикой пористого тела (объемом пор  $\alpha_0$ ) в какой-то мере учитываются также жесткостные свойства пористой среды. Различием в указанных зависимостях можно пренебречь при близких значениях скоростей звука в пористой и сплошной средах, но приведенные выше данные для пористых алюминия и керамики свидетельствуют, что это будет оправданно не всегда.

Рассматривая далее цепочку равенств

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}(\sigma_T^p)^2 &= \sigma'_{ij}{}^p \sigma'_{ij}{}^p = 4G_p^2 e_{ij}^p e_{ij}^p = \\ &= 4G_s^2 (\alpha_0 C/C_0)^2 e_{ij}^s e_{ij}^s = (\alpha_0 C/C_0)^2 \sigma'_{ij}{}^s \sigma'_{ij}{}^s = \frac{2}{3}(\sigma_T^s)^2 (\alpha_0 C/C_0)^2, \end{aligned} \quad (7.2.21)$$

вытекающих из соотношений (7.2.14), (7.2.19), (7.2.20) при  $\sigma = 0$ , получим взаимосвязь пределов текучести  $\sigma_T^p$  и  $\sigma_T^s$  [41]:

$$\sigma_T^p = \alpha_0 C/C_0 \sigma_T^s. \quad (7.2.22)$$

Из (7.2.14) и (7.2.22) следует, что  $\psi = \alpha_0 C/C_0$ , откуда видно, что пористая среда при уплотнении будет упрочняться даже для идеально-пластического материала матрицы. Рассматривая (7.2.14) при  $\sigma'_{ij}{}^p \sigma'_{ij}{}^p = 0$  и пользуясь соотношением  $P_p = g^{-1}(\alpha) = h(\alpha)$ , вытекающим из (7.2.1), получим выражение для  $\varphi$ :

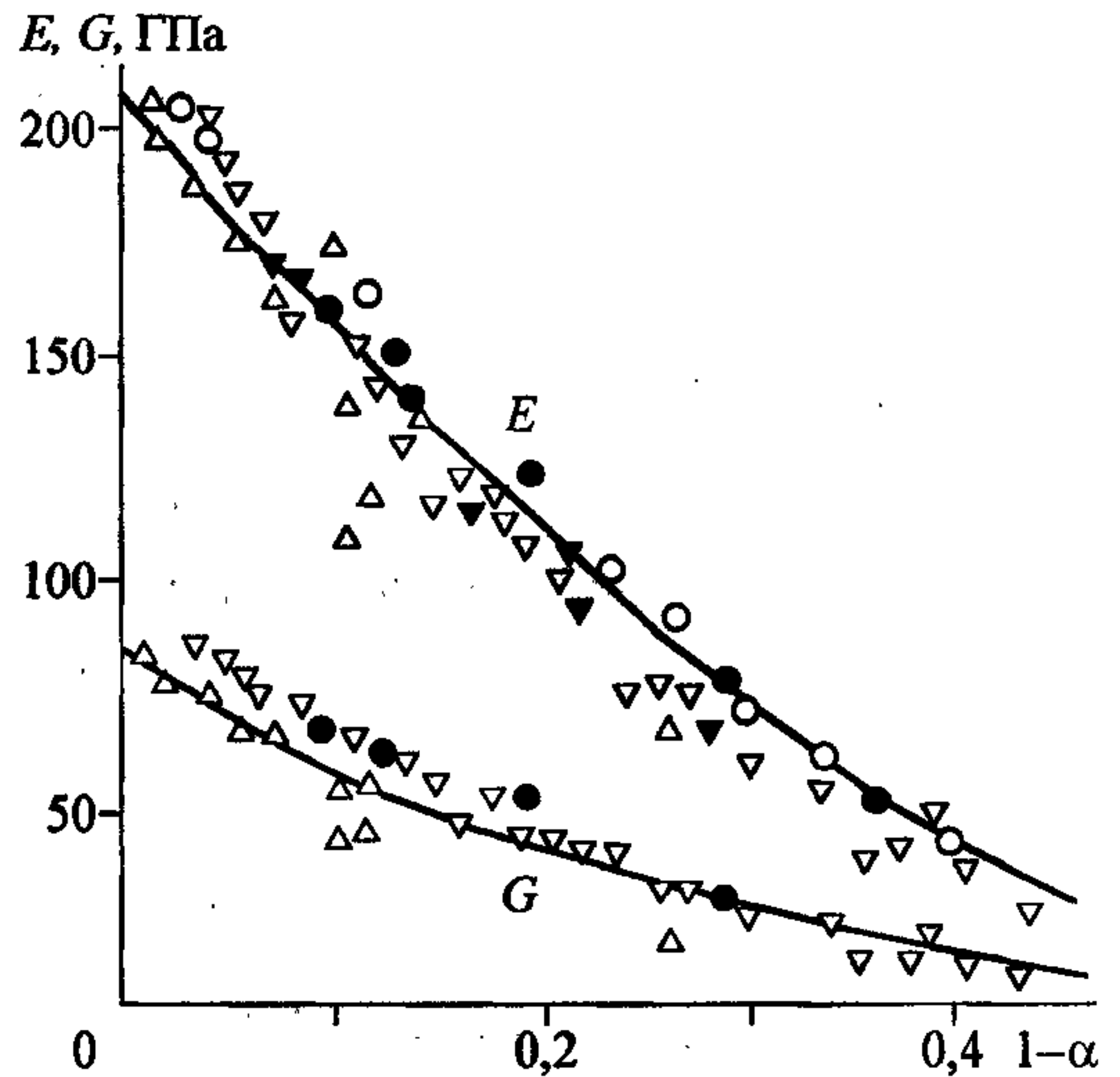


Рис. 7.3. Модули упругости пористого железа.

Поясн. см. [44].

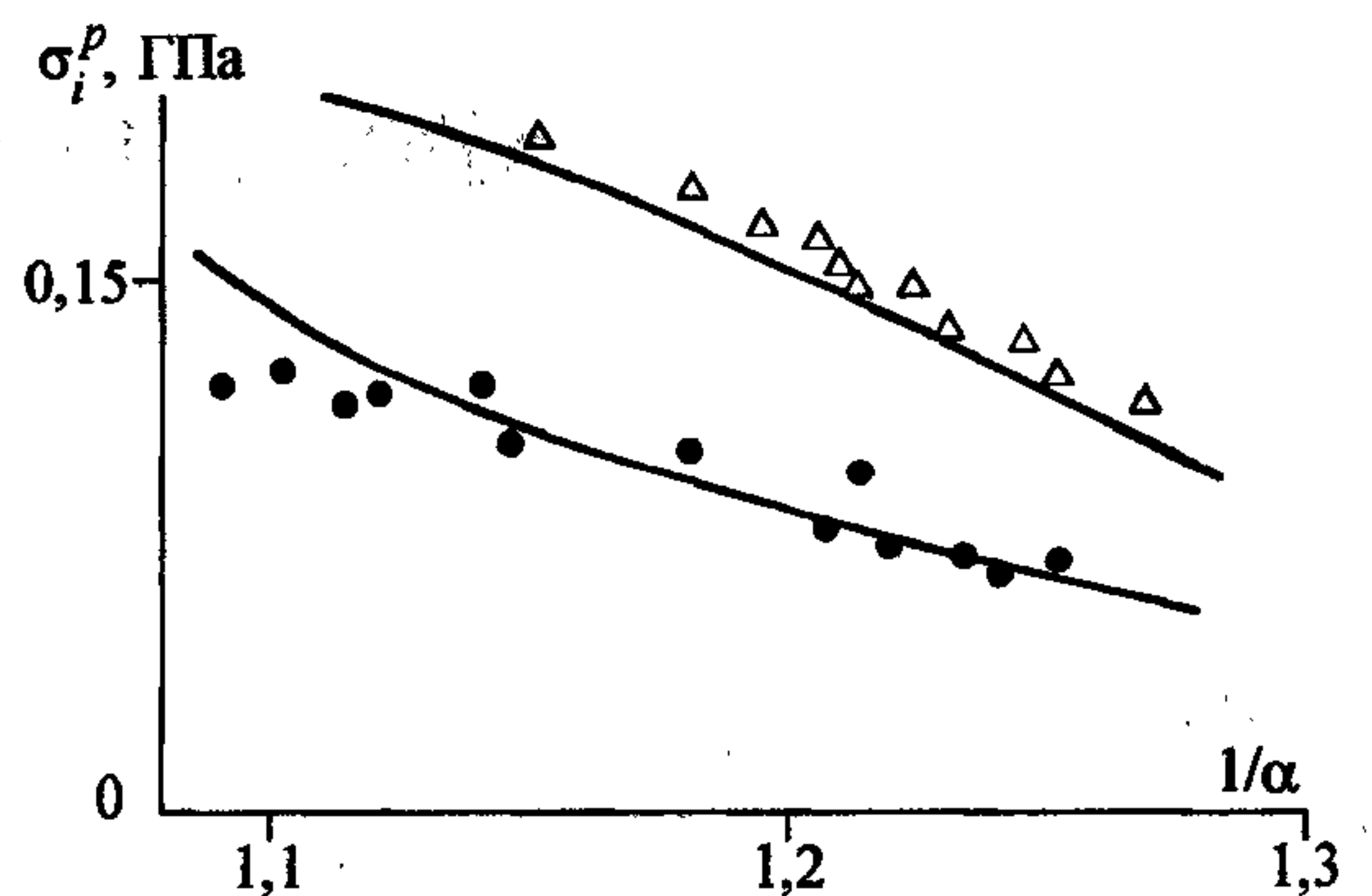


Рис. 7.4. Интенсивность девиатора при сжатии пористого алюминия.

Поясн. см. в тексте.

$$\varphi = 2/3(\psi\sigma_T^s/h)^2, \quad (7.2.23)$$

что вместе с выражением для  $\psi$  однозначно определяет уравнение поверхности (7.2.14).

На рис. 7.4 приведены теоретические кривые, полученные на основе соотношений (7.2.14), (7.2.22), (7.2.23) и иллюстрирующие неплохое качественное и количественное согласие с экспериментальными данными из [43] об изменении девиаторного напряжения  $\sigma_i = \sqrt{3\sigma'_{ij}{}^p\sigma'_{ij}{}^p}/2$  при сжатии пористого алюминия ( $\alpha_{00} = 0,78$ ) для одномерной деформации (точки) и одномерного напряженного состояния (треугольники).

Уравнение поверхности (7.2.15) для режима деформирования с необратимым сжатием пор в достаточно общем виде может быть представлено следующим образом:

$$\sigma'_{ij}{}^p\sigma'_{ij}{}^p = 2/3(\psi\sigma_T^s)^2(1 + \vartheta(\alpha)q(\sigma)). \quad (7.2.24)$$

Здесь  $\psi$ ,  $\vartheta$  — функции параметра  $\alpha$ , а  $q$  — функция среднего напряжения  $\sigma$ . Вид функции  $\psi$  можно определить из (7.2.15) при  $\sigma = 0$ , аналогично рассмотренному выше случаю (в работах [8, 9, 23, 38, 39] априорно полагается, что  $\psi = \alpha$ ). Функции  $\vartheta$  и  $q$ , удовлетворяющие очевидным равенствам:

$$q(0) = \partial q / \partial \sigma|_{\sigma=0} = \vartheta(1) = 0, \quad \vartheta(0) = \infty,$$

в работах [8, 23, 39] определяются, исходя из анализа деформирования одиночной поры. При этом в [23, 39] при формулировке потенциала (7.2.24) использованы выражения:

$$\vartheta = 2(1-\alpha)/\alpha^2, \quad q = 1 - \text{ch}(3\sigma/2\sigma_T). \quad (7.2.25)$$

В работе [8] указанные функции представлены в виде:

$$\vartheta = 1/(\ln(1-\alpha))^2, \quad q = -(3\sigma/2\sigma_T)^2, \quad (7.2.26)$$

а в работах [9, 38] для них были получены следующие представления:

$$\vartheta = (1-\alpha)/(0,6\alpha^n)^2, \quad q = -(3\sigma/2\sigma_T)^2. \quad (7.2.27)$$

Заметим, что в вариантах (7.2.25) и (7.2.26) представления функций  $\vartheta$  и  $q$  потенциала (7.2.24) в качестве базовой кривой изотропного уплотнения  $\alpha = g(\sigma)$  неявно используется первое выражение из (7.2.3), а для представления



(7.2.27) зависимость коэффициента пористости от давления имеет следующий вид:  $(3\sigma/2\sigma_T)^2 = (1-\alpha)/(0,6\alpha^n)^2$ . Вообще же существование зависимостей (7.2.3) и обратных им зависимостей вида  $\sigma = h(\alpha)$  в силу зависимостей (7.2.1), (7.2.2), (7.2.15) требует, чтобы  $\vartheta$  и  $q$  удовлетворяли следующим тождествам:

$$\vartheta(\alpha) \cdot q(h(\alpha)) \equiv -1, \quad \vartheta(g(\sigma)) \cdot q(\sigma) \equiv -1.$$

Таким образом, выражения вида (7.2.20), (7.2.22), представляющие собой зависимости механических характеристик пористой среды от коэффициента пористости, позволяют рассчитывать поведение пористой и, в частности, поврежденной среды в несвязной постановке, т.е. в случае, когда деформирование среды не вызывает изменения величины  $\alpha$ . Если же дополнительно к (7.2.20), (7.2.22) в уравнения состояния среды включаются пластические потенциалы (7.2.14) или (7.2.15) и соответствующие им ассоциированные законы течения, то задача деформирования будет связной. При этом для сжимающих средних напряжений ( $\sigma < 0$ ) будет происходить процесс необратимого закрытия пор, а действие растягивающих средних напряжений ( $\sigma > 0$ ) будет сопровождаться возрастанием поврежденности материала.

Однако указанная схема роста дефектов и поврежденности материала не является, вообще говоря, при нестационарном разрушении упругопластической среды ни исчерпывающей, ни универсальной, поскольку применима она лишь для частных режимов нагружения. Рассмотрим далее в этой связи более общую схему накопления и развития дефектов типа микротрещин и микропор.

### 7.3. Кинетические уравнения накопления повреждений

**Упругопластическая среда.** Состояние поврежденной сплошной среды в произвольной материальной точке  $M(x)$ , следуя [8], будем характеризовать двумя функциями  $N_0(M, t)$  и  $N_g(R, M, t)$ , где  $N_0$  — общее количество дефектов (микропор, микротрещин), а  $N_g(R)$  — количество дефектов, размер которых превышает  $R$ . Экспериментальными [8] и теоретическими [45] исследованиями установлено, что  $N_g(R)$  хорошо аппроксимируется экспоненциальной зависимостью

$$N_g = N_0 \exp(-R/R_1), \quad (7.3.1)$$

где  $R_1$  — математическое ожидание функции распределения длин трещин. Соотношение (7.3.1) позволяет вычислить объем дефектов, имеющих простую форму (сферические или эллипсоидальные поры):

$$V = \frac{4\pi}{3} k \int_0^{\infty} R^3 \frac{dN_g}{dR} dR = -\frac{4\pi}{3} k \int_0^{\infty} R^3 \frac{N_0}{R_1} \exp\left(-\frac{R}{R_1}\right) dR = 8\pi k N_0 R_1^3, \quad (7.3.2)$$

а затем, с помощью выражения (7.2.2), определить коэффициент пористости  $\alpha$ . Подгоночная константа  $0 \leq k \leq 1$  в (7.3.2) характеризует форму дефектов.

Результаты экспериментальных исследований [7, 8] показывают, что распределение дефектов вида (7.3.1) остается справедливым для широкого интервала размеров несплошностей (микропор, микротрещин) от нескольких микрон (зарождение несплошностей) до нескольких миллиметров как при ударном, так и при квазистатическом нагружении. Таким образом, в рамках принятых допущений (7.2.2), (7.3.1), (7.3.2) кинетические уравнения накопления повреждений в материале при действии нестационарных нагрузок могут быть представлены как уравнения, описывающие эволюцию распределения (7.3.1) во времени для материальных точек среды  $M(x)$ .

Форма принятой функции распределения дефектов (7.3.1) указывает на то, что в изменении параметра поврежденности  $\alpha$  естественным образом выделяются две составляющие:

зарождение дефектов, характеризуемое изменением  $N_0$ ;

рост размеров уже существующих дефектов, при этом меняется параметр  $R_1$ , но величина  $N_0$  остается неизменной.

Поскольку получение кинетических уравнений для названных составляющих с позиций материаловедения и физики твердого тела в настоящее время нереально, то при формулировке уравнений для  $N_0$  и  $R_1$  используют обычно феноменологические подходы, опирающиеся на результаты анализа процесса разрушения как на микро-, так и на макроуровне, а также на некоторые модельные физико-механические представления.

Основная предпосылка, вытекающая из экспериментальных наблюдений, касающихся динамического деформирования и разрушения упругопластических сред, заключается в том, что с известной долей условности в процессе нестационарного нагружения материальной частицы можно выделить две составляющих реакции на прикладываемую нагрузку и, в соответствии с этим, в про-



цессе разрушения выделяются две компоненты. Одна из них, существенно неравновесная, связанная с инерционными и вязкими эффектами процесса деформирования и разрушения материала, вызвана действием высоких напряжений, температур и скоростей деформаций, причем в напряженном состоянии при этом среднее напряжение преобладает над девиаторной составляющей. Вторая компонента в разрушении, которая может быть названа квазиравновесной, вызвана деструкцией материала, инициированной действием локальных сдвиговых напряжений и сопутствующих им необратимых (пластических) деформаций. На макроуровне в качестве контрольной величины в последнем случае удобнее принять к рассмотрению величину пластических деформаций, а не сдвиговых напряжений.

По данным работы [8], в достаточной степени универсальной зависимостью, описывающей скорость зарождения дефектов от действия двух указанных факторов, является зависимость, представляемая в виде суммы вкладов

$$\dot{N}_t = \dot{N}_0 \exp\left(\frac{\sigma - \sigma_{n0}}{\sigma_1}\right) H(\sigma - \sigma_{n0}) + B(\sigma)\dot{\sigma} + C(e_i)\dot{e}_i \quad (7.3.3)$$

от действия высоких напряжений (первое слагаемое) и связанного с пластическим деформированием (второе и третье слагаемые). В (7.3.3)  $\sigma$  — среднее растягивающее напряжение;  $H$  — функция Хевисайда;  $\dot{e}_i = (2/(3\dot{e}_{ij}^p\dot{e}_{ij}^p))^{1/2}$  — скорость возрастания эквивалентной пластической деформации;  $B, C$  — экспериментальные функции, а  $\dot{N}_0, \sigma_{n0}, \sigma_1$  — характеристики материала.

Существенной гипотезой, дополняющей кинетику зарождения (3.3), является предположение [8, 9] о том, что зародившиеся дефекты имеют распределение (7.3.1). То есть зарождаются дефекты не только малого размера, но и большие. Это допущение оправдывает себя при дальнейшем анализе разрушения [9] и существенно упрощает проведение прикладных расчетов.

Кинетика роста микроповреждений при относительно небольших растягивающих напряжениях либо развитых пластических деформациях и умеренных скоростях нагружения связана в основном с пластическим течением материала вокруг полостей и пор и с ростом размеров микропор и микротрещин. В этом случае для описания процессов роста дефектов типа полостей в упругопластических средах целесообразно использовать соотношения деформирования пористой среды, изложенные выше.

При высоких же скоростях нагружения и высоких уровнях растягивающих напряжений, когда велико влияние инерции и вязкости, в связи с чем в материале не успевают развиваться значительные деформации, кинетика роста полостей задается уравнением, описывающим рост радиуса поры в вязкой жидкости [8]:

$$\dot{R}/R = \frac{\sigma - \sigma_{g0}}{4\eta} H(\sigma - \sigma_{g0}), \quad (7.3.4)$$

где  $\sigma_{g0}$  — пороговое среднее напряжение,  $\eta$  — постоянная с размерностью вязкости.

При промежуточных уровнях напряжений и скоростей нагружения скорость роста размеров дефектов зависит от суммарного вклада, вносимого кинетикой (7.3.4) и соотношениями, определяемыми ассоциированным законом течения пористой сплошной среды с необратимыми изменениями объема. Указанными уравнениями, а также соотношениями (7.3.1)—(7.3.3) процесс накопления повреждений при нестационарном деформировании упругопластической среды для отмеченных выше двух условных режимов микроразрушения, включая стадию зарождения пор и стадию их роста, определяется полностью.

В прикладных задачах с явным преобладанием какой-либо одной компоненты разрушения вполне оправданы расчеты с упрощенными схемами кинетики накопления повреждений. Так, в работах [8, 46] анализ задач типа взрывного расширения оболочек был проведен на основе модели пористого материала [23, 39], при этом влияние зарождения дефектов на процесс разрушения не учитывалось. С другой стороны, успешное моделирование откольного разрушения возможно при использовании лишь кинетики, соответствующей вязкому росту пор [8, 9] и описываемой уравнением (7.3.4).

Заключительная фаза разрушения, когда микроразрушения начинают влиять друг на друга и сливаться, образуя макроразрушения, не имеет в настоящее время в достаточной степени формализованного описания. Причина здесь заключается в том, что фактически исходная сплошная среда испытывает разрывы сплошности, что влечет нарушение основных предпосылок МПСС.

В численных расчетах обычно предполагается, что стадия слияния дефектов начинается, когда либо суммарный объем дефектов, либо совокупная зона влияния дефектов в эталонном объеме материала  $V$  достигают критического значения [1, 8, 9, 16]. В последнем случае для пластической среды с дефектами в виде сферических пор каждому из дефектов ставится в соответствие некото-



рая зона (объем) влияния, пропорциональная кубу радиуса поры. Тогда область влияния всех микропор  $V_T$  можно найти по формуле, аналогичной (7.3.2). При заполнении зоной влияния объема ячейки, т.е. при  $V_T/V = 1$ , происходит макроразрушение ячейки. Поскольку при этом в расчетной области, как правило, явно не вводится разрывов сплошности и новых граничных поверхностей с постановкой на них граничных условий, то макроразрушения моделируются некоторой коррекцией тензора напряжений, согласованной с типом разрушения и видом напряженного состояния.

**Хрупкая среда.** В связи с расширяющимся использованием в технике ряда перспективных хрупких материалов (стекла, ситаллы, фарфор, керамики и т.д.) возрастает интерес к изучению процессов деформирования и разрушения подобных материалов при различных условиях нагружения, включая и диапазон интенсивных ударных воздействий. Однако механизмы разрушения хрупких поликристаллических и аморфных материалов при динамических нагрузках в настоящее время не вполне ясны и могут заметно отличаться от более понятных механизмов разрушения подобных материалов в статических условиях. Эксперименты показывают также существенные отличия динамического разрушения хрупких сред от разрушения упругопластических материалов при сходных условиях нагружения.

Рассмотрим кратко основные наиболее важные экспериментальные факты, характеризующие динамическое разрушение хрупких материалов и нашедшие подтверждение во многих работах [42, 47—65], а также некоторые модельные и аналитические представления [66—74], полученные в основном в рамках линейной механики разрушения (ЛМР).

Разрушение хрупких материалов происходит без появления заметных остаточных деформаций (эту характеристику не вполне обоснованно принимают иногда в качестве определения хрупкого материала), причем предел прочности на сжатие заметно больше предела прочности на растяжение, а разрушение при достижении предельного состояния происходит с некоторым запаздыванием во времени [55—59].

В опытах по ударному сжатию в условиях одноосной деформации (соударение пластин) выявлено существование предельного напряжения сжатия, напоминающего предел упругости Гюгонио для упругопластических материалов [42, 52, 63—65]. За пределом упругости Гюгонио сопротивление сдвиговым деформациям остается постоянным либо снижается, а для некоторых материа-

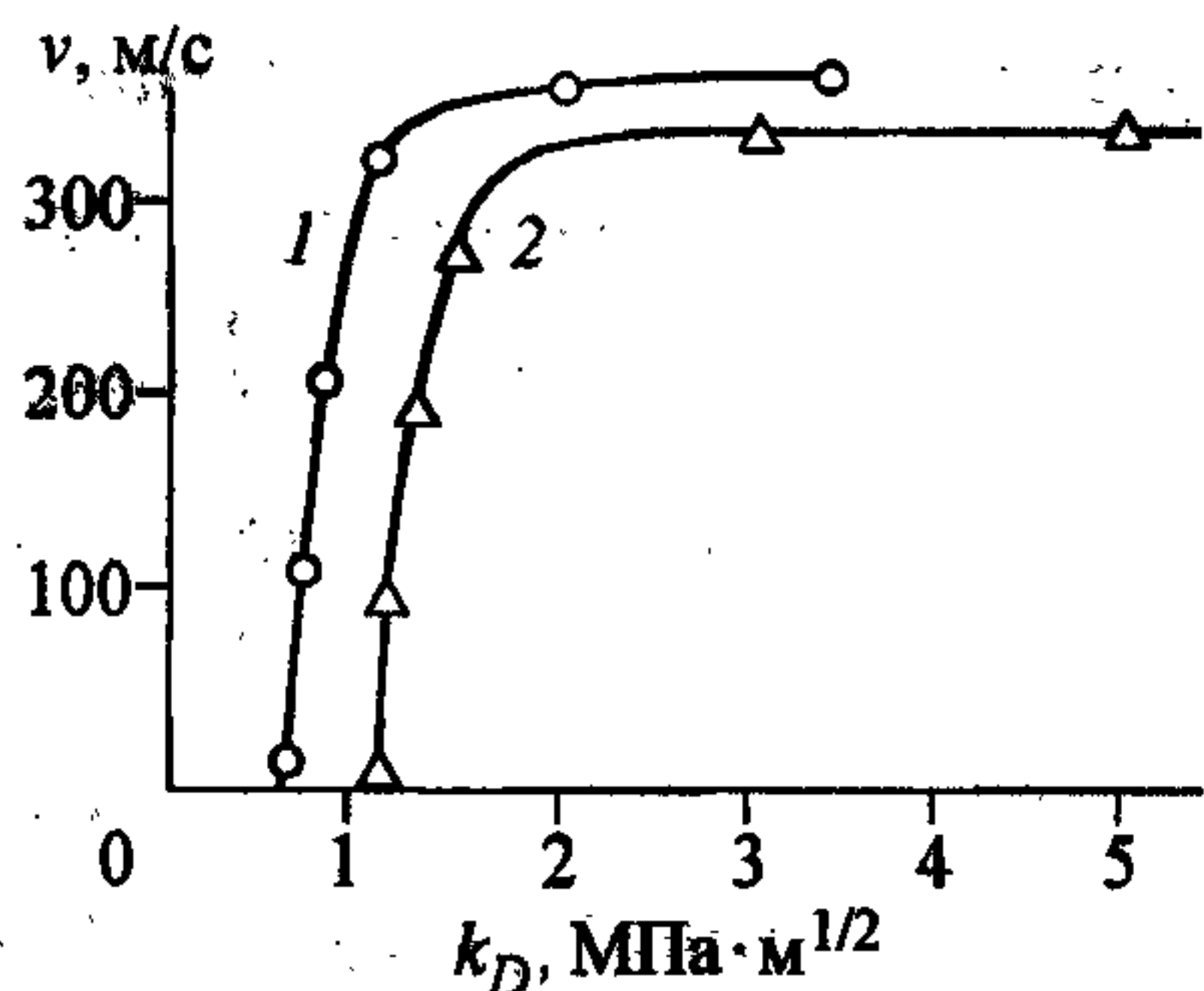


Рис. 7.5. Скорость роста трещины.  
1 — аралдит В, 2 — эпоксид КТЕ.

лов снижается даже до нуля. Снижается также частично или до нуля предел прочности на растяжение материала, предварительно сжатого выше предела упругости Гюгонио [68].

Распространение отдельных трещин при разрушении хрупких материалов происходит, как правило, с высокой скоростью, сравнимой со скоростью упругих сдвиговых волн [51, 56, 60—65]. Зависимости скорости роста трещин от динамического

коэффициента интенсивности напряжений (КИН)  $K_D$ , определенные экспериментально для ряда хрупких материалов, хорошо аппроксимируются Г-образной зависимостью [48] (см. рис. 7.5, взятый из [66]). При высоких значениях  $K_D$  происходят ветвление трещины и образование шероховатой поверхности разлома [48, 60—63, 70]. Аналогично ведут себя многие хрупкие материалы [48]. Поскольку характерной особенностью динамического разрушения является многоочаговая активизация процессов зарождения и роста дефектов, включая и зону вблизи вершины растущей трещины, то закономерности развития нестационарного макроразрушения могут заметно отличаться от закономерностей развития статического разрушения, которое в значительной степени связано с активизацией и развитием одиночных дефектов. Об этом свидетельствуют, в частности, результаты опытов [49, 50] по инициации и остановке трещин, когда при сравнительно невысоких скоростях нагружения в разрушении преобладало влияние одиночного дефекта и наблюдался выход на классические статические зависимости условия старта трещины. В этой связи при высоких скоростях подвода энергии зависимости, касающиеся Г-образного представления скорости распространения трещины, а также условий ее старта, могут быть использованы только для описания роста отдельного дефекта. Однако наступление и развитие макроразрушения должно являться следствием некоторого “коллективного” вклада отдельных дефектов в процесс разрушения.

Из ряда причин, ограничивающих непосредственное применение моделей упругопластического разрушения для описания разрушения хрупких тел, отметим следующую. Упругопластические модели допускают зарождение и рост



полостей (дефектов) и последующее разрушение, в том числе и хрупкое, только в тех случаях, когда либо наибольшее главное (растягивающее) напряжение, либо среднее напряжение (также растягивающее) превышают некоторый порог. Разрушение же хрупких тел, как известно, может происходить и при действии сжимающих напряжений.

Финальные стадии динамического разрушения хрупких тел принято связывать с быстрым распространением ряда активных трещин, фрагментирующих тело на множество осколков. В двумерных задачах плоской и осесимметричной деформации можно ограничиться рассмотрением двух типов трещин — трещин отрыва и поперечного сдвига [48, 66], характеризуемых КИН  $K_I$  и  $K_{II}$  соответственно. В рамках линейной механики разрушения получено много аналитических решений, выявляющих закономерности динамического распространения отдельных трещин. При этом обнаружено, что в характеристиках распространения трещин отрыва и сдвига при канонических видах напряженного состояния существует много общего [51, 70, 71]. Однако распространение трещин сдвига при комбинированных видах напряженного состояния, в том числе при действии нормальных к берегам трещины сжимающих напряжений, сопровождается рядом специфических эффектов, вызванных силами трения скольжения берегов трещины относительно друг друга.

Детальная картина распределения напряжений и смещений в зоне скольжения достаточно сложная [73, 74], схематично же влияние сжимающих напряжений можно пояснить следующим образом. В вершине трещины исчезает сингулярность от действия нормальных напряжений (от касательных остается) и снижается величина эффективных сдвиговых напряжений  $T_{эф}$ , оцениваемая формулой

$$T_{эф} = T + \mu\sigma, \quad (7.3.5)$$

где  $\mu$  — коэффициент трения скольжения, а  $\sigma$  — напряжение сжатия берегов трещины. Далее необратимые процессы рассеяния энергии при трении снижают эффективную скорость высвобождения энергии при движении трещины:

$$G_{эф} = G + \mu\sigma R, \quad (7.3.6)$$

где  $R$  — радиус трещины.

Соотношения (7.3.5) и (7.3.6) согласуются с экспериментальными выводами об упрочняющем действии сжимающих напряжений, а принятое в ЛМР условие старта трещины, с учетом (7.3.5), приводит к известному критерию

прочности типа критерия Кулона для хрупких материалов [47]:

$$T + \mu\sigma > T_*. \quad (7.3.7)$$

Приведенные соображения указывают на один из возможных путей обобщения условия старта одиночного дефекта (трещины) для произвольных видов напряженного состояния с помощью обобщенных критериев прочности. В [47] на основе анализа экспериментальных данных предложен обобщенный критерий статической прочности для структурно неоднородных материалов, учитывающий наличие в теле трещиноподобных дефектов и хрупкий характер разрушения:

$$\sigma_s = c\sigma_i + (1-c)\sigma_1 A^{1-I} < \sigma_p. \quad (7.3.8)$$

Здесь  $\sigma_i$  и  $\sigma_1$  — интенсивность напряжений и наибольшее главное напряжение;  $A < 1$  — параметр неоднородности материала;  $I$  — коэффициент жесткости напряженного состояния, определяемый формулой:

$$I = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / \sigma_i; \quad c = \sigma_p / \sigma_c,$$

где  $\sigma_p$  и  $\sigma_c$  — пределы прочности на растяжение и сжатие соответственно.

В соответствии с критерием (7.3.8) для старта трещины радиуса  $R_0$  необходимо выполнение условия ЛМР:

$$K_D = \sqrt{\pi R_0} \sigma_s > K_d, \quad (7.3.9)$$

где  $K_d$  — трещиностойкость по отношению к страгиванию трещины при динамическом нагружении. Из (7.3.9) следует, что расти также будут при данном  $\sigma_s$  все трещины, радиус которых удовлетворяет соотношению  $R > R_0 = 1/\pi(K_d/\sigma_s)^2$ .

Уравнение роста радиуса трещины после ее старта можно представить следующим образом [51]:

$$\dot{R} = v(K_D, R), \quad (7.3.10)$$

где  $v$  — скорость движения вершины трещины, а  $K_D$  — текущее значение динамического КИН.

В работах [51, 70, 71] показано, что существует простая зависимость, аппроксимирующая связь значений динамического и статического КИН со скоростью распространения трещины в виде:



$$K_D = K_s \left( 1 - \frac{v}{v_*} \right)^{1/2}. \quad (7.3.11)$$

Здесь  $K_s$  — статическое значение КИН, соответствующее нулевой скорости роста трещины, а  $v_*$  — предельное значение скорости трещины, равное скорости волн Рэлея для трещин отрыва и поперечного сдвига.

Если принять далее Г-образную аппроксимацию функции  $v(K_D)$  и допустить, что поведение материала от скорости не зависит, т.е. что динамическая трещиностойкость равна статической  $K_d = K_c$ , то из (7.3.10) и (7.3.11) получим:

$$\dot{R} = \begin{cases} v_* \left( 1 - (K_c/K_s)^2 \right), & v < v_{п}; \\ v_{п}, & v \geq v_{п}, \end{cases} \quad (7.3.12)$$

Поскольку значение статического КИН из ЛМР с учетом (7.3.8) имеет вид  $K_s = \sqrt{\pi R} \sigma_3$ , то (7.3.12) можно представить также в виде следующего легко интегрируемого выражения:

$$\dot{R} = \begin{cases} v_* (1 - b/R), & v < v_{п}; \\ v_{п}, & v \geq v_{п}, \end{cases} \quad (7.3.13)$$

где  $b = K_c^2 / (\pi \sigma_3^2)$ . Это соотношение, полученное с учетом аналитических зависимостей о росте трещин в ЛМР и с использованием некоторых экспериментальных данных, может рассматриваться как кинетическое уравнение для описания роста микродефектов в хрупких средах.

Начальное распределение дефектов в хрупких телах, согласно экспериментальным данным [8], описывается выражением (7.3.1). Однако в процессе накопления повреждений, с учетом выражения для роста дефектов (7.3.13), вид результирующего распределения изменится и аппроксимировать его выражением (7.3.1) можно будет лишь посегментно. С учетом этого факта и следует проводить интегрирование распределения микротрещин для определения объема трещин в элементе сплошной среды.

По данным работы [8], зарождение дефектов в хрупких материалах на физическом уровне, так же как и в упругопластических, инициируется термофлуктуационными эффектами в твердом теле. Поэтому скорость зарождения дефектов, с использованием выражения для эквивалентного напряжения  $\sigma_3$  из

(7.3.8), можно представить в виде, аналогичном (7.3.3), причем слагаемые, связанные с упругопластическим деформированием, следует опустить:

$$\dot{N}_t = \dot{N}_0 \exp\left(\frac{\sigma_s - \sigma_{n0}}{\sigma_1}\right) H(\sigma_s - \sigma_{n0}). \quad (7.3.14)$$

Замена в подэкспоненциальном выражении (7.3.3) значений наибольшего главного напряжения или растягивающего среднего, используемых обычно при описании разрушения упругопластических сред, на  $\sigma_s$  из (7.3.8) объясняется тем, что зарождение дефектов в хрупких материалах возможно также при действии сжимающих напряжений. Например, в экспериментах с керамикой BeO [58] зарождение трещин наблюдалось уже при уровне напряжений в 80% от разрушающих, причем как на сжатие, так и на растяжение.

Таким образом, соотношения (7.3.1), (7.3.8), (7.3.13), (7.3.14) представляют собой кинетические уравнения, описывающие зарождение и развитие повреждений в хрупких средах при действии интенсивных нестационарных нагрузок. Переход к финальной стадии разрушения (стадии слияния микрповреждений) и описание поведения хрупкого материала с макроразрушениями осуществляются аналогично рассмотренным ранее схемам для упругопластической среды.

Рассмотрим рис. 7.6, заимствованный из [8], на котором представлены экс-

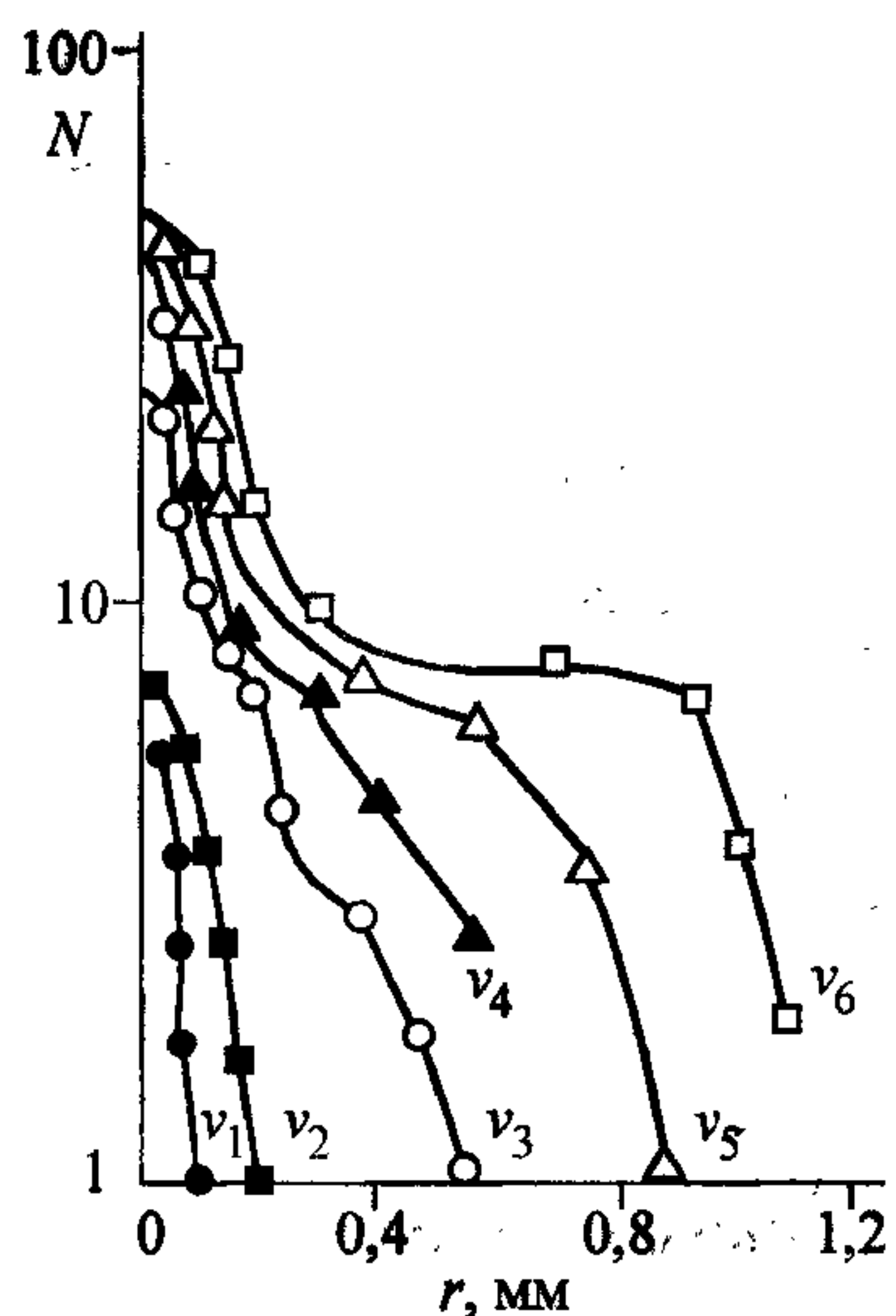


Рис. 7.6. Распределение микротрещин в керамике.

$$v_1 < v_2 < v_3 < v_4 < v_5 < v_6.$$

периментальные кривые распределения микротрещин  $N$  по размерам в керамике. Нагружение керамики осуществлялось ударом сферических частиц карбида вольфрама с различными скоростями  $v_i$ .

Из рисунка видно, что финальные распределения для малых скоростей удара  $v_1, v_2$  соответствуют в основном зарождению микротрещин (росту  $N_0$ ) и хорошо аппроксимируются выражением (7.3.1). При более высоких скоростях удара наряду с зарождением микротрещин происходит и рост их размеров, причем растут только некоторые наиболее длинные микротрещины. В распределении при этом существует плавная переходная зона, соединяющая интенсивно растущие и малорастущие



микротрещины. Отмеченные эффекты разрушения керамики находятся в согласии с принятыми выше условиями роста и зарождения микротрещин (7.3.13), (7.3.14).

Соотношения данной модели находятся в качественном согласии и с результатами экспериментов [49, 50], согласно которым при увеличении амплитуды растягивающего напряжения, приложенного в вершине разреза, имитирующего трещину, происходит уменьшение времени до начала движения трещины или, иными словами, наблюдается эффект роста критического КИН с уменьшением времени до разрушения. Очевидно, что уравнения (7.3.13), (7.3.14) при возрастании действующего эквивалентного напряжения обеспечивают в единицу времени возрастание как количества зарождающихся дефектов, так и количества интенсивно растущих дефектов. Отсюда следует более интенсивное накопление повреждений и, соответственно, уменьшение интервала времени до начала разрушения.

#### **7.4. Разрушение хрупких мишеней при ударных воздействиях**

Сравнительно малая изученность процессов динамического разрушения хрупких мишеней в условиях интенсивного ударного взаимодействия, как показывает анализ литературы, связана с особенностями их разрушения. Во-первых, при перфорации хрупких мишеней происходит интенсивная фрагментация материала, в экспериментах преграда зачастую полностью разрушается так, что возможность изучения остаточных форм мишени практически отсутствует. Во-вторых, хрупкое разрушение тесно связано с механикой образования и распространения трещин, чувствительно к состоянию поверхности, различного рода дефектам и концентраторам, что затрудняет экспериментальное и теоретическое изучение хрупкого разрушения.

Деформирование и разрушение хрупких однослойных и комбинированных (слоистых) мишеней рассматривалось в работах [52, 55, 63—65, 68, 75, 76], причем в состав комбинированных преград включались также слои упругопластических материалов. Разрушение хрупких преград рассматривалось также в [77—79] с привлечением существенных упрощающих гипотез о характере разрушения материала.

Особое направление образуют работы, освещающие результаты экспериментальных, аналитических и численных исследований по механике хрупких

трещин и разрушению преград при ударном нагружении путем образования, развития и движения отдельных трещин [48—53, 59—62, 69—71]. В рамках этого направления, учитывая реальную многоочаговость процессов разрушения в хрупких преградах при ударных воздействиях, удастся провести исследование только довольно узкого класса задач динамического разрушения хрупких мишеней.

Ниже приводятся некоторые результаты численного исследования процессов деформирования и разрушения хрупких материалов при ударных контактных нагрузках различной интенсивности. Мишени, в состав которых входили хрупкие материалы, представляли собой однослойную преграду конечной толщины либо комбинированную двухслойную, причем хрупким был лицевой слой. Для описания процессов разрушения хрупкого материала использовались соотношения сформулированной выше кинетической модели.

Указанные исследования предприняты были, главным образом, с целью выяснения качественной стороны закономерностей процессов разрушения, хотя, где это оказывалось возможным, проводилось и количественное сопоставление расчетных и экспериментальных результатов. В частности, в совместном экспериментально-теоретическом исследовании [80] для тестирования применяемой в расчетах модели разрушения хрупких сред были проанализированы наряду с качественными параметрами и некоторые количественные характеристики процесса разрушения.

При проведении вычислительных экспериментов использовался численный метод [81], представляющий собой явную схему в переменных Лагранжа на нерегулярных сетках с расчетными ячейками треугольной формы. Схема была дополнена методикой эпизодических локальных реконструкций искаженных участков расчетной сетки и методикой последующей переинтерполяции сеточных функций с искаженной сетки на перестроенную.

**Перфорация однослойной пластины.** Рассматривается процесс пробивания хрупких твердых пластин небольшой толщины  $h$  ( $h \approx d_{уд}$ ,  $d_{уд}$  — диаметр ударника) притупленными пластичными ударниками при ударе по нормали и скоростях соударения 600—800 м/с. Ударники (цилиндрические стержни из армко-железа с динамическим пределом текучести 0,5 ГПа) имели диаметр  $d_{уд} = 0,8$  см, длину 2,5 см, угол при вершине конической головной части составлял 165—170°. В качестве объектов натурального эксперимента [80] использовались пластины из закаленных сталей У8А, ХВГ, чугуна, стекла. В работе



[80] приведены постановка и подробности проведения натуральных экспериментов, а также некоторые результаты экспериментов, полученные во ФТИ РАН Г. С. Пугачевым и А. Б. Синани.

Вычислительные эксперименты по ударному деформированию и разрушению хрупкой пластины были разбиты на три группы. Первую группу составили расчеты деформирующейся без разрушения пластины при разных скоростях соударения. Во вторую группу вошли расчеты с фиксированной (670 м/с) скоростью удара и варьируемым от 0,9 до 2,6 ГПа пределом прочности материала мишени. Расчеты с меняющейся скоростью соударения и пределом прочности вошли в третью группу вычислительных экспериментов.

Расчетная схема рассматриваемой осесимметричной задачи приведена на рис. 7.7, а, где  $Z$  — ось вращения, а  $r$  — радиальная координата. Геометрические параметры ударника приведены выше, а радиус и толщина пластины составляют 3 и 0,8 см соответственно. В начальный момент времени напряжения и деформации в соударяющихся телах отсутствуют, ударник имеет начальную скорость  $\dot{z} = -v$ . На границах ударника и мишени вне зоны удара поверхностные нагрузки отсутствуют. В зоне удара реализуются контактные граничные условия, допускающие локальные отскоки, повторные удары и взаимные проскальзывания соударяющихся тел без трения. Поведение материала ударника описывается дифференциальной теорией пластичности с упрочнением. Связь напряжений с деформациями для материала пластины (плотность  $\rho = 7,85 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, модуль Юнга  $E = 210$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,32$ ) устанавливается законом Гука.

В первой группе вычислительных экспериментов были сделаны

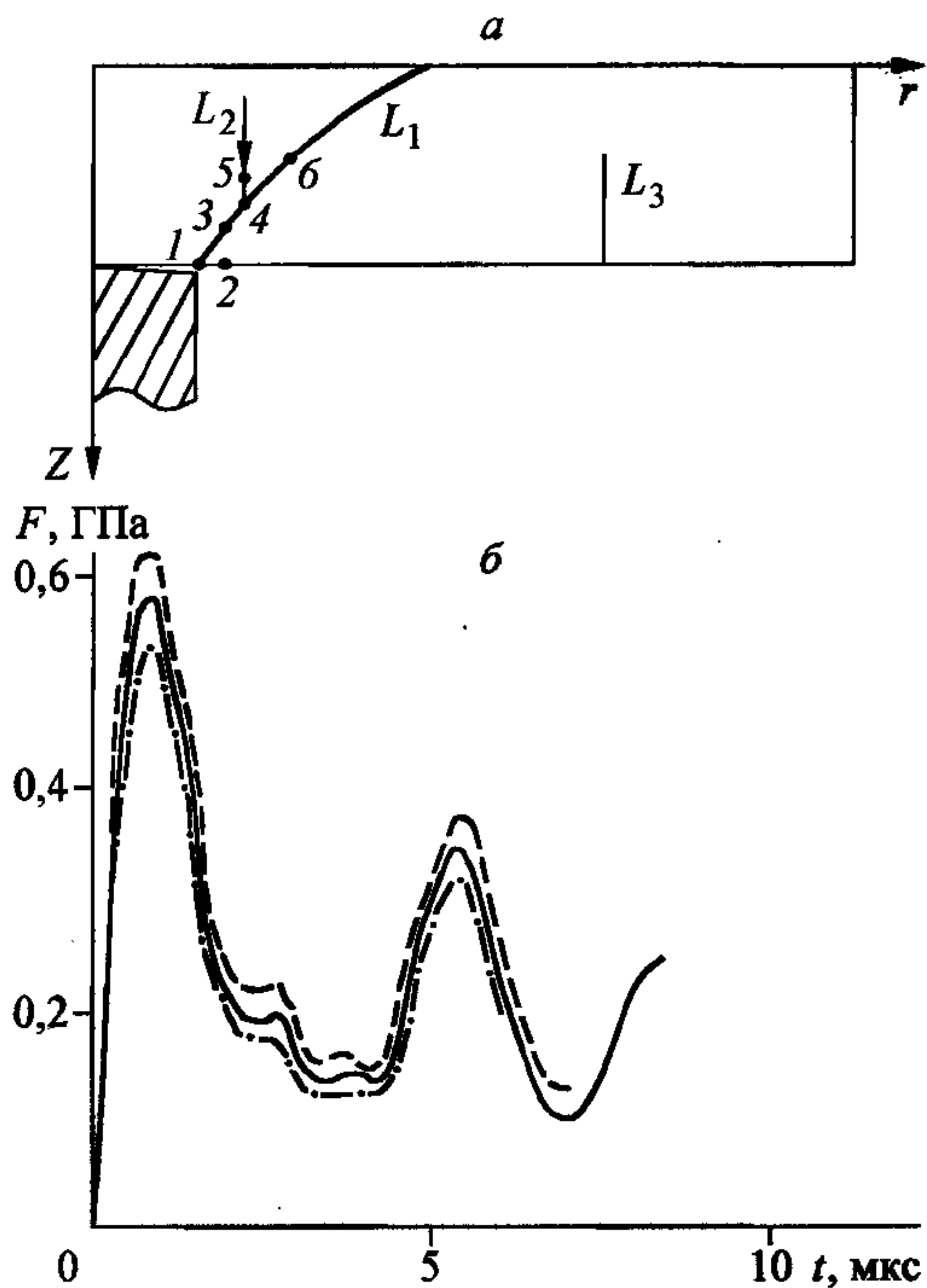


Рис. 7.7. Перфорация пластины.

а — расчетная схема, б — изменение контактной силы. Ост. поясн. см. в тексте.

попытки оценить степень нелинейности динамической реакции пластины на изменение скорости удара, поскольку известно, что контактные задачи часто нелинейны даже при упругом поведении обоих соударяющихся тел [82], и понять особенности волновых процессов в пластине, определяющие характеристики начальной фазы разрушения. Анализ результатов решения для нескольких скоростей соударения из рассматриваемого диапазона позволил сделать вывод о том, что закономерности изменения напряженного состояния в пластине для начальной стадии соударения (несколько пробегов упругой волны по толщине пластины) при изменении скорости весьма близки к линейным. В частности, изменения контактной силы во времени (см. рис. 7.7, б), являющейся основным параметром контактного взаимодействия ударника и мишени, для скоростей 670, 720 и 770 м/с хорошо совпадают по фазе, а изменение амплитудных значений силы достаточно точно описывается линейной зависимостью  $\Delta F = F_0 \Delta v / v_0$ , где  $F_0$  — значение силы при средней скорости соударения  $v_0 = 720$  м/с. Выяснилось, что аналогичными зависимостями связаны также амплитудные значения компонент тензора напряжений в точках пластины, отмеченных на рис. 7.7, а цифрами 1—6, причем параметры Лоде, характеризующие вид напряженного состояния, в соответствующих точках для указанных скоростей удара меняются во времени практически одинаковым образом.

Основная причина такой реакции пластины связана, по-видимому, с особенностями деформирования упругопластического стержня на начальной стадии соударения, в частности, с линейной зависимостью значений пиковых контактных усилий от скорости соударения. Отметим, что начальные условия для возникновения первых разрушений в пластине формируются именно на этой, начальной стадии удара. И хотя, как показывает анализ решения, возникшее разрушение заметно меняет параметры напряженного состояния в пластине, характер последующих разрушений в основном определяется также этой стадией.

Расчеты показывают, что растягивающие напряжения возникают первоначально на лицевой поверхности пластины вблизи зоны контакта, что подтверждается работами других авторов [59, 76], а также экспериментами с пластинами из стали У8А ( $h = (3-4)d_{уд}$ ) при низких скоростях удара (300—400 м/с) [80], в которых первые разрушения в пластинах обнаружены были в виде кольцевых трещин вблизи контура контакта. Процесс деформирования мишени на этапе образования первых кольцевых трещин — волновой и протекает сле-

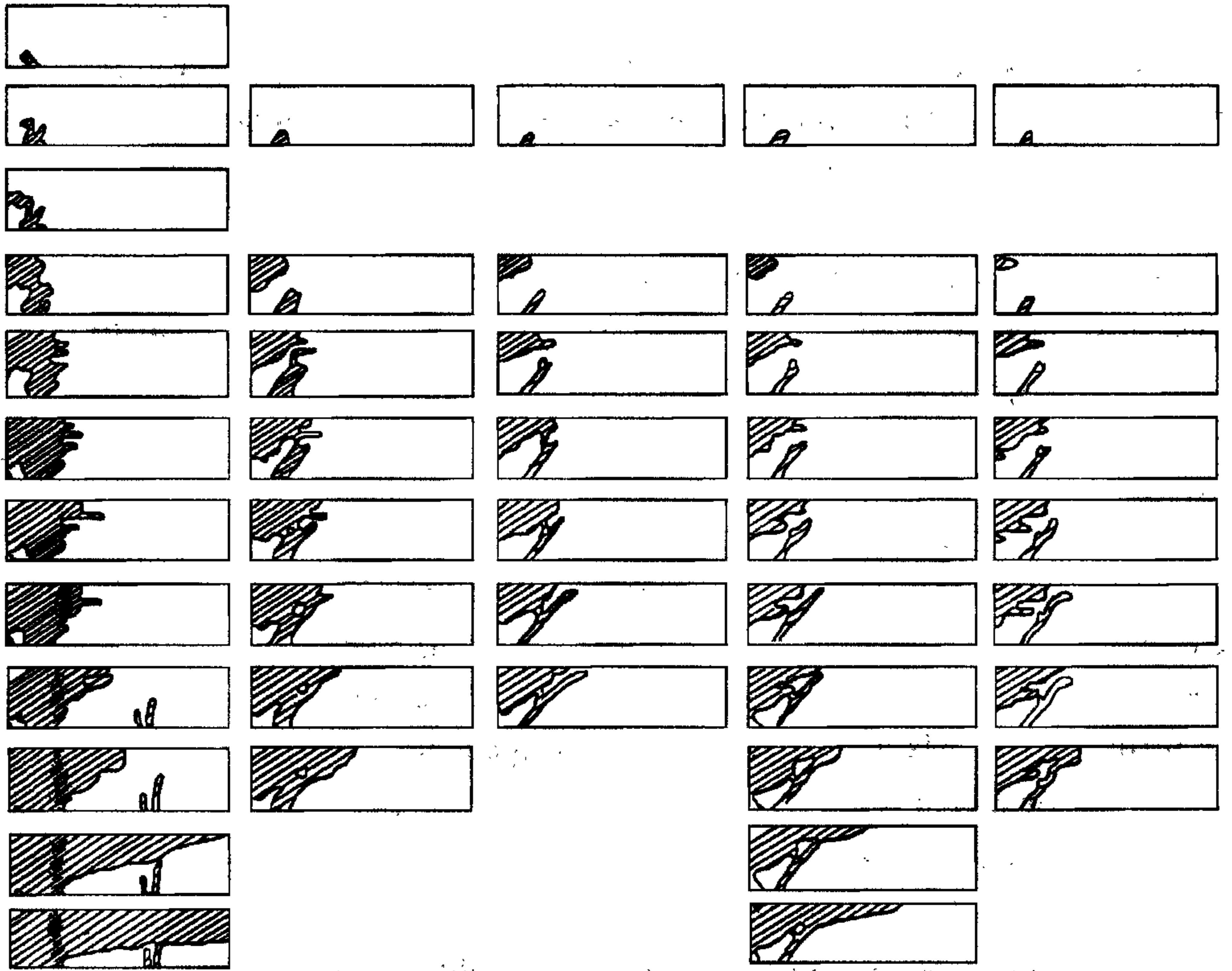


дующим образом. В пластине под действием ударных нагрузок в зоне контакта формируется интенсивная волна сжатия. По мере того, как развивается движение материала пластины под ударником в осевом направлении, на лицевой поверхности формируется волна сдвига, распространяющаяся вслед за волной сжатия и ведущая к появлению растягивающих напряжений.

Анализ расчетов показывает, что вблизи лицевой поверхности мишени по мере удаления от зоны контакта (до  $r \approx 1,25r_0$ , где  $r_0$  — начальный радиус ударника) амплитуда максимальных растягивающих напряжений  $\sigma_1$  несколько возрастает, далее (до  $r \approx 2,2r_0$ ) следует площадка примерно постоянных значений, а затем амплитуда  $\sigma_1$  убывает. Наклон трещин к лицевой поверхности мишени, направленных ортогонально линии действия  $\sigma_1$ , при этом может меняться в широких пределах. В моменты времени, соответствующие проходу прямой волны сжатия, возможно аномальное (направленное к оси вращения) развитие трещин. На переднем фронте волны сдвига одновременно с быстрым ростом  $\sigma_1$  меняется и линия действия  $\sigma_1$  так, что трещины, образующиеся в эти моменты времени, будут ориентированы под острым углом по отношению к положительному направлению оси  $r$ .

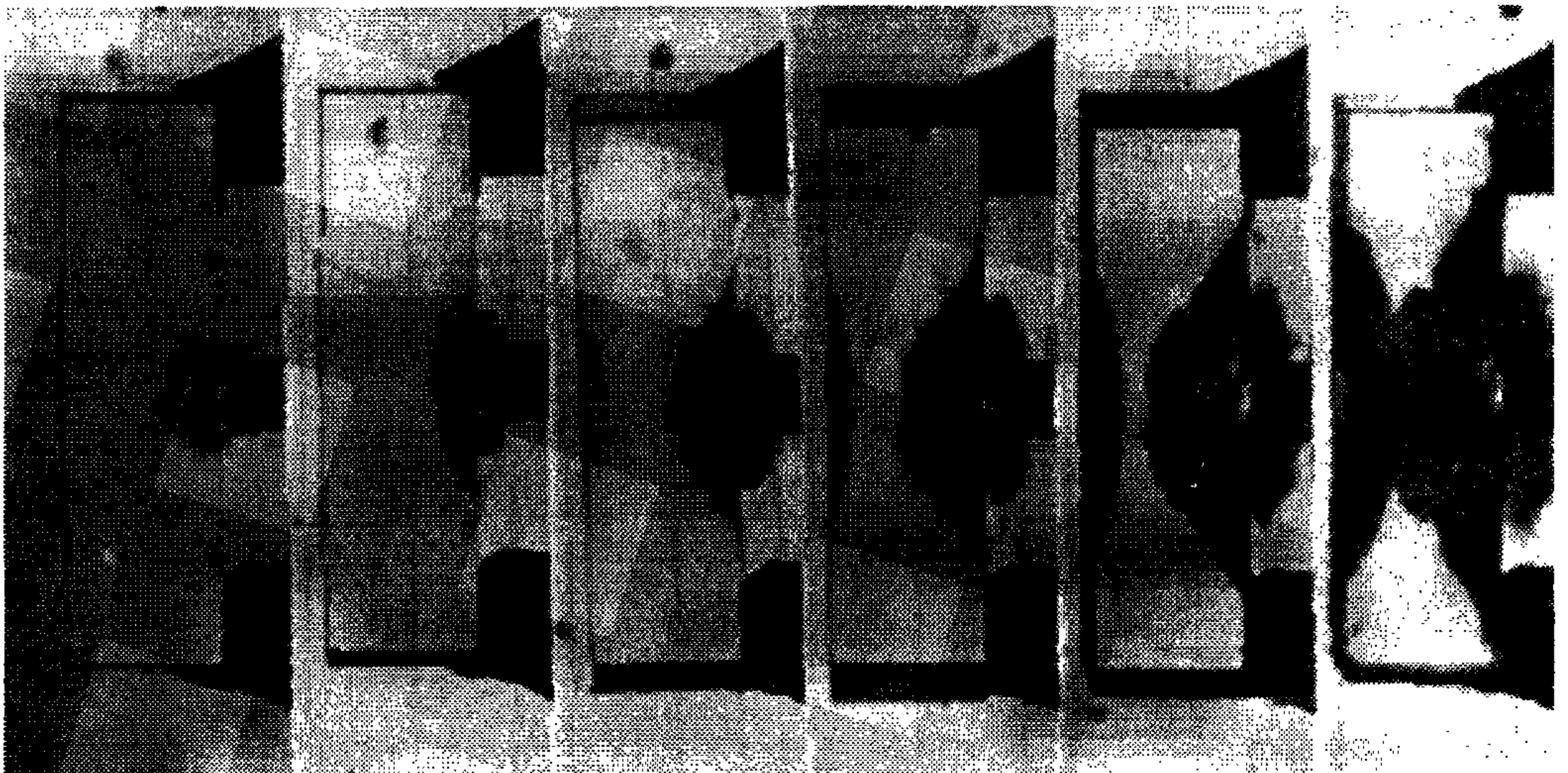
Общая схема разрушения мишени иллюстрируется рисунками 7.7, а, 7.8 и 7.9. На рис. 7.7, а линиями  $L_1$  и  $L_2$  показаны типичные траектории развития разрушений, зародившихся на лицевой поверхности пластины. На рис. 7.8 приведены кадры расчетных кинограмм состояния разрушений в мишени для пределов прочности материала пластины  $\sigma_p$ , равных 0,9, 1,6, 2,0, 2,2, 2,6 ГПа (столбцы — слева направо) и для моментов времени 1,0, 1,5, 1,75, 2,0, 2,5, 3,0, 4,0, 6,0, 9,0, 12,0, 16,0, 20,0 мкс (строки — сверху вниз), изображенные на недеформированной геометрии пластины. Для сравнения на рис. 7.9 представлены фотографии разрушения стеклянной пластины толщиной 1,5 см при скорости удара 600 м/с для моментов времени 1,0, 2,1, 3,1, 4,0, 5,0, 6,3 мкс (слева направо), полученные в натурном эксперименте [80]. Из рисунков видно, что разрушение, зародившееся на лицевой поверхности мишени, распространяется затем в глубь пластины. После выхода прямой волны сжатия на тыльную поверхность возникает встречное разрушение у оси пластины, распространяющееся также и вдоль тыльной поверхности. Это разрушение связано со значительной кривизной прямой волны сжатия, наблюдаемой в экспериментах со стеклянными пластинами, покрытыми координатной сеткой. Начало тыльного





**Рис. 7.8.** Расчетные кинограммы развития разрушений в пластине при разных пределах прочности.

Поясн. см. в тексте.



**Рис. 7.9.** Разрушение стеклянной пластины [80].

Поясн. см. в тексте.



разрушения в экспериментах и расчетах хорошо согласуется со временем пробега упругого импульса по толщине пластины. Регистрация встречного разрушения в опытах [80] проводилась также с помощью тензодатчиков, наклеенных на тыльную поверхность мишени вблизи оси вращения, что позволяло определить временные параметры нагружения и динамическую прочность в условиях, близких к двухосному растяжению, по формуле  $\sigma_p = kE \Delta R / R(1 - \nu)$ , где  $k$  — коэффициент тензочувствительности,  $R$  — сопротивление тензодатчика,  $\Delta R$  — изменение сопротивления в момент разрушения пластины. Измеренные таким образом пределы прочности стали У8А и чугуна составили 0,9 и 0,35 ГПа соответственно.

Разрушение, распространяющееся с лицевой поверхности в натуральных экспериментах, включает два типа разрушения. Во-первых, это хорошо согласующееся с расчетами образование кольцевой трещины отрыва, ограничивающей так называемый коноид разрушения (коноид хорошо виден на последних снимках рис. 7.9). Во-вторых, отсутствующее в расчетных кинограммах разрушение вдоль поверхности мишени, распространяющееся с необычно высокой скоростью (до 0,35 см/мкс). По-видимому, факт появления поверхностных трещин связан с низкой поверхностной прочностью стекла  $\sigma_p \approx 0,01$ — $0,02$  ГПа. Поэтому амплитуда волны сжатия, распространяющейся вдоль лицевой поверхности, оказывается достаточной для разрушения поверхностного слоя.

Анализ расчетных кинограмм показывает, что при высоких пределах прочности ( $\sigma_p = 2,0, 2,2, 2,6$  ГПа) кольцевое разрушение имеет четкую локализацию, подходит вплотную к тыльной поверхности и может быть идентифицировано как кольцевая трещина. В момент  $\approx 2,5$  мкс это разрушение начинает ветвиться, однако вторая ветвь получает существенное развитие лишь в базовом варианте с  $\sigma_p = 2,0$  ГПа. Заметим, что, согласно имеющимся данным о ветвлении трещин в инструментальных сталях [60], ветвление трещины может происходить лишь в довольно узком интервале значений коэффициента интенсивности напряжений  $K_D$ . Так, для  $K_D / K_c < 2$ , где  $K_c$  — трещиностойкость материала, ответвившиеся трещины не смогут распространяться из-за дефицита энергии, а если это отношение слишком велико, то ветвление не сможет развиваться по причине зарождения множества вторичных трещин.

Для вариантов с низкими пределами прочности ( $\sigma_p = 0,9, 1,6$  ГПа) кольцевая трещина имеет размытый контур и ее движение частично блокируется раз-

рушениями на тыльной поверхности, а направление роста кольцевой трещины на ранних стадиях (см. первые кадры кинограммы рис. 7.9) имеет аномальный характер. Для малых значений прочности более четко наблюдается также стадия формирования разрушений типа откольных.

В расчетах было замечено, что появление трещины в точке 1 (см. рис. 7.7, а) приводит к экранированию соседних точек на лицевой поверхности. При этом амплитуда растягивающего напряжения в точке 2 снижается более чем вдвое по сравнению с вариантом расчетов пластины без разрушения. Появление кольцевой трещины приводит также к тому, что время наступления разрушения вдоль линий  $L_1$  и  $L_2$  будет контролироваться взаимодействием волны сдвига с вершиной движущейся трещины.

На рис. 7.10 представлены графики изменения во времени скорости движения вершины кольцевого разрушения для различных пределов прочности материала мишени, указанных цифрами у кривых в ГПа, а буквами  $c_s$  и  $c_r$  помечены уровни скоростей распространения волны сдвига и волн Рэлея. Начальные участки кривых с примерно постоянными значениями скоростей соответствуют движению трещины, когда влияние тыльной поверхности на вершину трещины отсутствует. Видно, что с уменьшением предела прочности скорость трещины на начальном этапе повышается.

При приближении скорости роста трещины к предельному значению  $c_r$  в численном решении происходит перестройка разрушения в трещине. В расче-

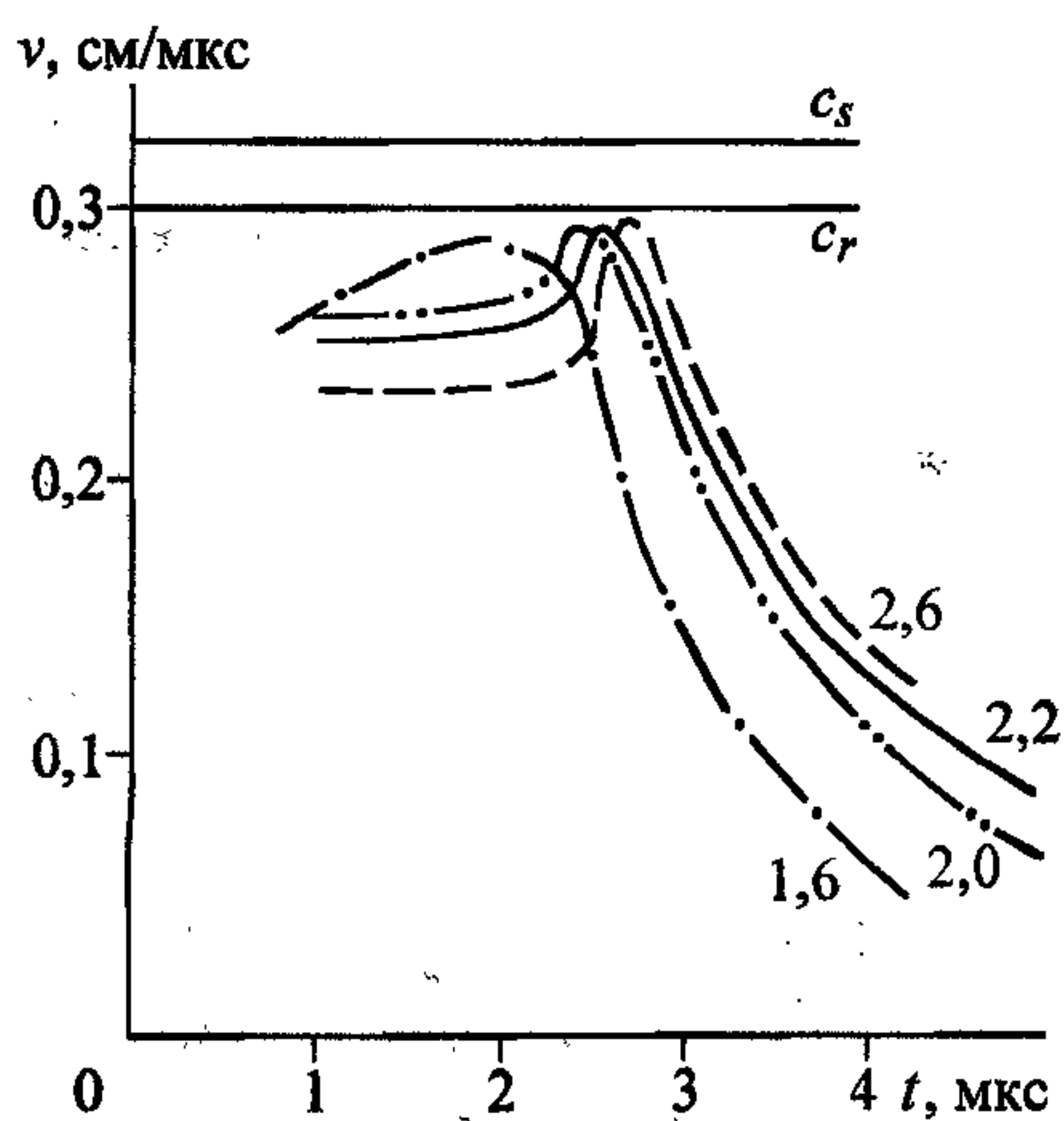


Рис. 7.10. Скорость роста кольцевого разрушения.

Поясн. см. в тексте.

тах было выявлено два типа перестроек разрушения. Согласно одному из них, когда в вершину движущейся трещины падает отраженная от тыльной поверхности волна сжатия, происходит ветвление трещины, как это наблюдается для вариантов с высокими пределами прочности в момент времени 2,5 мкс после соударения. Второй тип перестройки разрушения происходит при низких пределах прочности, и связан он с образованием дополнительных разрушений вдоль траектории движения трещины. При этом образуется шерохо-



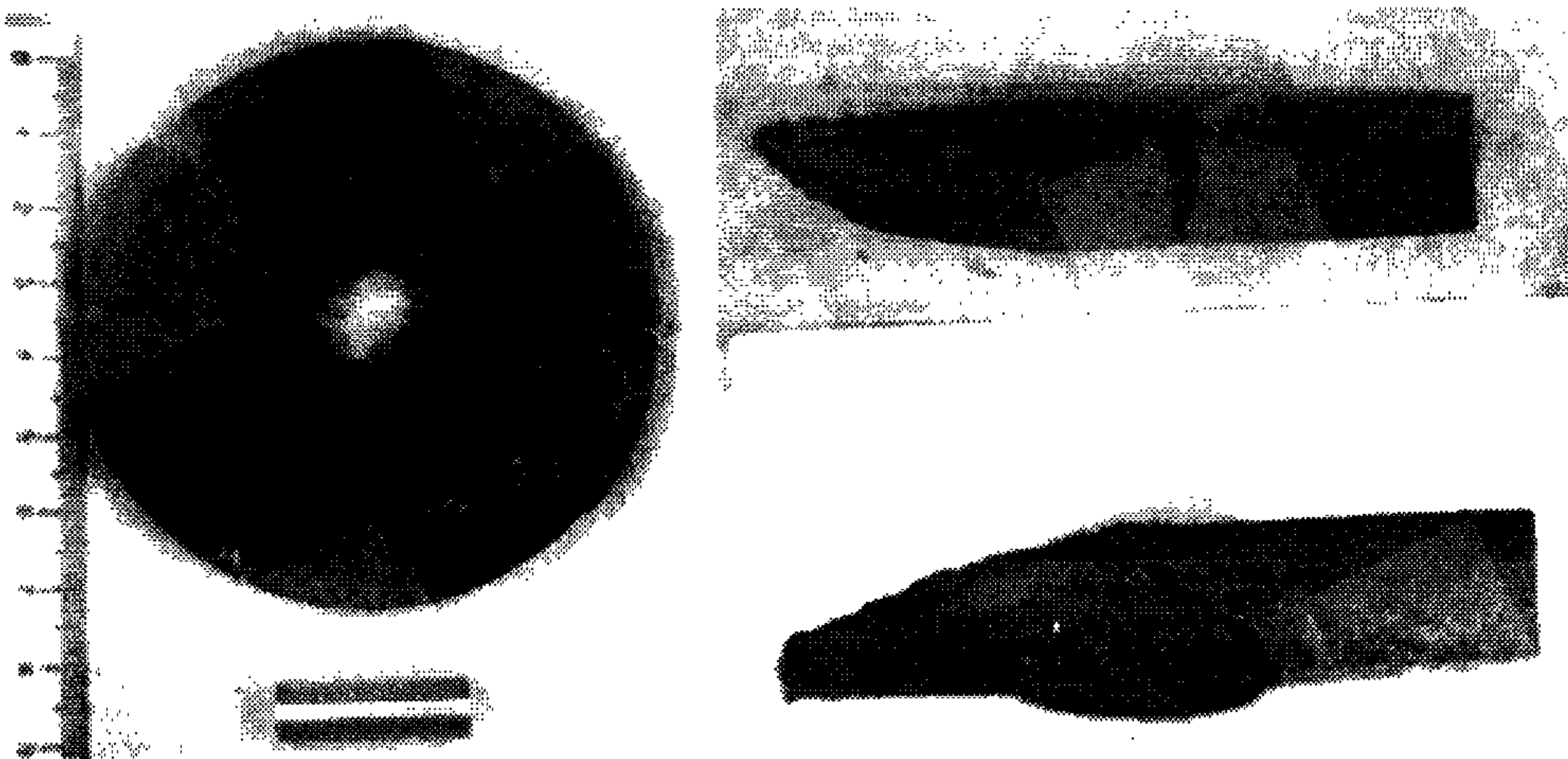


Рис. 7.11. Разрушения при перфорации диска из чугуна [80].

ватый, размытый контур трещины.

Рассмотрим далее конечную картину разрушения мишени. Для мишеней из стали и чугуна сравнительно легко реконструировать преграду после пробития, поскольку периферийные части пластин при этом фрагментируются незначительно. На рис. 7.11 показаны пробитый диск из чугуна, разделенный на секторы, и увеличенные профили двух секторов, на одном из которых видна несквозная трещина.

Сопоставление экспериментальных и расчетных данных позволяет выделить три типа разрушения, которым подвергается пластина при пробитии. Во-первых, это зона сильной фрагментации под ударником, имеющая форму коноида, расчетный профиль которого хорошо согласуется с экспериментальным. Во-вторых, система радиальных трещин, исходящих практически из одного центра и являющихся диаметральноными. Расчеты показывают, что разрушения вне коноида на тыльной поверхности возникают исключительно за счет действия окружных растягивающих напряжений и распространяются от оси вращения к периферии и одновременно внутрь пластины. В-третьих, кольцевая трещина (несквозная). В расчетах подобная трещина обнаружена в варианте с низким пределом прочности ( $\sigma_p = 0,9$  ГПа). Это разрушение напоминает откол, но схема взаимодействия волн здесь иная. Как было отмечено выше, сдвиговая волна, амплитуда которой за счет экранирования ее кольцевой трещиной оказывается ниже критической, вызвать разрушения вне коноида не может. Однако прямая волна сжатия, существенно более быстрая, успевает пройти до сво-

бодного от напряжений внешнего края пластины и, отразившись от него в виде волны растяжения, встретит прямую волну сдвига и вызвать разрушение.

В заключение добавим, что, несмотря на рассмотренную в расчетах значительную разницу в пределах прочности материалов, величина остаточного импульса ударника одинакова и составляет около 40 % его начального значения. Эта же величина потери импульса при пробитии преграды зафиксирована была и в натурных экспериментах для рассмотренных материалов.

**Разрушение двухслойной пластины.** Анализ ударного разрушения мишени, проведенный в предыдущем разделе, свидетельствует о том, что использование однослойной хрупкой пластины в качестве защитного элемента является неэффективным по причине быстрого разрушения, возникающего на тыльной поверхности пластины. В этой связи более рациональным является применение слоистых защитных элементов [9, 72, 76, 83]. При этом заметный положительный эффект достигается в случае использования в качестве лицевого слоя твердых, имеющих высокую прочность на сжатие, керамических материалов.

Основными материалами, подходящими для использования в качестве твердых защитных покрытий, судя по литературе, являются карбид бора  $B_4C$ , окись алюминия  $Al_2O_3$ , окись бериллия  $BeO$ , карбид титана  $TiC$ , карбид кремния  $SiC$ , борид бериллия  $BeB_2$  и некоторые другие [42, 54, 63, 64, 76]. Хотя свойства керамик, получаемых на основе этих материалов, оказываются сильно зависящими от технологии изготовления, степени пористости, наличия включений и некоторых других факторов, в целом они обладают сравнительно высокими абсолютными значениями твердости и прочности на сжатие, низкой плотностью в сочетании с высоким значением акустического импеданса. Известные недостатки подобных материалов (высокая хрупкость, малая прочность на растяжение и т.д.) частично нейтрализуются соответствующим выбором материала тыльного слоя. В качестве последнего чаще всего применяются пластичные, вязкоразрушающиеся материалы. В этом случае тыльный слой образует своего рода опору для хрупкого слоя, локализует внутри себя возможные откольные разрушения и повышает стойкость лицевого слоя.

Рассмотрим деформирование и разрушение двухслойного защитного элемента, представляющего собой круглую пластину с равными толщинами слоев  $h_1 = h_2 = 1,23r_0$ , где  $r_0 = 0,65$  см — радиус ударника. Радиус пластины и длина ударника составляют  $6,15r_0$  и  $5,7r_0$  соответственно. Лицевой слой — керамика



с параметрами, взятыми из работ [42, 76], а тыльный слой — сталь 45. Нагружение пластины осуществляется ударом по нормали упругопластическим цилиндрическим стержнем с полусферическим оголовком со скоростью 800 м/с. Материал ударника — сталь с динамическим пределом текучести  $\sigma_T = 1,2$  ГПа.

Использование таких существенно различающихся по деформационным свойствам материалов слоев, как сталь и керамика, ставит вопрос о влиянии граничных условий на поверхности раздела на характеристики деформирования слоистого элемента. Реальные условия соединения слоев в элементе занимают некоторое промежуточное положение между двумя предельными типами граничных условий: полное отсутствие прочности на отрыв и сопротивления взаимному проскальзыванию слоев (вариант 1) и полное сцепление (адгезия) слоев с отсутствием их взаимного проскальзывания (вариант 2). Расчеты были проведены для двух указанных предельных случаев с целью исследования общих характеристик деформирования и разрушения слоистого элемента и влияния типа граничных условий.

На рис. 7.12 представлены кадры кинограммы деформирования элемента для варианта 1 (левый столбец) и варианта 2 (правый столбец). Кадры относятся к моментам времени 5, 10, 15, и 20 мкс после соударения, заштрихованная зона указывает область разрушения керамики. Общая схема разрушения керамического слоя следующая. В начальные моменты времени разрушением с лицевой поверхности начинается образование коноида разрушения. При выходе волны сжатия на границу раздела слоев появляются разрушения керамики вблизи оси вращения на границе раздела слоев. К 5 мкс частичные разрушения возникают во всем коноиде, в нем начинается фрагментация материала, головная часть ударника при этом существенно уплощается. Далее происходит вытеснение разрушенного материала керамики из коноида и формирование лицевого выброса. Заключительная фаза

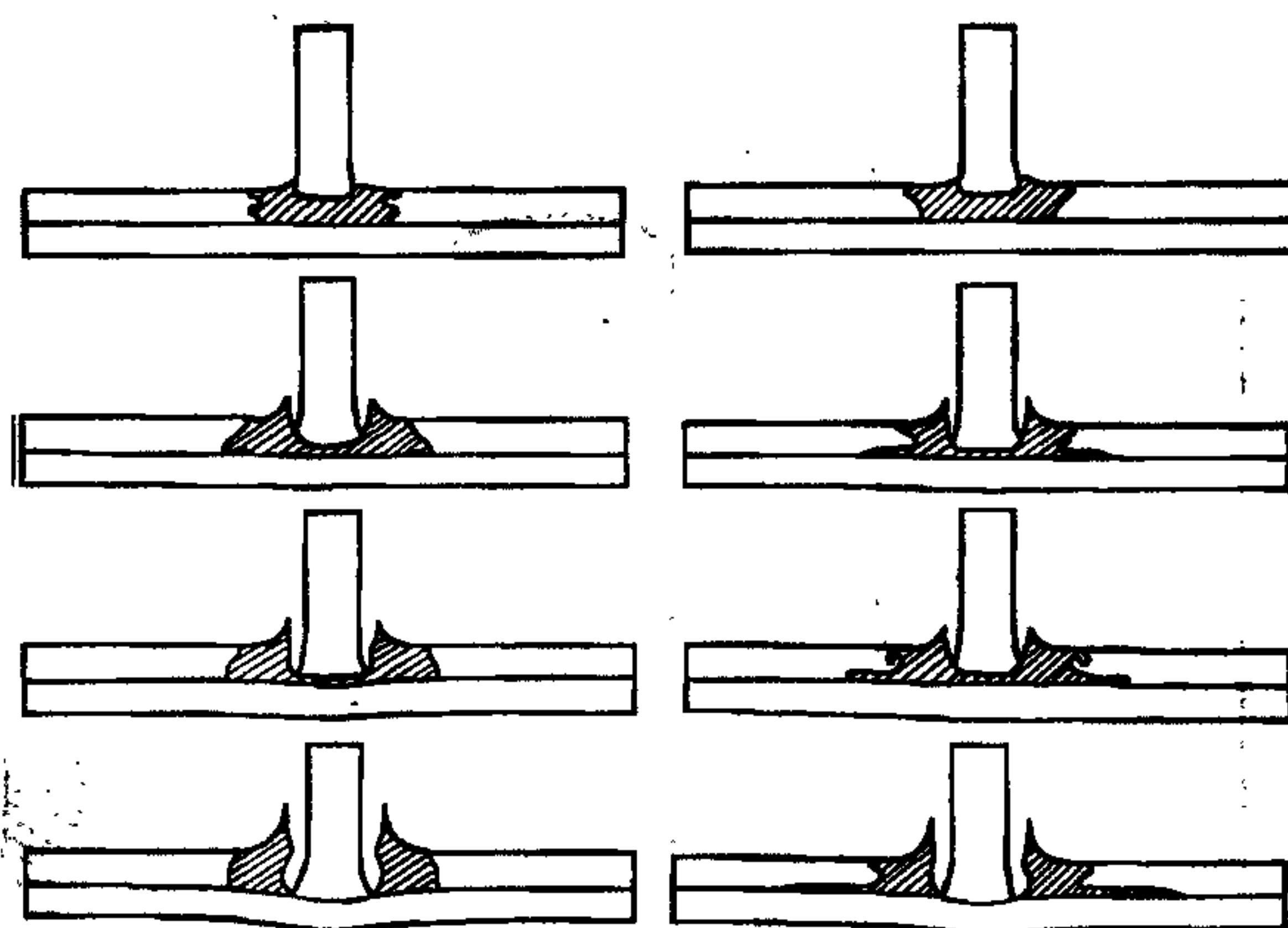


Рис. 7.12. Кинограмма разрушений лицевого слоя металлокерамического элемента.

Поясн. см. в тексте.

соударения, начинающаяся после непосредственного контакта ударника со слоем стали, сопровождается интенсивным деформированием тыльного слоя и дальнейшим уплощением (срабатыванием) ударника.

Начальная стадия разрушения слоя керамики для обоих вариантов расчета близка к рассмотренной ранее схеме разрушения однослойной хрупкой пластины. Некоторые отличия в разрушении связаны с влиянием закругления головной части ударника и влиянием тыльного слоя. На рис. 7.13 представлена схема (ось  $y$  расположена в плоскости удара и направлена по радиусу мишени) развития разрушения в керамике для нескольких последовательных моментов времени, иллюстрирующая переход от появления отдельных разрушений к фрагментированному состоянию материала вблизи границы раздела слоев и в зоне обрыва контактных нагрузок. Видно, что уплощение головной части ударника способствует образованию множества кольцевых разрушений, зарождающихся на лицевой поверхности хрупкого слоя.

Поддерживающее влияние тыльного слоя приводит к тому, что разрушения в коноиде в целом протекают менее интенсивно, по сравнению со случаем однослойной пластины, и часть материала под ударником остается неповрежденной в течение значительного времени процесса соударения.

На рис. 7.12 видны некоторые отличия в схеме разрушения слоя керамики для вариантов 1 и 2. В случае полного сцепления (вариант 2) деформирование слоя стали приводит к образованию трещины в керамике вдоль линии раздела слоев, а в варианте 1 происходит свободный изгиб слоя стали с образованием зазора между слоями. В качественном отношении картина деформирования и

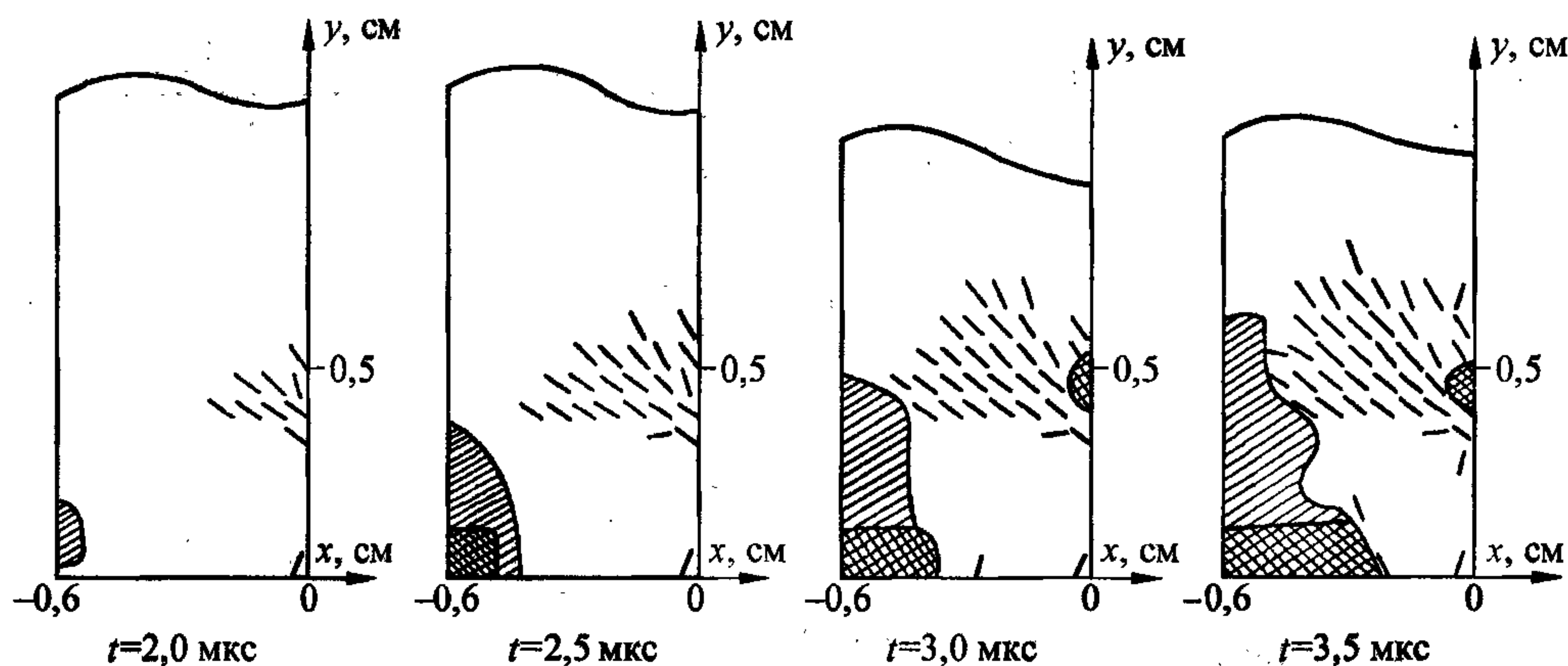


Рис. 7.13. Начальная стадия разрушения лицевого слоя.



разрушения двухслойного элемента хорошо согласуется с результатами расчетов, приведенных в [63, 76].

Анализ изменения силы сопротивления внедрению и распределения контактных усилий в зоне контакта показывает, что эти характеристики процесса ударного взаимодействия от условий скрепления слоев зависят мало, по крайней мере, на стадии разрушения лицевого слоя. Более существенно граничные условия сказываются на распределении прогибов срединной поверхности слоя стали. Однако наиболее показательное влияние условий скрепления слоев иллюстрируется распределением вдоль радиуса пластины  $\tilde{r} = r/r_0$  интенсивности пластических деформаций  $e_i^p$  в момент времени 20 мкс, представленном на рис. 7.14 (сплошная линия — вариант 1, штриховая — 2). Сравнение графиков показывает, что для вариантов 1 и 2 преобладающие формы разрушения тыльного слоя могут быть различны. Для варианта 2 четкая локализация деформаций сдвига в кольцевой зоне, чуть большей диаметра ударника, характерна для перфорации по типу выбивания пробки. В варианте 1 распределение интенсивности пластических деформаций более соответствует механизму пробивания, связанному с образованием лепестков.

Оценивая защитные возможности рассмотренного двухслойного элемента, отметим, что разрушение лицевого слоя происходит в основном от действия растягивающих напряжений, возникающих в результате взаимодействия волновых полей в расчетной области, локально, с постепенным ростом зон разрушения. За время, в течение которого происходит фрагментация материала лицевого слоя под ударником, высокие прочностные свойства керамики на сжатие обеспечивают интенсивное торможение (разрушение) ударника. Приведенная интерпретация схемы разрушения лицевого слоя позволяет наметить пути целенаправленного повышения специфических защитных свойств комбинированных элементов, по крайней мере, для скоростей удара ниже некоторой критической скорости.

Ранее было отмечено, что при ударном сжатии керамики

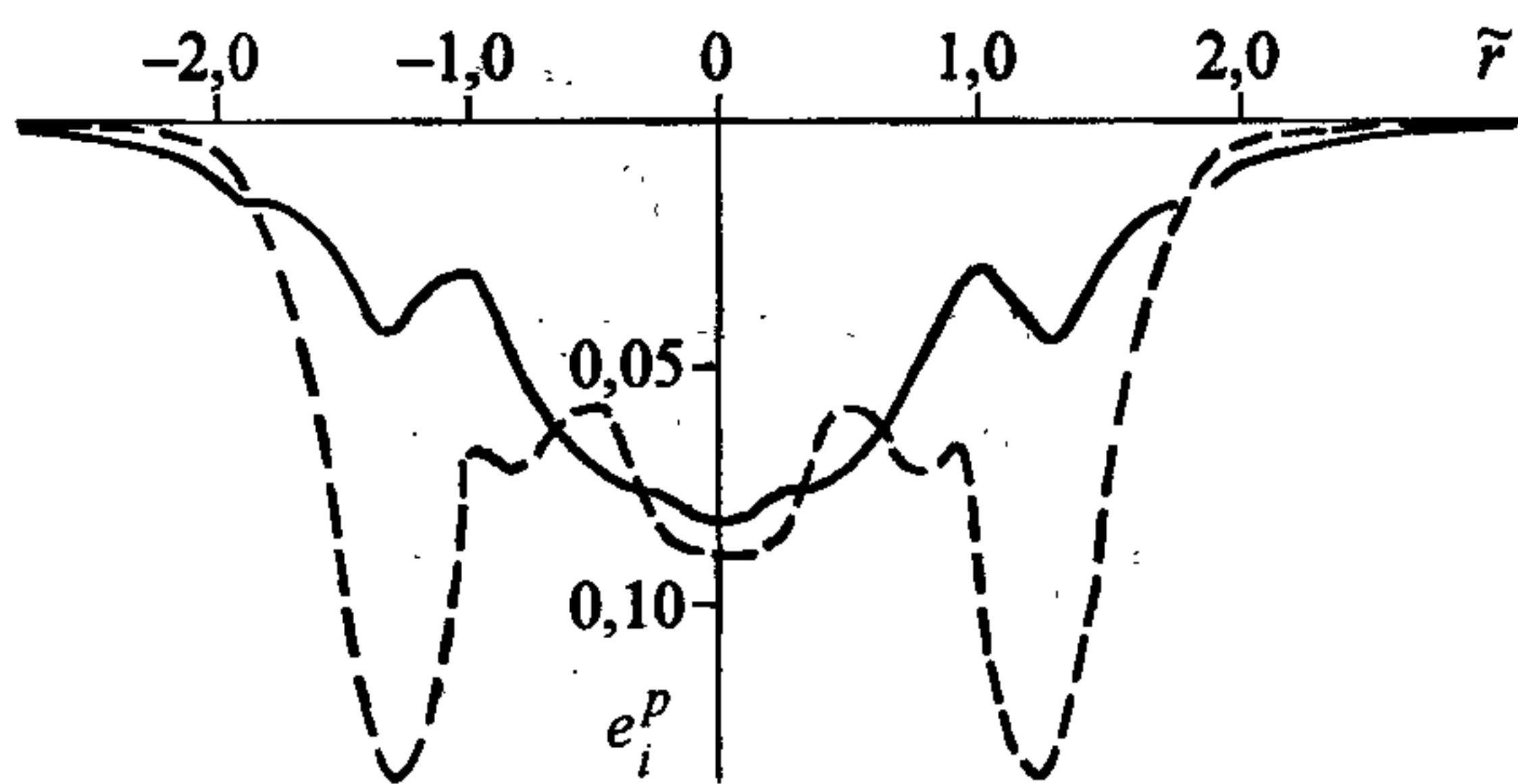


Рис. 7.14. Интенсивность деформаций в тыльном слое слоистого элемента.

Поясн. см. в тексте.

возможно частичное или полное снижение сопротивления ее сдвигу. При проведении расчетов данный факт можно трактовать как образование разрушений во фронте прямой волны сжатия для скоростей удара, превышающих некоторую критическую скорость. Заметим, что применяемая модель разрушения допускает образование повреждений при подобных нагрузках.

Таким образом, проведенный выше анализ взаимодействия пластичного ударника с комбинированным защитным элементом, включая схему разрушения хрупкого лицевого слоя и механизм торможения ударника, необходимо дополнить анализом разрушения при высокоскоростном ударе. Отметим, что рассматриваемый диапазон скоростей удара ограничен сверху некоторой другой критической скоростью удара, при которой скорость внедрения достигает скорости распространения разрушений в хрупкой среде.

Рассмотрим процесс ударного взаимодействия удлиненного высокоплотного пластичного ударника с двухслойным элементом с прочным соединением слоев. Лицевой слой — керамика на основе  $Al_2O_3$  [42], тыльный слой — сталь с  $\sigma_T = 1,5$  ГПа, скорость удара составляет 1400 м/с. Анализируются два расчетных варианта модели разрушения керамики В1 и В2. В варианте В1 предполагается, что состояние разрушения материала лицевого слоя наступает мгновенно при  $\sigma_z > \sigma_{p^*}$ , в соответствии с выражением (7.3.8) для  $\sigma_z$ . В варианте В2 разрушение слоя керамики описывается полной моделью разрушения хрупкого материала. В обоих вариантах расчета коррекция тензора напряжений для разрушившегося материала производится полностью идентичным образом и при принятых условиях соударения реализуется режим разрушения лицевого слоя, инициируемый прямой волной сжатия, с образованием волны разрушения.

Исходная расчетная сетка и расчетные кинограммы деформирования соударяющихся тел приведены на рис. 7.15. На последних кинограммах лицевой слой, представляющий собой разрушившуюся керамику, не оказывающую сопротивления внедрению, из расчетной области удален.

На рис. 7.16 приведены начальные участки расчетных кривых изменения скорости движения точки, расположенной на оси симметрии в головной части ударника, для вариантов В1 и В2 (сплошная и штриховая линии соответственно). Значения скорости  $u$  отнесены к начальной скорости удара  $v$ . Для приведенного интервала времени данные кривые представляют собой скорость внедрения в полубесконечную преграду, поскольку влияние тыльной поверхности



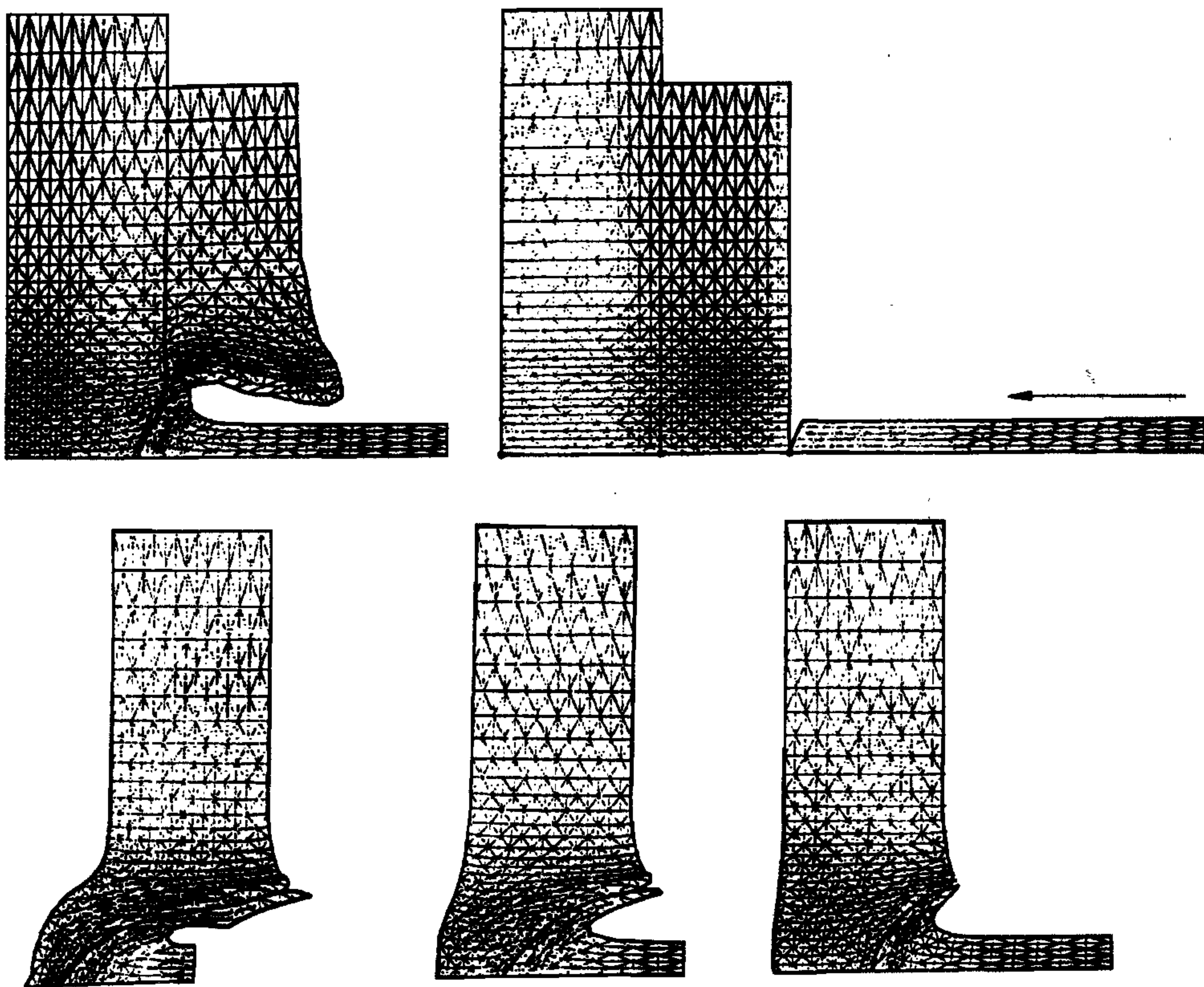


Рис. 7.15. Кинограмма высокоскоростного пробивания.

на процесс взаимодействия еще не сказывается.

Видно, что скорость в варианте В1 после скачкообразного снижения от исходной скорости удара колеблется в течение первых 10 мкс около некоторого постоянного уровня  $u_0$ , соответствующего квазиустановившемуся режиму внедрения. В этой связи рассмотрим модифицированное уравнение Бернулли [84], неплохо описывающее процесс внедрения в установившемся режиме в одномерном приближении для упругопластических тел:

$$\sigma_{T_m} + 0,5\rho_m u^2 = \sigma_{T_y} + 0,5\rho_y (v - u)^2, \quad (7.4.1)$$

где  $\rho$  — плотность,  $\sigma_T$  — динамическая прочностная характеристика, а индексы  $u$  и  $m$  указывают на материалы ударника и мишени соответственно. В (7.4.1) в качестве прочностной характеристики материала используют обычно величину, определяемую пределом текучести или динамической твердостью материала.

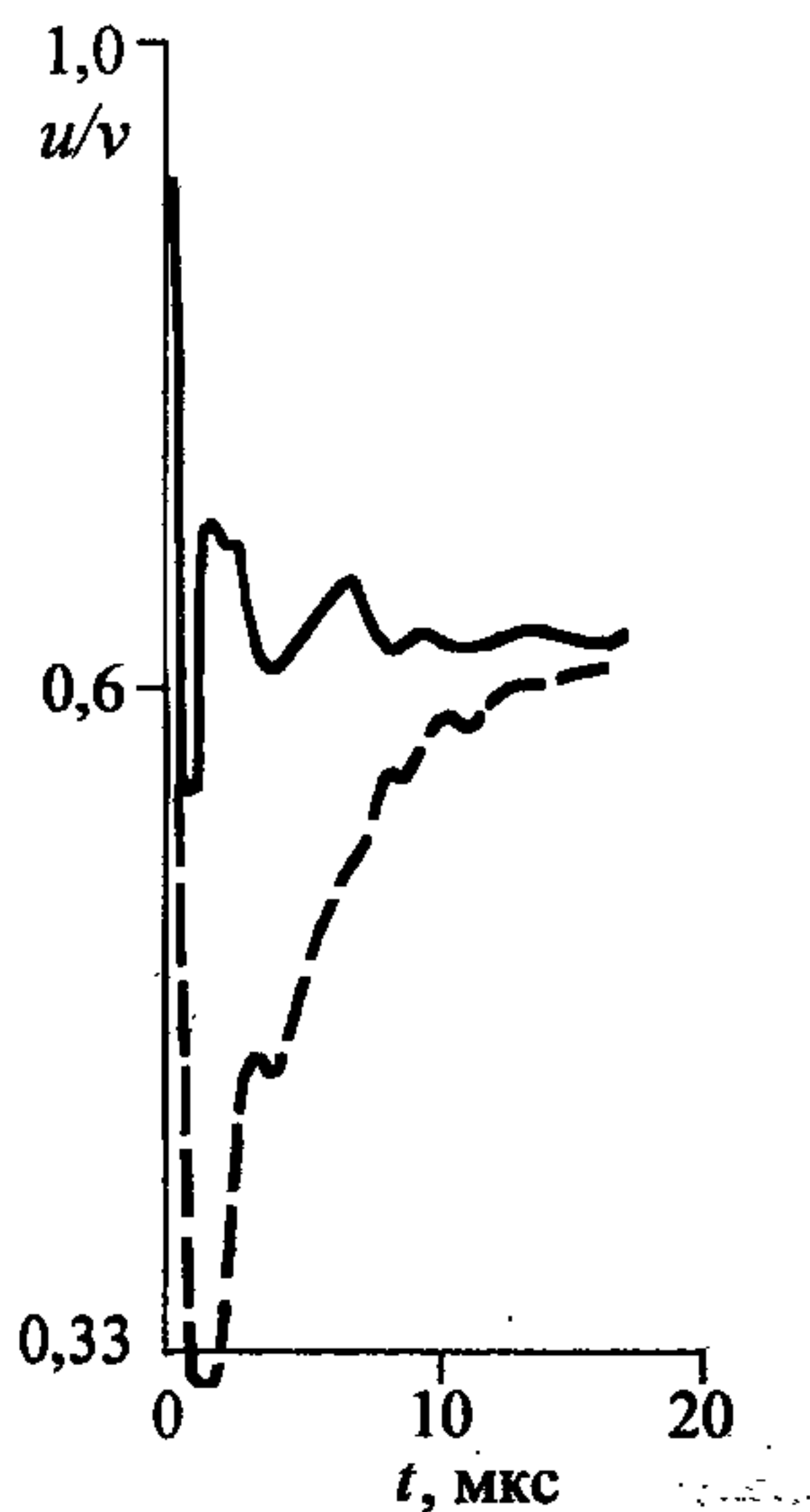


Рис. 7.16. Расчетные кривые скорости внедрения.

Поясн. см. в тексте.

Расчетное значение скорости  $u_0 = 0,73$  хорошо соответствует величине скорости внедрения в преграду, рассматриваемую в гидродинамическом приближении, получаемом из уравнения (7.4.1), если в нем положить  $\sigma_{T_m} = 0$ . Вместе с тем тестовые расчеты показывают, что если преграда оказывает прочностное сопротивление, вызванное реальными значениями величин  $\sigma_{T_m} \neq 0$ , то значения  $u_0$  заметно отличаются от 0,73.

Хорошее согласие расчетного значения скорости с теоретическим из (7.4.1) указывает на то, что для модели мгновенного разрушения прочностные свойства лицевого слоя в режиме образования волны разрушения не существенны. Структура этой волны такова, что зона перехода материала в разрушенное состояние будет узкой, так как разрушение происходит мгновенно на переднем крутом фронте волны нагруз-

ки. Поэтому внедрение осуществляется практически с самого начала соударения в уже разрушенную хрупкую среду.

Иначе должно обстоять дело при использовании полной модели разрушения (вариант В2), поскольку в этом случае для завершения процесса разрушения, начавшегося на переднем фронте волны нагрузки, требуется некоторое время. Поэтому задний фронт волны разрушения, за которым материал находится в полностью разрушенном состоянии, будет отставать от переднего фронта (ширина фронта волны разрушения будет конечна). Следовательно, в течение времени формирования заднего фронта волны разрушения прочностные свойства лицевого слоя будут влиять на торможение ударника. Из рис. 7.16 видно, что скорость внедрения в варианте В2 лишь асимптотически выходит на уровень, равный  $u_0 = 0,73$ . Таким образом, в обоих вариантах соударения внедрение ударника происходит в уже разрушенный (возможно, лишь частично) материал лицевого слоя, исключая только некоторый начальный интервал времени. Аналогичный вывод сделан в [85] на основании анализа экспериментальных исследований.

Более детально этот вопрос освещен в [55]. На рис. 7.17, заимствованном из этой работы, приведены результаты экспериментальных исследований по



внедрению железного ударника в сплошные и предварительно разрушенные стеклянные пластины (практически в стеклянный порошок). Линия 1 — начальная скорость удара, 2 — экспериментально замеренная скорость внедрения в сплошные пластины, экспериментам по внедрению ударника в разрушенные пластины соответствует линия 3. По данным работы [55], подобные зависимости для скоростей внедрения наблюдаются для многих хрупких материалов. Сопоставление рис. 7.16 и 7.17 показывает, что в качественном отношении экспериментальные данные находятся в согласии с расчетными результатами.

Таким образом, формирование волны разрушения, фрагментирующей материал хрупкого слоя впереди ударника, ограничивает объем керамики, эффективно работающей на укорочение или разрушение ударника.

Рассматривая поведение двухслойных элементов при действии интенсивных ударных нагрузок в целом, необходимо подчеркнуть, что процесс деформирования и разрушения слоистых элементов, содержащих хрупкие твердые слои, является сложным, состоящим из нескольких стадий и зависит от многих параметров геометрической и физико-механической природы. В этой связи решения о рациональности некоторых конкретных комбинаций свойств и расположения слоев в элементе, найденные для определенных условий нагружения, могут сильно измениться при изменении нагрузок.

Учитывая сложность и нелинейность процессов динамического разрушения конструкционных материалов, а также отсутствие практических возможностей прямых экспериментальных измерений параметров состояния в зоне разрушения, реальную возможность изучения явления разрушения предоставляет процедура совместного экспериментального и теоретического (в рамках некоторой математической модели) исследования процессов деформирования и разрушения образца. Используемая теоретическая модель при этом должна основываться на физически обоснованных предположениях и предпосылках и иметь достаточную степень общности для согласования с экспериментом в широком диапазоне условий его проведения.

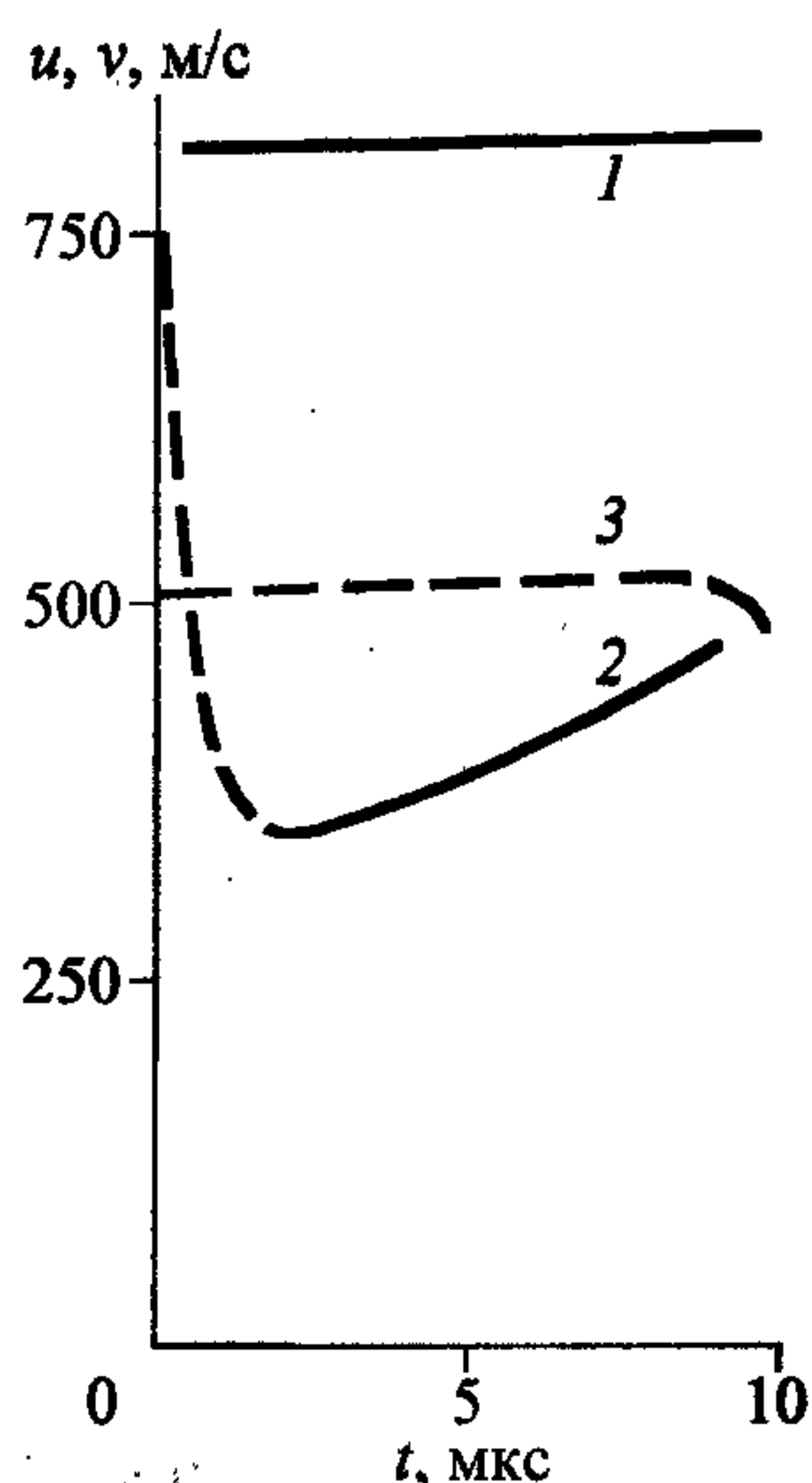


Рис. 7.17. Скорость внедрения в пластины из стекла [55].

Поясн. см. в тексте.

Рассмотренные выше уравнения МПСС представляют собой подобную достаточно общую математическую модель и вместе с тем достаточно сложную систему уравнений, требующую для интегрирования применения сложных алгоритмов и современных численных методов. Определение динамических зависимостей, констант и характеристик материала, входящих в эту модель, также является непростой и трудоемкой процедурой. Однако примеры успешного использования общих моделей разрушения и полной системы уравнений МПСС при моделировании отдельных типов нестационарного разрушения убеждают в перспективности подхода, основанного на проведении совместных экспериментальных и теоретических исследований динамического разрушения конструкционных материалов и необходимости развития общих моделей МПСС.

### Литература к главе 7

1. Ахмадеев Н. Х. Динамическое разрушение в волнах напряжений/ БФ АН СССР. — Уфа, 1988. — 168 с.
2. Никифоровский В. С., Шемякин Е. И. Динамическое разрушение твердых тел. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1979. — 271 с.
3. Фадеев Ю. И. Временные критерии разрушения взрывом// ПМТФ. — 1977. — № 6. — С. 154—159.
4. Кукуджанов В. Н. Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред// Успехи механики. — 1985. — Т. 4, № 4. — С. 21—65.
5. Иванов А. Г., Минеев В. Н. О масштабных эффектах при разрушении// ФГВ. — 1979. — Т. 15, № 5. — С. 70—95.
6. Новиков С. А. Напряжение сдвига и откольная прочность материалов при ударных нагрузках (обзор)// ПМТФ. — 1981. — № 3. — С. 109—120.
7. Meyers M., Aimone C. Dynamic fracture (spalling) of metals// Progr. in Mater. Sci. — 1983. — V. 28. — P. 1—96.
8. Curran D. R., Seaman L., Shockey D. A. Dynamic failure of solids// Phys. Rep.; Rev. Sect. of Phys. Lett. — 1987. — V. 147, N 5—6. — P. 253—383.
9. Разрушение деформируемых сред при импульсных нагрузках/ Б. Л. Глушак, С. А. Новиков, А. И. Рузанов, А. И. Садырин/ ННГУ. — Н. Новгород, 1992. — 193 с.
10. Ильюшин А. А. Об одной теории длительной прочности // Инж. ж. МТТ. — 1967. — № 3. — С. 21—35.
11. Davison L., Stevens A. I., Kupp M. E. Theory of spall damage accumulation in ductile metals// J. Mech. Phys. Sol. — 1977. — V. 25, N 1. — P. 11—28.
12. Tuler F. R., Butcher B. M. A criterion for the time dependence of dynamic fracture// Int. J. Fract. Mech. — 1968. — V. 4, N 4. — P. 431—437.
13. Молодец А. М., Дремин А. Н. Термоактивационная трактовка откола// Докл. АН СССР. — 1982. — Т. 265, № 6. — С. 1385—1389.



14. Глушко А. М. Исследование откола как процесса образования микропор// Изв. АН СССР. МТТ. — 1978. — № 5. — С. 132—140.
15. Аптуков В. Н. Модель термоупруговязкопластической поврежденной среды// ФГВ. — 1986. — Т. 22, № 2. — С. 120—130.
16. Белов Н. Н., Корнеев А. И., Николаев А. П. Численный анализ разрушения в плитах под действием импульсных нагрузок// ПМТФ. — 1985. — № 3. — С. 132—136.
17. Гулидов А. И., Фомин В. М., Шабалин И. И. Численное моделирование разрушения сдвигом// Механика быстропротекающих процессов. — Новосибирск, 1984. — С. 48—51.
18. Рузанов А. И. Численное моделирование откольной прочности с учетом микроповреждений// Изв. АН СССР. МТТ. — 1984. — № 5. — С. 109—115.
19. Киселев А. Б., Юмашев М. В. Деформирование и разрушение при ударном нагружении. Модель повреждаемой термоупругопластической среды// ПМТФ. — 1990. — № 5. — С. 116—123.
20. Канель Г. И., Черных Л. Г. О процессе откольного разрушения // Там же. — 1980. — № 6. — С. 78—84.
21. Davison L., Stevens A. I. Thermomechanical constitution of spalling elastic bodies// J. Appl. Phys. — 1973. — V. 44, N 2. — P. 668—674.
22. Кузьмина В. С., Кукуджанов В. Н. К моделированию откольного разрушения при соударении пластин// Изв. АН СССР. МТТ. — 1985. — № 3. — С. 99—104.
23. Киселев С. П., Фомин В. М. О модели пористого материала с учетом пластической зоны, возникающей в окрестности поры// ПМТФ. — 1993. — № 6. — С. 125—133.
24. Фомин В. М., Хакимов Э. М. Откольное разрушение среды в плоских волнах разрежения/ ИТПМ СО АН СССР. — Новосибирск. — 44 с. (Препринт № 1).
25. Гулидов А. И., Фомин В. М., Шабалин И. И. Исследование влияния геометрических размеров ударника и преграды на область разрушения// Численные методы решения задач теории упругости и пластичности// Матер. VIII Всесоюз. конф./ ИТПМ СОАН СССР. — Новосибирск, 1984. — С. 121—129.
26. Мержиевский Л. А., Титов В. М. О критерии долговечности металлов в микросекундном диапазоне// Докл. АН СССР. — 1986. — Т. 286, № 1. — С. 109—113.
27. Долговечность материала при импульсном нагружении/ Н.А. Златин, Г.С. Пугачев, Л.Д. Воловец и др.// ЖТФ. — 1981. — Т. 51, № 7. — С. 1507—1514.
28. Swegle J. W. Constitutive equation for porous materials with strength// J. Appl. Phys. — 1980. — V. 51, N 5. — P. 2574—2580.
29. Johnson J. N. Dynamic fracture and spallation in ductile solids// Ibid. — 1981. — V. 52, N 4. — P. 2812—2825.
30. Carrol M. M., Holt A. C. Static and dynamic pore — collapse relations for ductile porous materials// Ibid. — 1972. — V. 4, N 4. — P. 1626—1635.
31. Carroll M., Holt A. C. Suggested modification of the  $P-\alpha$ -model for porous materials// Ibid. — 1972. — V. 43, N 2. — P. 759—761.
32. Ахмадеев Н. Х. Исследование откольного разрушения при ударном деформировании// ПМТФ. — 1983. — № 4. — С. 158—167.
33. Херрманн В. Определяющие уравнения для динамического сжатия пластических пористых материалов// Механика: Сб. переводов. — М.: Мир, 1970. — С. 96—113.
34. Boade R. R. Principal Hugoniot, second — shock Hugoniot, and release behavior of pressed copper powder// J. Appl. Phys. — 1970. — V. 41, N 11. — P. 4542—4551.

35. Херрманн В. Определяющие уравнения уплотняющихся пористых материалов// Проблемы теории пластичности/ Пер. англ. под ред. Г.С.Шапира. — М.: Мир, 1976. — С. 178—216.
36. Грин Р. Дж. Теория пластичности пористых тел// Механика: Сб. переводов. — М.: Мир, 1973. — С. 109—120.
37. Сегал В.М. Вариант пластичности пористого тела/ ПМ. — 1981. — Т. 17, № 3. — С. 44—49.
38. Shima S., Oyane M. Plasticity theory for porous metals// Int. J. Mech. Sci. — 1976. — V. 18, N 6. — P. 285—291.
39. Гарсон А.Л. Континуальная теория вязкого разрушения, обусловленного образованием и ростом пор// Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Теорет. осн. инж. расчетов. — 1977. — № 1. — С. 182—201.
40. Киселев А. Б., Юмашев М. В. Математическая модель деформирования и разрушения твердого топлива при ударном нагружении// ПМТФ. — 1993. — № 6.— С. 126—134.
41. Садырин А. И. Уточненная модель пластического деформирования пористой среды// Хим. физика. — 1995. — Т. 14, № 2—3. — С. 135—142.
42. Gust W. H., Royce E. B. Dynamic yield strengths of  $B_4C$ ,  $BeO$ , and  $Al_2O_3$  ceramics// J. Appl. Phys. — 1971. — V. 42, N 1. — P. 276—295.
43. Butcher V. M., Carroll M. M., Holt A. C. Shock-wave compaction of porous aluminum // Ibid. — 1974. — V. 45, N 9. — P. 3864—3875.
44. Поляков В. В., Головин А. В. Упругие характеристики пористых материалов// ПМТФ. — 1993. — № 5. — С. 32—35.
45. Колобанова А. Е., Минеев В. Н., Поляков В. Н. Эффект абсолютных размеров при разрушении газопроводов// Докл. РАН. — 1994. — Т. 337, № 5. — С. 605—607.
46. Киселев С. П. Ударно-волновые процессы в гетерогенных средах: Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1994. — 22 с.
47. Писаренко Г. С., Лебедев А. А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. Киев.: Наук. думка, 1976. — 416 с.
48. Ирвин Дж. Особенности динамического разрушения// Механика разрушения: Сб. ст./ Пер. с англ. под ред. Р.В. Гольштейна. — М.: Мир, 1981. — С. 9—22.
49. Ravi-Chandar K., Knauss W. G. An experimental investigation into dynamic fracture: I. Crack initiation and arrest// Int. J. Fract. — 1984. — V. 25, N 4. — P. 247—262.
50. Ravi-Chandar K., Knauss W. G. An experimental investigation into dynamic fracture: II Microstructural aspects// Ibid. — 1984. — V. 26, N 1. — P. 65—80.
51. Френд Л. Динамическое распространение трещины в твердых телах: Вычислительные методы в механике разрушения. — М.: Мир, 1990. — С. 83—128.
52. Rosenberg Z., Bless S. J., Brar N. S. On the influence of the loss of shear strength on the ballistic performance of brittle solids// Int. J. Impact Eng. — 1990. — V. 9, N 1. — P. 45—49.
53. Knauss W. G. Fundamental problems in dynamic fracture// Adv. in Fract. Res. — 1984. — V. 1. — P. 625—651.
54. Словарь-справочник по новой керамике/ Е.Л. Шведков, И.И. Ковенский, Э.Т. Денисенко, А.В. Зырин. — Киев.: Наук. думка, 1991. — 280 с.
55. О механике взаимодействия пластичного ударника с хрупкой твердой преградой/ Зильбербранд Е.Л., Златин Н.А., Кожушко А.А. и др.// ЖТФ. — 1989. — Т. 59,



- № 10. — С. 54—58.
56. Филлипс К. Дж. Разрушение стекла// Разрушение. Т. 7, ч. 1. — М.: Мир, 1976. — С. 19—58.
57. Стокс Р. Дж. Микроскопические аспекты разрушения керамики// Там же. — С. 130—220.
58. Кобл Р. Л., Парих Н. М. Разрушение поликристаллической керамики// Там же. — С. 221—299.
59. Chaudhri M. M. High-speed photographic investigation of the dynamic localized loading of some oxide glasses// Strength inorg. glass. Proc. NATO Adv. fracture works. — New York, 1985. — P. 87—113.
60. Васильев А. Д., Самелюк А. В., Фирстов С. А. Ветвление трещин в хрупких материалах// Механика и физика разрушения хрупких материалов: Сб. научн. тр./ ИПМ АН УССР. — Киев, 1990. — С. 89—95.
61. Эрдоган Ф. Теория распространения трещин// Разрушение. Т. 2. Ред. Г. Либовиц. — М.: Мир, 1975. — С. 521—615.
62. Кузьмин Е. А., Пух В. П. Скорость роста хрупкой трещины в стекле и канифоли // Некоторые проблемы прочности твердого тела. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. — С. 367—374.
63. Fracture mechanics of ceramics: Composites, impact, statistics, and high-temperature phenomena. V. 7/ Ed. by R.C. Bradt, F.G. Evans, D.P.H. Hasselman, and F.F. Lange. — New York; London: Plenum press, 1986. — 367 p.
64. Laible R. C. Ceramic composite armor//Ballistic materials and penetration mechanics/ Ed. by Roy.C. Laible. — Amsterdam; Oxford; New York, 1980. — P. 135—143.
65. Кожушко А. А., Рыкова И. И., Синани А. Б. Сопротивление керамик внедрению ударяющего тела при высоких скоростях взаимодействия// ФГВ. — 1992. — Т. 38, № 1. — С. 89—93.
66. Нисиока Т., Алтури С. Вычислительные методы в динамике разрушения// Вычислительные методы в динамике разрушения/ Под ред. С. Алтури. — М.: Мир, 1990. — С. 267—321.
67. Гидродинамические модельные представления в проблеме динамической прочности материалов различной физико-химической природы. Ч. II. Влияние прочностных характеристик среды/ Кожушко А. А., Изотов А. Д., Лазарев В. Б., Баланкин А. С.// Неорган. матер. — 1993. — Т. 29, № 9. — С. 1189—1209.
68. Rajendran A. M., Kroupa J. L. Impact damage model for ceramic materials// J. Appl. Phys. — 1989. — V. 66, N 8. — P. 3560—3565.
69. Морозов Н. Ф., Петров Ю. В. Динамическая вязкость разрушения в задачах инициирования и роста трещин// МТТ. — 1990. — № 6. — С. 108—111.
70. Слепян Л. И. Механика трещин. — Л.: Судостроение, 1990. — 296 с.
71. Костров Б. В. Распространение трещин с переменной скоростью// ПММ. — 1974. — Т. 38. — С. 511—519.
72. Майборода В. П., Кравчук А. С., Холин Н. Н. Скоростное деформирование конструкционных материалов. — М.: Машиностроение, 1986. — 264 с.
73. Гольдштейн Р. В., Житников Ю. В. Анализ процесса скольжения поверхности трещины с учетом сил трения при сложном нагружении// МТТ. — 1991. — № 1. — С. 139—148.
74. Alpa G. On a statistical approach to brittle fracture for multiaxial state of stress// Eng. Fract. Mech. — 1984. — V. 19, N 5. — P. 881—901.

75. **Woodward R. L.** The interrelation of failure modes observed in the penetration of metallic targets// *Int. J. Impact Engng.* — 1984. — V. 2. — P. 121—129.
76. **Wilkins M. L.** Computer simulation of penetration phenomena // *Ballistic materials and penetration mechanics/ Ed. by Roy.C. Laible.* — Amsterdam; Oxford; New York, 1980. — P. 225—252.
77. **Войтишек Я. В., Слепян Л. И.** Гидродинамическая модель пробивания хрупкой пластины// *Физ. тех. пробл. разработки полезных ископаемых.* — 1985. — № 3. — С. 31—35.
78. **Воейков И. В., Сагомоян А. Я.** Пробитие хрупко разрушающейся преграды жестким конусом// *Изв. АН СССР. МТТ.* — 1985. — № 6. — С. 182—184.
79. **Сагомоян А. Я.** Проникание. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974. — 299 с.
80. **Пугачев Г. С., Садырин А. И., Синани А. Б.** Экспериментально-теоретическое исследование ударного разрушения хрупкой пластины// *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация научных исследований: Всесоюз. межвуз. сб./ Горьк. ун-т, 1988.* — С. 35—47.
81. **Садырин А. И.** Моделирование динамического разрушения деформируемых тел при ударных контактных взаимодействиях// *Прикладные проблемы прочности и пластичности/ ТНИ КМК.* — М., 1995. — С. 132—141.
82. **Динамика удара /** Под ред. С.С. Григоряна. — М.: Мир, 1985. — 296 с.
83. **Corran R. S., Shadbolt P. J., Ruiz C.** Impact loading of plates, an experimental investigation// *Int. J. Impact Engng.* — 1983. — V. 1, N 1. — P. 3—22.
84. **Тейт А.** Дальнейшие результаты в теории пенетрации длинных стержней// *Механика.* — М.: Мир, 1970. — С. 125—134.
85. **Sternberg J.** Material properties determining the resistance of ceramics to high velocity penetration// *J. Appl. Phys.* — 1989. — V. 65, N 9. — P. 3417—3424.



## УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛАХ

---

### 8.1. Предварительные замечания

Рассмотрим упругопластический материал, содержащий большое число сферических пор. Точное решение задачи о деформировании такого материала практически невозможно. Поэтому широкое распространение получили различные модельные подходы, которые кратко обсуждаются в разд. 8.2. В разд. 8.3 приведена математическая модель авторов и исследуются ее некоторые математические и физические аспекты. На основе данной модели в разд. 8.4 рассмотрено распространение ударных волн в пористом алюминии и железе. В разд. 8.5 теоретически предсказана и изучена ударная волна разрежения в пористом упругопластическом материале. В разд. 8.6 исследована структура волны сжатия в пористом материале, а в разд. 8.7 рассмотрено компактирование порошков энергией взрыва и дано объяснение образованию “холодного слоя”.

### 8.2. Математические модели пористых материалов

В настоящее время известно большое число математических моделей пористых материалов. Условно их можно разделить на три класса: слоистые, гомогенные и гетерогенные модели. В слоистых моделях пористый материал заменяется многослойной средой, состоящей из пластин данного материала, разделенных зазорами [1, 2]. Сравнение результатов расчетов с данными экспериментов по распространению ударной волны (УВ) показало, что слоистая модель неверно описывает структуру УВ [3, 4]. В частности, она приводит к долго не затухающим осцилляциям, которые отсутствуют в эксперименте. Совпадение конечных состояний за УВ, отмеченное в [2], есть тривиальное следствие законов сохранения и не может служить критерием применимости модели.

Более адекватными действительности оказались гомогенные модели, в которых за счет осреднения производится “размазывание” пористости по объему.

Для описания пористой среды применим математический аппарат механики сплошных сред, с соответствующим уравнением состояния пористого тела. Если пористый материал представляет собой смесь порошков, то частицы каждой фракции (компоненты) будут иметь различные скорости, температуры, и в этом случае необходимо использовать гетерогенные модели. Для каждой компоненты необходимо ввести свой континуум, уравнения которого следуют из законов сохранения массы, энергии и импульса. Основной нерешенной проблемой здесь является получение замыкающих соотношений с учетом взаимодействия компонент. Наиболее продвинутыми, на сегодняшний день, оказались гомогенные модели, которым уделяется ниже главное внимание. Предложено большое число различных уравнений состояния пористого тела, поэтому, не претендуя на полноту, остановимся на основных работах, посвященных этому вопросу.

При интенсивных нагрузках, когда давление  $P$  существенно превышает предел текучести материала  $Y_s$ , можно пренебречь девиатором напряжений  $S_{ij}$  и считать напряжение  $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Поэтому уравнение состояния будет иметь вид  $P = P(\rho, T, \alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$ , где  $\alpha = 1/(1 - m_1)$ ;  $m_1$  — пористость,  $T$  — температура. Если характерное время затекания пор мало, то можно предположить, что за УВ сразу достигается равновесное состояние  $\dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = 0$ , поэтому  $P = P(\rho, T, \alpha)$ . Впервые уравнение состояния в таком виде было построено Зельдовичем [5] и Херманом [6]. Исходя из представления давления в виде суммы холодного и теплового  $P = P_x + P_T$  и законов сохранения на УВ, Зельдович нашел ударную адиабату пористого тела [5], которая явилась основой для всех последующих аппроксимаций уравнения состояния пористого тела [3, 4, 6—10]. Ударная адиабата Зельдовича хорошо описывает экспериментальные результаты по сжатию пористых металлов в интенсивных ударных волнах [11, 12]. Следующий шаг состоял в учете кинетики затекания пор. Здесь важное значение имела работа Кэррола—Холта [13], в которой для вязкопластического материала было построено решение на ячейке, содержащей одну пору. Это решение описывает затекание и рост пор  $P = P(\rho, \alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$  при  $|P| > |P_*|$ , где  $|P_*| = 2/3 Y_s \ln(1/m_1)$  — предельное давление, при котором нарушается равновесие поры. Обобщению этого решения посвящено большое число работ, в которых учитывалось упрочнение материала [3, 14], зависимость вязкости металла от температуры [3], плавление металла [15], влияние тепло-



проводности [16]. Отметим, что модель Кэррола—Холта не учитывает сопротивление среды сдвигу. Проведенные с помощью этих моделей исследования показали, что при сжатии пористого материала в УВ значительная доля энергии переходит в тепловую за счет диссипации энергии при вязком затекании пор. В результате в пористом теле за УВ  $P_T \sim P_X$  при давлениях  $P \gg \gg 10^2$  кбар, тогда как в сплошном материале при этих давлениях  $P_T \ll P_X$ .

В случае низких давлений  $P \sim P_*$  существенную роль играют прочностные свойства пористого материала. В упругой области справедлив закон Гука, в котором эффективные модули сдвига  $\mu$  и объемного сжатия  $K$  зависят от пористости  $m_1$ . Эти модули были получены Эшелби из решения задачи о равновесии матрицы с включением под действием внешней нагрузки [17] и уточнялись в работах [18—22]. В пластической области для определения девиатора деформаций материала  $e_{ij}^s$  в [10, 14] использовался ассоциированный закон течения с поверхностью текучести Мизеса для изотропных материалов  $I_2 = (Y_s m_2)^2$ , где  $I_2 = 3/2 S_{ij} S_{ij}$  — второй инвариант девиатора напряжений,  $Y_s$  — истинный предел текучести материала. Связь девиаторов средних деформаций пористого тела  $e_{ij}$  и  $e_{ij}^s$  определялась с помощью гипотезы Швегла [10], которую можно записать в виде  $\dot{e}_{ij}^s / \dot{e}_{ij} = \dot{V}^s / \dot{V}$ , где точкой обозначена производная по времени,  $V = 1/\rho$ ,  $V^s = 1/\rho_s$ ,  $\rho = \rho_s m_2$ ,  $m_2 = 1 - m_1$ ,  $m_2$  — объемная концентрация материала,  $\rho_s$  — истинная плотность материала,  $\rho$  — средняя плотность пористого тела. Гипотеза Швегла является противоречивой. Если материал является несжимаемым  $\dot{V}_s = 0$ , то из формулы Швегла следует, что пористый материал не оказывает сопротивления сдвигу  $\dot{e}_{ij} \sim \infty$ , что физически бессмысленно. В работах [24, 25] сделана попытка описания деформирования пористого материала на основе релаксационной максвелловской модели. Однако отметим, что в этом подходе время релаксации напряжений  $\tau_\sigma$  остается неопределенным. Предложенная в [25] аппроксимационная формула для  $\tau_\sigma$  не имеет достаточного физического обоснования и поэтому здесь обсуждаться не будет. Отмеченные трудности были устранены в работе Гарсона [23], в которой на основе предположения о линейной зависимости скорости диссипации энергии  $\dot{Q}$  от скорости деформации  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  и гипотезы  $\langle \delta \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}^p \rangle = 0$  было показано, что

средние пластические деформации могут быть найдены из ассоциированного закона течения

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \Phi = I_2 - Y^2(Y_s, P, m_1).$$

Здесь символом  $\delta$  обозначены отклонения микронапряжений и микродеформаций от средних значений, а скобками — осреднение на ячейке,  $\Phi$  — поверхность текучести. Предел текучести пористого тела  $Y = Y(Y_s, P, m_1)$  находился из принципа минимума скорости диссипации энергии  $\dot{Q}$  при пластическом течении в модели жесткопластического тела. Дальнейшие усилия исследователей были направлены на уточнение предела текучести [26] и решение практических задач о распространении УВ в пористых металлах [27—29]. Отметим, что при высоких температурах имеет место квадратичная зависимость скорости диссипации  $\dot{Q}$  от скорости деформации  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ , которая использовалась в [30—32] при исследовании спекания пористых тел с учетом лапласовского давления. Подход Гарсона не свободен от некоторых недостатков. Во-первых, зависимость  $Y = Y(Y_s, P, m_1)$  такова, что  $|\partial Y / \partial P| \sim \infty$  при  $P = P_*$ , поэтому из закона течения следует  $\dot{\epsilon}_{ij} \sim \infty$ . Во-вторых, предполагается, что пластические деформации в пористом теле наступают после того, как средние напряжения выходят на поверхность текучести. Для пористого материала это условие является недостаточным. В частности, если среднее давление достаточно велико, то под действием давления в окрестности поры возникает пластическая область, и пластические деформации происходят даже в том случае, когда средние напряжения не лежат на поверхности текучести. В работах [33—37] построена математическая модель, учитывающая влияние пластической области на деформирование пористого материала. Далее в разд. 3 обсуждаются некоторые ее математические свойства.

### 8.3. Математическая модель пористого упругопластического материала

Следуя работам [33—37], запишем уравнения деформирования пористого материала:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i \rho v_i = 0, \quad \rho = \rho_s m_2, \quad i = 1, 2, 3,$$



$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \nabla_j \sigma_{ij}, \quad \rho \frac{dE}{dt} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \nabla_i,$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij} + e_{ij}, \quad \sigma_{ij} = -P \delta_{ij} + S_{ij},$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i), \quad m_1 = \frac{4}{3} \pi a^3 n, \quad m_1 + m_2 = 1, \quad (8.3.1)$$

$$\dot{P} = \dot{P}_x + \dot{P}_T, \quad \dot{P}_x = -K \dot{\epsilon}_{kk}, \quad \dot{P}_T = (\Gamma \rho \epsilon_T),$$

$$E = E_x + E_T, \quad \Gamma / \Gamma_s = K / (m_2 K_s), \quad E_T = c_v T,$$

$$E_x = \left( \frac{1}{2} K_y (\epsilon_{kk}^e)^2 + \mu_y e_{ij}^e e_{ij}^e \right) / \rho.$$

При  $\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} < Y^2 (P, m_1, Y_s)$

$$\hat{S}_{ij} = 2\mu \dot{e}_{ij}. \quad (8.3.2)$$

При  $\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} = Y^2 (P, m_1, Y_s)$

$$\frac{1}{2\mu} \hat{S}_{ij} + \dot{\lambda} S_{ij} = \dot{e}_{ij},$$

$$\frac{1}{2\mu} \hat{S}_{ij} = \left( \frac{\dot{S}_{ij}}{2\mu} \right) - \frac{1}{2\mu} (\omega_{ik} S_{kj} + \omega_{jk} S_{ki}), \quad (8.3.3)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^P, \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j - \nabla_j v_i).$$

При  $|P| < |P_0|$

$$K = K_1, \quad \mu = \mu_1, \quad Y^2 = Y_s^2 m_2^2 - \frac{9}{4} P^2 \bar{m}_1,$$

$$|P_0| = \frac{2}{3} Y_s \bar{m}_2, \quad \bar{m}_1 = q m_1, \quad \bar{m}_1 + \bar{m}_2 = 1, \quad q = 1,7, \quad (8.3.4)$$

$$K_1 = \frac{K_s m_2}{1 + \frac{m_1}{2} \left( \frac{1+v}{1-2v} \right)}, \quad \mu_1 = \frac{\mu_s m_2}{1 + 0,5 m_1}.$$

При  $|P_0| \leq |P| < |P_*|, \dot{I} > 0$

$$K = K_2, \quad \mu = \mu_2, \quad Y^2 = Y_s^2 \bar{m}_2 m_e^2,$$

$$|P_*| = \frac{2}{3} Y_s \ln \left( \frac{1}{\bar{m}_1} \right), \quad m_e + m_p = 1,$$

$$K_2 = \frac{K_s m_2}{1 + \frac{(1+\nu)Y_s}{3(1-2\nu)|P|} m_p m_2}, \quad \mu_2 = \frac{\mu_s m_e}{\frac{m_e}{m_p} + 0,5m_p},$$

$$\dot{e}_{ij}^e = \frac{\dot{S}_{ij}}{2\mu_1}, \quad \dot{\epsilon}_{kk}^e = -\frac{K_2 \dot{\epsilon}_{kk}}{K_1} + \frac{\dot{m}_2}{m_2},$$

$$\frac{3\chi P}{2Y_s} + 1 - m_p + \ln \left( \frac{m_p}{\bar{m}_1} \right) = 0, \quad |P_0| \leq |P| < |P_+|,$$

$$m_e = \frac{\xi}{1+\xi} + \frac{3\chi(P-P_+)}{2\xi Y_s}, \quad |P_+| < |P| < |P_z|, \quad (8.3.5)$$

$$P_+ = -\frac{2}{3} \chi Y_s \left( \ln \left( \frac{1}{\bar{m}_1} \right) + \left( \frac{\xi}{1+\xi} \right) \right), \quad \xi = \sqrt{\bar{m}_2},$$

$$P_z = P_+ - \frac{2\chi Y_s \bar{m}_2}{3(1+\xi)}, \quad \chi = \begin{cases} 1, & \dot{P}P < 0, \\ -1, & \dot{P}P > 0, \end{cases}$$

$$\dot{I} = \left( \frac{3}{2} \zeta + m_p I_2 / (2m_e^3 Y_s \sqrt{I_1}) \right) I_1 + \zeta I_2 / 3,$$

$$\zeta = \frac{m_p}{m_e} - \frac{m_1}{m_2}, \quad I_1 = P^2, \quad I_2 = \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}.$$

При  $|P| \geq |P_*|$

$$\frac{2}{3} \chi Y_s \ln \left( \frac{1}{\bar{m}_1} \right) - \frac{4\eta \dot{m}_1}{3m_1} - P = 0, \quad (8.3.6)$$

$$\dot{P}_x = -K_1 \dot{\epsilon}_{kk}^e, \quad \dot{\epsilon}_{kk}^e = \frac{\dot{m}_2}{m_2} - \frac{\dot{\rho}}{\rho}, \quad e_{ij}^e = \frac{S_{ij}}{2\mu_1},$$

где  $\rho_s$ ,  $\rho$ ,  $P$ ,  $S_{ij}$ ,  $E$ ,  $E_x$ ,  $E_T$ ,  $P_x$ ,  $P_T$ ,  $\epsilon_{ij}$ ,  $\dot{\epsilon}_{ij}$ ,  $e_{ij}$ ,  $\nu$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_e$ ,  $m_p$  — соответственно плотность материала, средняя плотность, давление, девиатор напряжений, удельные внутренняя, холодная и тепловая энергии, холодное и теп-



ловое давления, деформация, скорость деформации, девиатор деформаций, скорость, напряжение, пористость, объемная концентрация материала, доля объема материала, находящегося в упругом и пластическом состояниях,  $\Gamma, \nu, K_s, \mu_s, Y_s, K_l, \mu_l, Y, \eta, n, a$  — коэффициенты Грюнайзена и Пуассона, модули объемного сжатия, сдвига и предел текучести материала, осредненные модули объемного сжатия, сдвига и предел текучести, вязкость материала, концентрация и радиус пор. Точкой обозначена полная производная по времени.

Обсудим основные особенности системы уравнений (8.3.1)—(8.3.6). При выполнении неравенства  $|P| \geq |P_*|$  происходит затекание (рост) пор, которое описывается уравнением Кэррола—Холта [13]. Если в уравнении Кэррола — Холта пренебречь инерционными членами, то оно совпадет с первым уравнением (8.3.6). Условие применимости уравнения (8.3.6) можно выразить в виде неравенства  $Re = a \sqrt{\rho_s \dot{Y}} / \eta \ll 1$ .

В случае  $|P| > |P_0|$  в окрестности поры возникает пластическая зона, деформации являются упругопластическими и описываются уравнениями (8.3.5). Эти формулы справедливы на стадии нагрузки  $\dot{I} > 0$ . При разгрузке  $\dot{I} < 0$  необходимо использовать уравнения (8.3.4), которые описывают упругое деформирование. В отличие от работ [17—22] величины  $K_2, \mu_2$  зависят не только от пористости  $m_1$ , но и от давления  $P$ .

В области  $|P| < |P_+|$  соответствующие формулы в (8.3.4), (8.3.5) для  $Y = Y(P, m_1)$  совпадают при  $q = 1$  с поверхностью текучести Гарсона [23], а при  $q = 1,5$  — с поверхностью текучести Твергарда [26]:

$$Y^2 = Y_s^2 \left( 1 + \bar{m}_1^2 - 2\bar{m}_1 \operatorname{ch} \left( -\frac{3P}{2Y_s} \right) \right). \quad (8.3.7)$$

Коэффициент  $q = 1,7$ , принятый в данной работе, найден из экспериментов по квазистатическому деформированию пористых образцов при одноосном нагружении [8, 26]. В области  $|P| < |P_+|$  уравнение Гарсона—Твергарда (8.3.7) приводит к негиперболичности системы уравнений упругопластического течения.

Найдем характеристики системы уравнений (8.3.1), (8.3.3) при пластическом течении в одномерном нестационарном случае:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) &= 0, \quad \rho = \rho_s m_2, \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}, \quad \sigma_1 = -P + S_1, \\ \frac{\partial m_2}{\partial t} + v \frac{\partial m_2}{\partial x} &= 0, \quad \dot{\epsilon}_1 = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3 = 0, \\ S_1 &= \frac{2}{3} \xi Y, \quad S_2 = S_3 = -\frac{1}{2} S_1, \quad P = K \left( \frac{\rho_s}{\rho_s^0} - 1 \right). \end{aligned} \tag{8.3.8}$$

Отметим, что в (8.3.8) пренебрегается тепловым давлением и не учитывается уравнение энергии, которое записано вдоль характеристики  $dx/dv = v$ . Уравнение для изменения пористости следует из формулы (8.3.8), если в последнюю подставить условие одноосного деформирования. Предполагается, что давление  $P$  удовлетворяет неравенству  $|P| < |P_*|$ .

Система уравнений (8.3.8) имеет характеристики

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dx}{dt} = v \pm c, \quad c = \sqrt{\frac{K}{\rho_s} \left( 1 - \frac{2}{3} \chi \frac{\partial Y}{\partial P} \right)}, \tag{8.3.9}$$

где  $c$  — скорость распространения малых возмущений, которая должна удовлетворять неравенству  $c \geq 0$ , откуда следует ограничение на изменение функции  $Y(P)$  в виде неравенства

$$\left| \frac{\partial Y}{\partial P} \right| \leq \frac{3}{2}.$$

Равенство  $|\partial Y / \partial P| = 3/2$  достигается при давлении  $|P_+|$ , уравнение для которого приведено в системе (8.3.5). При  $|P| > |P_+|$  зависимость  $Y(P)$  аппроксимируется линейной функцией с коэффициентом  $3/2$  так, что выполняются условия непрерывности функции  $Y(P, m_1)$  и производной  $|\partial Y / \partial P|$  в точке  $|P_+|$  (см. соответствующее уравнение в (8.3.5)). Для данной поверхности текучести выполняется условие гиперболичности, что позволяет корректно поставить задачу Коши для системы уравнений (8.3.1)—(8.3.6).

В настоящее время существует несколько моделей, которые дают различные поверхности текучести пористого материала [35]. На рис. 8.1 для поверхностей текучести Гарсона, Твергарда, Ричмонда и авторов [33—37] приведены



сечения поверхности  $Y = Y(P, m_1)$  плоскостями  $m_1 = \text{const}$  при значениях пористости  $m_1 = 0$  (1); 0,82% (2); 6,2% (3). Квадраты и треугольники соответствуют трехмерным численным расчетам задачи об упругопластической деформации куба, содержащего внутри себя сферическую пору, при одноосном, сдвиговом и трехосном нагружении [38]. Пунктир соответствует поверхности текучести Гарсона [23], короткие штрихи — Твергарда [26], длинные — Ричмонда [38]. Сплошная кривая авторов [33—37] описывается соответствующими уравнениями (8.3.4), (8.3.5). Видно, что поверхность текучести авторов удовлетворительно согласуется с прямыми численными расчетами [38].

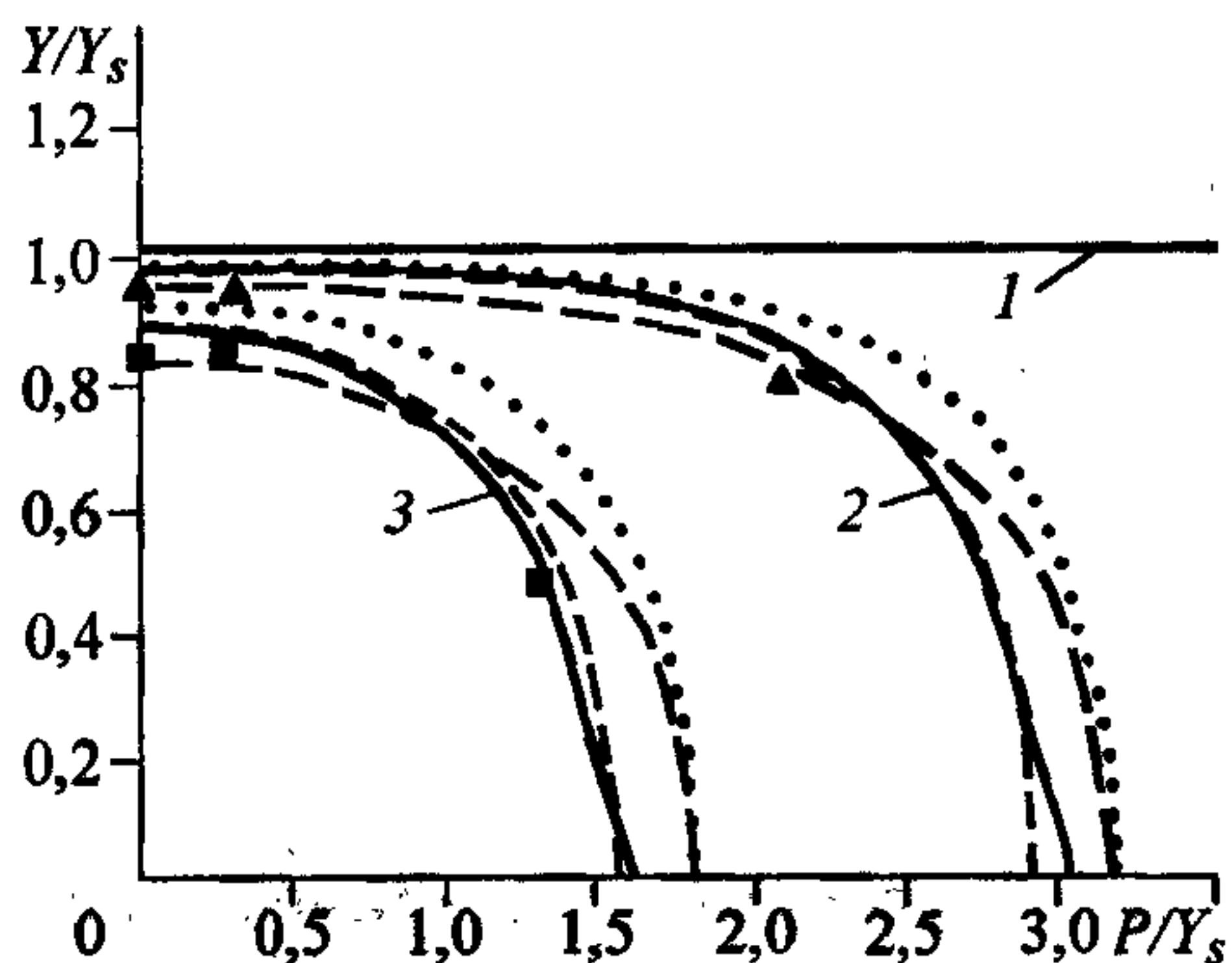


Рис. 8.1. Зависимость предела текучести  $Y$  пористого материала от давления  $P$  при фиксированной пористости  $m_1$ .

Поясн. см. в тексте.

#### 8.4. Численное моделирование распространения ударных волн в пористом алюминии и железе

Изучим структуру ударных волн в пористом алюминии (Al) и железе (Fe) при низких нагрузках, когда напряжения в металле имеют порядок предела текучести. В таком случае прочностные свойства существенно проявляются в структуре ударной волны. При этом различные модели будут предсказывать различные профили ударной волны, и сравнение с экспериментом позволяет выбрать наиболее реалистическую модель.

Рассмотрим пластину пористого материала, о которую ударяется пластина из сплошного материала. В случае, когда ширина пластины существенно больше ее длины, в ней возникает нестационарное одноосно деформированное состояние, описываемое уравнениями (8.3.1)—(8.3.6), в которых следует положить

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \dot{\epsilon}_1 = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad S_2 = S_3 = -S_1/2,$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_3 = \dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3 = 0, \quad u = x - x_0, \quad x_0 = x|_{t=0},$$

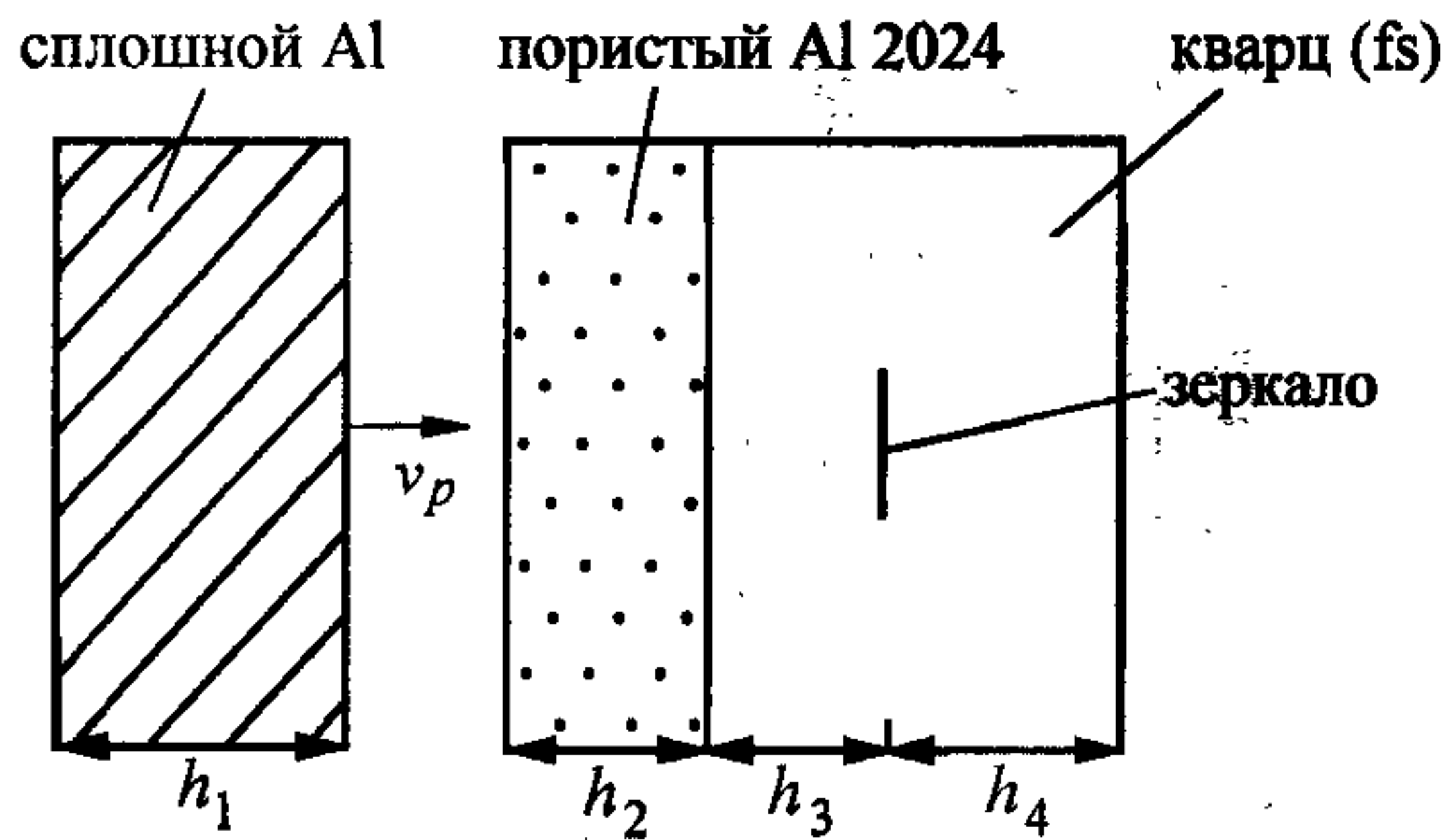


Рис. 8.2. Геометрия эксперимента по одномерному удару [40].

Поясн. см. в тексте.

где  $S_i, \epsilon_i, \dot{\epsilon}_i, u, v$  — компоненты тензора девиатора напряжений, тензора деформаций, скоростей деформаций, смещение и скорость соответственно. Ниже рассматриваются пористые материалы, в которых радиус пор  $a$  изменяется в интервале 1—10 мкм, так что  $Re = a\sqrt{\rho_s Y} / \eta \ll 1$ .

Система уравнений (8.3.1)—(8.3.6) интегрировалась численно по схеме “крест”. Ударная волна размазывалась искусственной вязкостью, коэффициенты в которой выбирались аналогично [39].

Исследуем распространение УВ в пористом алюминии. Пусть происходит удар сплошной пластиной Al 6061-T6 по пористой пластине Al 2024 (рис. 8.2). За пористой пластиной находилась пластина из плавленного кварца (fs), в которой на глубине  $h_3$  было установлено зеркало. По смещению зеркала определялся профиль скорости за фронтом УВ. Численные расчеты проводились для материалов и условий нагружения [40]. Объемный модуль упругости  $K_s$  и предел текучести  $Y_s$  материала вычислялись по формулам:

$$K_s = A + 2B(\theta - 1) + 3C(\theta - 1)^3, \quad \theta = 1 - \epsilon_{kk}^e, \quad (8.4.1)$$

$$Y_s = (Y_0 + \eta \dot{\epsilon}_1^p) \left( 1 + b_s (\epsilon_1^p)^m \right).$$

Здесь  $\dot{\epsilon}_1^p, \epsilon_1^p$  — скорость деформации и деформация при одноосно деформированном нагружении,  $\epsilon_{kk}^e$  — первый инвариант тензора упругих деформаций,  $\eta, b_s$  — вязкость и коэффициент деформационного упрочнения. Свойства материалов, использованные в расчетах, приведены в [41—43]. Согласно [41], для Al 6061-T6 имеем:

$$A = 0,8 \text{ Мбар}, \quad B = 1,07 \text{ Мбар}, \quad C = 0, \quad \eta = 10^{-4} \text{ Мбар} \cdot \text{мкс}, \quad b_s = 0, \quad Y_0 = 3 \times 10^{-3} \text{ Мбар},$$

$$\mu_s = 0,248 \text{ Мбар}, \quad \rho_s = 2,785 \text{ г/см}^3, \quad \nu = 0,347, \quad \Gamma_s = 2;$$

пористый Al 2024 [40, 42]:



$A = 0,79$  Мбар,  $B = 1,05$  Мбар,  $C = 0,13$  Мбар,  $\eta = 10^{-4}$  Мбар·мкс,  $b_s = 0$ ,

$Y_0 = 10^{-3}$  Мбар,  $\mu_s = 0,248$  Мбар,  $\rho_s = 2,785$  г/см<sup>3</sup>,  $\nu = 0,27$ ,  $\Gamma_s = 2$ ;

плавленный кварц [43]:

$A = 0,776$  Мбар,  $B = 2,1$  Мбар,  $C = 11$  Мбар,  $\eta = 10^{-4}$  Мбар·мкс,  $b_s = 0$ ,

$Y_0 = 10^{-6}$  Мбар,  $\mu_s = 10^{-5}$  Мбар,  $\rho_s = 2,2$  г/см<sup>3</sup>,  $\Gamma_s = 2$ ,

где  $\Gamma_s$ ,  $\nu$ ,  $\mu_s$ ,  $\rho_s$  — коэффициент Грюнайзена, модуль Юнга, модуль сдвига и плотность материала соответственно.

Толщина ударника  $h_1 = 6$  мм, пористой пластины  $h_2 = 3$  мм, плавленного кварца  $h_4 = 36$  мм. На свободных поверхностях ставилось условие  $\sigma_1 = 0$ , а на контактных разрывах — непрерывность скоростей и напряжения  $\sigma_1$ . В точке, соответствующей координате зеркала  $h_3 = 6$  мм [40], выдавалась зависимость рассчитанной скорости от времени.

На рис. 8.3 приведена зависимость скорости материала  $v(t)$  в точке  $h_3 = 6$  мм для различных скоростей удара, мм/мкс:  $v_p = 0,5$  (1); 0,244 (2); 0,18 (3).

Начальная пористость алюминия  $m_1^0 = 0,22$ . Сплошными линиями показаны результаты расчета, штриховыми — данные эксперимента [40]. Видно, что имеется удовлетворительное совпадение численных расчетов с экспериментом. Некоторое отличие по времени прихода УВ при  $v_p = 0,18$  мм/мкс связано с упрочнением пористого Al в эксперименте [40]. Анализ фотографий пористого Al [40] показывает, что имеется значительный разброс в размерах и форме пор. Поэтому сразу после прихода упругого предвестника начнется затекание пор с низким критическим давлением  $|P_*|$ . Это относится, например, к плоским порам типа “блинов”. Затекание пор приведет к росту  $Y$ , скорости  $v$  и, соответственно, увеличению скорости пластической УВ.

Для оценки влияния пористости

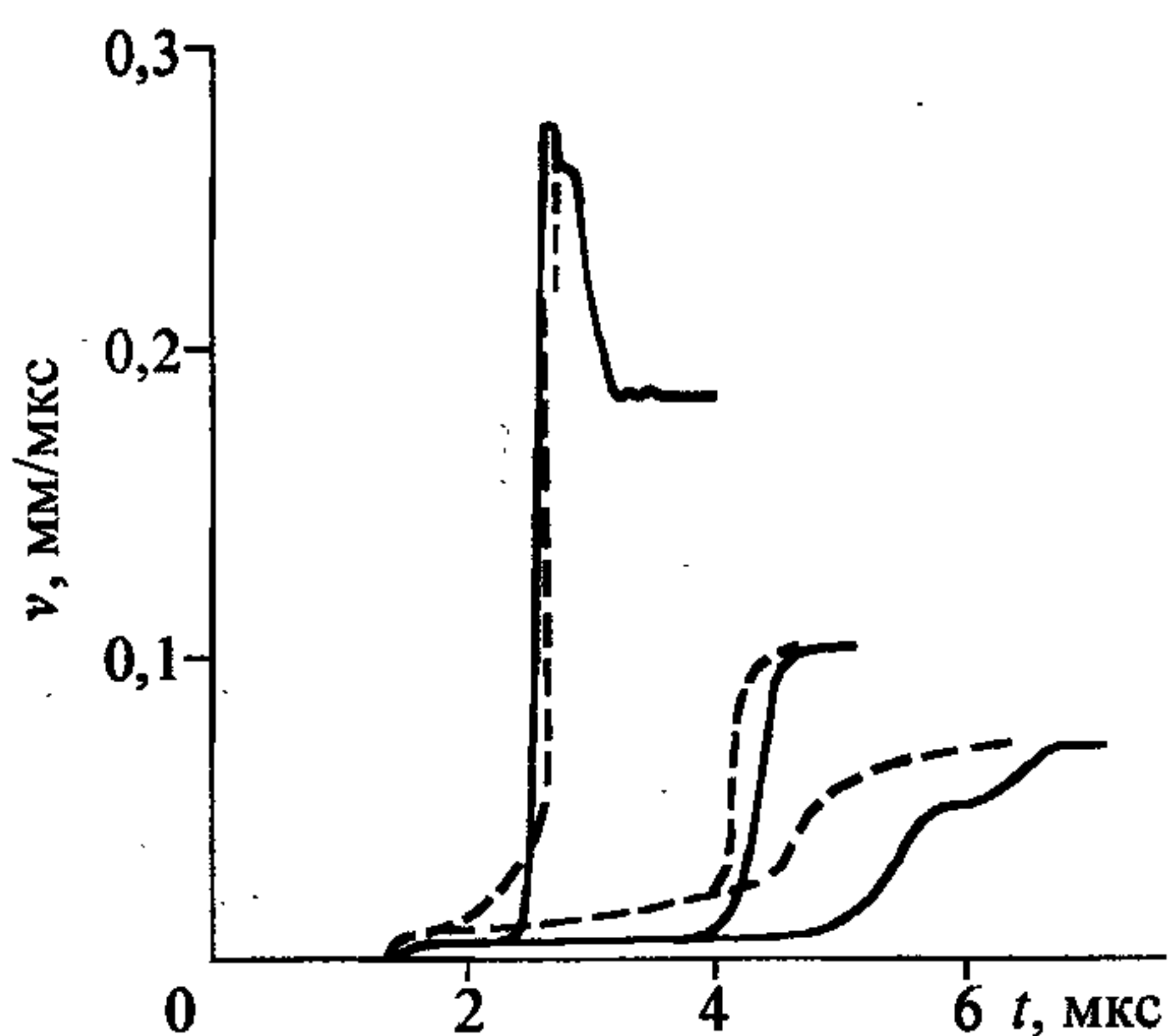


Рис. 8.3. Сравнение экспериментальных [40] и расчетных профилей скорости в пористом Al.

Поясн. см. в тексте.

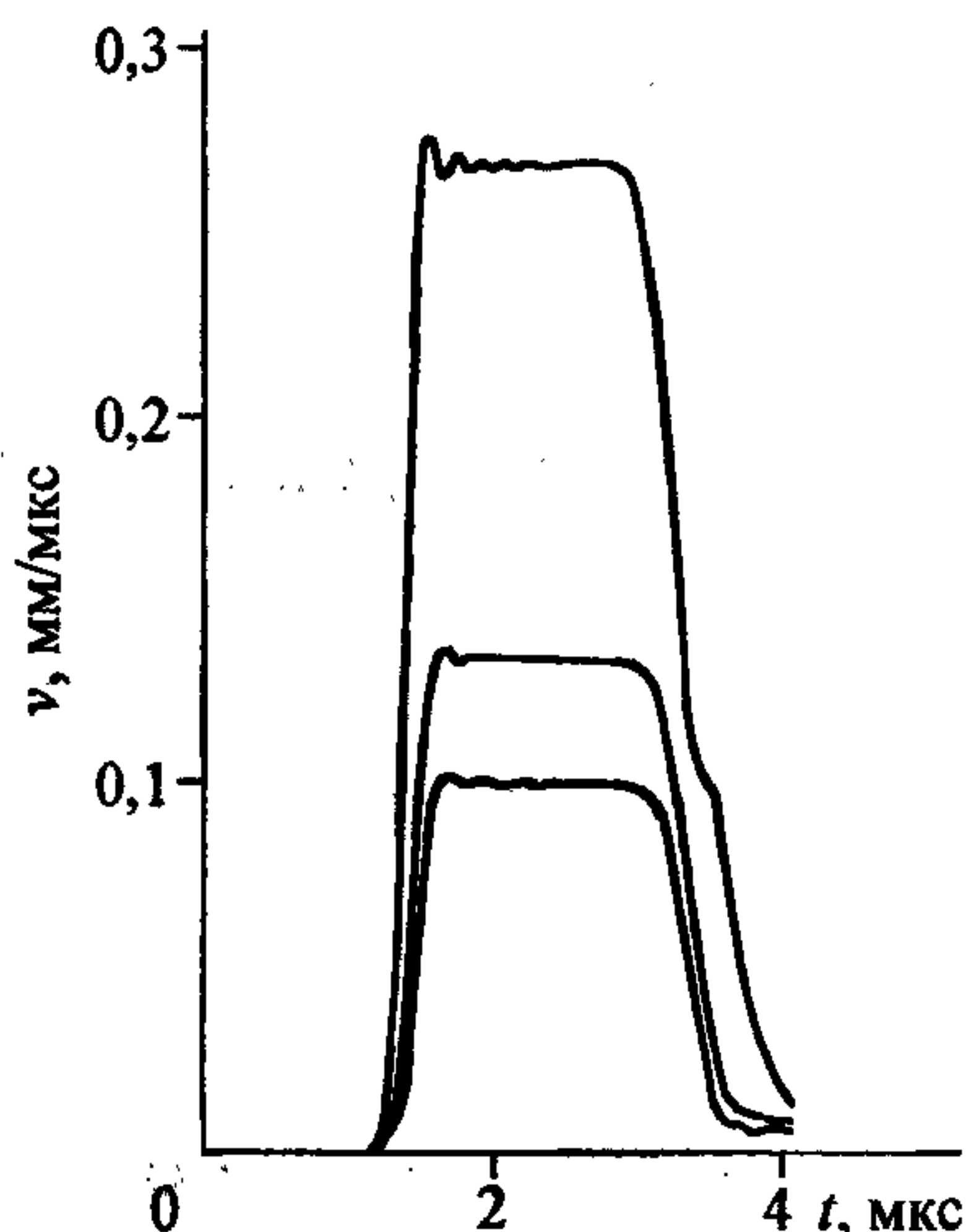


Рис. 8.4. Профили скорости в сплошном Al на глубине 6 мм при тех же скоростях удара, что и на рис. 8.3.

$x$  при  $v_p = 0,244$  мм/мкс,  $m_1^0 = 0,223$  и  $t = 0; 1; 2; 3; 4$  мкс (1—5 соответственно). Видно, что к моменту  $t = 1$  мкс в результате распада разрыва в пористом Al формируется УВ, которая в дальнейшем значительно ослабляется волнами разрежения, отраженными от тыльной поверхности ударника и догоняющими УВ. (Скорость волны разгрузки в пористом материале существенно больше скорости УВ. Это связано с тем, что в УВ происходит пластическое затекание пор, а в волне разгрузки пористость остается постоянной.) Ослабление УВ отражается

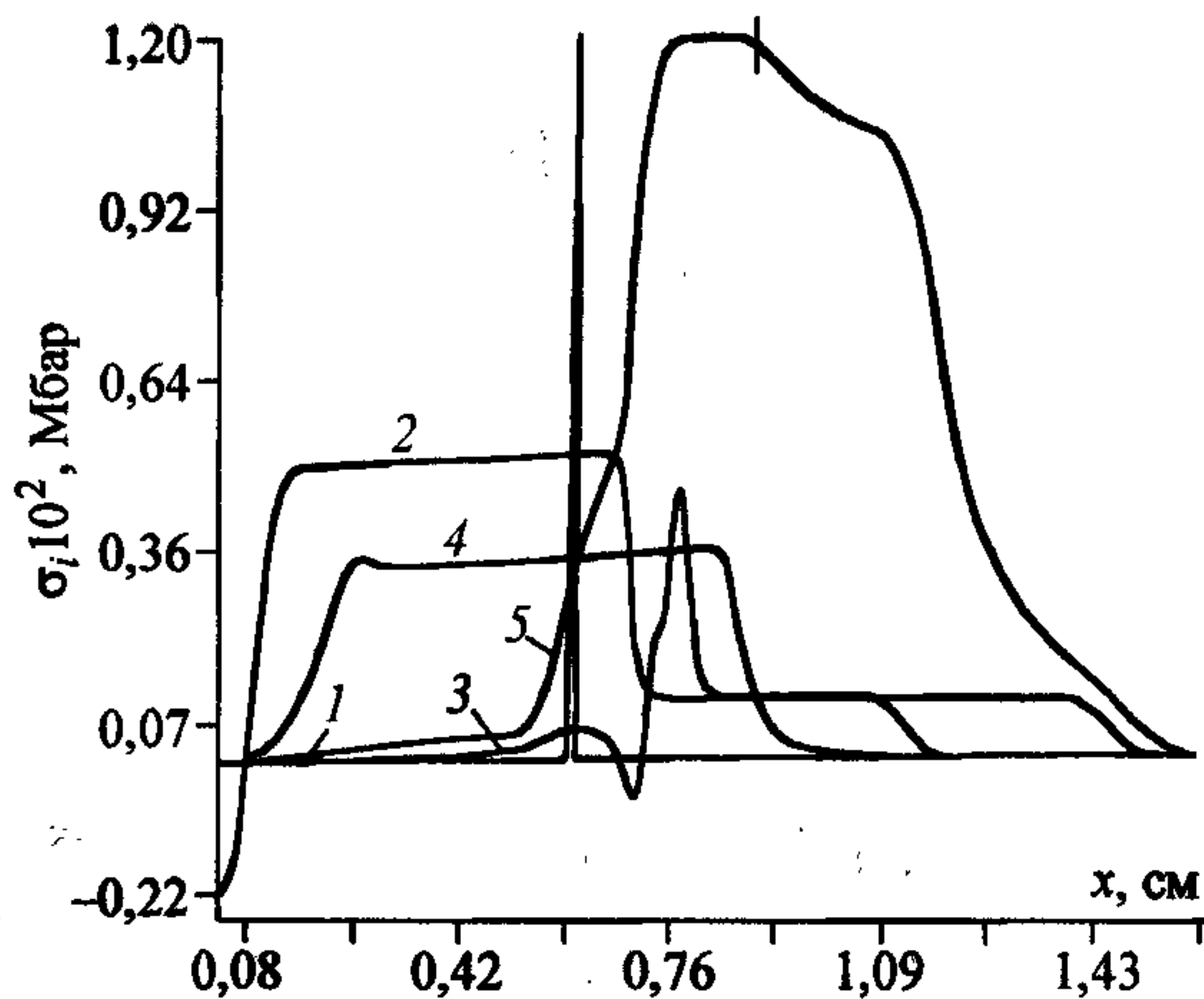


Рис. 8.5. Профили напряжения.  
Поясн. см. в тексте.

на зависимости  $m_1(x)$ , которая приобретает характерный ступенчатый вид (уменьшение давления в УВ ведет к увеличению остаточной пористости). После выхода УВ на контактную поверхность Al—fs, она отражается в Al волной сжатия, в которой происходит полное затекание пор. Размазывание УВ в fs связано с увеличением ширины УВ в пористом Al и скачком скорости звука при пе-



реходе из пористого Al в кварц. Ширина фронта УВ в пористом Al определяется временем затекания пор и в несколько раз больше, чем в сплошном Al. Волны сжатия, выходящие на контактную границу пористый Al—fs чуть раньше, уходят в кварце далеко вперед, что приводит к дополнительному увеличению ширины УВ.

По-видимому, в работе [40] имеется неточность, связанная с тем, что кривой 1 приписывается скорость удара  $v_p = 0,366$  мм/мкс, тогда как должно быть  $v_p = 0,5$  мм/мкс. Расчеты, проведенные при  $v_p = 0,366$  мм/мкс, дают скорость за фронтом в fs  $v \approx 0,2$  мм/мкс.

Рассмотрим задачу о затухании УВ в пористом железе. Постановка задачи (рис. 8.7) соответствует условиям эксперимента [44]. По стальному экрану толщиной  $h_3 = 9$  мм производится удар со скоростью  $v_p$  стальной пластиной  $h_2 = 12$  мм, установленной на алюминиевом ударнике  $h_1 = 9$  мм. За экраном располагалось пористое железо, в котором вблизи поверхности контакта  $l_1 = 0,5$  мм и на глубине  $l_2 = 17,8$  мм находилась зависимость  $\sigma_1$  от времени  $t$ . В расчетах были приняты следующие параметры железа (стали):  $\rho_s = 7,85$  г/см<sup>3</sup>,  $\Gamma = 2$ ,  $\mu_s = 0,8$  Мбар. Объемный модуль упругости  $K_s$  и предел текучести  $Y_s$  железа определяются из уравнений (8.4.1) с коэффициентами  $A = 1,6$  Мбар,  $B = C = 0$ ,  $Y_0 = 4$  кбар,  $b_s = 2$ ,  $m = 1/2$ .

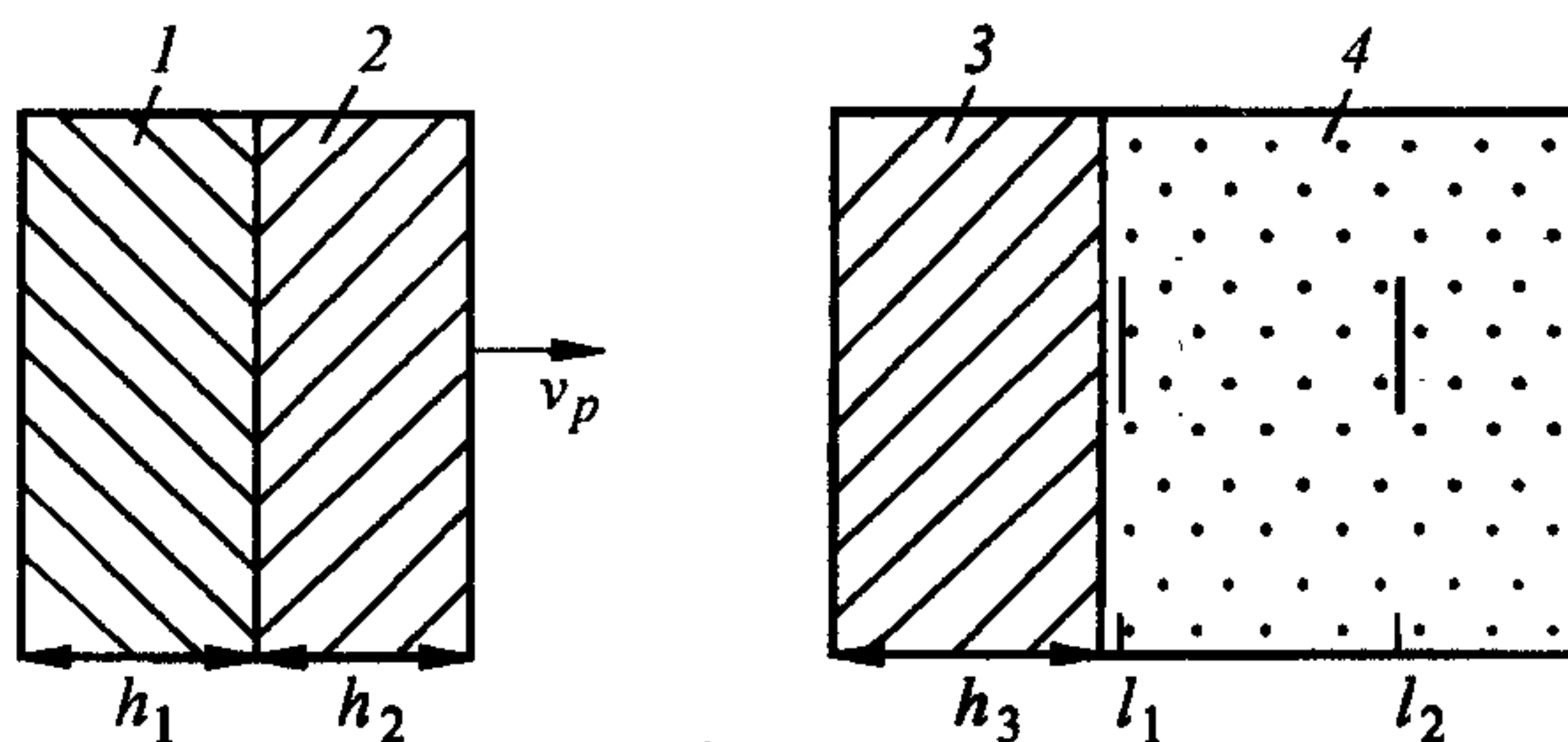


Рис. 8.7. Геометрия эксперимента по одномерному удару [44].

1— алюминий; 2—4 — железо; 1—3 — сплошной материал; 4 — пористый.

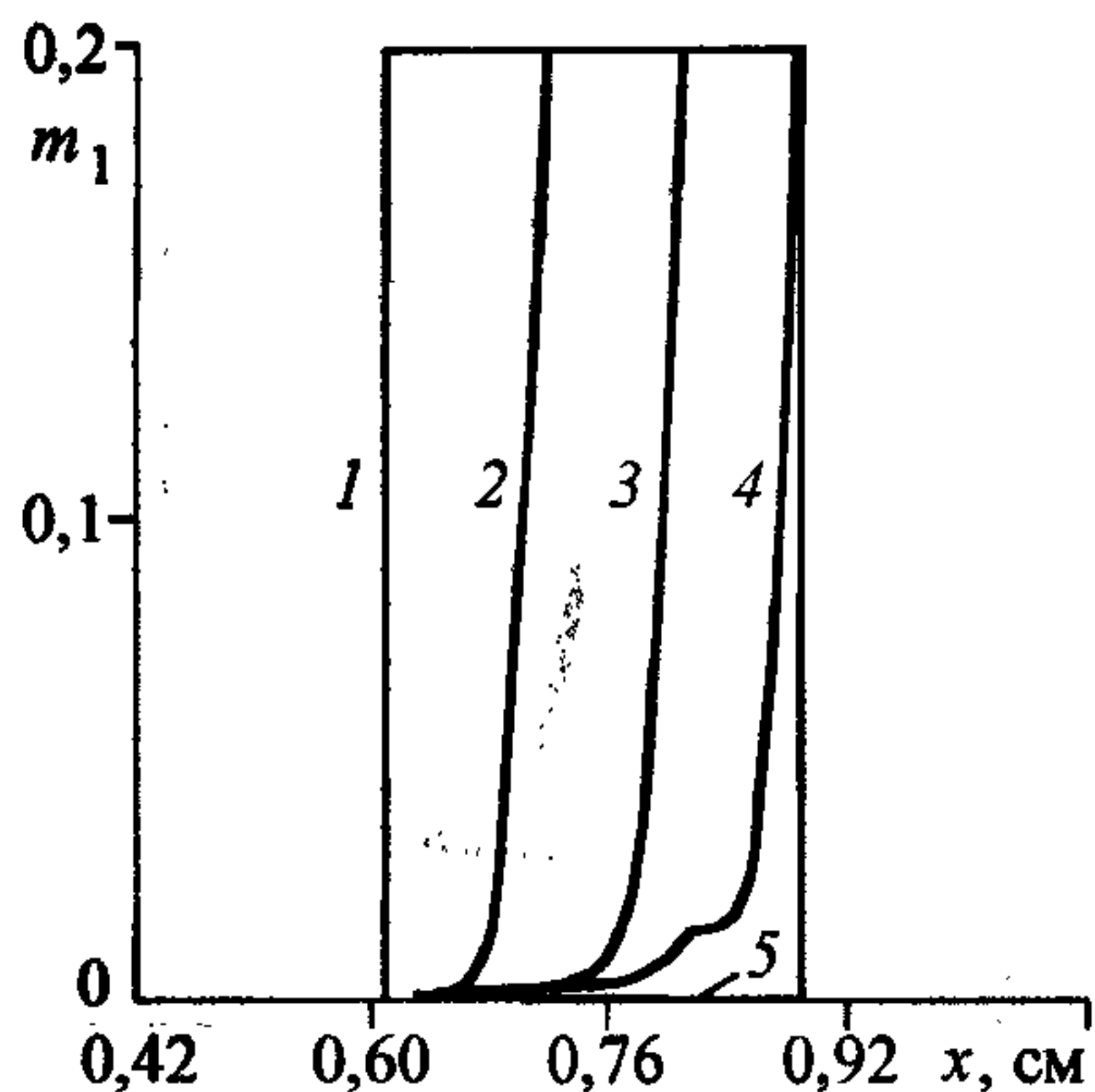


Рис. 8.6. Профили пористости.

Поясн. см. в тексте.

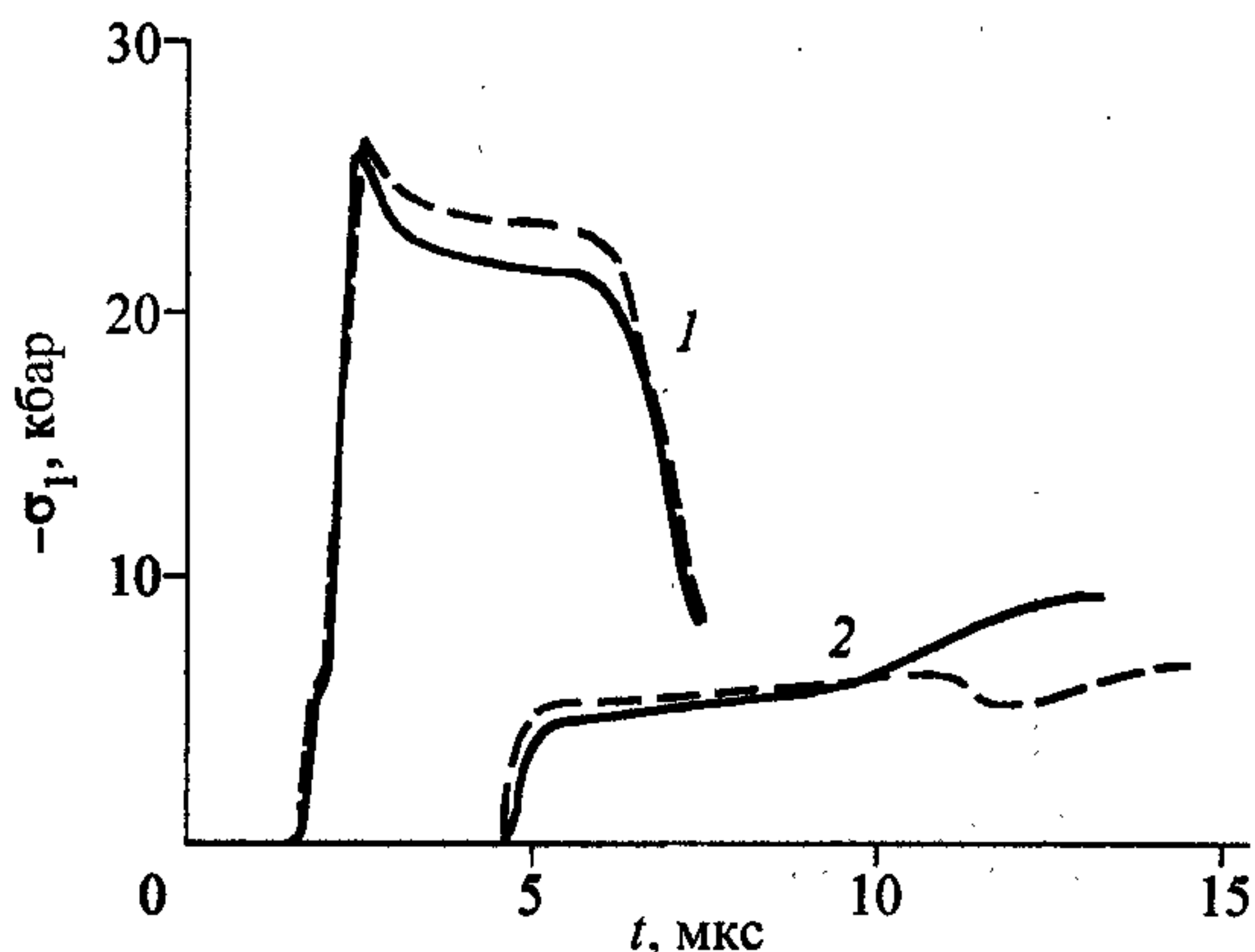


Рис. 8.8. Сравнение экспериментальных [44] и расчетных профилей скорости в пористом железе  $m_1^0 = 0,1$  на глубине 0,5 мм (кривые 1) и 17,8 мм (кривые 2) при скорости удара  $v_p = 0,239$  мм/мкс.

Сплошные линии — расчет, штриховые — эксперимент.

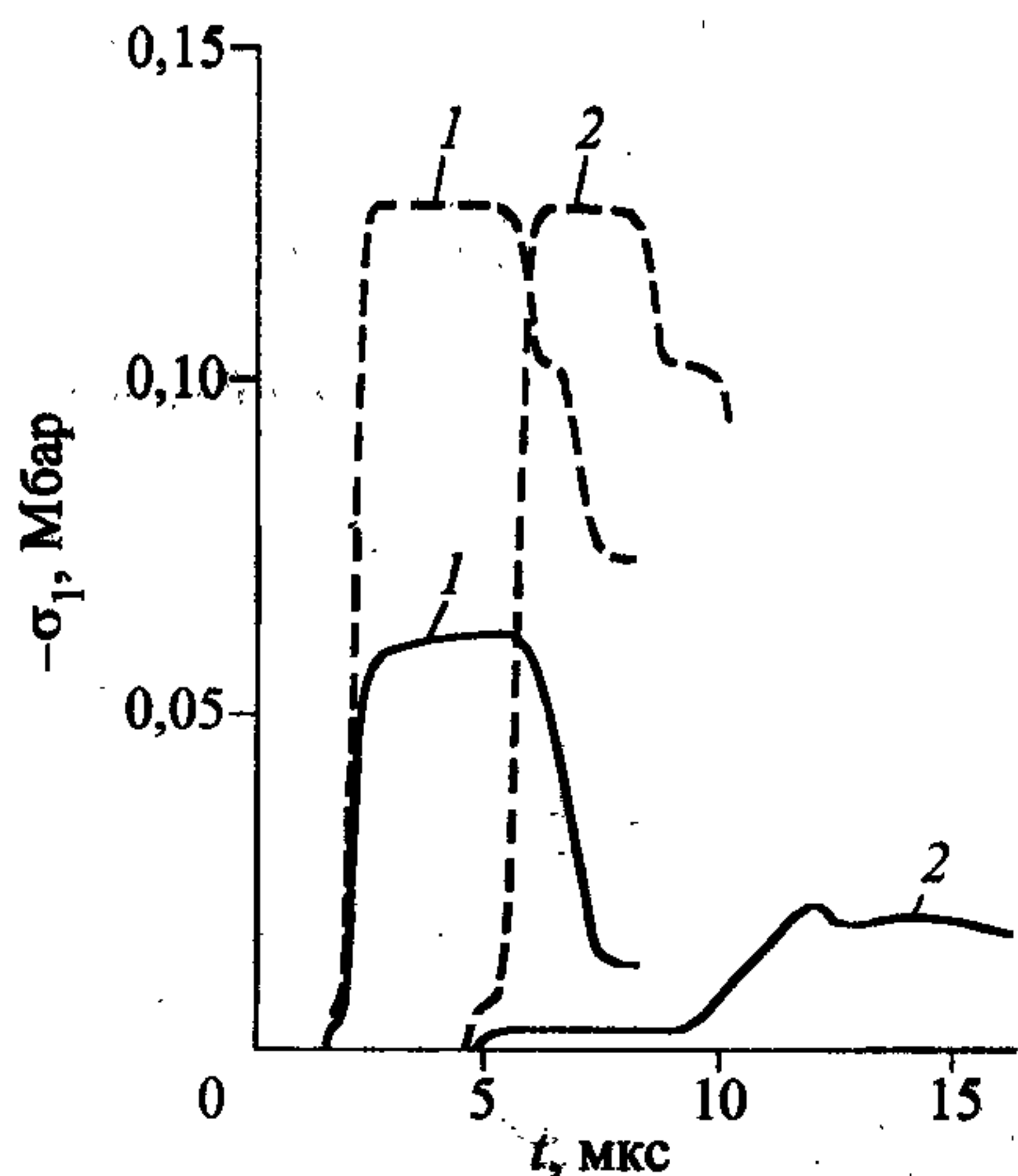


Рис. 8.9. Напряжения в пористом ( $m_1^0 = 0,2$ ) (сплошные линии) и сплошном (штриховые) железе на глубине 0,5 мм (кривые 1) и 17,8 мм (кривые 2) при скорости удара  $v_p = 0,642$  мм/мкс.

Скорость деформации для условий нагружения [44] не превышает  $10^5$  с<sup>-1</sup>, поэтому согласно [45] вязкость сплошного Fe  $\eta = 3 \cdot 10^3$  Па·с. Параметры алюминиевого ударника совпадали с Al 6061.

На рис. 8.8 приведены зависимости  $-\sigma_1(t)$  в точке  $l_1$  (кривые 1) и  $l_2$  (кривые 2), полученные в расчетах и экспериментах [44] при скорости удара  $v_p = 0,239$  мм/мкс и начальной пористости Fe  $m_1^0 = 0,1$ , откуда следует, что совпадение расчета и эксперимента вполне удовлетворительное. Для оценки влияния пористости был проведен расчет, в котором вместо пористого железа рассматривалось сплошное (рис. 8.9). Амплитуда  $\sigma_1$  и скорость распространения пластической УВ в пористом железе примерно в три раза меньше, чем в сплошном. Кроме этого, имеет место сильное затухание пластической УВ в пористом материале.

На рис. 8.10 приведены зависимости  $m_1(x)$  на несколько моментов времени через  $\Delta t = 4$  мкс, рассчитанные при скорости удара  $v_p = 0,642$  мм/мкс и



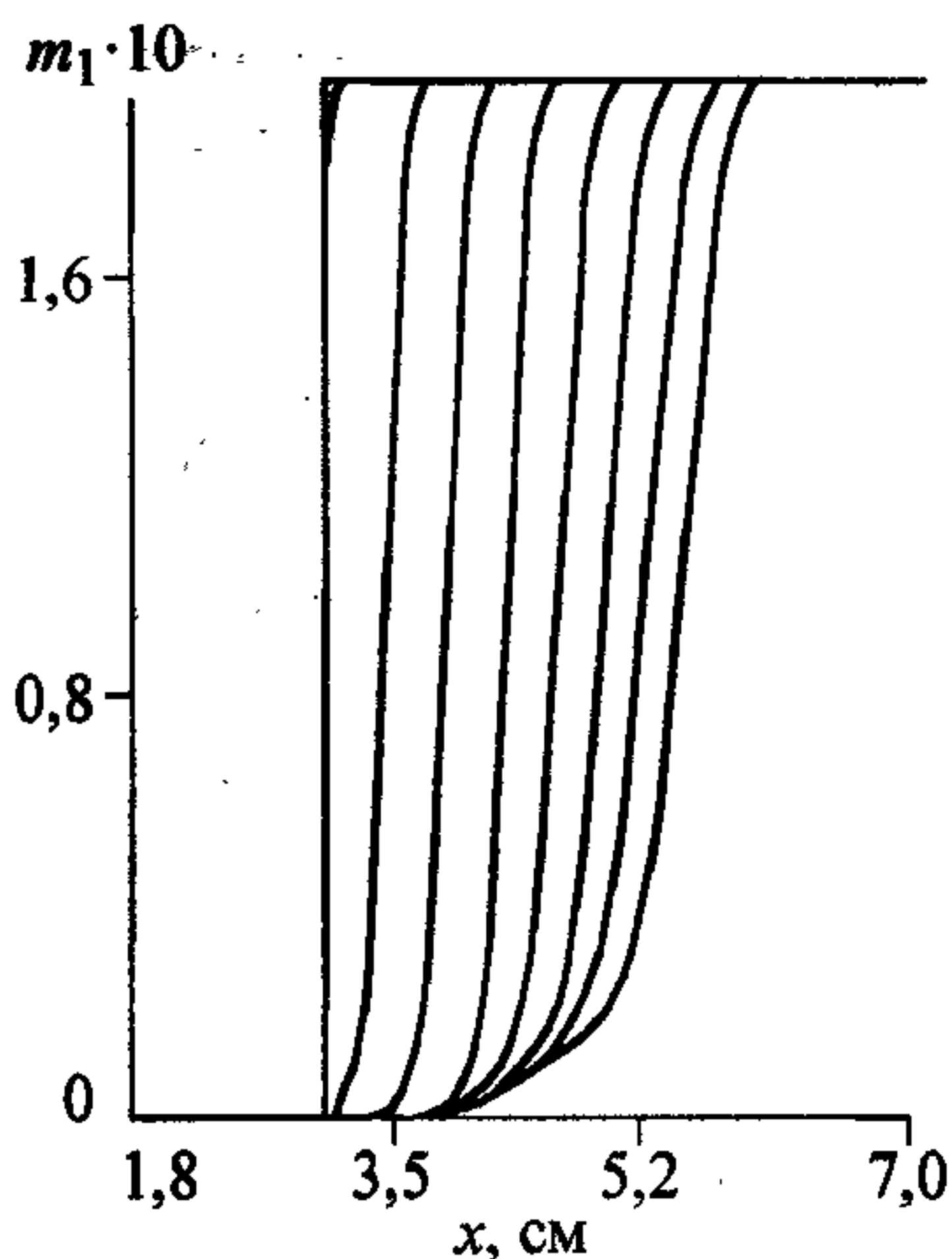


Рис. 8.10. Профили пористости с шагом  $\Delta t = 4$  мкс.

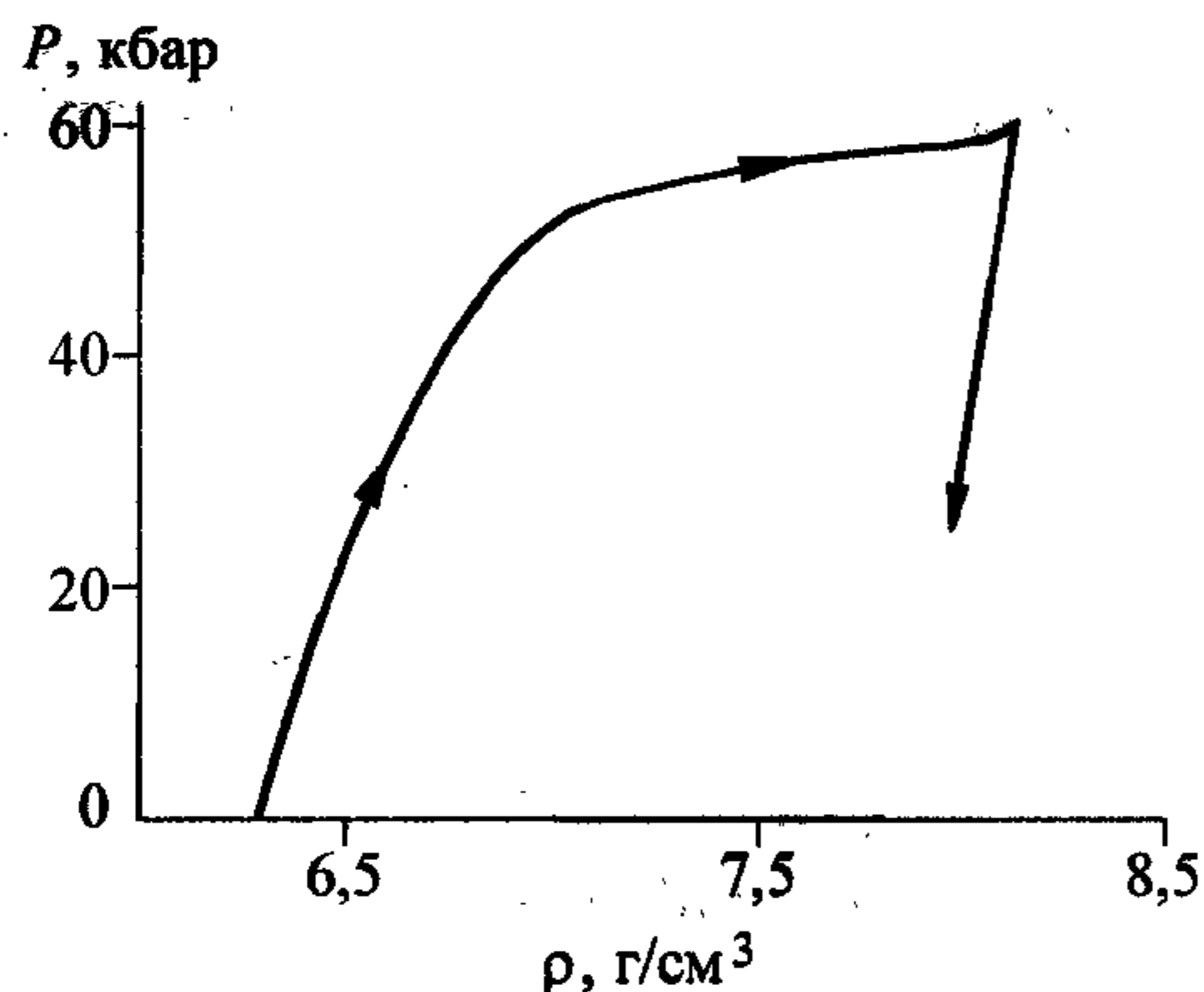


Рис. 8.11. Зависимость давления  $P$  от средней плотности  $\rho$  в пористом железе.

начальной пористости  $m_1^0 = 0,2$ . Область затекания пор локализована вблизи поверхности соударения, что связано с быстрым затуханием ударной волны, возникающим в результате того, что скорость волны разгрузки существенно больше скорости ударной волны.

На рис. 8.11 приведена кривая нагрузки и разгрузки пористого Fe, рассчитанная вблизи поверхности соударения  $l_1 = 0,5$  мм. Затекание пор приводит при  $P > P_* = 2,87$  кбар к уменьшению скорости пластической УВ  $c = \sqrt{dP/d\rho}$ . Причем чем больше давление  $P$ , тем меньше скорость распространения волны сжатия. Ясно, что это должно приводить к размазыванию фронта пластической УВ, что и наблюдается в расчетах (см. рис. 8.8, 8.9). Разгрузка из сжатого состояния происходит упруго, и скорость волны разгрузки  $c_e$  в пористом материале всегда больше скорости волны нагрузки  $c_l$ . Грубая оценка дает  $c_l^2 \approx \Delta P / \Delta \rho_l$ ,  $c_e^2 \approx \Delta P / \Delta \rho_e$ . Так как при нагрузке происходит затекание пор, то  $\Delta \rho_l \geq \Delta \rho_e$ , и поэтому  $c_l \leq c_e$ . Отсюда следует, что характеристики волн разрежения  $dx/dt = v + c_e$  будут догонять характеристики волн сжатия  $dx/dt = v + c_l$ , что и приводит к более интенсивному затуханию УВ в пористом материале.

## 8.5. Ударная волна разрежения в пористом материале

Рассмотрим более подробно структуру волн разрежения и сжатия в пористом материале. Пусть пластина из сплошного железа (1) толщиной  $h_1 = 4$  мм ударяется со скоростью  $v_p = 0,236$  мм/мкс о пластину из пористого железа толщиной  $h_2 = 17$  мм и пористостью  $m_1^0 = 10^{-2}$  (рис. 8.12). Механические свойства железа те же, что и в предыдущей задаче. На рис. 8.13 приведены кривые  $\sigma_1(x)$  на несколько моментов времени  $t_i = t_{i-1} + \Delta t$ ,  $\Delta t = 2$  мкс, сплошной вертикальной линией обозначена контактная граница. Видно, что волна сжатия распадается на три волны, а волна разрежения трансформируется к моменту  $t = 2$  мкс в УВ разрежения. Для расчета УВ разрежения вводилась искусственная вязкость. Зависимости напряжения  $-\sigma_1$  и пористости  $m_1$  от времени в точке  $l = 10$  мм приведены на рис. 8.14.

Ударная волна в пористом теле состоит из упругого предвестника, “замороженной” волны и зоны релаксации. Как видно из рис. 8.14, изменения пористости в “замороженной” ударной волне не происходит. Поры затекают в зоне релаксации, что приводит к росту давления, которое связано с изменением пористости уравнением (8.3.6).

Для объяснения УВ разрежения (УВР) найдем скорость распространения возмущений при разгрузке. Из расчетов (см. рис. 8.14) следует, что в волне разгрузки можно пренебречь изменением пористости, поэтому с учетом

$$dP \approx K_1 \frac{d\rho}{\rho}, \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial \rho} = \left( \frac{\partial S_1}{\partial \rho} - \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)$$

получим

$$c = \sqrt{\frac{K_1}{\rho} - \frac{\partial S_1}{\partial \rho}}$$

Как отмечалось ранее, напряжение  $\sigma_1(E)$  за УВ лежит значительно выше критического давления  $|P_*|$ ; поэтому в точке E  $\sigma_1(E) = -P_E$ ,  $Y = 0$  (рис. 8.15). На рисунке сплошной линией приведена за-

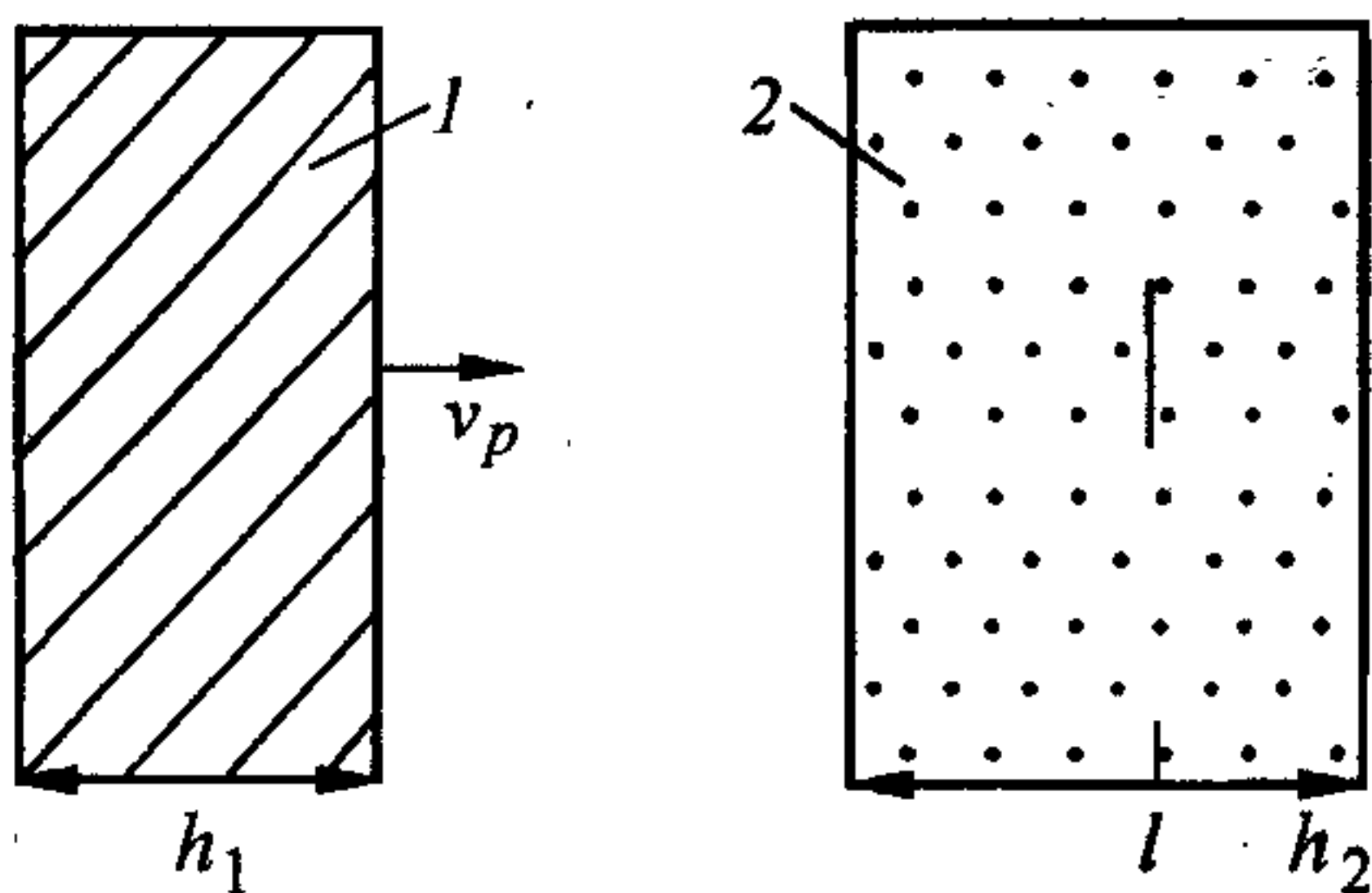


Рис. 8.12. Геометрическая схема удара в задаче о структуре ударных волн сжатия и расширения.

Поясн. см. в тексте.



висимость  $Y(P)$ , а точка  $P_E$  соответствует давлению за УВ. Разгрузка до давления  $P_z$  происходит вдоль оси абсцисс, следовательно,  $S_1 = 0$ . После достижения точки  $P_z$  скорость звука скачком увеличивается и становится равной

$$c_+ = \sqrt{\frac{K_1}{\rho} - \frac{\partial S_1}{\partial p}},$$

где  $\frac{\partial S_1}{\partial p} = \frac{\partial S_1}{\partial P} \frac{K_1}{\rho} < 0$ .

В зависимости от наклона кривой  $Y(P)$  в точке  $P_z - 0$  разгрузка может происходить упруго (штриховая линия), либо пластическим образом вдоль линии  $Y(P)$ . Для выяснения этого вопроса определим приращение упругого напряжения  $dS_1^e = 2\mu_1 de_1$  и приращение напряжения, лежащего на поверхности текучести  $dS_1^p = 2/3 dY$  при деформации  $de_1 = -dp/\rho$ . Если  $dS_1^e < dS_1^p$ , то деформация будет упругой, при обратном неравенстве — упругопластической. Используя соотношения

$$de_1 = 2/3 de_1, \quad dY = \frac{\partial Y}{\partial p} \frac{dP}{dp} dp \quad \text{и}$$

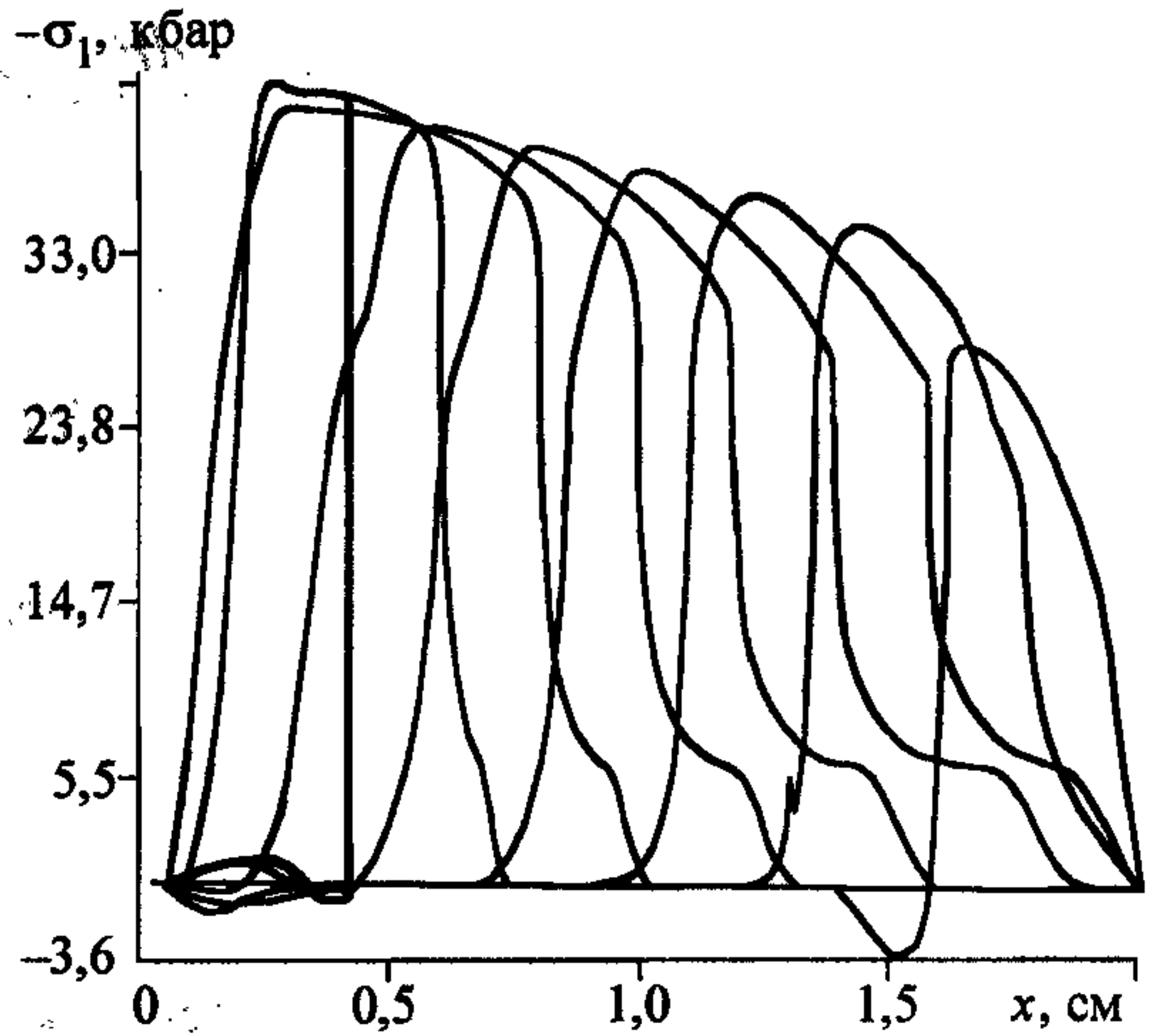


Рис. 8.13. Профили напряжения в пористом железе (тонкие линии) с шагом  $\Delta t = 2$  мкс. Толстая линия — сплошное железо.

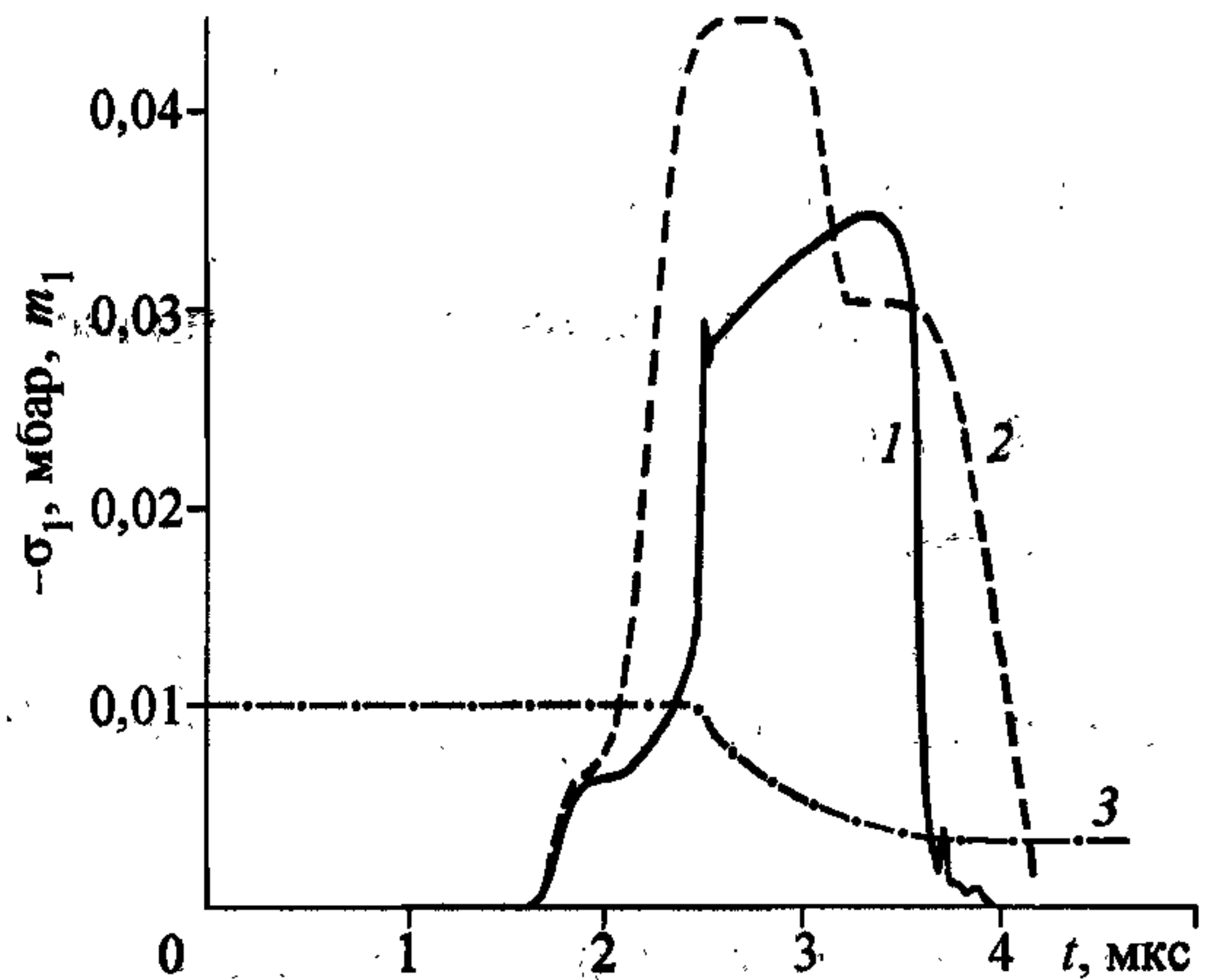


Рис. 8.14. Профили напряжения  $-\sigma_1$  (для пористого (1) и сплошного (2) железа) и пористости  $m_1$  (3) на глубине 10 мм.

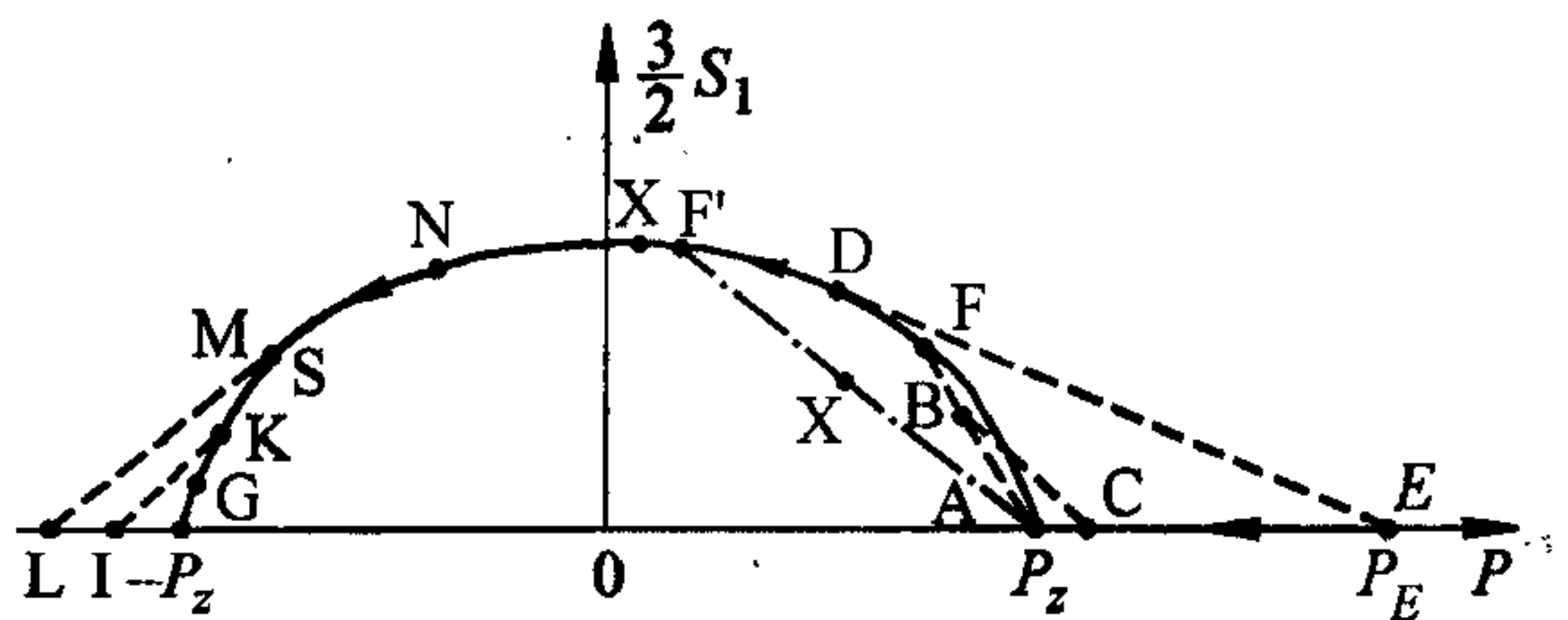


Рис. 8.15. Диаграмма разрядки в плоскости  $S_1, P$ . Поясн. см. в тексте.

$$\frac{dP}{d\rho} = K_1,$$

получим

$$dS_1^e = -\frac{4}{3}\mu_1 \frac{d\rho}{\rho}, \quad dS_1^p = -\frac{2}{3} \left| \frac{\partial Y}{\partial P} \right| \frac{K_1}{\rho} d\rho.$$

Прибавляя к  $dS_1$  величину  $-dP$  и разделив на  $d\rho$ , найдем

$$\frac{\partial \sigma_1^e}{\partial \rho} = \frac{-dP + dS_1^e}{\rho} = \frac{K_1 + 4/3\mu_1}{\rho} = c_e^2,$$

$$\frac{\partial \sigma_1^p}{\partial \rho} = \frac{-dP + dS_1^p}{\rho} = \frac{K_1}{\rho} \left( 1 + \frac{2}{3} \left| \frac{\partial Y}{\partial P} \right| \right) = c_p^2,$$

где  $c_e, c_p$  — упругая и пластическая скорости звука. В окрестности точки  $P_z - 0$  имеем  $|\partial Y / \partial P| = 3/2$ , а для железа  $\mu_1 / K_1 \cong 0,5$ , откуда  $c_e^2 = 1,6 \cdot K_1 / \rho$ ,  $c_p^2 = 2 \cdot K_1 / \rho$ , и выполняется неравенство  $dS_1^e < dS_1^p$ . Из данного неравенства следует, что разгрузка из точки  $P_z$  происходит упруго вдоль штриховой линии на рис. 8.15. Скорость волны разгрузки в точке  $P_z - 0$  равна

$$c_+ = \sqrt{\frac{K_1 + 4/3\mu_1}{\rho}}$$

и удовлетворяет неравенству  $c_+ > c_-$ , поэтому при пересечении точки  $P_z$  в волне разрежения скорость звука скачком увеличивается от  $c_-$  до  $c_+$ . Как отмечено в [5], массовая скорость  $v$  остается непрерывной функцией

$$I^- = \text{const}, \quad v = -\int c \frac{dP}{\rho} + \text{const},$$

поэтому скачок  $c$  приводит к пересечению характеристик в волне разрежения и возникновению УВР (рис. 8.16, где жирная линия — УВР, точка  $z$  — момент ее возникновения, линии 1—4 — характеристики). Скорость УВР удовлетворяет неравенству  $c_- < D < c_+$ .

На рис. 8.17 показана качественная зависимость  $\sigma_1 = S_1 - P$  от удельного объема  $V = 1/\rho$ , где скачку скорости звука  $[c]$  соответствует излом в точке А.



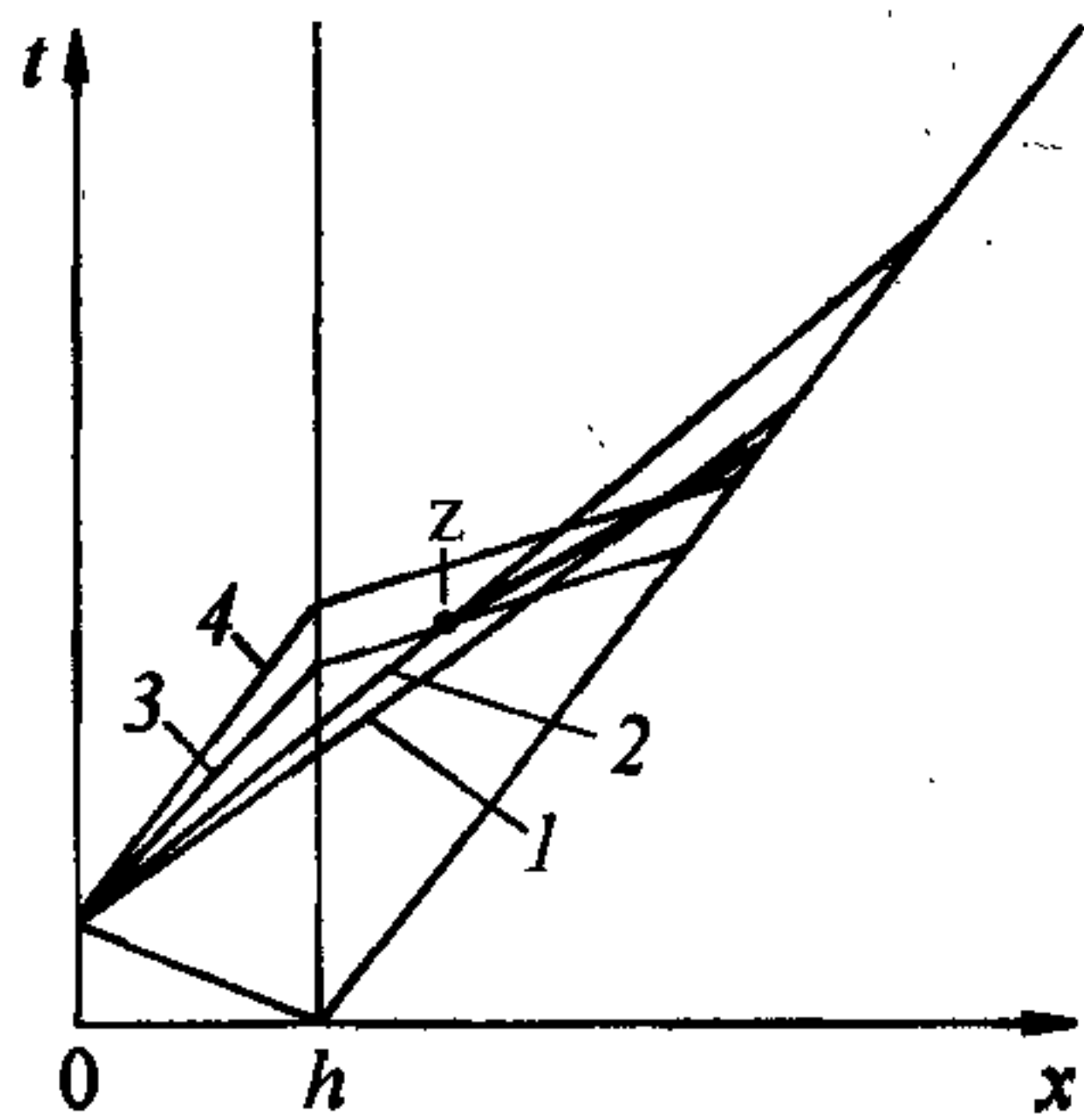


Рис. 8.16. Пространственно-временная картина распространения волн в железе.

Поясн. см. в тексте.

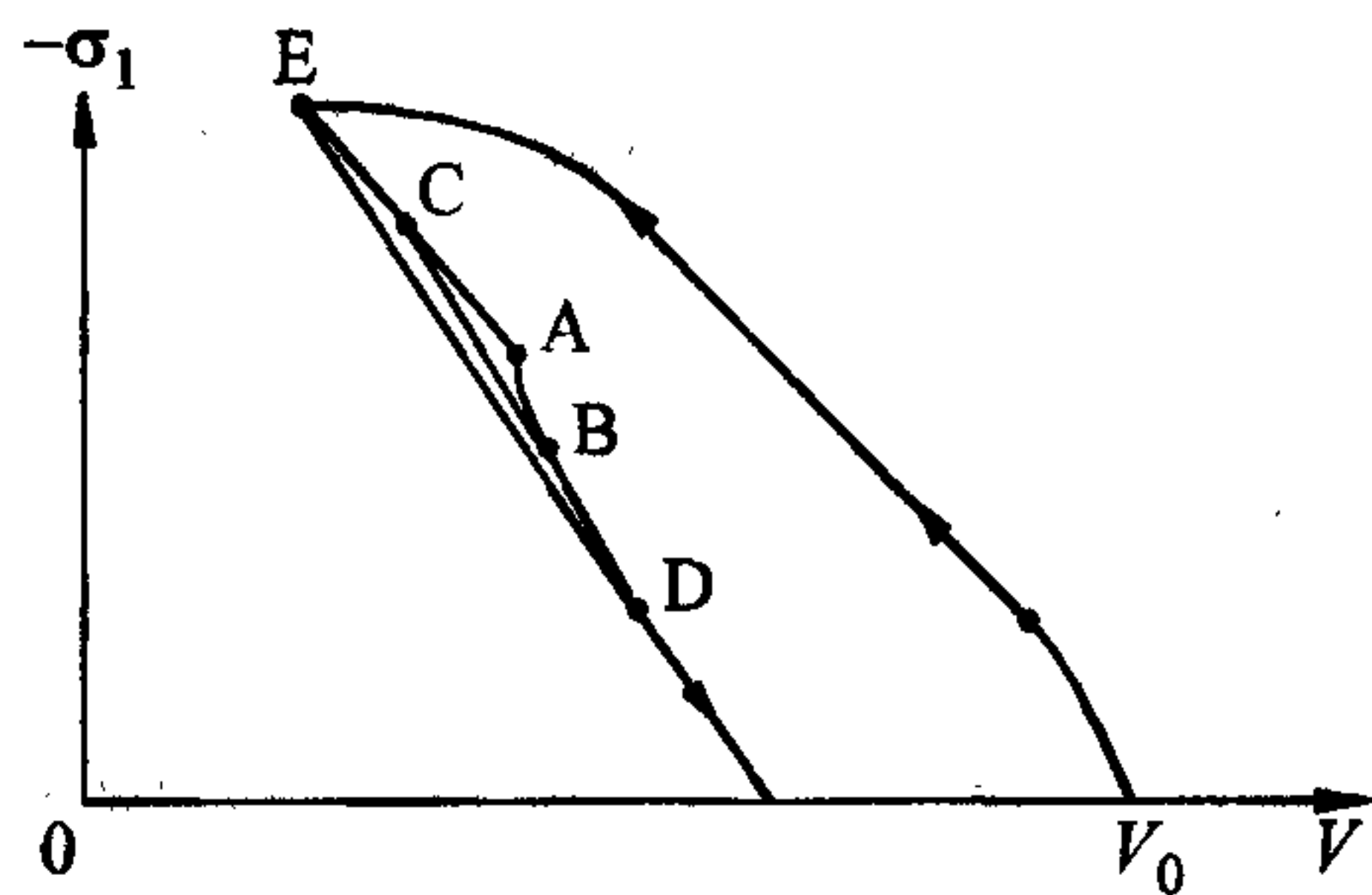


Рис. 8.17. Ударная адиабата в пористом железе. Штриховыми линиями показаны линии Рэлея.

Дальнейший рост скачка УВР происходит так же, как при фазовом переходе [5]. С одной стороны, УВР догоняет характеристики 1, с другой — характеристики 4 догоняют УВР. В результате УВР, показанная на рис. 8.17 отрезком ВС, растет до тех пор, пока точка С не достигнет точки Е, а В — точки D. В точке D касательная к кривой  $\sigma(V)$  совпадает с DE, и скорость звука  $s$  равна скорости УВР. В плоскости  $S_1, P$  (см. рис. 8.15) соответствующие УВР показаны штриховыми линиями ВС и DE.

В данном примере конечное состояние (точка В на рис. 8.15) сначала лежит в упругой области, а в точке F переходит в область пластичности и движется по кривой  $Y(P)$  до точки D. Возможны случаи, когда точка F' (см. рис. 8.15) лежит левее D (точки касания кривой  $Y(P)$  и линии Рэлея ED). Если конечное состояние в волне разрежения X лежит в области упругости на прямой AF', то в УВР напряжение сразу скачет из начального состояния Е в конечное состояние X. Если конечное состояние X лежит в пластической области на кривой  $Y(P)$ , то УВР будет распадаться на УВР, плато постоянного напряжения и волну разгрузки. Амплитуда УВР из точки А будет расти до тех пор, пока конечное состояние не достигнет точки F'. В точке F' модуль тангенса угла наклона линии Рэлея  $3/2|\Delta S_1/\Delta P|$  больше, чем  $|\partial Y/\partial P|$ , поэтому скорость УВР будет больше скорости пластической волны разгрузки  $s_p$ . В результате в УВР напряжение из точки Е будет скачком уменьшаться до точки F'. За этим скачком следует плато постоянного напряжения, к которому примыкает волна разрежения, распространяющаяся со скоростью

$$\frac{dx}{dt} = v + c_x, \quad c_x = \sqrt{\frac{K_1}{\rho} \left( 1 + \frac{2}{3} \left| \frac{\partial Y}{\partial P} \right|_{F'} \right)}.$$

Конечное состояние в волне разрежения соответствует точке X.

Обсудим возникновение УВР в точке G с давлением  $P = -P_z$  (см. рис. 8.15). Пусть начальное состояние находится в точке N. В волне разгрузки напряженное состояние перемещается по кривой  $Y(P)$  из точки N до точки G. Скорость звука

$$c_p = \sqrt{\left( 1 - \frac{2}{3} \frac{\partial Y}{\partial P} \right) \frac{K_1}{\rho}}$$

уменьшается до значения  $c_p = 0$  на отрезке KG, где  $\partial Y / \partial P = 3/2$ . Отметим, что реально  $c_p > 0$ , так как при выводе формулы для  $c_p$  не учитывался вклад тепловой составляющей  $P_T$  в полное давление  $P$ . Используя уравнения

$$c^2 = - \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \rho} \right)_s, \quad \sigma_1 = S_1 - P_x - P_T,$$

получим 
$$c^2 = \left( \frac{\partial P_x}{\partial \rho} \right)_s + \left( \frac{\partial P_T}{\partial \rho} \right)_s - \frac{\partial S_1}{\partial \rho}.$$

На кривой  $Y(P)$  
$$c^2 = \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{\partial Y}{\partial P} \right) \frac{K_1}{\rho} + \left( \frac{\partial P_T}{\partial \rho} \right)_s,$$

а на участке KG 
$$c^2 = \left( \frac{\partial P_T}{\partial \rho} \right)_s.$$

Из формул  $P_T = \Gamma \rho E_T$ ,  $E_T = c_v T$ ,  $\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_s = \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T - \frac{T}{c_v} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)^2$ ,  $V = \frac{1}{\rho}$

следует, что 
$$\left( \frac{\partial P_T}{\partial \rho} \right)_s = \Gamma \frac{P_T}{\rho}.$$

После пересечения точки  $G(P = -P_z)$  скорость звука скачком увеличивается от  $c_-^2 = \Gamma \frac{P_T}{\rho}$  до  $c_+^2 = \frac{K_1}{\rho} + \Gamma \frac{P_T}{\rho}$ , происходит пересечение характеристик и возникает УВР, которая распространяется со скоростью  $D$ , удовлетворяющей неравенствам  $c_- < D < c_+$ . Амплитуда УВР растет до тех пор, пока за УВР не



будет достигнуто конечное состояние  $L$ , а перед УВР — точка  $M$ , в которой скорость УВР равна скорости звука  $c_p$ . Если точка  $N$  лежит левее точки  $M$ , то перед УВР достигается начальное состояние и напряжение в УВР скачком изменяется от начального до конечного. С математической точки зрения УВР представляет собой разрыв первого рода, и необходимо найти соотношение на этом разрыве, для чего перепишем уравнения неразрывности, движения и энергии в дивергентном виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 - \sigma_1) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho(E + v^2/2)) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v(E + v^2/2 - \sigma_1/\rho)) = 0.$$

Переходя в систему УВР и предполагая течение стационарным, после интегрирования получим

$$[\rho u] = 0, \quad [\rho u^2 - \sigma_1] = 0, \quad [H + u^2/2] = 0,$$

$$H = E - \sigma_1/\rho, \quad [\phi] = \phi_+ - \phi_-, \quad H = H(\sigma_1, S),$$

где  $H$  — энтальпия,  $u = v - D$ ,  $D$  — скорость УВР,  $S$  — энтропия. Данные уравнения совпадают с соотношениями на ударной волне в газовой динамике, если в них произвести замену  $\sigma_1 \rightarrow -P$ . Поэтому для определения скачка энтропии  $[S]$  в слабой УВР можно воспользоваться соответствующей формулой из газовой динамики, и после замены  $P$  на  $\sigma = -\sigma_1$  будем иметь

$$S_+ - S_- = \frac{1}{12T_1} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \right) (\sigma_+ - \sigma_-)^3,$$

где  $V = 1/\rho$ . Зависимость  $\sigma(V, S)$  приведена на рис. 8.17, откуда следует, что обратная функция  $V = 1/\rho(\sigma, S)$  является двухзначной функцией. При фиксированном  $\sigma$  одно значение  $V$  лежит на ветви нагрузки, а другое — на ветви разгрузки. В волне разгрузки все состояния лежат на ветви разгрузки, поэтому в нашем случае  $V = 1/\rho(\sigma, S)$  является однозначной функцией. Из рис. 8.17 следует, что в точке  $A(\sigma = P_z)$  производная  $\partial^2 V / \partial \sigma^2 < 0$ , поэтому при  $\sigma_+ < \sigma_-$  будет выполняться неравенство  $S_+ > S_-$ , т.е. энтропия в УВР возрастает. Знак производной  $\partial^2 V / \partial \sigma^2$  следует из соотношения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} = -\frac{1}{(\partial \sigma / \partial V)^3} \left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial V^2} \right)$$

и неравенств в точке  $\frac{\partial \sigma}{\partial V} < 0$ ,  $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial V^2} < 0$ .

УВР при фазовых переходах были предсказаны Зельдовичем и наблюдались экспериментально А. Г. Ивановым с сотрудниками в железе при давлениях  $\sim 150$  кбар [5]. Согласно Зельдовичу, образование УВР связано с фазовым переходом, где  $\partial^2 V / \partial \sigma^2 < 0$ . В данном случае  $P \approx 35$  кбар, что значительно ниже точки фазового перехода. В пористом теле существование точки  $\partial^2 V / \partial \sigma^2 < 0$  обусловлено его прочностными свойствами.

Под действием давления  $P$  в окрестности поры происходит концентрация микронапряжений  $\sigma'_{ij}$  с отличным от нуля девиатором  $S'_{ij}$ . Если давление  $|P| > |P_0|$ , то возникает пластическая зона, которая растет с увеличением давления, и при  $|P| > |P_z|$  она занимает весь объем. В этом случае предел текучести  $Y$  и девиатор средних напряжений  $S_{ij}$  равны нулю, и механическое поведение пористого материала аналогично поведению жидкости ( $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij}$ ), скорость в которой  $c = \sqrt{K/\rho}$ . При уменьшении давления ниже  $|P_z|$  в пористом теле возникают упругие области, так что девиатор средних напряжений  $S_{ij}$  становится отличным от нуля, а  $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + S_{ij}$ . В результате скорость звука скачком возрастает до  $c = \sqrt{(K + 4/3\mu)/\rho}$  и возникает УВР.

Образование УВР в пористом теле происходит только в случае неполного затекания пор в УВ и связано с зависимостью предела текучести  $Y$  пористого тела от давления  $P$ . Если в УВ происходит полное затекание пор ( $m_1 = 0$ ), то УВР не возникает, так как  $Y = Y_s = \text{const}$ . Расчеты, проведенные при скорости удара  $v_p = 0,642$  мм/мкс,  $m_1^0 = 10^{-2}$ , показали, что разгрузка в этом случае происходит так же, как в сплошном упругопластическом материале.

### 8.6. Структура волны сжатия в пористом упругопластическом материале

Рассмотрим структуру ударной волны сжатия в пористом железе [46]. В отличие от разд. 3 будем предполагать начальную пористость малой. В этом



случае возможна четырехволновая структура ударной волны в пористом теле. Ограничимся малыми нагрузками, при которых тепловым давлением можно пренебречь.

Используя уравнения (8.3.1)—(8.3.6), найдем адиабату  $\sigma = \sigma(V)$ , описывающую сжатие пористого материала, где  $\sigma = -\sigma_1$ ,

$V \equiv 1/\rho$ . На рис. 8.18 показана качественная зависимость  $\sigma(V)$  при одноосном деформировании. Участок SK описывает упругую нагрузку  $\sigma = P - S_1$ ,  $S_1 = -4/3\mu \times$

$\times (\rho/\rho_0 - 1)$ ,  $m_2 = m_2^0$ . Скорость распространения малых возмущений определяется по формуле

$$c = \sqrt{\frac{\partial \sigma}{\partial \rho}} = \sqrt{-V^2 \frac{\partial \sigma}{\partial V}}.$$

В упругой области  $c_e = \sqrt{(K + 4/3\mu)/\rho_0}$ , где  $\rho_0 = \rho_s^0 m_2^0$  — начальная плотность. Участок АК соответствует пластической деформации и описывается адиабатой  $\sigma = P + \frac{2}{3}Y(P)$ ,  $m_2 = m_2^0$ . Дифференцируя это выражение по  $\rho$ , найдем скорость пластической волны

$$c_p = \sqrt{\left(1 + \frac{2}{3} \frac{\partial Y}{\partial P}\right) \frac{\partial P}{\partial \rho}},$$

где  $\partial P/\partial \rho = K/\rho_0$  при  $P < P_*$  и  $\partial P/\partial \rho < K/\rho_0$  при  $P_* < P < P_2$ .

Если давление  $P > P_*$ , то происходит затекание пор, и имеется целый спектр скоростей звука от замороженной  $c_f = \sqrt{K/\rho}$  до равновесной  $c_r$ . Равновесная скорость звука  $c_r$  определяется касательной к равновесной адиабате, которая определяется из условия  $\dot{m}_2 = 0$ . Используя соотношения (8.3.1), (8.3.6), получим систему уравнений, из которой находится равновесная адиабата  $P(\rho)$ :

$$P = \frac{2}{3} Y_s \ln(1/\bar{m}_1), \quad \frac{2}{3} \frac{Y_s}{K} \ln(1/\bar{m}_1) + \frac{\rho m_2^0}{\rho_0(1-m_1)} - 1 = 0.$$

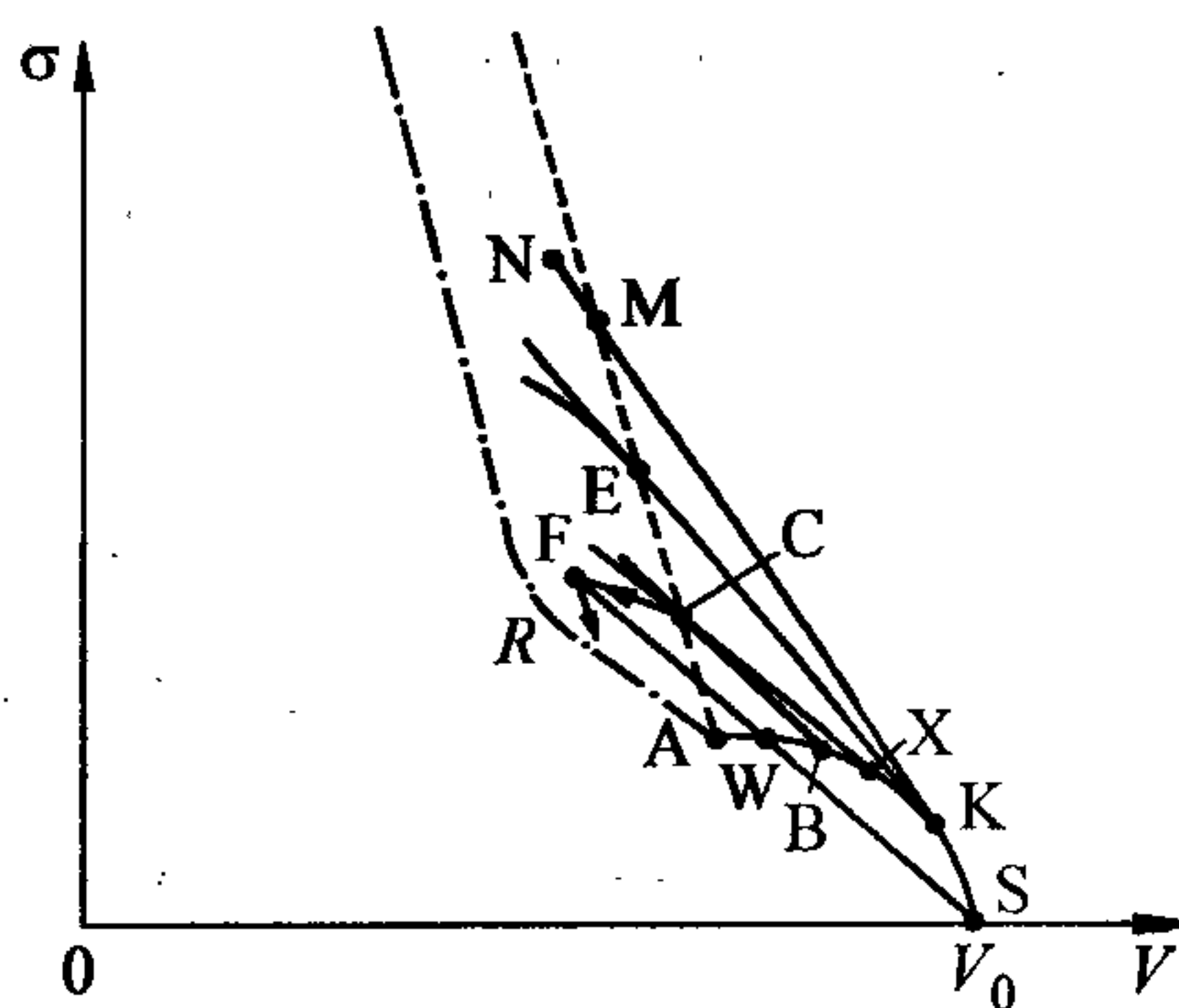


Рис. 8.18. Ударная адиабата пористого материала.

Поясн. см. в тексте.

Дифференцируя оба уравнения по  $\rho$  и исключая  $\partial m_1 / \partial \rho$ , получим выражение для равновесной скорости звука:

$$c_r = \sqrt{\frac{K}{m_2 \rho_s^0} \left( 1 - \frac{1}{\left( 1 + \frac{2Y_s}{3K_s} \frac{m_2^2 V}{m_1 m_2^0 V_0} \right)} \right)},$$

где  $m_1 = m_1(V)$ ,  $V_0 = 1/\rho_0$ . В точке А имеем  $P = P_z \approx P_*$ , поэтому адиабата близка к равновесной адиабате и  $c_A \approx c_r$ . Замороженная скорость звука  $c_f$  определяется касательной к замороженной адиабате  $P - P_A = K(\rho - \rho_A)/\rho_0$ ,  $m_2 = m_2^0$ , показанной на рис. 8.18 штриховой линией. Рассмотрим волну сжатия, в которой  $P > P_*$  и происходит затекание пор. Поскольку плотность является монотонной функцией времени  $\dot{\rho} > 0$ , можно исключить  $t$  из уравнений  $m_2 = m_2(t)$ ,  $\rho = \rho(t)$ , в результате получим  $m_2 = m_2(\rho)$ . Подставляя эту зависимость в  $P = K((\rho m_2^0)/(\rho_0 m_2) - 1)$ , получим уравнение линии CF, наклон к которой определяет скорость распространения релаксационной волны CF:

$$c = \sqrt{\frac{K}{m_2 \rho_s^0} \left( 1 - \frac{\rho_s \dot{m}_2}{\dot{\rho}} \right)}, \quad (8.6.1)$$

где  $\dot{\rho} = -\rho dv/dx$ ,  $\rho_s = \rho/m_2$ . С увеличением давления  $\dot{\rho}$  растет быстрее, чем  $\dot{m}_2$ , поэтому справедливы неравенства

$$c_r < c < c_f, \quad dc/d\sigma > 0. \quad (8.6.2)$$

Отметим, что в пределе

$$c \rightarrow c_r, \quad \dot{m}_2 \rightarrow 0, \quad \dot{\rho} \rightarrow 0, \quad P \rightarrow P_*,$$

$$c \rightarrow c_f, \quad \dot{m}_2 / \dot{\rho} \rightarrow 0, \quad P \rightarrow \infty.$$

Предположим, что по пористому материалу распространяется УВ, конечное состояние за которой находится в точке F (см. рис. 8.18). (Точка F либо находится на равновесной адиабате, либо из этой точки происходит разгрузка в волне разрежения вдоль линии, показанной на рис. 8.18 стрелкой.) Начальное состояние S и конечное F лежат на линии Рэлея  $\sigma_F = j^2(V_0 - V_F)$ , которая пересекает адиабату в точке W. Согласно [5], это приводит к расщеплению УВ на систему следующих друг за другом волн. Первым распространяется упругий



предвестник со скоростью  $c_e$  и напряжением  $\sigma_k$ . За ним следует пластическая волна, скорость которой  $c_p$  уменьшается с ростом  $\sigma$ , что приводит со временем к ее размазыванию. В точке А скорость звука скачком увеличивается от  $c_p$  до  $c_r$  и в результате пересечения характеристик возникает новая УВ. В свою очередь эта волна расщепляется на замороженную УВ и релаксационную УВ (см. рис. 8.18, 8.19). Скорость УВ относительно вещества перед фронтом  $D_p = V_B \sqrt{(\sigma_C - \sigma_B) / (V_B - V_C)}$  больше скорости звука  $c_p$  в точке В, поэтому точка В будет смещаться вниз по адиабате до точки Х, где скорость УВ равна скорости звука  $D_p = c_p$ .

В точке С скорость звука  $c < D_p$  (см. рис. 8.18), поэтому замороженная волна ВС распространяется быстрее релаксационной волны CF. Как отмечалось выше, в пористом материале при  $P > P_*$  имеется целый спектр скоростей звука от  $c_r$  до  $c_f$ .

Из рис. 8.18 следует, что  $c_f > D_p$ , поэтому выполняется условие эволюционности замороженной УВ по замороженной скорости звука. Между релаксационной и замороженной УВ не может быть области постоянного течения. Из соотношений (8.6.1), (8.6.2) и  $m_2 > 0$  следует, что при  $\sigma > \sigma_c$  справедливы неравенства

$$\frac{\partial p}{\partial t} > 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} < 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} < 0,$$

поэтому замороженная УВ будет убежать от релаксационной УВ, а между ними установится отрицательный градиент  $\sigma$  и  $v$ . Амплитуда замороженной УВ уменьшается со временем. На рис. 8.20 приве-

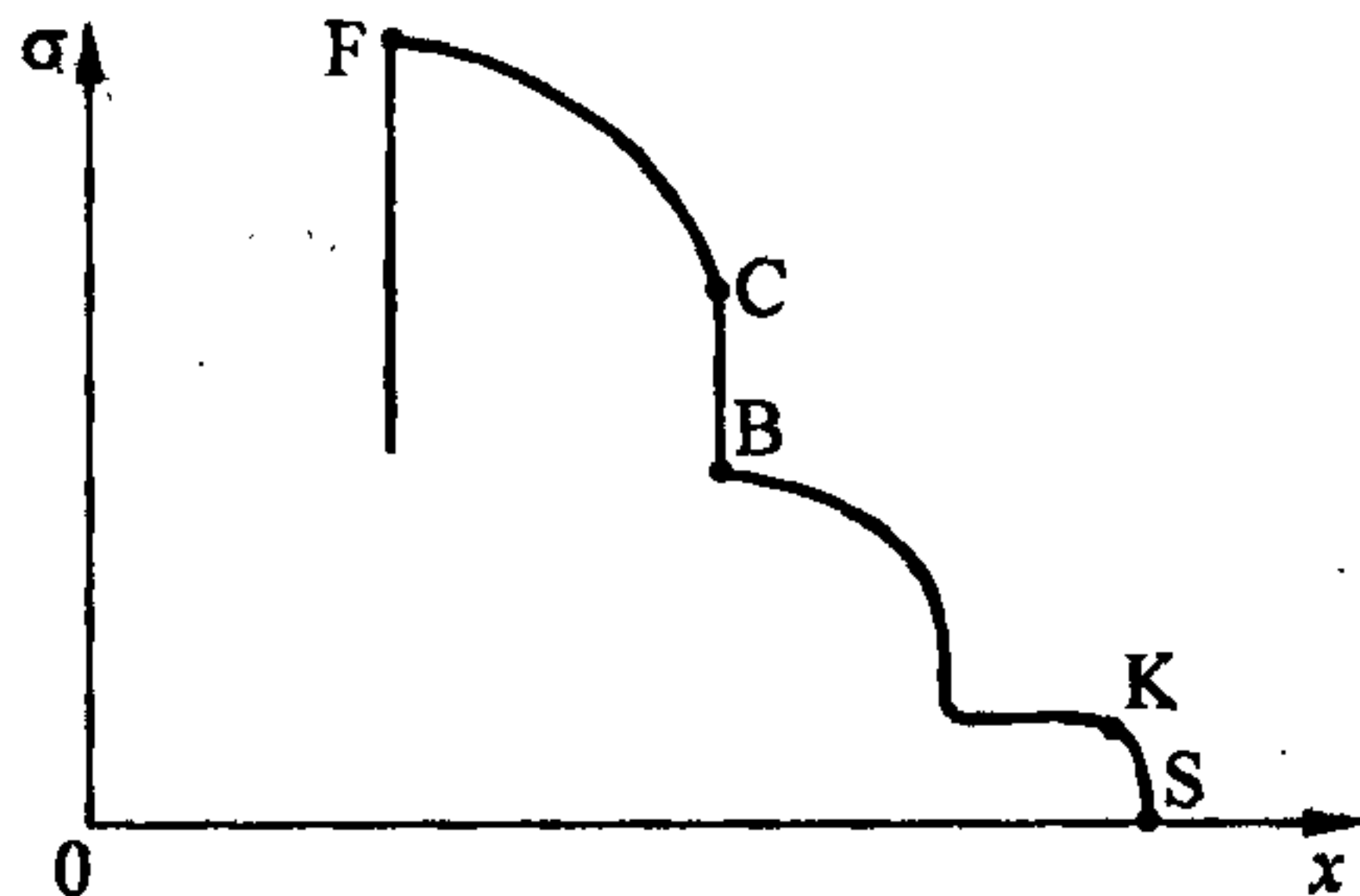


Рис. 8.19. Качественная картина четырехволновой структуры ударной волны.

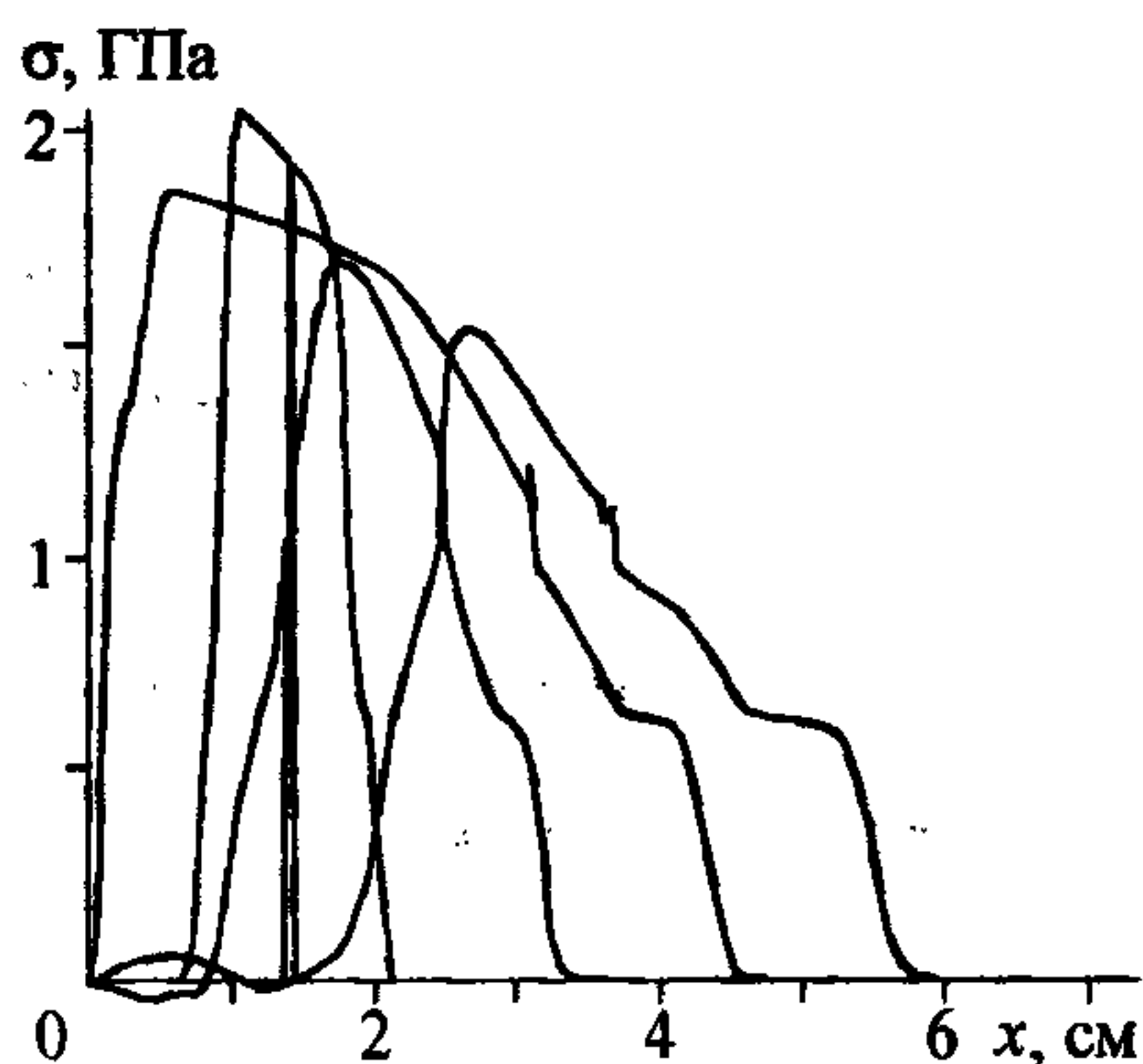


Рис. 8.20. Рассчитанная четырехволновая структура ударной волны в пористой стали через  $\Delta t = 2$  мкс.

Поясн. см. в тексте.

дены профили волны  $\sigma(x)$  на несколько моментов времени от 1 до 7 мкс с шагом  $\Delta t = 2$  мкс, полученные в результате численного решения задачи о соударении пластин. Сплошная железная пластина толщиной  $h_1 = 1,4$  см ударялась по пористой пластине толщиной  $h_2 = 5,8$  см и пористостью  $m_1^0 = 0,02$  со скоростью  $v_p = 0,12$  мм/мкс. Сплошная вертикальная линия соответствует контактной границе между пористым и сплошным материалом.

Видно, что УВ имеет четырехволновую структуру, и амплитуда замороженной УВ уменьшается со временем. Пока волна разрежения не вошла в пористый материал, максимальное напряжение в релаксационной волне оставалось постоянным, а ширина увеличивалась. В пористом материале волна разрежения переходит в ударную волну разрежения, которая уменьшает амплитуду и ширину релаксационной УВ.

Увеличение скорости удара  $v_p$  и, соответственно, скорости УВ приводит к увеличению угла наклона линии Рэлея, поэтому в некоторой точке Е скорость замороженной УВ будет равна скорости релаксационной волны.

В результате амплитуда замороженной УВ определяется из условия типа Чепмена—Жуге в точках Х и Е (см. рис. 8.18). При большей скорости УВ конечное состояние находится в точке N, при этом амплитуда замороженной УВ определяется из пересечения линии Рэлея и замороженной адиабаты (точка М на рис. 8.18).

Увеличение скорости УВ приводит к смещению точки Х к точке К, так что при некоторой скорости УВ они сольются в одну, и пластическая волна исчезнет.

Интересные особенности возникают при отражении УВ от твердой стенки. Если амплитуда ударной волны достаточно велика и за ней происходит полное затекание пор, то коэффициент отражения  $k = \sigma_k / \sigma_i$  больше двух, где  $\sigma_i$  — напряжение за падающей УВ,  $\sigma_k$  — напряжение за отраженной УВ. Амплитуды падающей и отраженной УВ находятся по формулам  $\sigma_i = z_i u_i$ ,  $\sigma_k = z_k u_k$ , где  $z_i = \rho_i c_i$ ,  $z_k = \rho_k c_k$ , индекс  $i$  относится к падающей УВ, а  $k$  — к отраженной УВ. Из условия жесткой стенки получим  $u_i = u_k = v_p$ , поэтому для коэффициента отражения имеем  $k = 1 + z_k / z_i$ . За падающей УВ происходит полное затекание пор, и отраженная волна распространяется по сплошному материалу, акустический импеданс которого  $z_k = z_s = \rho_s c_s$ . В силу неравенств  $c_s > c_f > c_i$ ,



$\rho_s > \rho_l$  найдем, что коэффициент отражения в данном случае удовлетворяет неравенству  $k > 2$ . Уменьшение амплитуды падающей УВ приводит к тому, что за ней не происходит полного затекания пор, в результате отраженная УВ распространяется по пористому материалу, поэтому разница между величинами  $z_i$  и  $z_k$  уменьшается и, соответственно, уменьшается коэффициент отражения  $k$ . Наконец, возможен случай, когда за падающей УВ поры не затекают, а все затекание пор происходит за отраженной УВ, тогда  $z_k \ll z_i$  и отраженная УВ вообще не возникает,  $k \approx 1$ . При этом энергия, приносимая падающей УВ, полностью переходит в тепловую за счет вязкого затекания пор. Данная ситуация аналогична абсолютно неупругому удару, когда вся кинетическая энергия соударяемых тел переходит в тепло. На рис. 8.21, 8.22 показаны зависимости  $\sigma(x)$ ,  $m_1(x)$  через  $\Delta t = 1$  мкс при начальной пористости  $m_1^0 = 0,1$  и координате жесткой стенки  $x = 1,1$  см. Падающая УВ создавалась поршнем, который двигался в пористое железо с постоянной скоростью  $v_p = 0,016$  мм/мкс. Отраженная УВ представляет собой релаксационную волну, амплитуда которой стремится к нулю, а ширина — к бесконечности. Ширина релаксационной УВ  $\Delta x$  определяется характерным временем затекания пор  $\tau \approx \eta / (P - P_*)$ , и при  $P \approx P_*$  имеем  $\Delta x \approx c_p \tau \rightarrow \infty$ .

Как видно из рис. 8.22, затекание пор начинается в окрестности жесткой стенки за отраженной УВ. По мере распространения отраженной УВ область

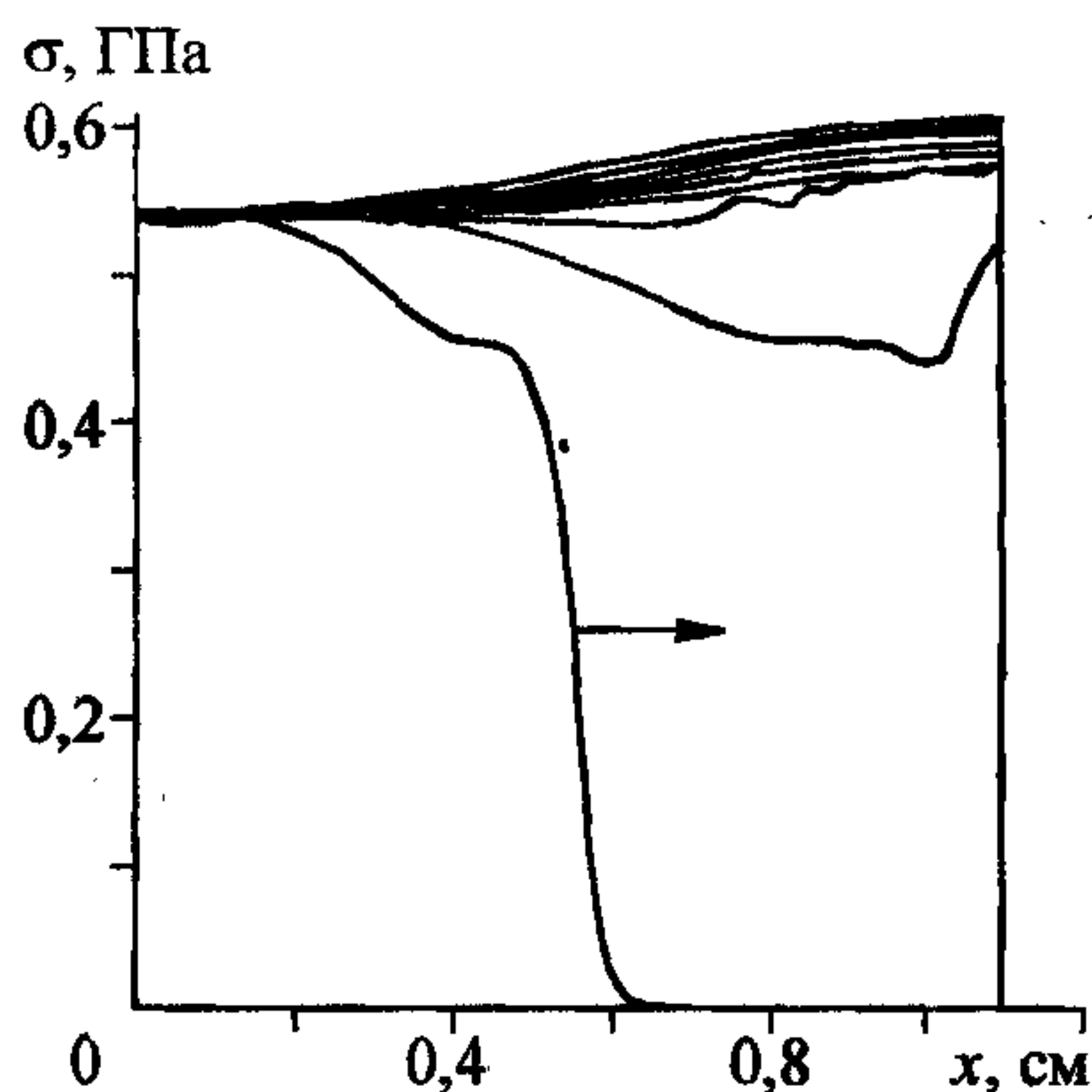


Рис. 8.21. Профили напряжений  $\sigma_1$  в падающей и отраженной УВ от жесткой стенки через 1 мкс.

Поясн. см. в тексте.

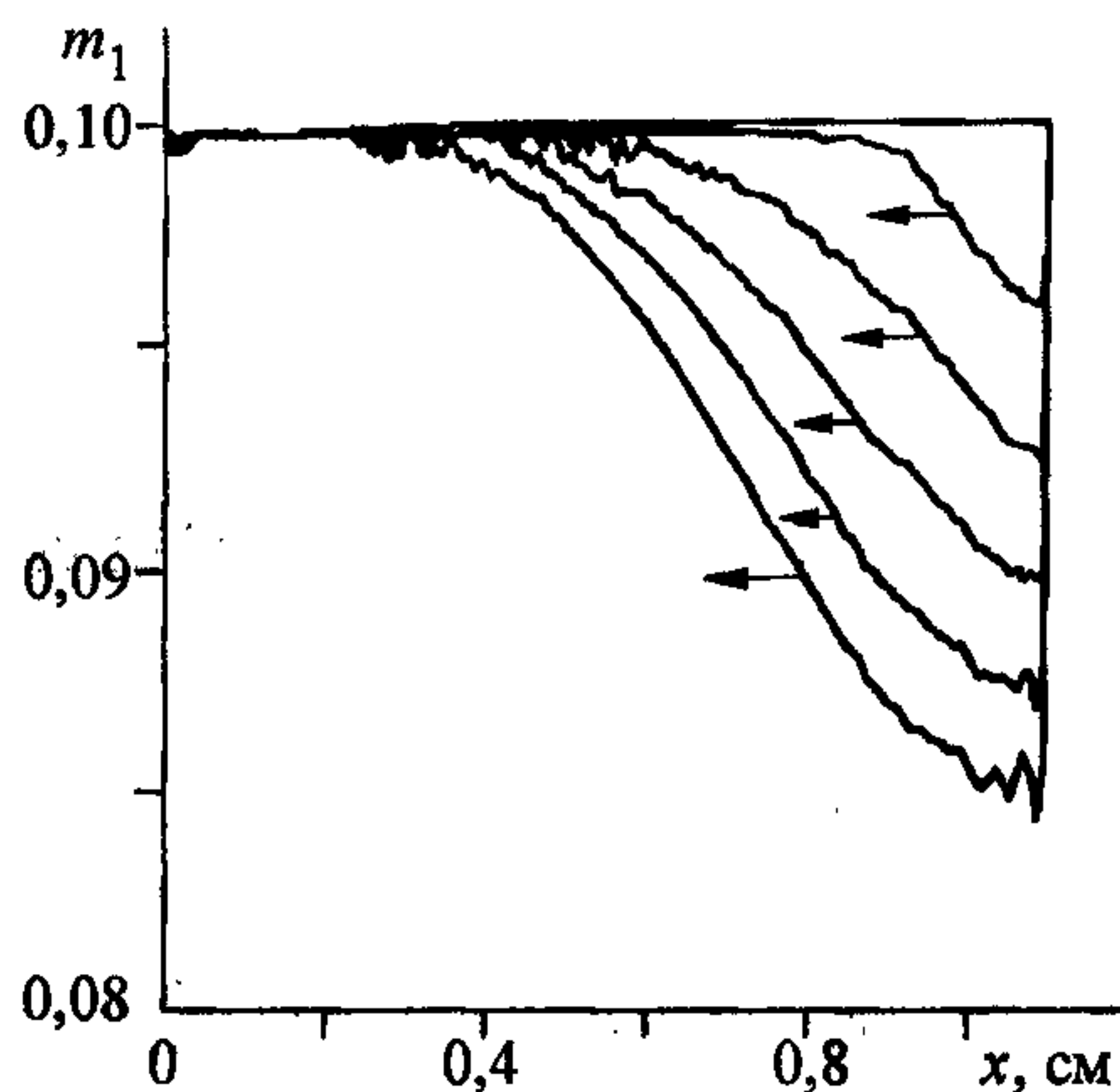


Рис. 8.22. Профили пористости в отраженных УВ от жесткой стенки через 1 мкс.

Поясн. см. в тексте.

затекания пор расширяется, а пористость уменьшается. Дальнейшее уменьшение амплитуды падающей УВ приведет к тому, что появится отраженная упругопластическая волна с амплитудой  $P_* - \sigma_i$ , за которой распространяется релаксационная волна с малой амплитудой и большой шириной. Амплитуда упругопластической волны растет с уменьшением  $v_p$ , и при некотором значении  $v_p$  поры перестанут затекать и за УВ, отраженной от жесткой стенки. В этом случае  $z_k \approx z_i \approx z_s$ , и коэффициент отражения увеличивается до значения  $k \approx 2$ .

### 8.7. Взрывное компактирование порошков, природа возникновения “холодного” слоя

При компактировании порошковых материалов в условиях двумерного взрывного нагружения возможно возникновение зон структурных неоднородностей, расположенных вблизи границы раздела порошка и деформируемой преграды. В частности, в порошковых компактах плоской или цилиндрической формы, содержащих внутри монолитный стержень (пластина в плоском случае), наблюдались низкотемпературные “холодные” зоны, где процесс компактирования не сопровождался существенным повышением температуры [47]. Под “холодным” слоем понимается слой, в котором частицы не “приварились” друг к другу и испытали существенно меньшую локальную деформацию, чем частицы во внешнем слое. Природа образования таких зон остается до конца не выясненной. Согласно [48], образование такого слоя происходит при выполнении неравенства

$$D < D_*,$$

где  $D$  — скорость распространения детонационной волны,  $D_* \approx c_0$  — скорость распространения УВ в центральном теле, близкая при данных нагрузках к объемной скорости звука в центральном теле  $c_0$ . Возникающая при этом ударно-волновая картина качественно была проанализирована в работе [49] и сводится к следующему. Перед фронтом ударной волны АОС на поверхности центрального тела возникает бугорок ВС, который создает слабую ударную волну ОВ (рис. 8.23). Во внутреннем слое GLKF порошок сжимается в ударных волнах ОВ, ОС и ЕС. Предполагается, что сжатие порошка до плотной упаковки про-



исходит в слабой ударной волне ОВ, поэтому необратимые потери тепловой энергии, связанные с пластическим затеканием пор (формоизменением частиц), малы и частицы не “свариваются”. В ударной волне ОС сжимается уже сплошной материал, так что тепловая энергия меняется слабо, а все изменение внутренней энергии происходит за счет увеличения энергии холодного сжатия. Во внешнем слое НГFI, наоборот, при пластическом затекании пор в сильной УВ, идущей от взрывчатого вещества, выделяется значительная тепловая энергия, что приводит к “свариванию” частиц друг с другом.

Приведенный в [49] анализ носит качественный характер и нуждается в строгом обосновании.

Необходимо отметить, что в проведенных ранее [47] двумерных численных расчетах не было зарегистрировано образование бугорка на поверхности центрального тела перед ударной волной в порошке в случае  $D < c_0$ . Поскольку в этой работе не приведено уравнение состояния порошка, использованное в расчетах, то сложно судить о результатах, полученных авторами [47]. Заметим, что в динамических экспериментах [50] отмечено лишь косвенное влияние бугорка на изменение плотности, а сам бугорок получен лишь в одной точке, соответствующей условиям  $D \approx c_0$ . Все это делает актуальным прямое численное моделирование данной задачи с целью выявления бугорка на центральном теле и его влияния на компактирование материала [51].

Сначала заметим, что в экспериментах перед компактированием порошок спрессовывают до состояния плотной упаковки. Поэтому при взрывных нагрузках он ведет себя как пористое тело с начальной пористостью  $m_1^0 = 0,4$ . Отсюда следует, что при математическом описании процесса компактирования порошка можно воспользоваться системой уравнений (8.3.1)—(8.3.6), приведенной выше в разд. 8.3. Сделаем только одно уточнение. Как отмечалось выше, первое уравнение в (8.3.6) применимо только при малых числах Рейнольдса  $Re \ll 1$  и является частным случаем уравнения, описывающего изменение

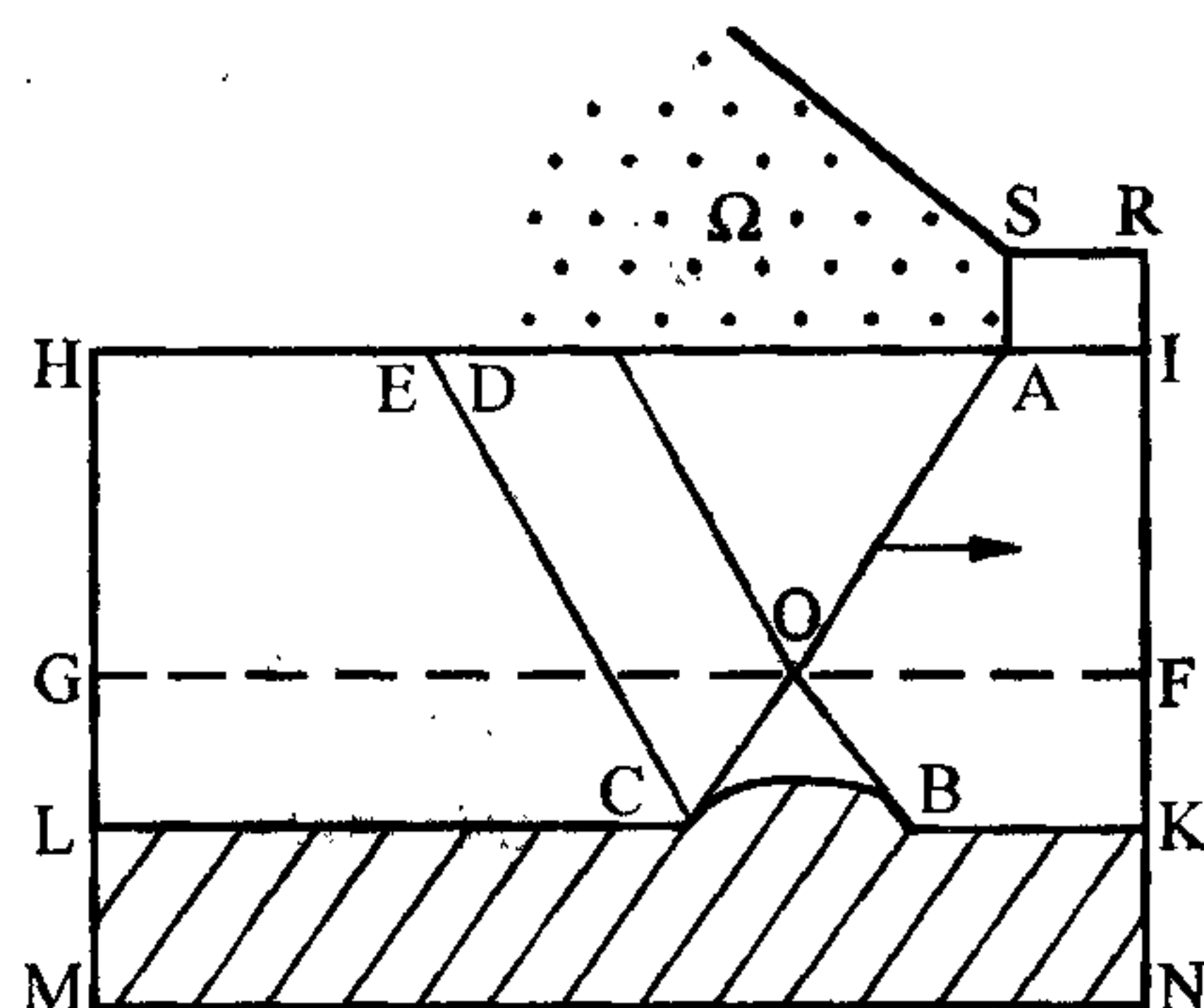


Рис. 8.23. Ударно-волновая картина при взрывном компактировании порошка в схеме с центральным телом.

NKLM — центральное тело; IHLK — порошок; RSAI — непрореагировавшее взрывчатое вещество;  $\Omega$  — продукты взрыва.

пористости при произвольных  $Re$  [13, 15]:

$$P = \frac{\rho_s a^2}{3(\alpha_0 - 1)^{2/3}} \left\{ \ddot{\alpha} [\alpha^{-1/3} - (\alpha - 1)^{-1/3}] + \frac{\dot{\alpha}^2}{6} [(\alpha - 1)^{-4/3} - \alpha^{-4/3}] \right\} - \frac{4\eta\dot{\alpha}}{3\alpha(\alpha - 1)} + \frac{2}{3} Y_s \ln \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \quad (8.7.1)$$

где  $\alpha = 1/m_2$ ,  $\alpha_0 = \alpha(t = 0)$ . Ниже вместо уравнения (8.3.6) будем использовать уравнение (8.7.1).

Следуя [15], удельную тепловую энергию  $E_T$  запишем в виде:

$$E_T = E_1 + E_2 + E_3,$$

$$E_1 = \frac{2Y_s}{3\rho_s} \left\{ \alpha_0 \ln \frac{\alpha_0}{\alpha} - (\alpha_0 - 1) \ln \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha - 1} + (\alpha_0 - \alpha) \ln \frac{\alpha}{\alpha - 1} \right\},$$

$$E_2 = \frac{4\eta}{3\rho_s} \int \frac{\dot{\alpha}^2 dt}{\alpha(\alpha - 1)}, \quad E_3 = \frac{a_0^2 \dot{\alpha}^2}{6(\alpha_0 - 1)^{2/3}} \left[ \frac{1}{(\alpha - 1)^{1/3}} - \frac{1}{\alpha^{1/3}} \right],$$

где  $E_1$  и  $E_2$  — средние величины диссипированной энергии за счет пластичности и вязкости;  $E_3$  — средняя кинетическая энергия движения, возникающего при схлопывании пор, которая также переходит в тепловую энергию,  $\alpha_0 = \alpha(t = 0)$ .

Центральное тело представляет собой упругопластический материал, который описывается уравнениями (8.7.1) с  $m_1 = 0$ . В качестве замыкающих соотношений в упругой области используется закон Гука, а в пластической — модель Прандтля—Рейсса (см. главу 3).

Здесь моделирование действия продуктов взрыва на порошок осуществлялось приложением внешнего давления на верхней границе порошка. Величина давления находилась из аналитического решения для движения продуктов взрыва за фронтом одномерной, плоской детонационной волны с изэнтропой в виде  $P = Ar^\gamma$ . В этом случае все параметры за фронтом волны зависят только от координаты  $x$  и времени  $t$ . Зависимость скорости звука  $c = c(x, t)$  имеет следующий вид:

$$c = x/2t + D/4.$$

Соответственно давление, приложенное к верхней границе порошка при  $\gamma = 3$ ,



находилось по формуле  $P = P_H (c/c_H)^3$ . Индекс  $H$  соответствует значениям параметров в точке Чепмена—Жуге (см. главу 6). Для решения использовалась конечно-разностная схема Уилкинса.

Расчет контактных границ осуществляется с помощью симметричного алгоритма, описанного в главе 3, приложении А.

Расчеты проводились для плоского случая в конфигурации, показанной на рис. 8.23. Центральное тело представляет собой алюминиевую пластину, а порошок рассматривается как пористая медь с начальной пористостью  $m_1^0 = 0,38$ . Скорость детонации изменялась в пределах 0,2—0,8 см/мкс. В расчетах использовались следующие значения параметров, для алюминия:  $\rho_s = 2,785$  г/см<sup>3</sup>,  $Y_s = 0,41$  ГПа,  $K_s = 74,4$  ГПа,  $\mu_s = 24,8$  ГПа; для меди:  $\rho_s = 8,9$  г/см<sup>3</sup>,  $Y_s = 0,2$  ГПа,  $K_s = 139$  ГПа,  $\mu_s = 46$  ГПа.

На рисунках 8.24 и 8.25 приведены результаты расчетов при скорости детонации  $D = 0,36$  см/мкс ( $D < c_0$ ) на момент времени  $t = 25$  мкс. На рис. 8.24 для удобства рассмотрения масштаб по оси  $y$  был увеличен в 7 раз. Из рисунка видно, что при  $D < c_0$  на поверхности алюминиевой пластины образуется бугорок деформации, влияние которого распространяется на два ближайших слоя в порошке. Сплошная горизонтальная линия на рисунках для  $P$  и  $E_T$  соответствует контактной границе порошок — центральное тело в момент времени  $t = 0$ .

Изобары (см. рис. 8.25) наглядно демонстрируют картину течения, формирующуюся в расчетной области. Хорошо видна падающая УВ в порошке, слабая УВ, идущая от алюминиевой пластины, а также наблюдается распространение возмущений по центральному телу. Распределение пористости показывает, что на большей части образца имеет место полное затекание пор (на левом краю не произошло компактирование порошка до плотности сплошного мате-

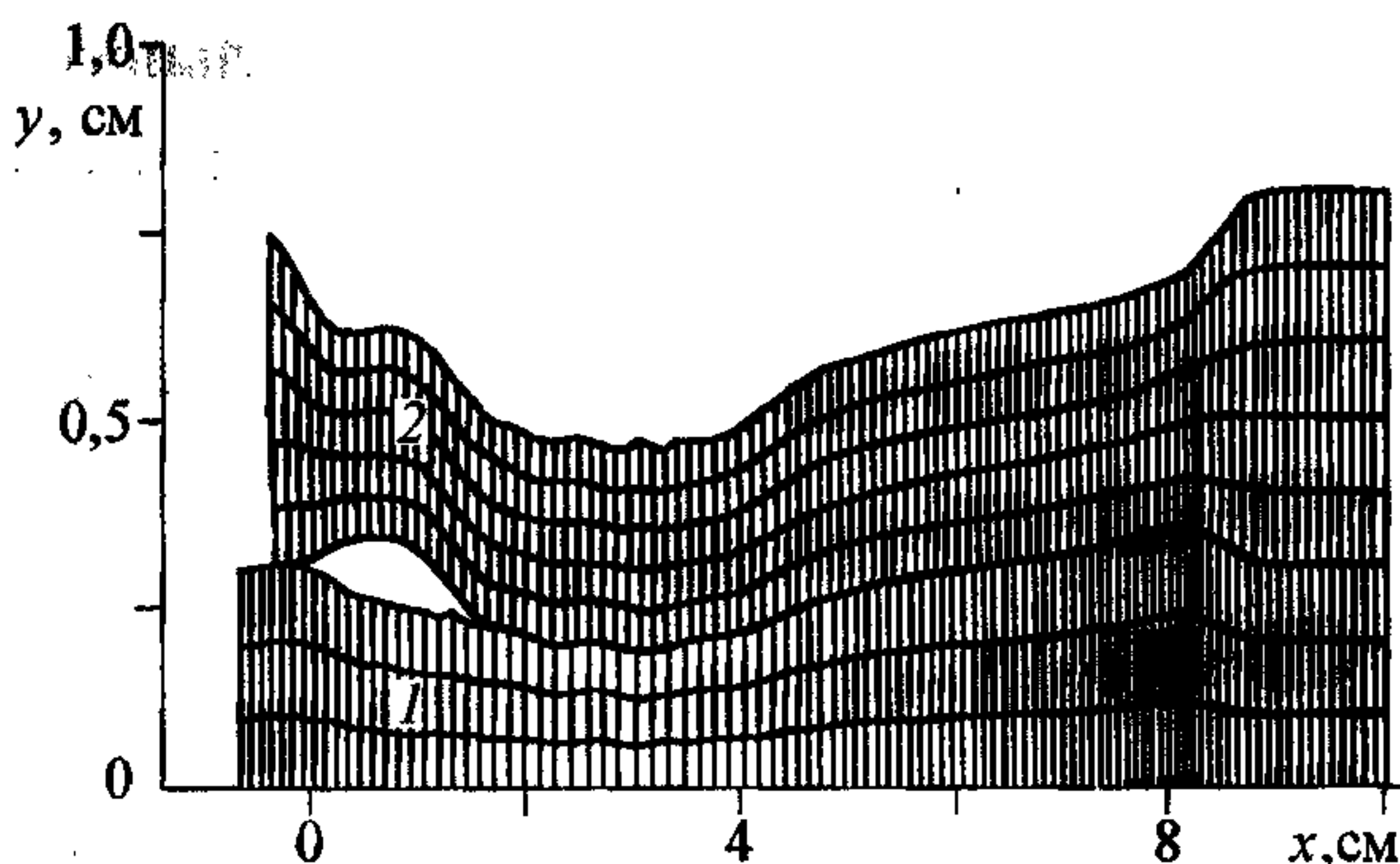


Рис. 8.24. Центральное тело (1) и порошок (2) в момент  $t = 25$  мкс, при  $D = 0,36$  см/мкс,  $c_0 = 0,53$  см/мкс ( $D < c_0$ ).

Ост. поясн. см. в тексте.

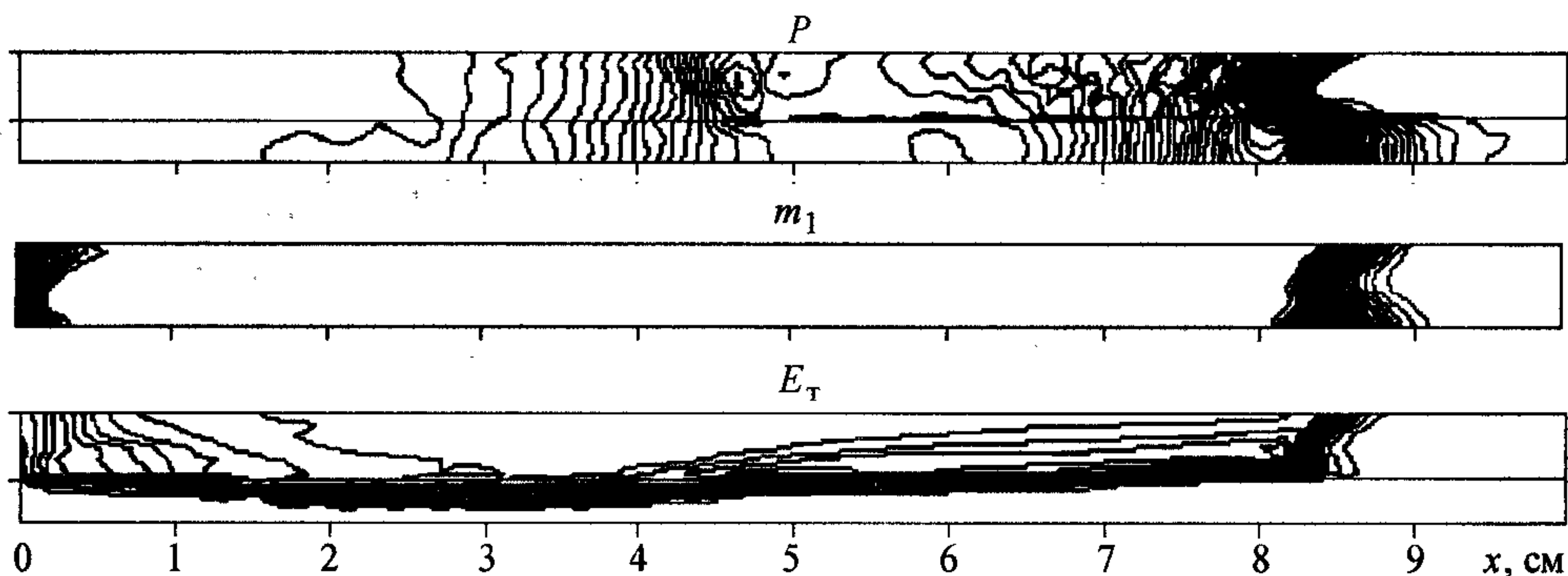


Рис. 8.25. Изолинии давления  $P$ , пористости  $m_1$  и тепловой энергии  $E_T$  при тех же параметрах, что и на рис. 8.24.

Ост. поясн. см. в тексте.

риала вследствие влияния волны разгрузки, приходящей с торцевой поверхности).

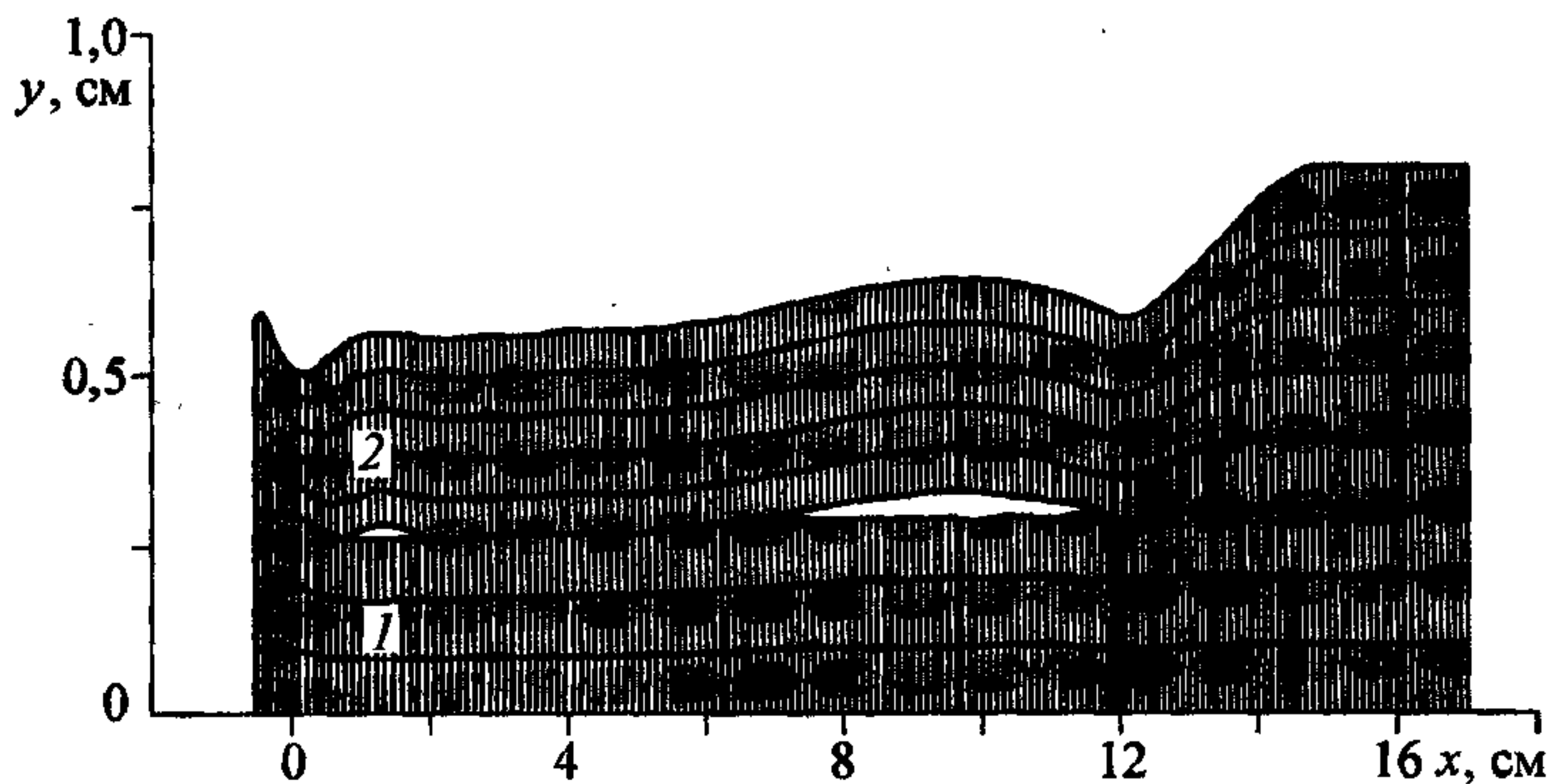
Вдали от центрального тела сжатие порошка происходит в падающей ударной волне, идущей от взрывчатого вещества. Вблизи границы порошка с центральным телом затекание пор происходит в слабой ударной волне, создаваемой бугорком, и происходит раньше, чем приходит ударная волна от продуктов детонации. Это приводит к значительному понижению тепловой энергии  $E_T$  в порошке вблизи центрального тела. Толщина области пониженной тепловой энергии в порошке, полученная в расчетах, изменяется в пределах 0,18—0,27 см, что составляет 2—3 ячейки расчетной сетки. Эти значения хорошо согласуются с экспериментальными данными, приведенными в [52]. На этой толщине  $E_T$  увеличивается от нуля до 34 Дж/г. Отметим, что затекание пор и уплотнение порошка вблизи центрального тела до прихода ударной волны от продуктов детонации экспериментально наблюдалось в работе [50].

Рисунки 8.26 и 8.27 соответствуют расчету при скорости детонации  $D = 0,6$  см/мкс, превышающей объемную скорость звука в пластине  $c_0 = 0,535$  см/мкс. Разностная сетка (см. рис. 8.26), а также изолинии распределения давления  $P$ , пористости  $m_1$  и удельной тепловой энергии  $E_T$  (см. рис. 8.27) приведены в момент времени  $t = 25$  мкс.

В этом случае на поверхности центрального тела не наблюдается образование бугра деформации (см. рис. 8.26) (для удобства масштаб по оси  $y$  был увеличен в 10 раз). Как следует из рис. 8.27, возмущения в центральном теле также опережают ударную волну в порошке, однако бугорка при этом не воз-



Рис. 8.26. Центральное тело (1) и порошок (2) в момент  $t = 25$  мкс, при  $D = 0,6$  см/мкс,  $c_0 = 0,53$  см/мкс ( $D > c_0$ ).



никает. Это связано с тем, что тангенс угла наклона падающей ударной волны в порошке мал, поэтому бугорок в центральном теле не успевает сформироваться до прихода падающей ударной волны. Изобары (см. рис. 8.27) показывают, что детонационный фронт опережает возмущения в центральном теле и компактирование порошка происходит равномерно по всей толщине в падающей волне, идущей от взрывчатого вещества. При таком режиме течения вблизи центрального тела тепловая энергия  $E_T$  практически не уменьшается (видимое на рис. 8.27 резкое понижение  $E_T$  происходит на толщине порядка одной ячейки расчетной сетки и связано с использованием линейной интерполяции, применяемой при построении изолиний от нулевой (в центральном теле) до максимальной).

Размер бугорка деформации зависит от разности скоростей  $c_0 - D$ . С уменьшением скорости детонации бугорок увеличивается, однако это происходит до определенного значения скорости детонации. Так, при  $D = 0,2$  см/мкс величина бугорка меньше, чем при  $D = 0,36$  см/мкс. Такая зависимость объяс-

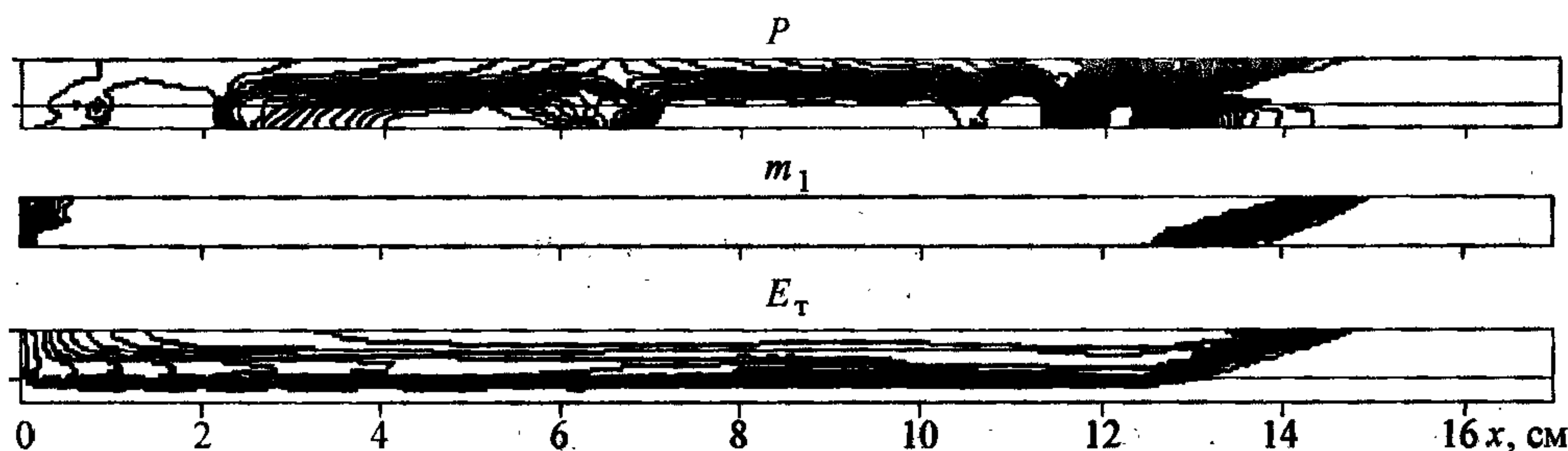


Рис. 8.27. Изолинии давления  $P$ , пористости  $m_1$  и тепловой энергии  $E_T$  при тех же параметрах, что и на рис. 8.26.

няется уменьшением нагрузки на порошок при компактировании с меньшими скоростями, и, следовательно, воздействие со стороны центрального тела падает.

Итак, мы рассмотрели модели, используемые для описания напряженно-деформированного состояния пористого упругопластического материала.

На основе модели, предложенной авторами, исследовано распространение упругопластических волн в пористых материалах. Показано, что рассчитанная структура ударной волны в пористом железе и алюминии удовлетворительно согласуется с экспериментом до значений пористости порядка 0,4.

Отмечена возможность четырехволновой и трехволновой структуры ударной волны. Теоретически предсказана ударная волна разрежения в пористом железе без фазовых переходов, возникновение которой связано с влиянием микронапряжений на осредненные прочностные характеристики. Дано объяснение возникновения "холодного слоя" при взрывном компактировании порошков.

#### Литература к главе 8

1. Thouvenin J. Action d'une onde de choc sur un solide poreux// J. Phys. — 1966. — V. 27, N 3—4. — P. 183—189.
2. Hofman R., Andrews D. J., Maxwell D. E. Computed shock response of porous aluminium// J. Appl. Phys. — 1968. — V. 39, N 10. — P. 4555—4562.
3. Нестеренко В. Ф., Фомин В. М., Ческидов П. А. Затухание сильных волн в периодических слоистых материалах// ПМТФ. — 1983. — № 4. — С. 130—139.
4. Нестеренко В. Ф., Фомин В. М., Ческидов П. А. Структура сильных ударных волн в порошках// Числ. методы решения задач теории упругости и пластичности / Под ред. В. М. Фомина/ СО АН СССР. — Новосибирск, 1988. — С. 231—236.
5. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966. — 686 с.
6. Херрманн В. Определяющие уравнения уплотняющихся пористых материалов// Проблемы теории пластичности. — М.: Мир, 1976.
7. Киселев С. П., Фомин В. М., Шитов Ю. А. Численное моделирование отскока пористого цилиндра от жесткой преграды// ПМТФ. — 1990. — № 3. — С. 100—104.
8. Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах/ Киселев С. П., Руев Г. А., Трунев А. П., Фомин В. М., Шавалиев М. Ш. — Новосибирск: ВО Наука, 1992. — 260 с.
9. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов// Прикл. механика и математика. — 1960. — Т. 24, № 6. — С. 1057—1072.
10. Swegle S. W. Constitutive equation for porous materials with strength// J. Appl. Phys. — 1980. — V. 51. — P. 2574—2580.
11. Баканова А. А., Дудолатов И. П., Сутулов Ю. Н. Ударная сжимаемость пористых



- вольфрама, меди и алюминия в области низких давлений// ПМТФ. — 1974. — № 2. — С. 117—122.
12. Крупников К. К., Бражник М. И., Крупникова В. П. Ударное сжатие пористого вольфрама// Журн. эксперим. и теорет. физики. — 1962. — Т. 42. — С. 675—685.
  13. Carrol M. M., Holt A. C. Static and dynamic pore collapse relations for ductile porous materials// J. Appl. Phys. — 1972. — V. 43, N 4. — P. 1626—1635.
  14. Белов Н. Н., Корнеев А. И., Николаев А. П. Численный анализ разрушения в плитах при действии импульсных нагрузок// ПМТФ. — 1985. — № 3. — С. 132—136.
  15. Дунин С. З., Сурков В. В. Эффекты диссипации энергии и влияние плавления на ударное сжатие пористых тел// Там же. — 1982. — № 1. — С. 131.
  16. Аттетков А. В., Власова Л. Н., Селиванов В. В., Соловьев В. С. Влияние неравновесного разогрева на поведение пористого вещества при ударном сжатии// Там же. — 1984. — № 6. — С. 120—127.
  17. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. — М.: ИЛ, 1963. — 153 с.
  18. Хашин З. Упругие модели неоднородных материалов// Прикл. механика. — 1962. — Т. 29, № 1. — С. 158—167.
  19. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. — М.: Наука, 1977. — 399 с.
  20. Кривоглаз М. А., Черевко А. С. Об упругих модулях твердой смеси//ФММ. — 1959. — Т. 8, вып. 2. — С. 161—164.
  21. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. — М.: Наука, 1978. — 336 с.
  22. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. — М.: Недра, 1970. — 339 с.
  23. Гарсон А. Л. Континуальная теория вязкого разрушения, обусловленного образованием и ростом пор. Ч. 1. Критерий текучести и законы течения для пористой пластической среды// Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Теорет. основы инж. расчетов. — 1975. — № 1. — С. 1—16.
  24. Роменский Е. И. Релаксационная модель для описания деформирования пористых материалов// ПМТФ. — 1988. — № 5. — С. 145—149.
  25. Мержиевский Л. А., Тягельский В. А. Моделирование динамического сжатия пористого железа// ФГВ. — 1994. — Т. 30, № 4. — С. 124—133.
  26. Tvergaard V. Numerical study of localisation in a void-sheet// Int. J. Solids Structures. — 1989. — V. 25. — P. 1143—1152.
  27. Sadyrin A. I. An improved compaction model of porous materials// Jour. de Phys. 4. — 1994. — V. 4. — P. 94—96.
  28. Скрипняк В. А. Ударные волны в конденсированных средах. — СПб., 1994. — 124 с.
  29. Johnson J. N., Addesio F. L. Tensile plasticity and ductile fracture// J. Appl. Phys. — 1988. — V. 64, N 4. — P. 6699—6712.
  30. Скороход В. В. Реологические основы теории спекания. — Киев: Наук. думка, 1972. — 217 с.
  31. Скороход В. В., Олевский Е. А., Штерн М. Б. Континуальная теория спекания. I. Феноменологическая модель// Порошковая металлургия. — 1993. — № 1. — С. 22—27.
  32. Скороход В. В., Олевский Е. А., Штерн М. Б. Континуальная теория спекания. II. Влияние реологических свойств твердой фазы на кинетику спекания// Там же. — № 2. — С. 16—21.
  33. Киселев С. П. Уругопластическая модель деформирования пористого материала//

- Фильтрация многофазных систем/ ИТПМ СО РАН. — Новосибирск, 1991. — С. 151—166.
34. Киселев С. П., Фомин В. М. О модели пористого материала с учетом пластической зоны, возникающей в окрестности поры// ПМТФ. — 1993. — № 6. — С. 125—133.
  35. Киселев С. П. Численное моделирование распространения упругопластических волн в пористом материале. — Новосибирск, 1994. (Препр./ Рос. академия наук. Сиб. отд-ние; № 6—94.)
  36. Киселев С. П., Фомин В. М. Математическое моделирование ударно-волновых процессов в пористых упругопластических материалах// Моделирование в механике. — 1991. — Т. 5, № 3. — С. 65—72.
  37. Fomin V. M., Kiselev S. P. Shock wave processes in porous elastoplastic materials// Shock Waves: Proc. Int. Conf. V. 1/ Ed. K. Takayama. Sendai, Japan. — 1991. — P. 373—379.
  38. Hom C. L., Mc Meeking R. M. Void growth in elastic-plastic materials// J. Appl. Mech. — 1989. — V. 56. — P. 309—317.
  39. Уилкинс М. Л. Расчеты упругопластических течений// Вычисл. методы в гидродинамике. — М.: Мир, 1967. — С. 212—263.
  40. Butcher B. M., Carrol M. M., Holt A. C. Shock-wave compaction of porous aluminium// J. Appl. Phys. — 1974. — V. 45, N 9. — P. 3864—3875.
  41. Lundergan C. D., Herrman W. Equation of State of 6061 Aluminium at low pressures// Ibid. — 1963. — V. 34, N 7. — P. 2046—2052.
  42. Мак-Куин Р., Марш С., Тейлор Дж. и др. Уравнение состояния твердых тел по результатам исследования ударных волн// Высокоскоростные ударные явления. — М.: Мир, 1973. — С. 299—427.
  43. Barker L. M., Hollenbach R. E. Shock-wave studies of PMMA, Fused Silica, and Sapphire// J. Appl. Phys. — 1970. — V. 41, N. 10. — P. 4208—4226.
  44. Аптуков В. Н., Николаев П. К., Романченко В. И. Структура ударных волн в пористом железе при низких давлениях// ПМТФ. — 1988. — № 4. — С. 92—98.
  45. Киселев С. П. О динамическом пике пластичности при высокоскоростном разрушении металлических оболочек// Там же. — 1991. — № 2. — С. 122—127.
  46. Киселев С. П. Структура ударных волн сжатия в пористых упругопластических материалах// Там же. — 1998. — № 6. — С. 27—32.
  47. Kusubov A. S., Nesterenko V. F., Wilkins M. L. et al. Dynamic deformation of powdered materials as a function of particle size// Mater. of Int. Seminar on high energy working of rapidly solidified materials. — Novosibirsk, USSR, 1989. — P. 139—156.
  48. Костюков Н. А. Двухмерные ударно-волновые течения и структура порошковых компактов вблизи границы раздела с деформируемой преградой// Моделирование в механике. — 1990. — № 6. — С. 76—102.
  49. Киселев С. П., Фомин В. М. К вопросу об образовании холодного слоя частиц при взрывном компактировании порошков// Там же. — С. 49—53.
  50. Костюков Н. А. Поведение порошковых материалов в условиях двумерного ударно-волнового нагружения: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1993.
  51. Бузюркин А. Е., Киселев С. П. О возникновении “холодного” слоя при взрывном компактировании порошков// ПМТФ. (в печати)
  52. Костюков Н. А. Физические причины и механизмы образования пограничных зон при двумерном взрывном компактировании порошковых материалов// Там же. — 1991. — № 6. — С. 154—161.



## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СОУДАРЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ

---

### 9.1. Анализ проблемы

Для целого ряда задач механики, связанных с соударением твердых тел, требуется детальный анализ явлений с учетом микропроцессов, которые формируются на субатомном уровне и, начиная с определенных нагрузок, влияют на макроуровень. К таким задачам в первую очередь относятся процессы разрушения твердых тел, механоактивация поверхностей, приводящая к сварке, упрочнению или напылению, и многие другие явления. Определяющие микропроцессы имеют характерные масштабы в пространстве порядка 10—100 атомных слоев, а во времени —  $10^{-9}$ — $10^{-12}$  с и при этом характеризуются сильной неравновесностью. Все это делает невозможным как экспериментальное исследование этих процессов, так и их расчет методами механики сплошных сред, что и обусловило необходимость проведения численных экспериментов методом молекулярной динамики (ММД).

Как известно, этот метод широко применялся при исследовании ряда процессов в кристаллах. Наибольшее количество работ посвящено изучению поведения и структуры ударных волн в твердых телах и проверке ряда соотношений континуальной механики [1—19]. Влияние дефектов на макропараметры, проблемы пластичности и разрушения исследовалось в работах [20—30]. Взаимодействие кластерных образований с поверхностью твердого тела и адсорбционное понижение прочности (эффект Ребиндера) моделировались с помощью ММД в серии работ [31—34]. Динамика перемешивания в твердотельных растворах и проблема плавления рассмотрены авторами [35—37]. Расчету уравнения состояния методом МД при высоких температурах и давлениях посвящена работа [38]. Несмотря на такое широкое применение метода МД в задачах механики, работы, посвященные исследованию процессов в твердых телах при высокоскоростном взаимодействии, отсутствуют. Прежде всего, это связано с комплексностью проблемы. Если в цитированных выше работах изучались отдельные “элементарные” процессы в твердых телах (формирование ударной волны, релаксация к равновесию, зарождение и динамика дефектов,

разрушение и т.д.), то в задачах соударения эти процессы невозможно расчленишь, они должны решаться взаимосвязанно. Необходимо также отметить и появление новых проблем, не затрагивавшихся в предыдущих работах. Это прежде всего контактное взаимодействие тел, имеющих большие скорости, возможность образования связанных состояний между поверхностными атомами разных кристаллов и взаимодействие ударных волн со свободной границей.

Решение перечисленных проблем в комплексе предъявляет повышенные требования и к самому методу молекулярной динамики.

Использование ММД традиционно опирается на формализм, развитый Б. Альдером и др. [39—41]. В последующих работах метод стал широко использоваться практически во всех разделах физики, где применима классическая механика, но практически не претерпел никаких изменений с момента создания (см., например, монографии [42, 43]).

Метод МД содержит три взаимосвязанных раздела.

- 1) моделирование начального состояния системы, адекватного поставленной физической задаче;
- 2) численный расчет динамики траекторий частиц системы;
- 3) получение необходимых характеристик.

При расчете траекторий частиц системы в п. 2 приведенной схемы принципиально нет разницы в том, какие динамические законы применяются: в форме уравнений Ньютона, Лагранжа или Гамильтона. Однако практически во всех работах используются уравнения динамики в форме уравнений Ньютона, которые верны и для диссипативных сил. Более того, с помощью диссипативных сил моделируются и сами физические процессы, которые обусловлены электромагнитными взаимодействиями, не являющимися по своей природе диссипативными (см., например, [44]).

Здесь необходимо подчеркнуть, что ММД базируется на идее расчета траекторий частиц методами механики, при условии знания потенциалов взаимодействия атомов (наиболее глубокий фундаментальный уровень), с дальнейшим усреднением по ансамблю и получением макропараметров. В этом случае система рассматривается замкнутой и изолированной, а сам ММД претендует на вторую ступень в иерархии фундаментальности вслед за теорией взаимодействия. С другой стороны, в большинстве работ получила распространение иная модификация ММД, в которой исследуемая система рассматривается как некая подсистема, взаимодействующая с термостатом. Тут же возникла проблема моделирования этого взаимодействия, более известная в ММД как проблема вы-



бора граничных условий. А это, в свою очередь, приводит к потере фундаментальности самого метода.

В настоящей работе ММД формулируется в рамках обобщенного формализма гамильтоновой механики (см., например, [45—47]). Исследуемая система рассматривается замкнутой и изолированной, а ее масштаб подбирается таким образом, чтобы система правильно отражала свойства макрокристаллов. Внешние воздействия на кристалл (сжатие, растяжение, взаимодействие со стенкой и т.д.) моделируются обобщенными потенциалами. Все это позволило использовать технику классического пропагатора и на этой основе построить численный алгоритм, обладающий повышенной точностью. Дополнительное преимущество такой трактовки ММД состоит в том, что можно последовательно перейти к кинетическому описанию процессов в кристалле и, в частности, к обобщенному кинетическому уравнению [48].

Наиболее целесообразно проиллюстрировать как подход к решению задачи описания внутренних процессов при высокоскоростном взаимодействии тел, так и используемую модификацию ММД на примере соударения одномерных кристаллов. Хотя при этом и теряется ряд эффектов, присущих двух- и трехмерным кристаллам, но основные особенности исследуемого явления проявляются даже более ярко.

## 9.2. Физическая система

Исследования были проведены на одномерных кристаллах Ag и Cu. Взаимодействие между атомами Ag описывается потенциалом Леннарда—Джонса:

$$U_{i,i+1} = 4e \left[ \left( \frac{d}{x_{i+1} - x_i} \right)^{12} - \left( \frac{d}{x_{i+1} - x_i} \right)^6 \right] + e \quad (9.2.1)$$

с параметрами  $e = 1,65 \cdot 10^{-14}$  эрг,  $d = 3,405$  Å [40], а между атомами Cu — потенциалом Морзе:

$$U_{i,i+1} = D[\exp(-2\alpha(x_{i+1} - x_i - r_e)) - 2 \exp(-\alpha(x_{i+1} - x_i - r_e))] + D \quad (9.2.2)$$

с параметрами:  $D = 57,855 \cdot 10^{-14}$  эрг,  $\alpha = 1,2855$  Å<sup>-1</sup>,  $r_e = 2,8106$  Å [49].

В выражениях для двухчастичного взаимодействия (9.2.1), (9.2.2) минимум потенциальной энергии отсчитывается от нуля. Как известно, на динамику частиц это не влияет, но является более удобным при задании начальных данных,

например, при использовании распределения Гиббса для описания равновесных состояний. Тогда функция Гамильтона системы имеет вид:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{i=1}^{N-1} U_{i,i+1} + \sum_{i=1}^N W_i(x_i). \quad (9.2.3)$$

Здесь  $N$  — количество атомов кристалла,  $x_i$  — координата  $i$ -го атома. Вторая сумма соответствует взаимодействию атомов между собой, использовано приближение “ближайшего соседа”. Третья сумма описывает взаимодействие атомов с внешними полями, использовано приближение независимости такого взаимодействия.

Рассматривается три случая.

а. Одномерный покоящийся кристалл, к граничным атомам которого приложены силы  $\pm F_0$ , что соответствует сжатию или растяжению кристалла. Этот пример рассматривается в качестве дополнительного тестирования метода. Внешнее поле имеет вид:

$$W_i(x_i) = 0, \quad i \neq 1, N; \\ W_1(x_1) = -F_0 x_1; \quad W_N(x_N) = F_0 x_N \text{ — сжатие кристалла;} \quad (9.2.4)$$

$$W_1(x_1) = +F_0 x_1; \quad W_N(x_N) = -F_0 x_N \text{ — растяжение кристалла.}$$

б. 1D-кристалл налетает (справа налево) на недеформируемую жесткую стенку, которая описывается бесконечным потенциальным барьером вида

$$W_i(x_i) = e(d/x_i)^{12}, \quad (9.2.5)$$

а параметры  $e$  и  $d$  те же, что и в (9.2.1).

в. При соударении двух одномерных кристаллов вся система рассматривается замкнутой и изолированной, а внешнее поле отсутствует.

### 9.3. Численный метод

Как уже указывалось выше, в большинстве работ [1—10, 13—35, 37, 38] для описания динамики частиц используется закон Ньютона в форме

$$\ddot{\xi}_i = \frac{1}{m_i} \sum_j F_{(\xi)ij} \equiv \frac{F_{(\xi)i}}{m_i}, \quad (9.3.1)$$

где  $\xi_i$  — координата  $i$ -го атома ( $\xi = x, y, z$ );  $m_i$  — его масса;  $F_{(\xi)ij}$  — проекция силы на ось  $\xi$ , действующая со стороны  $j$ -го атома на  $i$ -й. Знак “штрих” у сум-



мы означает, что  $j \neq i$ . Для численного расчета (9.3.1) в работах [4—8, 14, 37, 38] используется схема Верлета [40]:

$$\xi_i^{(k+1)} = 2\xi_i^{(k)} - \xi_i^{(k-1)} + \frac{\tau^2 F_{(\xi)i}^{(k)}}{m_i}, \quad (9.3.2)$$

$$v_{(\xi)i}^{(k)} = (\xi_i^{(k+1)} - \xi_i^{(k-1)}) / (2\tau) \quad (9.3.3)$$

или ее так называемая скоростная модификация

$$\xi_i^{(k+1)} = \xi_i^{(k)} + \tau v_{(\xi)i}^{(k)} + \frac{\tau^2 F_{(\xi)i}^{(k)}}{2m_i}, \quad (9.3.4)$$

$$v_{(\xi)i}^{(k+1)} = v_{(\xi)i}^{(k)} + \frac{\tau}{2m_i} (F_{(\xi)i}^{(k+1)} + F_{(\xi)i}^{(k)}). \quad (9.3.5)$$

Тсаи и др. [1—3] решали (9.3.1) итерационным методом по нижеприведенной схеме: пусть на  $k$ -м временном шаге известны координата  $\xi_i$ , скорость  $\dot{\xi}_i$  и ускорение  $\ddot{\xi}_i$ . Рассматривая их в качестве начальных значений  $\xi_i(1)$ ,  $\dot{\xi}_i(1)$ ,  $\ddot{\xi}_i(1)$  в итерационном процессе, расчет этих величин на  $(l+1)$ -м шаге проводился по схеме:

$$\ddot{\xi}_i(l+1) = F_{(\xi)i}(l) / m_i,$$

$$\dot{\xi}_i(l+1) = \dot{\xi}_i(l) + \frac{\tau}{2} (\ddot{\xi}_i(l) + \ddot{\xi}_i(l+1)),$$

$$\xi_i(l+1) = \xi_i(l) + \frac{\tau}{2} (\dot{\xi}_i(l) + \dot{\xi}_i(l+1)).$$

Итерационный процесс прекращался при выполнении условия

$$|\xi_i(l+1) - \xi_i(l)| < C,$$

где константа  $C$  подбиралась численным способом из определенных физических требований.

В ряде работ для описания динамики частиц использовалась другая запись уравнения (9.3.1):

$$\dot{\xi}_i = v_{(\xi)i}, \quad (9.3.6)$$

$$\dot{v}_{(\xi)i} = F_{(\xi)i} / m_i, \quad (9.3.7)$$

которая для свободных систем совпадает с уравнениями Гамильтона. Для решения (9.3.6), (9.3.7) в работах [15—19, 28, 29] использовался метод с перешагиванием [50]:

$$\xi_i^{(k)} = \xi_i^{(k-2)} + 2\tau v_{(\xi)i}^{(k-1)}, \quad (9.3.8)$$

$$v_{(\xi)i}^{(k+1)} = v_{(\xi)i}^{(k-1)} + \frac{2\tau}{m_i} F_i^{(k)}, \quad (9.3.9)$$

а в работе [36] — схема вида:

$$v_{(\xi)i}^{(k+1/2)} = v_{(\xi)i}^{(k-1/2)} + \frac{\tau}{m_i} F_{(\xi)i}^{(k)},$$

$$\xi_i^{(k+1)} = \xi_i^{(k)} + \tau v_{(\xi)i}^{(k+1/2)}.$$

В связи с тем, что скорости рассчитываются на промежуточных шагах, расчет кинетической энергии системы частиц  $E_{\text{kin}}$  проводился по формуле

$$E_{\text{kin}}^{(k)} = \frac{1}{2} (E_{\text{kin}}^{(k-1/2)} + E_{\text{kin}}^{(k+1/2)}) + \frac{1}{8} (U^{(k+1)} + U^{(k-1)} - 2U^{(k)}),$$

где  $U^{(k)}$  — потенциальная энергия системы на  $k$ -м шаге.

Наиболее примитивная схема использовалась в работах [9, 10]. Приращение координаты на  $(k+1)$ -м временном слое находилось по формуле

$$\Delta \xi_i^{(k+1)} = \Delta \xi_i^{(k)} + \frac{\tau^2}{m_i} F_{(\xi)i}^{(k)},$$

а координата

$$\xi_i^{(k+1)} = \xi_i^{(k)} + \Delta \xi_i^{(k+1)}.$$

При этом скорость определялась следующим образом:

$$v_{(\xi)i}^{(k+1)} = \frac{\Delta \xi_i^{(k+1)}}{\tau}. \quad (9.3.10)$$

Авторы [11, 12] для решения (9.3.6), (9.3.7) использовали схему Рунге—Кутты четвертого порядка.

Таким образом, в задачах исследования явлений в твердых телах с применением ММД используется большое количество модификаций численных схем. К сожалению, большинство авторов не приводит аргументацию как выбора той или иной формы законов динамики, так и выбора численной схемы их решения.



Для решения проблем, связанных с высокоскоростным взаимодействием твердых тел, о которых говорилось во введении, наиболее удобен обобщенный формализм Гамильтона, позволяющий подойти к задачам механики и статистической физики с единых позиций.

Пусть имеется некоторая динамическая система с  $N$  степенями свободы с функцией Гамильтона  $H$  и  $f(\Gamma)$  — некоторая наблюдаемая, заданная на вещественном  $2N$ -мерном фазовом пространстве  $\Gamma$  с элементами  $\{q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N\}$ . Среднее значение наблюдаемой в момент времени  $t$  в некотором состоянии  $\alpha$  определяется выражением:

$$\langle f(t) | \alpha \rangle = \int f(t, \Gamma) \rho_\alpha(\Gamma) d\Gamma.$$

В случае чистых состояний функция распределения имеет вид:

$$\rho_\alpha(\Gamma) = \prod_{i=1}^N \delta(q_i - q_i(0)) \cdot \delta(p_i - p_i(0)), \quad (9.3.11)$$

и эти задачи относятся к гамильтоновой механике. Если же  $\rho_\alpha(\Gamma)$  отлична от (9.3.11), то мы имеем дело со смешанными состояниями, рассматриваемыми в статистической физике.

В рамках гамильтоновой механики уравнение движения для  $f$  имеет вид:

$$\frac{df}{dt} = -\{H, f\} \equiv -\hat{L} f \quad (9.3.12)$$

с начальными данными  $f(q_i(0), p_i(0)) = f_0$ . Здесь  $\hat{L}$  — оператор Лиувилля (в отличие от общепринятой записи опущена мнимая единица). В случае обобщенно-консервативных систем ( $\partial H / \partial t = 0$ ) общее решение (9.3.12) можно представить в виде:

$$f(t) \equiv f(x_i(t), p_i(t)) = \exp\{-t\hat{L}\} f_0 \equiv \hat{U}(t) f_0, \quad (9.3.13)$$

где  $\hat{U}(t)$  — классический пропагатор или оператор эволюции. Оператор  $\hat{U}(t)$  можно представить в виде ряда:

$$\hat{U}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} \hat{L}^n.$$

В простейшем случае в качестве  $f$  могут быть взяты просто обобщенные координаты и импульсы.

Оператор Лиувилля обладает следующими свойствами. Пусть  $\phi(\Gamma)$  и  $\psi(\Gamma)$

принадлежат линейному пространству наблюдаемых.

А.  $\hat{L}$  — линейный оператор:

$$\hat{L}(\alpha\varphi(\Gamma) + \beta\psi(\Gamma)) = \alpha(\hat{L}\varphi) + \beta(\hat{L}\psi), \quad (9.3.14)$$

где  $\alpha, \beta \in R$ .

Б. Действие оператора  $\hat{L}$  на произведение:

$$\hat{L}^n(\varphi\psi) = \sum_{m=0}^n \frac{n!}{(n-m)!m!} ((\hat{L}^{n-m}\varphi) \cdot (\hat{L}^m\psi)). \quad (9.3.15)$$

В. Из тождества Якоби для скобок Пуассона следует:

$$\hat{L}^n\{\varphi, \psi\} = \sum_{m=0}^n \frac{n!}{(n-m)!m!} \{\hat{L}^{n-m}\varphi, \hat{L}^m\psi\}. \quad (9.3.16)$$

Из (9.3.14)—(9.3.16) вытекают следующие свойства оператора эволюции:

1. Если  $c = \text{const}$ , то

$$\hat{U}c = c. \quad (9.3.17)$$

2.  $\hat{U}$  — линейный оператор:

$$\hat{U}(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha(\hat{U}\varphi) + \beta(\hat{U}\psi). \quad (9.3.18)$$

3. Действие  $\hat{U}$  на произведение функций:

$$\hat{U}(\varphi\psi) = (\hat{U}\varphi)(\hat{U}\psi). \quad (9.3.19)$$

4. Действие на скобку Пуассона:

$$\hat{U}\{\varphi, \psi\} = \{\hat{U}\varphi, \hat{U}\psi\}. \quad (9.3.20)$$

Г. Операторы эволюции образуют однопараметрическую группу Ли (параметром является время  $t$ ):

$$\hat{U}(t_2)\hat{U}(t_1) = \hat{U}(t_2 + t_1), \quad (9.3.21)$$

$$\hat{U}(0) = \hat{I} \text{ — единичный оператор,} \quad (9.3.22)$$

$$\hat{U}(-t) = \hat{U}^{-1}(t), \quad (9.3.23)$$

$$(\hat{U}(t_1)\hat{U}(t_2))\hat{U}(t_3) = \hat{U}(t_1)(\hat{U}(t_2)\hat{U}(t_3)). \quad (9.3.24)$$

Численный метод базируется на выражении

$$f(t+\tau) = \hat{U}(\tau)f(t) \quad (9.3.25)$$



или

$$f(t+\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \tau^n}{n!} \hat{L}^n f(t). \quad (9.3.26)$$

Используя (9.3.21) и (9.3.25), непрерывное отображение (9.3.13) заменяем дискретным отображением

$$f(t) = [\hat{U}(\tau)]^m f(0), \quad (9.3.27)$$

где  $t = m\tau$ , а оператор эволюции  $\hat{U}(\tau)$  для достаточно малых  $\tau$  аппроксимируется оператором  $\hat{U}_l(\tau)$ :

$$\hat{U}_l(\tau) = \sum_{n=0}^l \frac{(-1)^n \tau^n}{n!} \hat{L}^n. \quad (9.3.28)$$

Верхний предел суммирования определяется как величиной  $\tau$ , так и необходимой точностью расчета. В настоящей работе учитывались члены вплоть до  $l = 3$ .

Подробные исследования пропагаторного метода проведены в работах [51, 52]. Далее он применялся к исследованию рассеяния асимметричного волчка в поле поверхности [53] и для решения уравнения Лиувилля [54]. Апробация на системе многих частиц проведена в [55—57].

Используя тот факт, что и (9.3.26), и (9.3.28) дают точные аналитические выражения при степенях  $\tau$ , можно дать анализ используемым схемам (9.3.2)—(9.3.10). Так как в них используются степени  $\tau$  не выше второй, то достаточно получить разложение в (9.3.28) до  $l = 2$ . Ниже, для краткости записи, применяем обозначение

$$F_{(\xi)i} = - \sum_j \frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi_i},$$

где  $U_{ij}$  — потенциальная энергия взаимодействия  $i$ -го и  $j$ -го атомов. Тогда

$$\hat{L} \xi_i = - \frac{P_{(\xi)i}}{m_i},$$

$$\hat{L}^2 \xi_i = - \frac{F_{(\xi)i}}{m_i},$$

$$\hat{L} p_{(\xi)i} = -F_{(\xi)i},$$

$$\hat{L}^2 p_{(\xi)i} = \sum_j \frac{p_{(\xi)j}}{m_j} \frac{\partial F_i}{\partial \xi_j},$$

а выражения для  $r_i$  и  $p_i$  на слоях от  $(k-2)$ -го до  $(k+2)$ -го, в соответствии с (9.3.23) и (9.3.28), имеют вид:

$$\xi_i^{(k+2)} = \xi_i^{(k)} + \frac{2\tau p_{(\xi)i}^{(k)}}{m_i} + \frac{2\tau^2 F_{(\xi)i}^{(k)}}{m_i}, \quad (9.3.29)$$

$$p_{(\xi)i}^{(k+2)} = p_{(\xi)i}^{(k)} + 2\tau F_{(\xi)i}^{(k)} + 2\tau^2 \sum_j \frac{p_{(\xi)j}^{(k)}}{m_j} \frac{\partial F_{(\xi)i}^{(k)}}{\partial \xi_j}, \quad (9.3.30)$$

$$\xi_i^{(k+1)} = \xi_i^{(k)} + \frac{\tau p_{(\xi)i}^{(k)}}{m_i} + \frac{\tau^2 F_{(\xi)i}^{(k)}}{2m_i}, \quad (9.3.30a)$$

$$p_{(\xi)i}^{(k+1)} = p_{(\xi)i}^{(k)} + \tau F_{(\xi)i}^{(k)} + \frac{\tau^2}{2} \sum_j \frac{p_{(\xi)j}^{(k)}}{m_j} \frac{\partial F_{(\xi)i}^{(k)}}{\partial \xi_j}, \quad (9.3.31)$$

$$\xi_i^{(k-1)} = \xi_i^{(k)} - \frac{\tau p_{(\xi)i}^{(k)}}{m_i} + \frac{\tau^2 F_{(\xi)i}^{(k)}}{2m_i}, \quad (9.3.32)$$

$$p_{(\xi)i}^{(k-1)} = p_{(\xi)i}^{(k)} - \tau F_{(\xi)i}^{(k)} + \frac{\tau^2}{2} \sum_j \frac{p_{(\xi)j}^{(k)}}{m_j} \frac{\partial F_{(\xi)i}^{(k)}}{\partial \xi_j}, \quad (9.3.33)$$

$$\xi_i^{(k-2)} = \xi_i^{(k)} - \frac{2\tau p_{(\xi)i}^{(k)}}{m_i} + \frac{2\tau^2 F_{(\xi)i}^{(k)}}{m_i}, \quad (9.3.34)$$

$$p_{(\xi)i}^{(k-2)} = p_{(\xi)i}^{(k-2)} - \frac{2\tau F_{(\xi)i}^{(k)}}{m_i} + 2\tau^2 \sum_j \frac{p_{(\xi)j}^{(k)}}{m_j} \frac{\partial F_{(\xi)i}^{(k)}}{\partial \xi_j}. \quad (9.3.35)$$

Подставляя (9.3.30)—(9.3.33) в выражения (9.3.2)—(9.3.3), видим, что в схеме Верлета для координат используются точные выражения до  $\tau^2$ , а скорости считаются в первом порядке по  $\tau$ , что значительно снижает точность расчетов. В скоростной модификации схемы Верлета (9.3.4)—(9.3.5) делается попытка повысить точность за счет того, что в первом приближении по  $\tau$  берется сила, усредненная между  $k$ -м и  $(k+1)$ -м временным слоем, вместо точного третьего слагаемого выражения (9.3.31).

Схема с перешагиванием (9.3.8), (9.3.9) получается из (9.3.30)—(9.3.34), если также пренебречь членами разложения при  $\tau^2$  для импульсов в (9.3.31), т.е. скорости также вычисляются в первом порядке по  $\tau$ .



В работе [36] расчет скорости проводится в первом порядке по  $\tau$ , а сила берется, аналогично скоростному варианту Верлета, равной полусумме значений на промежуточных шагах. При этом получается для координаты формула второго порядка, но со скоростью, взятой в промежуточной точке.

Таким образом, все выражения, на которых базируются расчетные схемы, используемые в методе молекулярной динамики, получаются как частный случай разложения (9.3.28), если координаты вычислять во втором порядке по  $\tau$ , а скорости — в первом. Однако численный эксперимент показал, что расчет и координат, и скоростей необходимо проводить в одинаковом порядке, иначе резко возрастает погрешность расчета. Кроме того, реализация расчетных выражений в виде многошаговых схем, как показано в работах [58, 59], ведет к потере каноничности преобразования (9.3.20).

Рассмотренный выше пропагаторный метод не имеет этих недостатков и, в принципе, позволяет строить схемы любого порядка по  $\tau$ .

В настоящей работе использовались следующие выражения для расчета обобщенных координат и импульсов на  $(k+1)$ -м временном слое:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \tau \hat{L}^1 x_i^{(k)} + \frac{\tau^2}{2} \hat{L}^2 x_i^{(k)} - \frac{\tau^3}{6} \hat{L}^3 x_i^{(k)}, \quad (9.3.36)$$

$$p_i^{(k+1)} = p_i^{(k)} - \tau \hat{L}^1 p_i^{(k)} + \frac{\tau^2}{2} \hat{L}^2 p_i^{(k)} - \frac{\tau^3}{6} \hat{L}^3 p_i^{(k)}, \quad (9.3.37)$$

где

$$\hat{L}^1 x_i^{(k)} = -p_i^k / m_i, \quad (9.3.38)$$

$$\hat{L}^2 x_i^{(k)} = - \left( \frac{\partial U_{i-1,i}}{\partial x_i} + \frac{\partial U_{i,i+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial W_i}{\partial x_i} \right) / m_i, \quad (9.3.39)$$

$$\begin{aligned} \hat{L}^3 x_i^{(k)} = & \\ = & \left( \frac{\partial^2 U_{i-1,i}}{\partial x_{i-1} \partial x_i} \frac{p_{i-1}^{(k)}}{m_{i-1}} + \left( \frac{\partial^2 U_{i-1,i}}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 U_{i,i+1}}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial x_i^2} \right) \frac{p_i^{(k)}}{m_i} + \frac{\partial^2 U_{i,i+1}}{\partial x_i \partial x_{i+1}} \frac{p_{i+1}^{(k)}}{m_{i+1}} \right) / m_i, \end{aligned} \quad (9.3.40)$$

$$\hat{L}^1 p_i^{(k)} = \frac{\partial U_{i-1,i}}{\partial x_i} + \frac{\partial U_{i,i+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial W_i}{\partial x_i}, \quad (9.3.41)$$

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 p_i^{(k)} = & \\ = & - \left( \frac{p_{i-1}^{(k)}}{m_{i-1}} \frac{\partial^2 U_{i-1,i}}{\partial x_{i-1} \partial x_i} + \frac{p_i^{(k)}}{m_i} \left( \frac{\partial^2 U_{i-1,i}}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 U_{i,i+1}}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial x_i^2} \right) + \frac{p_{i+1}^{(k)}}{m_{i+1}} \frac{\partial^2 U_{i,i+1}}{\partial x_i \partial x_{i+1}} \right), \end{aligned} \quad (9.3.42)$$

$$\begin{aligned}
\hat{L}^3 p_i^{(k)} = & \frac{1}{m_{i-1}} \left( \frac{\partial U_{i-2,i-1}}{\partial x_{i-1}} + \frac{\partial U_{i-1,i}}{\partial x_{i-1}} \right) \frac{\partial^2 U_{i-1,i}}{\partial x_{i-1} \partial x_i} - \frac{1}{m_{i+1}} \frac{\partial W_{i+1}}{\partial x_{i+1}} \frac{\partial^2 U_{i,i+1}}{\partial x_i \partial x_{i+1}} - \\
& - \frac{1}{m_i} \left( \frac{\partial U_{i-1,i}}{\partial x_i} + \frac{\partial U_{i,i+1}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial^2 U_{i-1,i}}{\partial x_i^2} + \left( \frac{p_{i-1}^{(k)}}{m_{i-1}} \right)^2 \frac{\partial^3 U_{i-1,i}}{\partial x_{i-1}^2 \partial x_i} - \\
& - \frac{1}{m_i} \frac{\partial W_i}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 U_{i-1,i}}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 U_{i,i+1}}{\partial x_i^2} \right) - \frac{1}{m_i} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x_i^2} \left( \frac{\partial U_{i-1,i}}{\partial x_i} + \frac{\partial U_{i,i+1}}{\partial x_i} \right) + \\
& + 2 \frac{p_i^{(k)} p_{i-1}^{(k)}}{m_i m_{i-1}} \frac{\partial^3 U_{i-1,i}}{\partial x_{i-1} \partial x_i^2} - \frac{1}{m_i} \left( \frac{\partial U_{i-1,i}}{\partial x_i} + \frac{\partial U_{i,i+1}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial^2 U_{i,i+1}}{\partial x_i^2} + \\
& + 2 \frac{p_i^{(k)} p_{i+1}^{(k)}}{m_i m_{i+1}} \frac{\partial^3 U_{i,i+1}}{\partial x_i^2 \partial x_{i+1}} + \left( \frac{p_i^{(k)}}{m_i} \right)^2 \left( \frac{\partial^3 U_{i-1,i}}{\partial x_i^3} + \frac{\partial^3 U_{i,i+1}}{\partial x_i^3} + \frac{\partial^3 W_i}{\partial x_i^3} \right) + \\
& + \left( \frac{p_{i+1}^{(k)}}{m_{i+1}} \right)^2 \frac{\partial^3 U_{i,i+1}}{\partial x_i \partial x_{i+1}^2} - \frac{1}{m_{i+1}} \left( \frac{\partial U_{i,i+1}}{\partial x_{i+1}} + \frac{\partial U_{i+1,i+2}}{\partial x_{i+1}} \right) \frac{\partial^2 U_{i,i+1}}{\partial x_i \partial x_{i+1}} - \\
& - \frac{1}{m_{i-1}} \frac{\partial W_{i-1}}{\partial x_{i-1}} \frac{\partial^2 U_{i-1,i}}{\partial x_{i-1} \partial x_i} - \frac{1}{m_i} \frac{\partial W_i}{\partial x_i} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x_i^2}.
\end{aligned} \tag{9.3.43}$$

В работе использовался целый ряд обезразмеривающих множителей: координаты измерялись в  $10^{-10}$  м, время — в  $10^{-13}$  с, масса — в  $10^{-27}$  кг. Исходя из этих значений получались следующие единицы измерения: для энергии — в  $10^{-21}$  Дж, скорости —  $10^3$  м/с, силы —  $10^{-11}$  Н, давления —  $10^9$  Па.

#### 9.4. Контроль точности схемы

Широкое использование ММД для исследования явлений в кристаллах (см. § 9.1) требует высокой точности работы численной схемы в соответствии с требованием выполнения ряда фундаментальных физических законов.

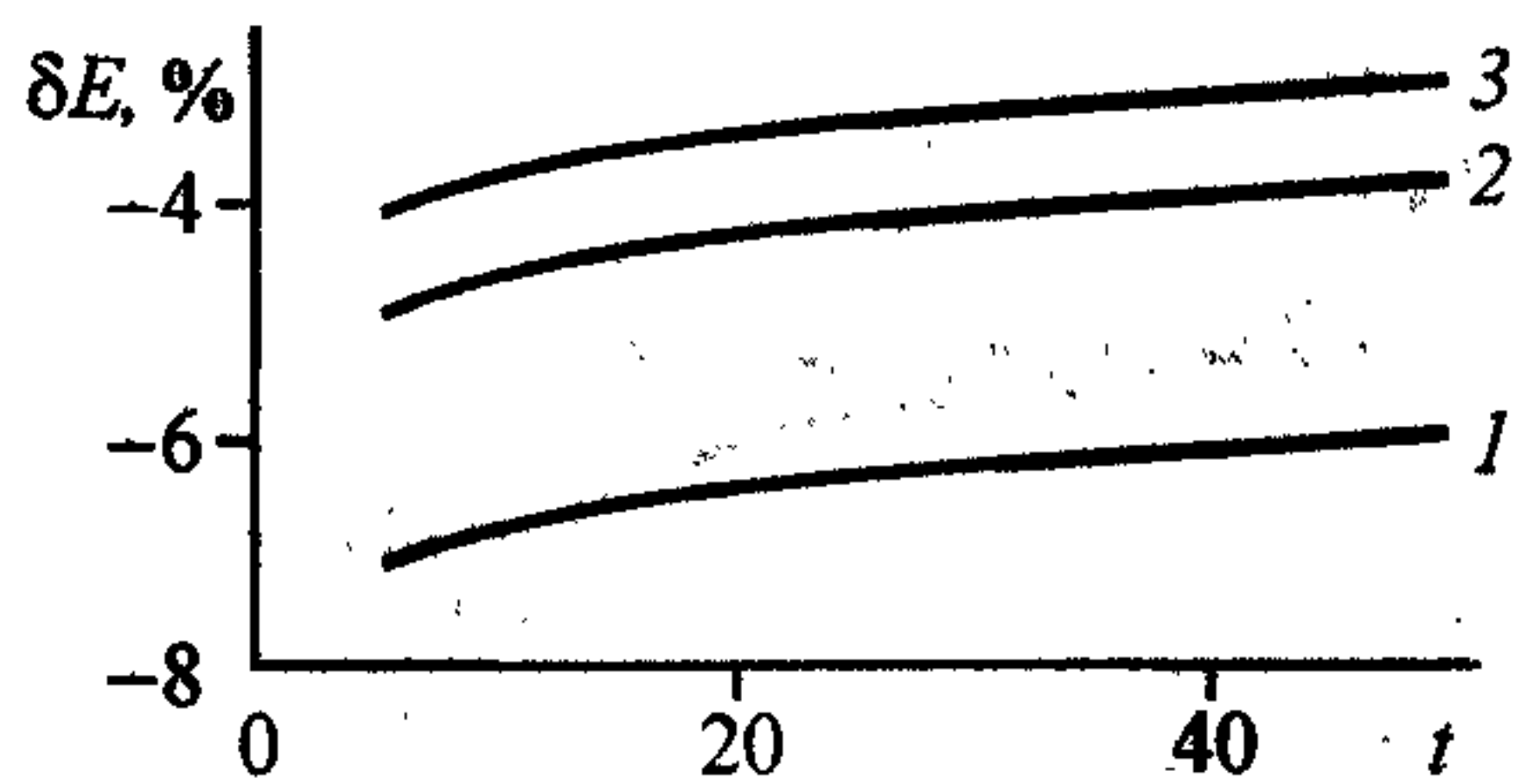
**Закон сохранения энергии.** Как правило, это требование присутствует почти во всех работах, связанных с применением ММД.

В качестве иллюстрации на рис. 9.1 приведена зависимость погрешности энергии в процентах  $\delta E = \lg(|(E - E_0)/E_0| \times 100)$  от времени для различных значений шага  $\tau$ . Численный эксперимент проведен для случая сжатия кристалла с силой  $F_0 = 10$ , начальная температура кристалла 200 К. Как видно, ошибка на временном шаге при  $\tau = 0,01$  (для этого значения есть данные в литературе) со-



**Рис. 9.1.** Зависимость от времени относительной численной погрешности полной энергии системы  $\lg(\delta E)$  (в %) для различных значений шага по времени  $\tau$ .

1 —  $\tau = 0,001$ ; 2 —  $\tau = 0,005$ ; 3 —  $\tau = 0,01$ .



ставляет  $\sim 10^{-9}$  от начальной энергии, что на четыре порядка лучше традиционно используемых схем. Для кристалла Си в основном использовалось значение  $\tau = 0,005$ . В случае Ar с потенциалом Леннарда—Джонса точность при тех же  $\tau$  еще выше.

**Закон сохранения импульса.** В тех случаях, когда сумма внешних сил равна нулю, дополнительный контроль осуществлялся проверкой сохранения импульса центра масс системы  $P_c$ . Это требование для замкнутых изолированных систем является не менее важным, чем закон сохранения энергии. На рис. 9.2 приведена зависимость погрешности  $\delta p = \lg(|P_c - P_{c0}| \times 100 / P_{c0})$  от времени. На всем временном интервале она не превышает  $10^{-11}$  %, что вполне удовлетворяет точности поставленной задачи.

К сожалению, проверки этого закона нет ни в одной работе. В основном это обусловлено тем, что исследуемая система рассматривается в качестве подсистемы, взаимодействующей с термостатом, и не является замкнутой и изолированной.

**Симметрия по отношению к инверсии времени.** Как уже указывалось выше, одной из основных целей работы является описание неравновесных процессов в кристалле. Поэтому важнейшим условием работы численной схемы является уменьшение численной ошибки при обращении времени, которая равносильна появлению в уравнении Лиувилля искусственного источника в правой части, что может приводить к сильному искажению динамики самого исследуемого явления (см., например, работы по исследованию уравнения Лиувилля с источником [60, 61]).

**Рис. 9.2.** Зависимость от времени относительной численной погрешности импульса центра масс кристалла  $\lg(\delta P)$  (в %) для различных значений шага по времени  $\tau$ .

1 —  $\tau = 0,005$ ; 2 —  $\tau = 0,01$ .

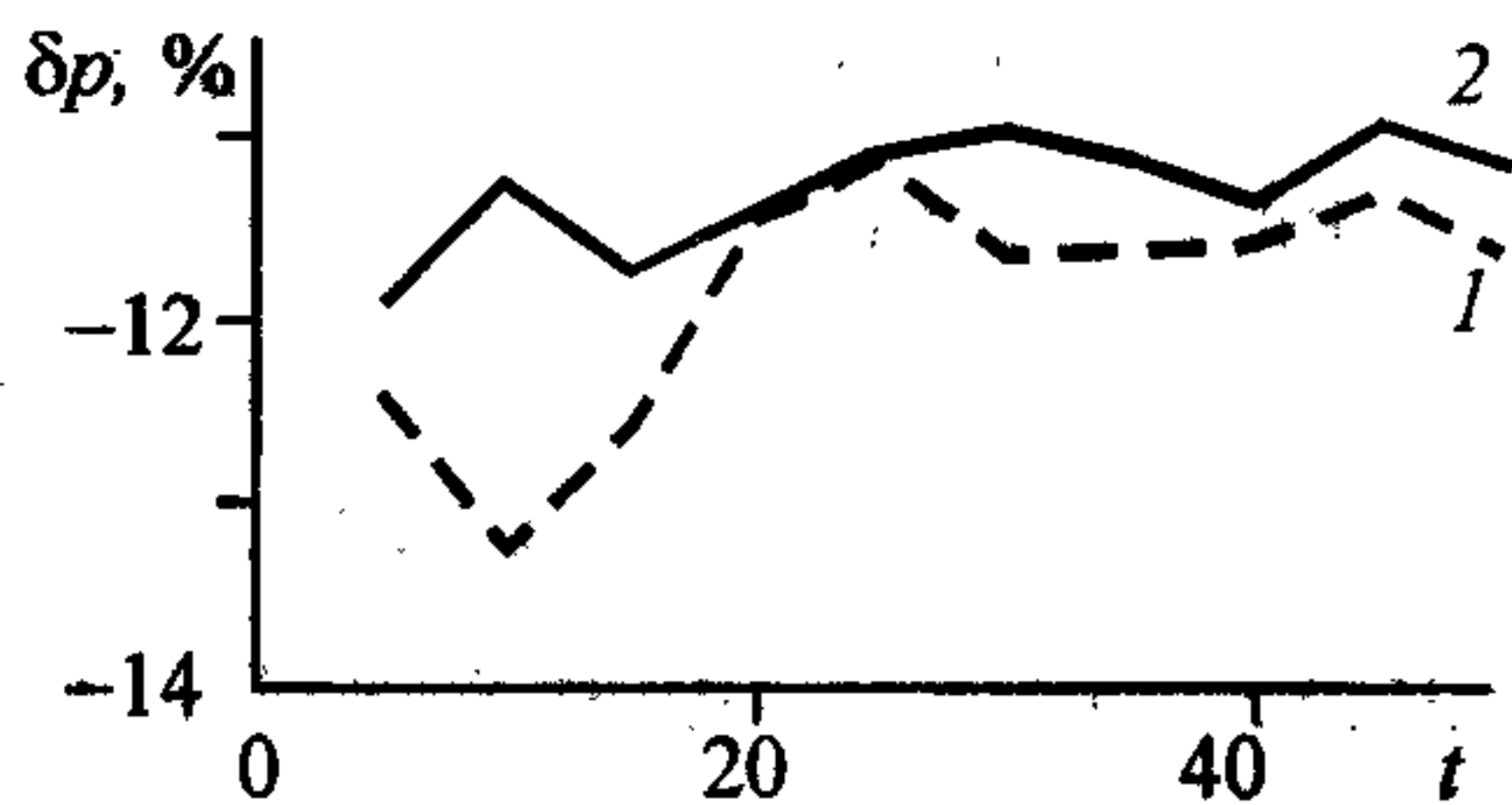




Рис. 9.3. Зависимость от времени относительной численной погрешности координаты (1) и импульса (2) для кристалла Cu  $\lg(\delta)$  (в %) при инверсии времени. Шаг по времени  $\tau = 0,005$ .

Используя свойства (9.3.22), (9.3.23), численный эксперимент проводили следующим образом. Рассматривался кристалл Cu при температуре  $T = 200$  К без внешних возмущений. Далее делаем 5000 шагов “вперед”, затем обращаем время и делаем столько же шагов “назад” ( $\tau = 0,005$ ). В соответствующие моменты времени проводилось сравнение практически всех характеристик кристалла. На рис. 9.3 приведена погрешность координаты и импульса первого атома цепочки. Явно видно, что ошибка не превышает 0,02%. Для кристалла Ag эта ошибка еще ниже, она не превышает  $10^{-4}$ %. Аналогичные расчеты были проведены методом Рунге—Кутты, и ошибка была порядка 10—100% для различных начальных условий. Подробный критический анализ поведения численных схем по отношению к обращению времени дан в работе [62].

Таким образом, главное преимущество пропагаторной схемы заключается в высокой точности при обращении времени.

## 9.5. Начальные данные

Моделирование начальных данных является первым этапом в применении ММД. Достаточно полный обзор этой проблемы сделан в монографии [43], здесь же нас будут интересовать работы, связанные с инициацией начальных данных в твердых телах.

Как известно, задание начальных обобщенных координат и импульсов атомов в кристалле определяет начальное макросостояние кристалла, а также дальнейшее поведение системы на микро- и на макрокинетическом уровне. В большинстве численных экспериментов начальное состояние кристалла полагалось равновесным, с некоторой начальной температурой  $T_0$ , что соответствует равновесному распределению Гиббса.

При задании импульсов или скоростей, как и в других работах, проблем не возникает, так как полное распределение расщепляется на произведение рас-



пределений Максвелла для каждого атома.

В частном случае, когда начальная температура  $T_0 = 0$  К [1, 9], скорости всех частиц полагались равными нулю, а координаты частиц соответствовали равновесным положениям. Практически эта ситуация малоинтересна и была реализована для сравнения с имеющимися аналитическими расчетами для проверки численных схем. Для инициации начальных скоростей в кристаллах с отличной от нуля температурой в подавляющем большинстве случаев используется метод Монте-Карло для распределения Максвелла [2, 3; 10—19, 28, 29, 36, 37; 63], что наиболее отвечает физической реальности. Правда, иногда встречаются и другие способы задания. Так, например, в работах [13, 20—23] модули скоростей всех атомов были одинаковы и равны  $2kT/m$ , а направление в пространстве было случайным. Авторы [24—27, 31—35] для скоростей использовали равномерное распределение с условием, что средняя скорость равна нулю. К сожалению, обоснования такого выбора скоростей и сравнения с другими способами в работах не приводится.

В настоящей работе начальные импульсы находились традиционным способом с помощью метода Монте-Карло для распределения Максвелла. В связи с тем, что в предлагаемом подходе кристалл рассматривается как конечная, замкнутая и изолированная система со свободными границами, необходимым требованием было то, чтобы кристалл покоился как целое (импульс центра масс  $\vec{p}_c = 0$ ). В работе апробированы три подхода.

1. Находился импульс  $i$ -й частицы  $\vec{p}_i$ , а для  $(i + 1)$ -й частицы он задавался  $\vec{p}_{i+1} = -\vec{p}_i$ . Аналогично для других пар частиц.

2. С помощью метода Монте-Карло находят импульсы для  $N - 1$  частицы, а для последней, которая помещается внутри кристалла, импульс находится из условия

$$\vec{p}_N = -\sum_{i=1}^{N-1} \vec{p}_i.$$

3. Импульсы всех частиц  $\vec{p}_i$  находятся методом Монте-Карло. Затем определяется скорость центра масс кристалла  $\vec{v}_c$  и все импульсы пересчитываются по формуле

$$\vec{p}_i = \vec{p}_i^0 - m_i \vec{v}_c.$$

В методах 1 и 3 можно отметить как преимущество перед методом 2 хоро-

шее совпадение моментов распределений с теоретическими значениями. Однако в методе 3 получаемая средняя кинетическая энергия молекул (или температура) больше отличается от задаваемой первоначально  $T_0$ .

Дополнительное условие, которое налагалось на величину получаемого начального импульса, — кинетическая энергия граничных атомов должна быть меньше энергии диссоциации, чтобы они не покинули поверхность кристалла.

При определении координат нужно было бы вычислить многомерный интеграл состояний

$$Z = \int \dots \int \exp \left\{ -\frac{1}{kT} \sum_{i=1}^{N-1} U_{i,i+1} \right\} dx_1 \dots dx_N \quad (9.5.1)$$

с потенциалом  $U_{i,i+1}$  в виде (9.2.1) или (9.2.2), что связано с известными проблемами. В связи с этим в задании начальных координат имеется значительный произвол. Так, в большинстве работ [10—37] атомы в кристаллах помещаются в положения статического равновесия, а затем кристаллу дается некоторое время релаксировать к равновесному состоянию. Но при этом возникает три вопроса:

позволяет ли используемый метод и численная схема релаксировать системе в равновесное состояние;

каково время релаксации;

является ли состояние системы равновесным.

К сожалению, ответы на эти вопросы в цитируемой литературе отсутствуют и, следовательно, нет гарантии, что полученные результаты действительно соответствуют указанному начальному состоянию.

В качестве иллюстрации в настоящей работе были проведены расчеты для  $\text{Cu}$  с таким способом задания начальных данных. Начальные скорости находились методом Монте-Карло для распределения Максвелла с температурой  $T_0 = 10 \text{ К}$ , частицы располагались в положениях равновесия. Расчеты выполнены для  $\tau = 0,001$ , а полное число шагов  $N_\tau = 10^4$ , т.е. реальное время процесса составляло  $10^{-12}$  с. На рис. 9.4, а представлено поведение кинетической и потенциальной “температур” ( $T_k = 2\langle E_k \rangle / k$ ,  $T_u = 2\langle U \rangle / k$ ).

Как видно, система не стохастизируется за это время, а вероятность реализации гипотезы о нормальном распределении  $P_\lambda$  близка к нулю (рис. 9.4, б). Более того, относительное удлинение кристалла  $\varepsilon$  (рис. 9.4, в) испытывает колебания, т.е. длина цепочки еще не соответствует равновесной.



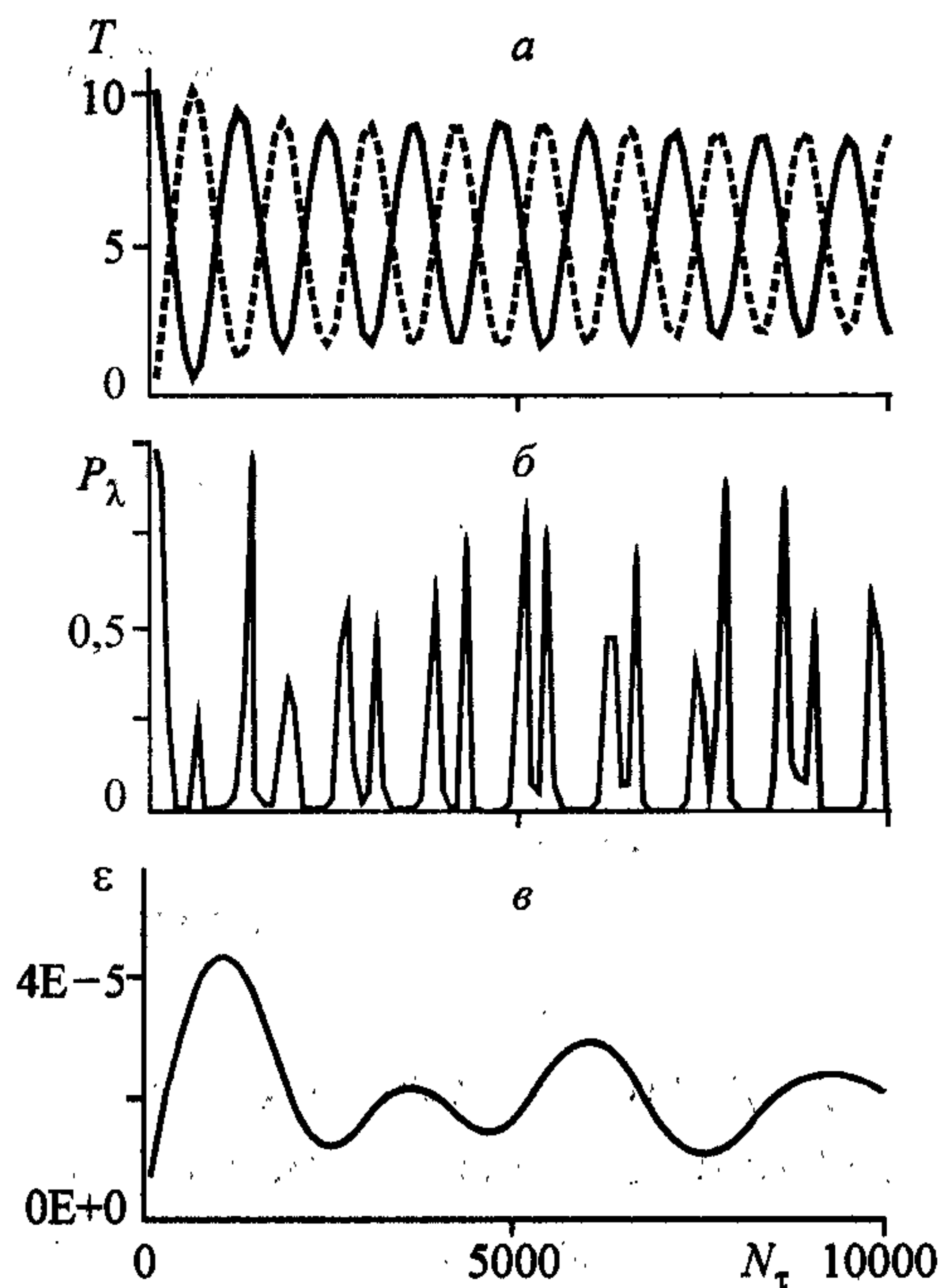


Рис. 9.4. Изменение со временем (числом шагов  $N_\tau$ ):

$a$  — кинетической и потенциальной “температур” (сплошная и штриховая линии соответственно);  $b$  — вероятности Колмогорова  $P_\lambda$ ;  $c$  — относительного удлинения  $\epsilon$ . Кристалл — Cu, начальная “кинетическая температура” 10 К, “потенциальная” 0 К. Шаг по времени  $\tau = 0,001$ .

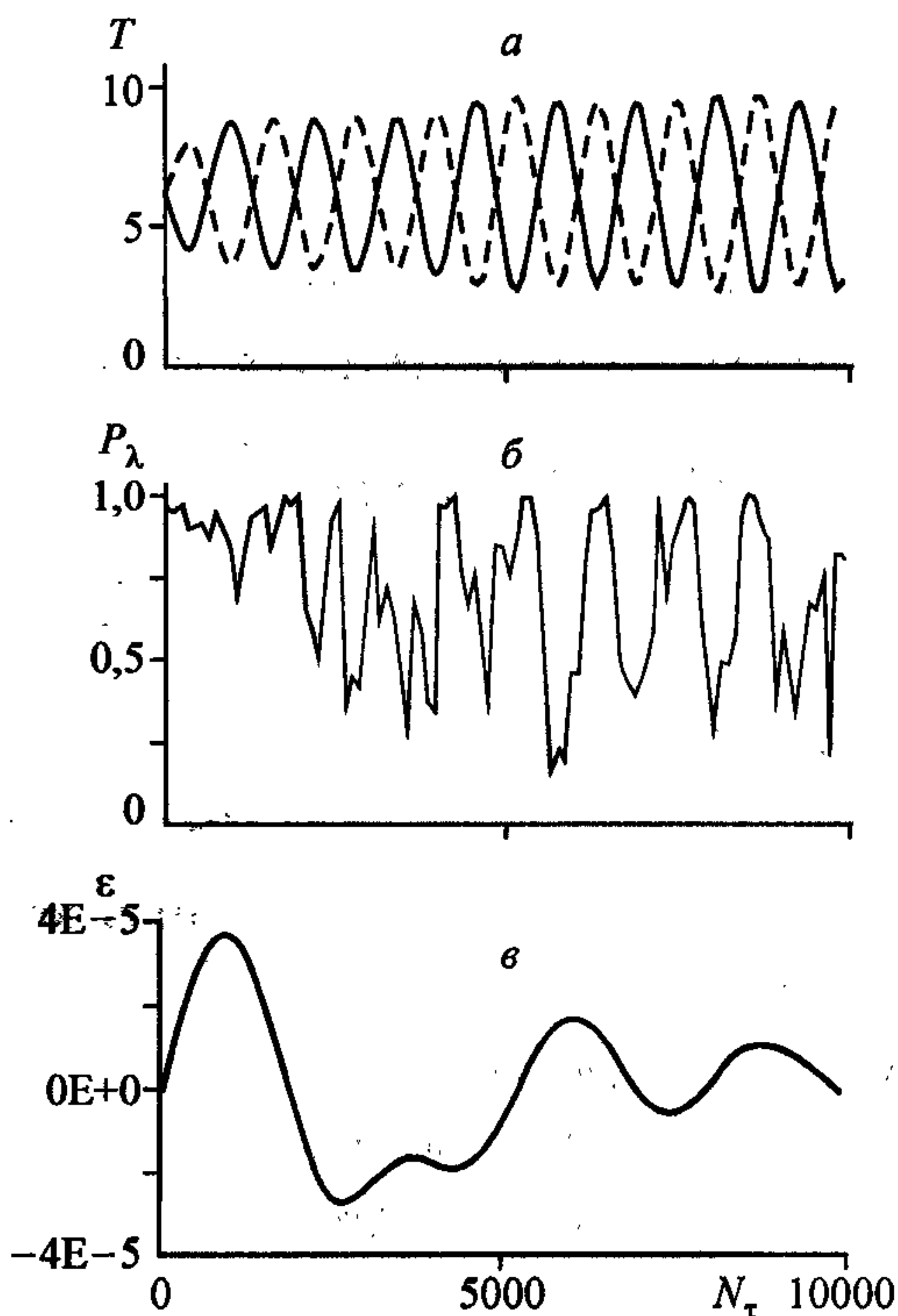


Рис. 9.5. Изменение со временем (числом шагов  $N_\tau$ ):

$a$  — кинетической и потенциальной “температур” (сплошная и штриховая линии соответственно);  $b$  — вероятности Колмогорова  $P_\lambda$ ;  $c$  — относительного удлинения  $\epsilon$ . Кристалл — Cu. Начальные данные заданы при  $T_0 = 10$  К в соответствии с распределением Максвелла—Больцмана (в гармоническом приближении).

В работах [2, 3, 63] используется гармоническое приближение для  $U_{i,i+1}$  в (9.5.1), что позволяет представить интеграл состояний в виде произведений интегралов для каждого атома с нормальным распределением по координатам. Далее, аналогично нахождению начальных импульсов, находятся методом Монте-Карло и начальные координаты. На рис. 9.5 в качестве иллюстрации такого способа задания начальных данных приведены результаты расчета для тех же параметров, что и на рис. 9.4. Температуры  $T_k$  и  $T_u$  флуктуируют около заданного значения  $T_0 = 10$  К, а система находится в равновесном состоянии ( $P_\lambda > 0,5$ ) большую часть времени. Амплитуда колебаний относительного удлинения  $\epsilon$  уже меньше и не так будет сказываться на дальнейших численных

экспериментах. Видно явное преимущество такого способа инициации начального состояния.

В настоящей работе использовалось приближение, когда пара ближайших соседних атомов закреплялась в положении равновесия и численно находилась интеграл состояний для среднего атома:

$$Z_u = \int \exp \left\{ -\frac{1}{kT} (U_{i-1,i}(x_{i-1}^0, x_i) + U_{i,i+1}(x_i, x_{i+1}^0)) \right\} dx_i.$$

Далее с помощью метода Монте-Карло для распределения

$$\rho(x_i) = \frac{1}{Z_u} \exp \left\{ -\frac{1}{kT} (U_{i-1,i} + U_{i,i+1}) \right\}$$

разыгрывались координаты атомов кристалла. (Для низких температур этот способ совпадает с подходом группы Тсаи [2, 3, 63].) При высоких температурах кристалл оказывался в напряженном состоянии и перед численным экспериментом необходимо было дать ему отрелаксировать до длины, соответствующей заданной температуре. Для этого необходимо сделать несколько сот тысяч шагов (время релаксации порядка  $10^{-10}$  с), и поэтому процесс приготовления кристалла при заданной температуре формировался в виде предварительной задачи, конечным продуктом которой и являлись начальные координаты и импульсы атомов.

## 9.6. Дополнительные требования к работе схемы

Рассмотренные в п. 9.5 условия контроля работы схемы (закон сохранения энергии, импульса и обратимость микропроцессов по отношению к инверсии времени) являются необходимыми. Однако они не кажутся очевидными для того, чтобы сделать вывод о корректном описании динамики макрокинетических параметров. Поэтому схема с применением ММД должна тестироваться дополнительно по следующим физическим требованиям.

А. Как известно, равновесное состояние системы, характеризуемое распределением Гиббса, без внешних возмущений является стационарным.

Для систем с функцией Гамильтона типа (9.2.3) допустимо расщепление функции распределения по координатам и импульсам. Это позволяет, хотя и частично, свести задачу к контролю отклонения функции распределения по



импульсам от нормального распределения. Для этого был использован  $\lambda$ -критерий Колмогорова [64] по нижеприведенной схеме. Начальные данные задавались, как описывалось в п. 9.5 при заданной температуре. Затем рассчитывалась динамика системы в соответствии с (9.3.36)—(9.3.43), а через определенные промежутки времени ( $N_\tau = 5000$ ;  $\tau = 0,005$ ) находился параметр  $\lambda = \sqrt{N} \max_i |F_i^* - F_i|$  для всей совокупности частиц. Здесь  $F_i^*$  — теоретическая вероятность иметь импульс частице  $p \leq p_i$ ;  $F_i$  — относительное количество измеренных значений импульса, удовлетворяющих этому неравенству, а  $N$  — полное число частиц кристалла (в расчетах  $N = 1000$ ). По параметру  $\lambda$  находилась вероятность

$$P_\lambda = 1 - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 \lambda^2)$$

того, что данное распределение импульсов является нормальным. На рис. 9.6 приведено поведение  $P_\lambda$  от времени для кристалла Ag при отсутствии внешних возмущений ( $W_i = 0$ ). Видно, что распределение остается нормальным, хотя и имеет флуктуационные отклонения.

Несмотря на то что анализ равновесности состояния является одним из основных вопросов в ММД, лишь в немногих работах [4, 10, 11, 63] этому вопросу уделяется должное внимание. В некоторых работах (см., например, [14, 20]) при инициации начальных данных лишь упоминается о том, что состояние было равновесным, хотя и не дается критерия, по которому делается этот вывод. В противоположность этому в работе [63] использовался следующий набор критериев установления равновесного состояния: 1) полная энергия системы постоянна; 2) условие равномерного распределения средней кинетической энергии по степеням свободы; 3) максвелловское распределение по скоростям; 4) средняя потенциальная энергия системы равна средней кинетической энергии в гармоническом пределе; 5) при низких температурах смещения атомов из положения равновесия описываются распределением Больцмана; 6) средняя кинетическая энергия равна  $3kT/2$ .

Критерий 4) использовался в работе [11]. В дополнение к нему проверялось вы-

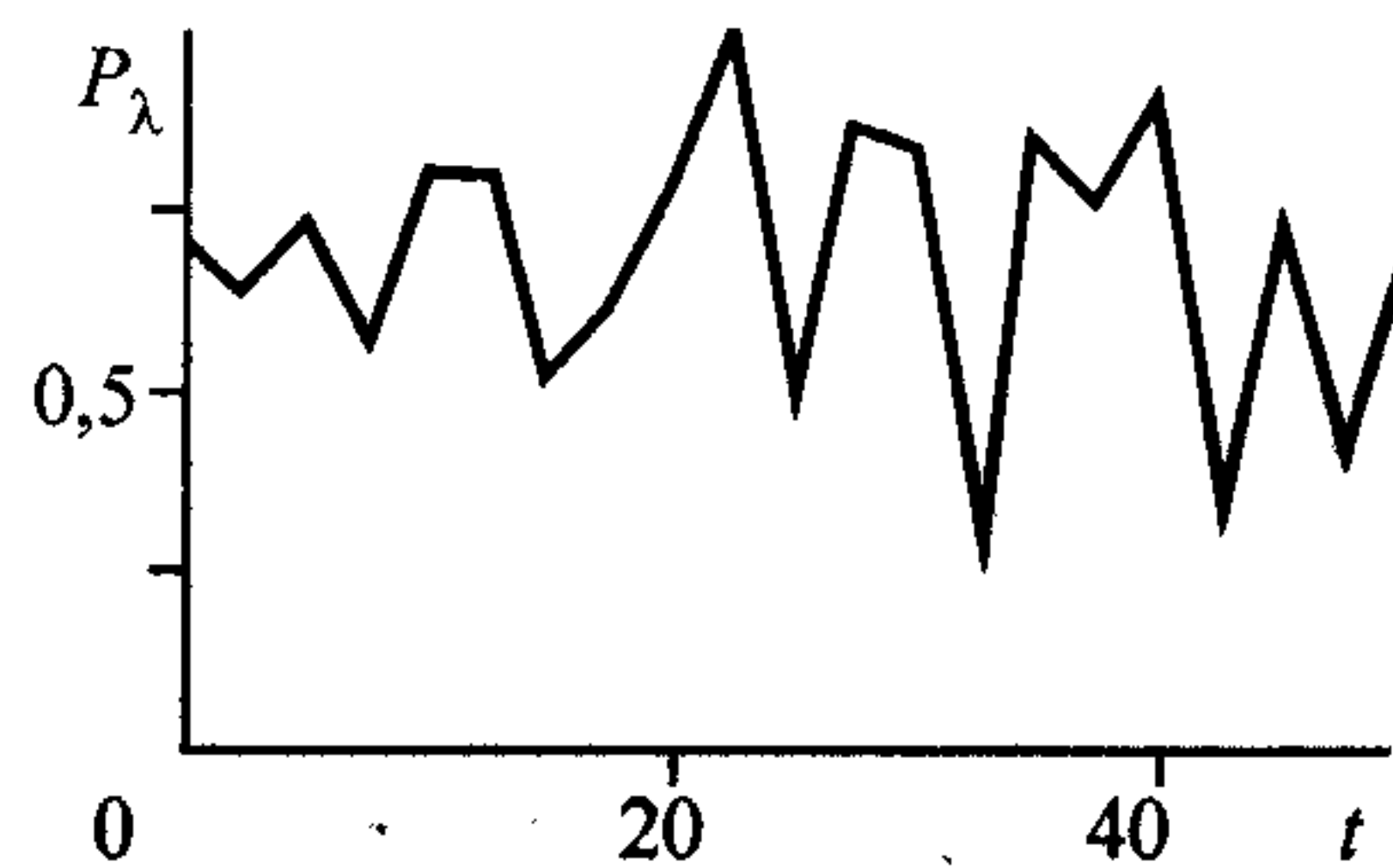
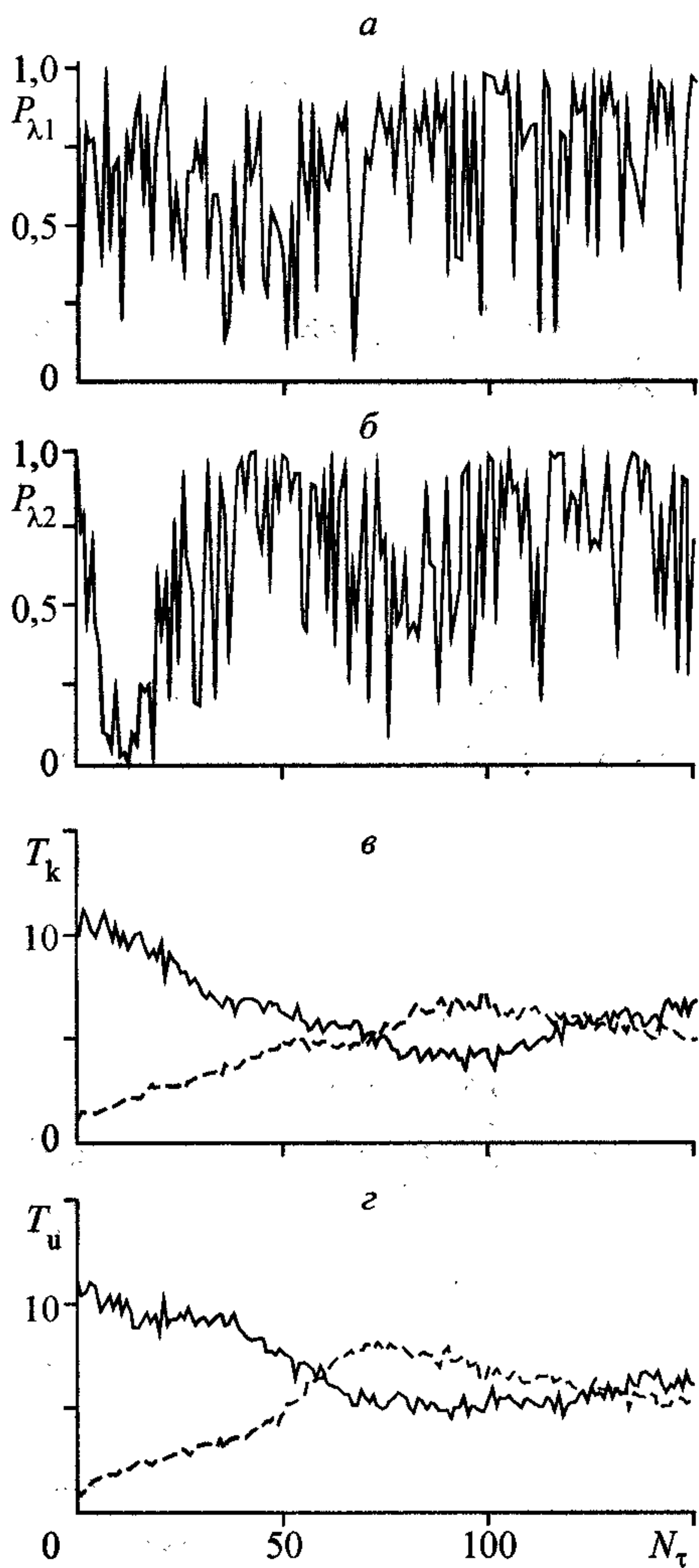


Рис. 9.6. Изменение со временем вероятности  $P_\lambda$  в равновесном состоянии. Кристалл — Ag,  $T_0 = 20$  К.

полнение условий: 7) распределение по скоростям, полученное численным способом, должно быть стационарным и максвелловским; 8) выполнение условия эргодичности; 9) кинетическая и потенциальная энергии остаются постоянными во времени; 10) средние значения кинетической и потенциальной энергий, полученные для подсистем из 25 частиц, остаются постоянными во времени.



**Рис. 9.7.** Релаксация к равновесию кристалла Ag с начальным ступенчатым профилем температуры:

$T_1^0 = 10$  К,  $T_2^0 = 1$  К.  $P_{1,2}$  — вероятности Колмогорова “горячей” и “холодной” половинок кристалла (а, б соответственно); в —  $T_{k1}$ ,  $T_{k2}$  — “кинетические температуры”; г —  $T_{u1}$ ,  $T_{u2}$  — “потенциальные температуры” (сплошные и штриховые кривые соответственно).

полученные для подсистем из 25 частиц, остаются постоянными во времени.

В работе [4] рассчитывались флуктуации температуры, и условием равновесия системы было требование, чтобы величина  $\langle \Delta T^2 \rangle / \langle T \rangle^2$  была меньше 30%. Авторы [10] для этой цели использовали анализ моментов распределения по скоростям.

Численный анализ используемых критериев, проведенный в настоящей работе, показал, что нарушение любого из них сразу приводит к уменьшению вероятности  $P_\lambda$  в критерии Колмогорова, т.е. можно использовать только один вид проверки, что дает экономию во времени решения задачи на ЭВМ. Учитывая также и то, что с помощью него получается сразу и количественная характеристика отклонения от нормального распределения, можно сделать вывод, что этот критерий оказывается наиболее предпочтительным.

Б. Вторым требованием является условие релаксации системы к равновесному состоянию из начального неравновесного. Не имеет смысла рассчитывать сложные неравновесные процессы, если программа не проверена на этом тесте.



Предлагаемый метод тестировался на классической задаче теплопроводности: имеется стержень конечной длины с начальным распределением температуры, заданным в виде ступеньки. Начальные координаты и импульсы для половины атомов кристалла Ag определялись из условия равновесного состояния с температурой  $T_1^0 = 10$  К, а вторая половина — 1 К, что соответствует начальной функции распределения для полной системы:

$$\rho_0 = \frac{1}{z} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{kT_1^0} \sum_{i=1}^{N/2} \frac{p_i^2}{2m_i} \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{kT_1^0} \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} U_{i,i+1} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{kT_2^0} \sum_{i=\frac{N}{2}+1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{kT_2^0} \sum_{i=N/2}^{N-1} U_{i,i+1} \right\}.$$

На рис. 9.7, а, б приведена динамика  $P_\lambda$  для обеих половинок кристалла. Видно, что для горячей части  $P_\lambda > 0,5$ , хотя и имеются флуктуационные выбросы. Для “холодной” части кристалла  $P_\lambda < 0,5$  вплоть до  $N_\tau = 2 \times 10^4$  и, следовательно, велико отклонение от равновесного состояния. По этой причине в качестве кинетической и потенциальной “температур” брались соответствующие средние значения кинетической и потенциальной энергий в каждой половине кристалла. На рис. 9.7, в, г приведена их зависимость от времени. Происходит процесс выравнивания температур, а поведение  $P_\lambda$  позволяет сделать вывод о том, что состояние всей системы стремится к равновесному с распределением Гиббса с единой температурой.

### 9.7. Метод молекулярной динамики и второе начало термодинамики

Метод молекулярной динамики, опираясь на классическую механику, описывает такие неравновесные процессы, как теплопроводность, диффузия, распространение ударных волн и т.д. И вот тут длительная дискуссия об обратимости законов механики и термодинамической необратимости процессов в природе трансформируется из чисто теоретической плоскости механического обоснования статфизики в практический вопрос. А можно ли вообще использовать метод молекулярной динамики для описания неравновесных явлений?

Опираясь на имеющиеся противоречия, автор работы [65] дает отрицательный ответ. Кратко суммируя его выводы, можно сказать, что причиной необратимости кинетических процессов являются: а) невозможность абсолютной точности измерения координат и импульсов при задании начальных данных; в) стохастичность динамических систем (при рассмотрении которой опираются на первый пункт, так как всегда рассматривается некоторая область фазового пространства  $\Delta\Gamma$  с мерой, отличной от нуля).

Однако в рамках ММД не используется статистическое описание — главным объектом исследования являются траектории частиц. Кроме того, при задании начальных данных предполагается абсолютная точность измерения. Все это, на первый взгляд, оставляет открытым вопрос о правомерности применения ММД к исследованию неравновесных процессов. Чтобы на него ответить, наиболее удобно использовать формализм Гамильтона.

Пусть система с функцией Гамильтона (9.2.3) эволюционирует промежуток времени  $t_0$ , а затем мы обращаем время (действуем оператором инверсии  $\hat{I}_t: t \rightarrow -t$ ) и движемся на такой же промежуток времени “назад”. Тогда, согласно (9.3.23), обобщенные координаты и импульсы

$$x_i = \hat{U}(-t_0)x_i(t_0) = \hat{U}(-t_0)\hat{U}(t_0)x_i(0) = x_i(0),$$

$$p_i = \hat{U}(-t_0)p_i(t_0) = \hat{U}(-t_0)\hat{U}(t_0)p_i(0) = p_i(0)$$

приобрели начальные значения, т.е. система вернулась в исходное состояние. Однако уравнения Гамильтона для (9.2.3)

$$\dot{x}_i = p_i; \dot{p}_i = -\frac{\partial U(x_1 \dots x_N)}{\partial x_i} - \frac{\partial W(x_i)}{\partial x_i}$$

инвариантны не относительно операции обращения времени  $\hat{I}_t$ , а относительно обращения времени-импульсов  $\hat{I}_{t,p}: t \rightarrow -t, p_i \rightarrow -p_i$ . В этом случае оператор Лиувилля  $\hat{L} \rightarrow -\hat{L}$ , а оператор эволюции  $\exp\{-t\hat{L}\} \rightarrow \exp\{-(-t)(-\hat{L})\} = \exp\{-t\hat{L}\}$  остается инвариантным. Проведя операцию  $\hat{I}_{t,p}$  в момент  $t_0$ , аналогично предыдущему случаю, получаем

$$x_i = \hat{U}(t_0)x_i(t_0) = \hat{U}(t_0)\hat{U}(t_0)x_i(0) = \hat{U}(2t_0)x_i(0) = x_i(2t_0),$$

$$p_i = \hat{U}(t_0)(-p_i(t_0)) = -\hat{U}(t_0)\hat{U}(t_0)p_i(0) = -\hat{U}(2t_0)p_i(0) = -p_i(2t_0),$$



координаты в момент  $t=2t_0$  остались инвариантными, а у импульсов остались инвариантными модули, сами же они приобрели противоположный знак.

Следствием инвариантности эволюции координат относительно  $\hat{I}_{t,p}$  является то, что и динамика концентрации частиц  $n(\vec{r}, t)$ , и динамика полной потенциальной энергии  $U(x_1(t), \dots, x_N(t))$  инвариантны относительно  $\hat{I}_{t,p}$ . Так как кинетическая энергия системы зависит от квадратов модулей импульсов, то и кинетическая энергия, и локальная температура также инвариантны относительно  $\hat{I}_{t,p}$ . Следовательно, перенос энергии и массы в макросистеме инвариантны относительно обращения  $(t, p)$ . Нетрудно видеть, что и обобщенные уравнения гидродинамики (см., например, [66])

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n \langle v_k \rangle}{\partial x_k} = 0,$$

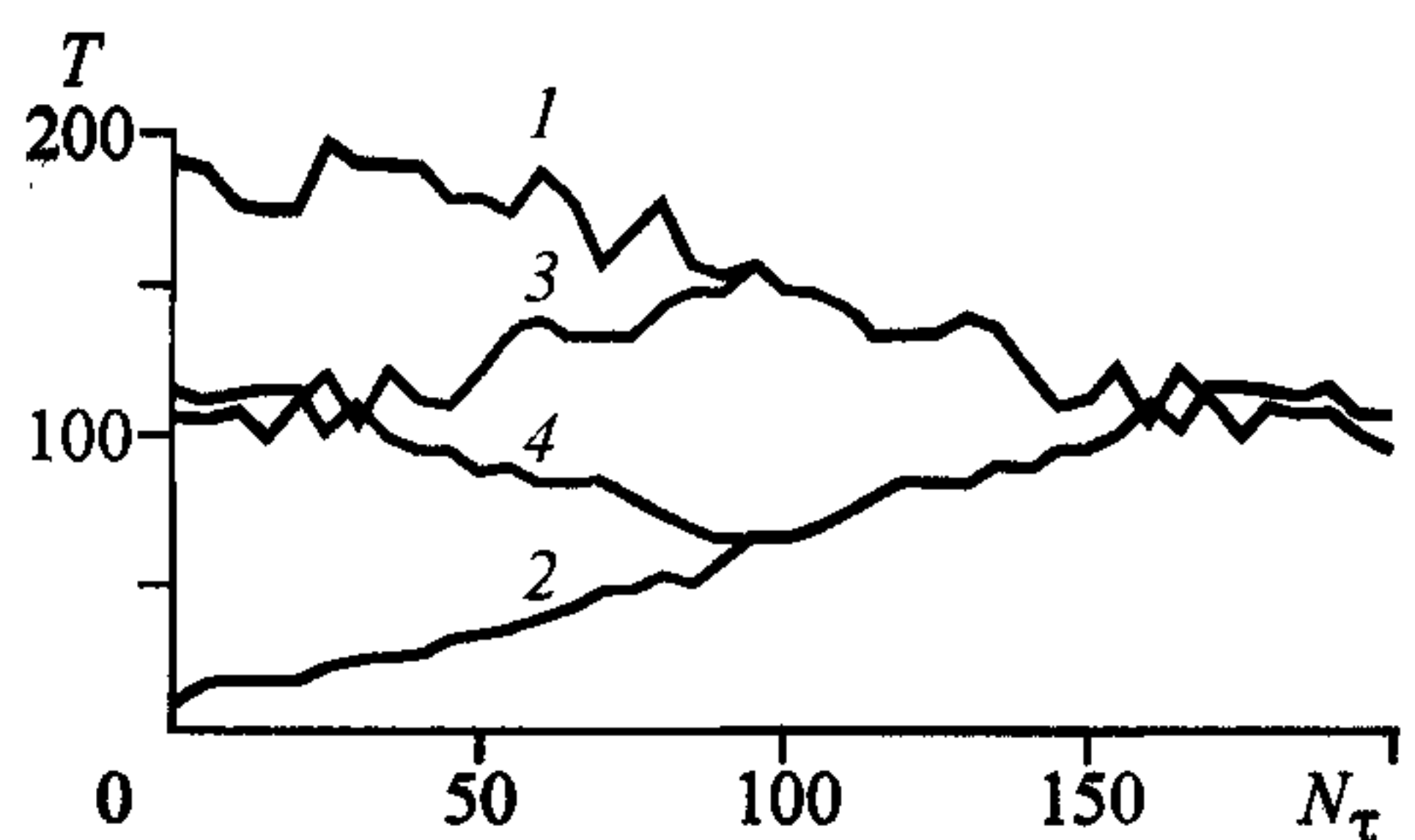
$$\frac{\partial n \langle v_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial n \langle v_i v_k \rangle}{\partial x_k} = -n \frac{\partial V}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} n \langle v^2 \rangle \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{2} n \langle v^2 v_k \rangle \right) = n \frac{\partial V}{\partial x_k} \langle v_k \rangle$$

инвариантны относительно операции  $\hat{I}_{t,p}$  ( $t' = -t$ ,  $v'_i = -v_i$ ,  $r'_i = r_i$ ), как и уравнения классической механики.

В качестве численной иллюстрации ниже приводятся данные расчета теплопроводности в 1D-кристалле Cu (задача, аналогичная приведенной в п. 9.6 Б) с температурами  $T_1^0 = 190$  К и  $T_2^0 = 9$  К. Расчет всех характеристик проводился до  $N_\tau = 19 \cdot 10^4$  ( $\tau = 0,005$ ), когда устанавливается равновесие (рис. 9.8, 1 и 2 для “температур”  $T_1$  и  $T_2$  соответственно). Затем обращалось только время

Рис. 9.8. Изменение “температур” для кристалла Cu с начальным ступенчатым профилем температуры ( $T_1^0 = 190$  К,  $T_2^0 = 9$  К) со временем при инверсии времени  $\hat{I}_t$  (1, 2 соответственно) и при инверсии времени-импульсов  $\hat{I}_{t,p}$  (3, 4).



$(t \rightarrow -t)$  и делалось столько же шагов “назад”. Температуры при этом эволюционировали по своим траекториям также “назад”, и система вернулась в первоначальное состояние с температурным профилем в виде “ступеньки”. При этом отклонения в данных не превышали 0,34 % и кривые для обратной эволюции совпали с линиями 1 и 2.

Второй численный эксперимент проводился следующим образом. Система эволюционировала до  $N_\tau = 95 \cdot 10^3$  обыкновенным образом, а затем делалось обращение времени-импульсов  $\hat{I}_{t,p}$  и осуществлялось дополнительно  $95 \cdot 10^3$  шагов. Кривые 1 и 2 претерпели излом и перешли в линии 3 и 4 соответственно. Видна полная симметрия относительно мысленной прямой  $N_\tau = 95 \cdot 10^3$ , т.е. процесс теплопроводности, как и было показано выше, оказался необратимым (аналогичные результаты получены для координат и модулей импульсов на микроуровне).

Более привычной величиной для анализа необратимости процессов является больцмановская энтропия:

$$S = - \int \rho_1(q, p) \ln \rho_1(q, p) dq dp.$$

Одночастичная функция распределения  $\rho_1$  в расчетах находилась следующим образом. Весь объем в двумерном фазовом пространстве разбивался на ячейки равной площади  $\Delta v_k = \Delta q_k \Delta p_k$  и в определенные моменты времени находилась величина  $\rho_1^{(k)} = N_k/N$ , где  $N_k$  — число частиц, попавших в  $\Delta v_k$ , а  $N$  — полное число частиц.

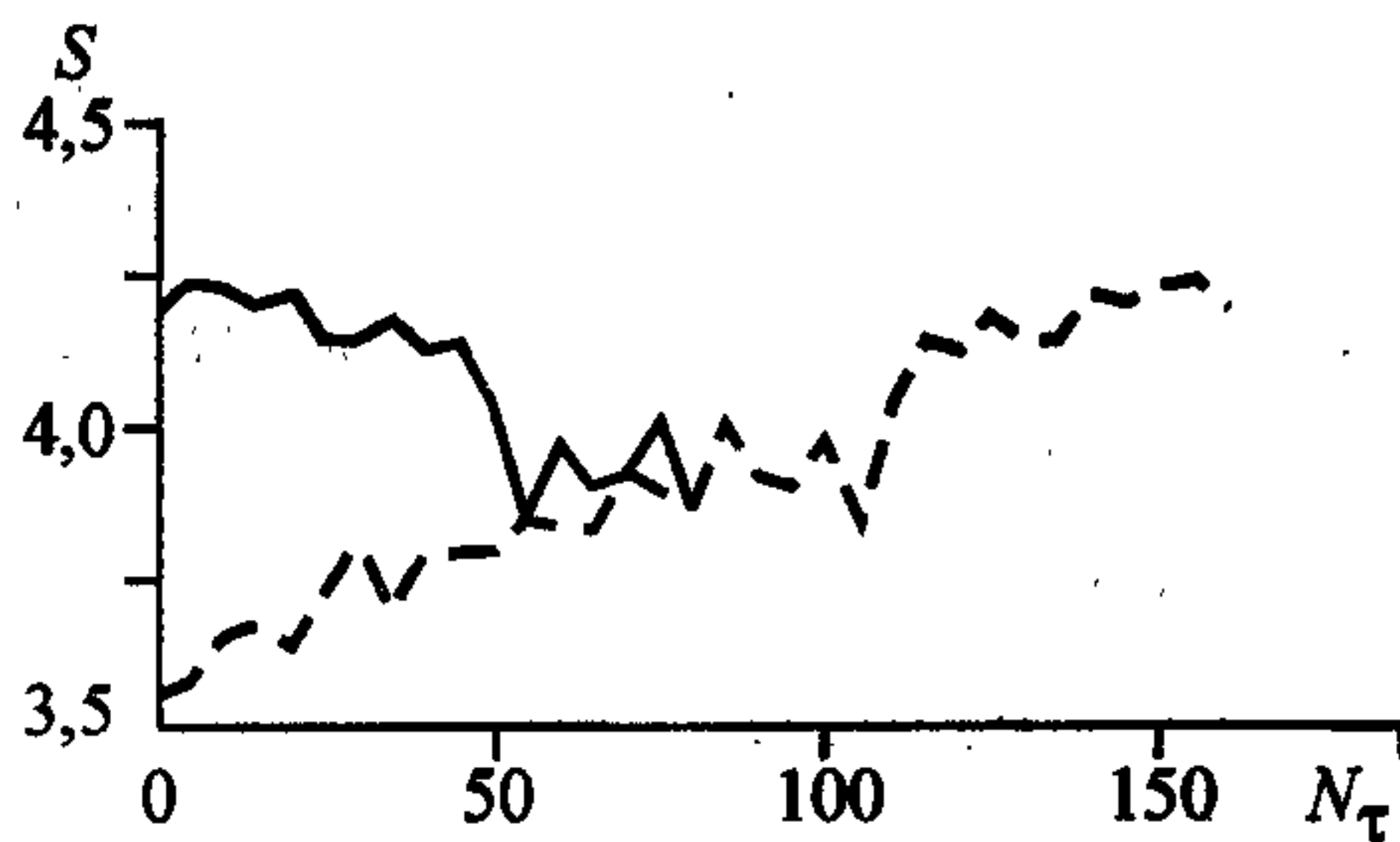
Численный эксперимент ставился следующим образом. Делалось  $16 \cdot 10^4$  шагов “вперед” (штриховая линия на рис. 9.9), затем обращалось только время ( $\hat{I}_t$ ) и делалось столько же шагов назад. Как и в случае с температурой, система вернулась в исходное состояние по этой же линии (с точностью 0,3 %), т.е. энтропия, как и все другие характеристики, ведет себя обратимым образом по отношению к инверсии времени.

Для проверки поведения энтропии по отношению к  $\hat{I}_{t,p}$  делалось  $8 \cdot 10^4$  шагов “вперед”, затем время и импульсы обращались, и делалось столько же шагов “назад” (сплошная кривая на рис. 9.9). Как видно, энтропия инвариантна относительно этой операции, а сам процесс является необратимым.

Таким образом, как уравнения механики, так и уравнения кинетики инва-



Рис. 9.9. Зависимость энтропии  $S$  при обращении времени ( $\hat{I}_t$ ) (штриховая линия) и при инверсии времени-импульсов ( $\hat{I}_{t,p}$ ) (сплошная кривая) от числа шагов по времени  $N_\tau$ .



риантны относительно обращения времени-импульсов, а эволюция системы и на микроуровне (механика), и на макроуровне (кинетика) необратима. Следовательно, между механическим и кинетическим способами описания системы нет противоречия, а результаты, полученные с применением ММД в рамках формализма Гамильтона, позволяют избежать среднее звено в схеме уравнения механики — кинетические уравнения — уравнения континуальной механики.

### 9.8. Соударение твердого тела с абсолютно жесткой стенкой

Исследование процессов в твердых телах при столкновительном взаимодействии наиболее целесообразно начать с наиболее простой системы — соударения 1D-кристалла с недеформируемой жесткой стенкой, которая моделируется потенциальным барьером. В качестве такого барьера в работе используется отталкивающая ветвь потенциала Леннарда—Джонса с параметрами:  $e = 3$ ,  $d = 1$  (в единицах п. 9.4). Барьер помещался в начало координат и, следовательно, потенциал  $i$ -го атома во внешнем поле имеет вид (9.2.5).

Предполагалось, что до соударения кристалл находится в равновесном состоянии с заданной температурой  $T_0$  и имеет начальную скорость центра масс  $v_0$ . Сам кристалл налетает справа налево, т.е. начальный импульс центра масс всегда отрицателен. В связи с такой постановкой задачи начальные координаты и импульсы задавались в соответствии с п. 9.5. Затем к импульсу каждой частицы добавлялась величина  $p_i = -m_i v_0$ , а к координате — величина  $\Delta x_0$ , которая определялась из условия малости потенциального взаимодействия барьера с кристаллом по сравнению с кинетической энергией атомов. В расчетах использовалась величина  $\Delta x_0 = 15 \text{ \AA}$ .

Особое внимание обращалось на размер системы, в связи с самой концепцией гамильтоновой модификации ММД: необходимо на минимальном разме-

ре получить явления, имеющие место в макрокристалле. В проблеме соударения твердых тел это требование эквивалентно следующему условию. Длина 1D-кристалла подбирается так, чтобы процессы на свободных границах не перекрывались и внутри кристалла наблюдался развитый процесс распространения возмущения.

Исходя из этого, в результате численного эксперимента полное число атомов  $N$  было выбрано равным  $10^3$ , что соответствует длине кристалла порядка  $0,1 \mu$ .

**Макроуровень.** Прежде всего представляет интерес анализ динамики столкновения кристалла по набору макропараметров. В качестве иллюстрации на рис. 9.10 приведена зависимость от числа шагов по времени  $N_\tau \cdot 10^3$  следующих характеристик: модуля импульса центра масс  $|P_c|$  (рис. 9.10, а); энергии центра масс  $E_c$ , внутренней энергии  $E_{in}$  и ее кинетической  $E_k$  и потенциальной  $U$  составляющих (рис. 9.10, б, 1—4

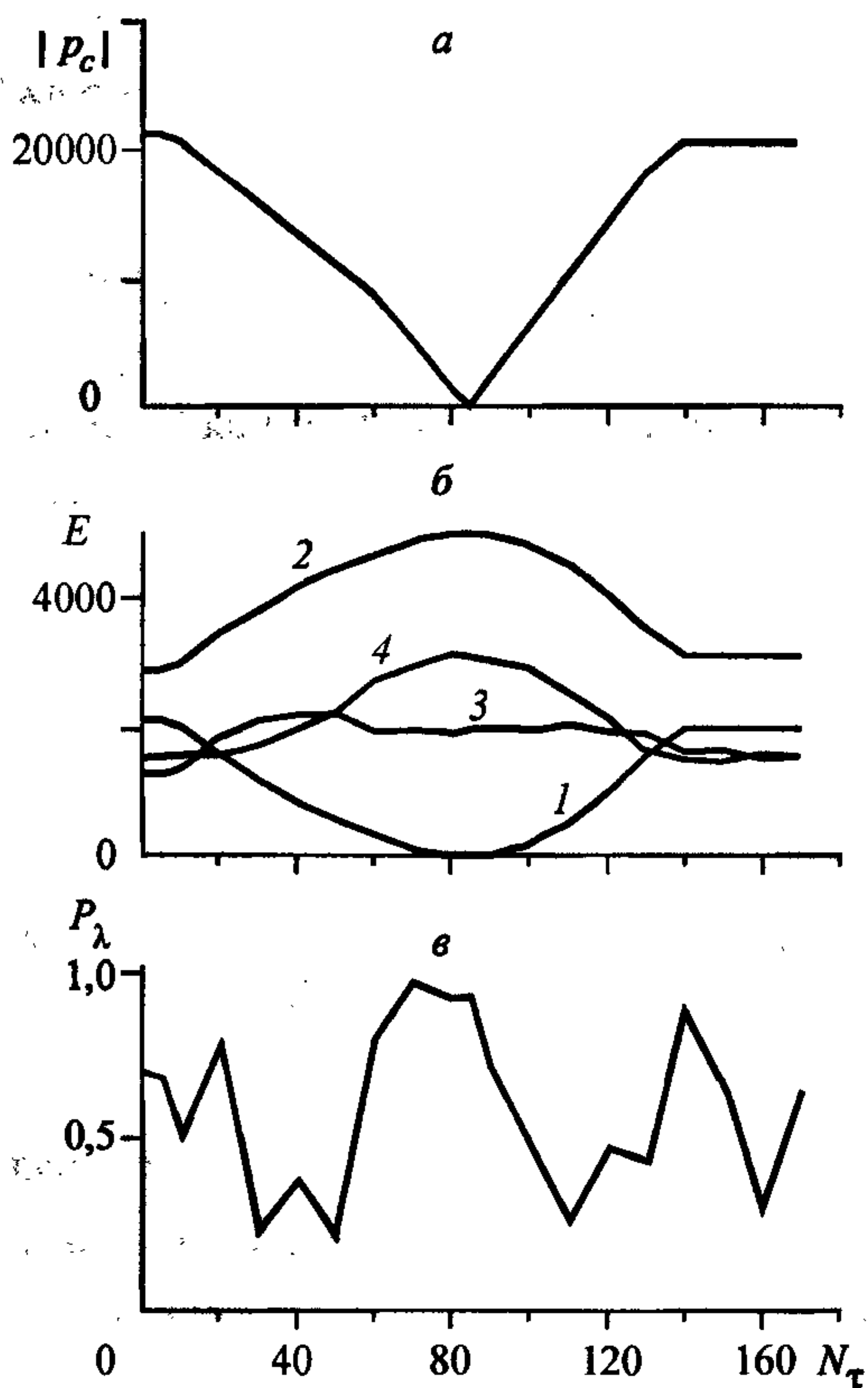


Рис. 9.10. Столкновение кристалла Cu с потенциальным барьером.

Поясн. см. в тексте.

соответственно); вероятность Колмогорова  $P_\lambda$  (рис. 9.10, в). Данные получены для кристалла Cu с начальной температурой  $T_0 = 200$  К и начальной скоростью  $|v| = 200$  м/с с шагом по времени  $\tau = 10^{-15}$  с. Зависимость  $|P_c|$  от времени позволяет идентифицировать моменты начала и конца взаимодействия кристалла с барьером, т.е. длительность взаимодействия  $\tau_c$ , и момент полной остановки. Величина  $\tau_c$  представляет особый интерес, поскольку эта интегральная величина рассчитывается и в рамках континуальной механики, что позволяет как сравнить результаты двух концептуальных подходов, так и скорректировать ряд феноменологических коэффициентов, используемых в механике сплошных сред.



Энергетические характеристики позволяют дать физический анализ исследуемого явления. Особый интерес представляет уменьшение энергии центра масс  $E_c$  за счет перехода во внутреннюю энергию  $E_{in}$ . Столкновение носит диссипативный характер, и величина

$$\delta E = (E_c^{(f)} - E_c^{(0)}) / E_c^{(0)} \quad (9.8.1)$$

(где  $E_c^{(0)}$  и  $E_c^{(f)}$  — кинетические энергии кристалла как целого до и после столкновения) является важным параметром, который характеризует энергию, ушедшую на разогрев и разрушение кристалла, активацию внутренних степеней свободы, пластичность.

Величины  $U$  и  $E_k$  (рис. 9.10, б) позволяют сделать вывод, в каком виде запасается внутренняя энергия в процессе столкновения. Если на начальном этапе происходит большее увеличение энергии хаотического движения (температуры кристалла), то в районе остановки большая часть энергии  $E_c$  переходит в потенциальную энергию сжатия кристалла. При разгоне твердого тела эти энергии выравниваются к концу взаимодействия. На рис. 9.10, в приведена вероятность Колмогорова  $P_\lambda$ . На участках торможения и разгона кристалла наблюдается резкое отклонение от равновесного состояния. В точке остановки  $P_\lambda$  близка к единице, т.е. распределение по скоростям максвелловское, хотя состояние далеко от равновесного, так как  $U$  значительно больше  $E_k$ . После выхода кристалла из области взаимодействия ( $N_t > 150 \cdot 10^3$ )  $P_\lambda < 0,5$ , но состояние приближается к равновесному, так как  $P_\lambda$  растет, а  $E_k \approx U$ .

Представленная на рис. 9.10 картина динамики макропараметров является типичной для столкновения кристаллов с абсолютно жесткой стенкой в широкой области изменения температур и скоростей. Численные исследования проводились в интервалах: температур — 0—200 К, скоростей — 0,005—10 км/с. Если по температурам нет физических ограничений для увеличения верхнего предела, то при увеличении скорости  $v_0$  необходимо учитывать влияние электронных эффектов на изменение потенциалов межатомного взаимодействия.

В соответствии с описанной выше методикой была исследована зависимость длительности столкновения от температуры, длины кристалла и скорости  $v_0$ . Численный анализ показал, что в интервале от 0 до 200 К  $\tau_c$  не зависит от температуры.

Изменяя количество атомов в цепочке от 500 до 5000, линейно менялась и длина цепочки  $L$ . При этом линейно изменялось и время столкновения  $\tau_c$ . Это

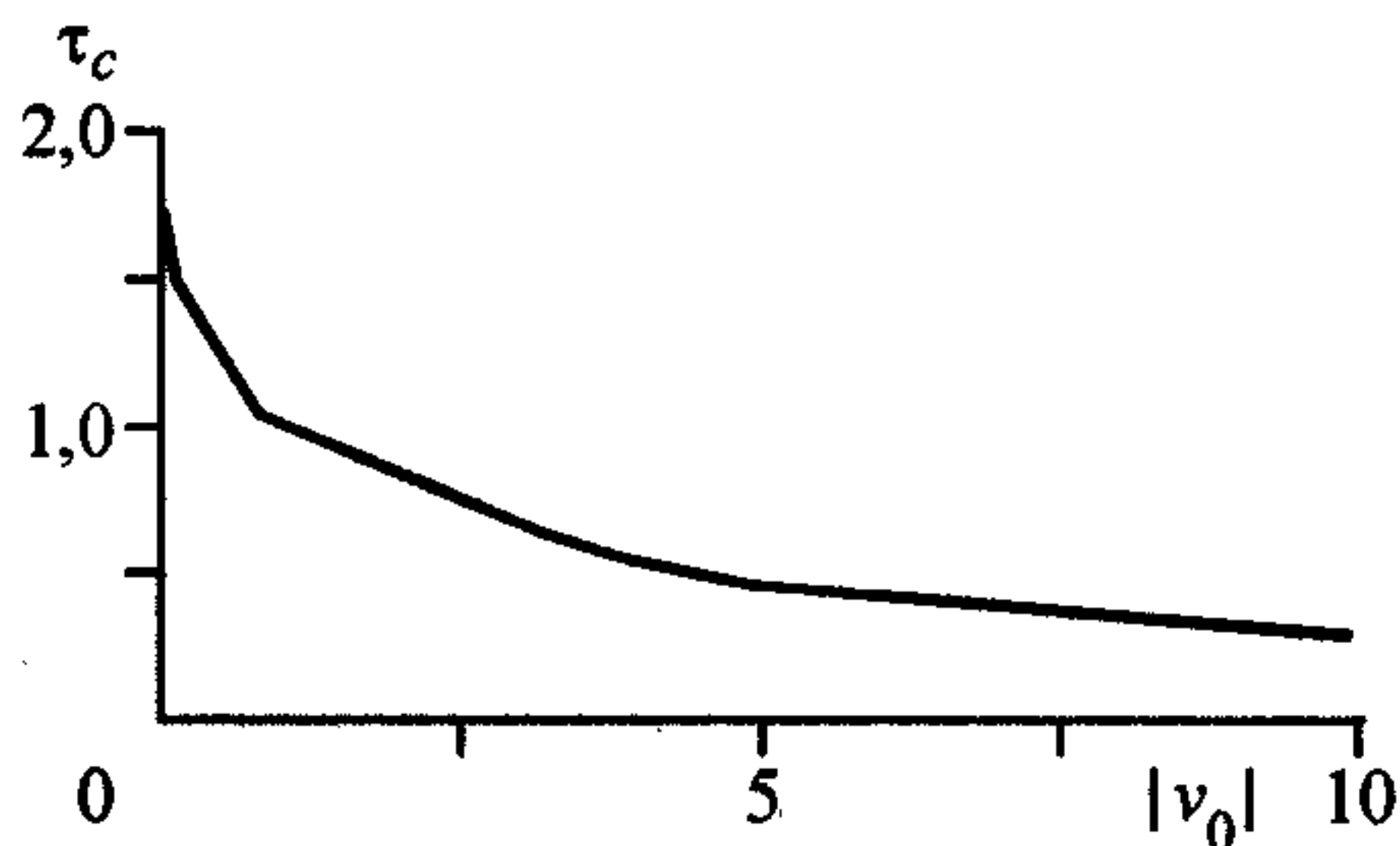


Рис. 9.11. Зависимость времени столкновения  $\tau_c$  ( $10^{-10}$  с) кристалла Cu от модуля начальной скорости  $|v_0|$  (км/с).

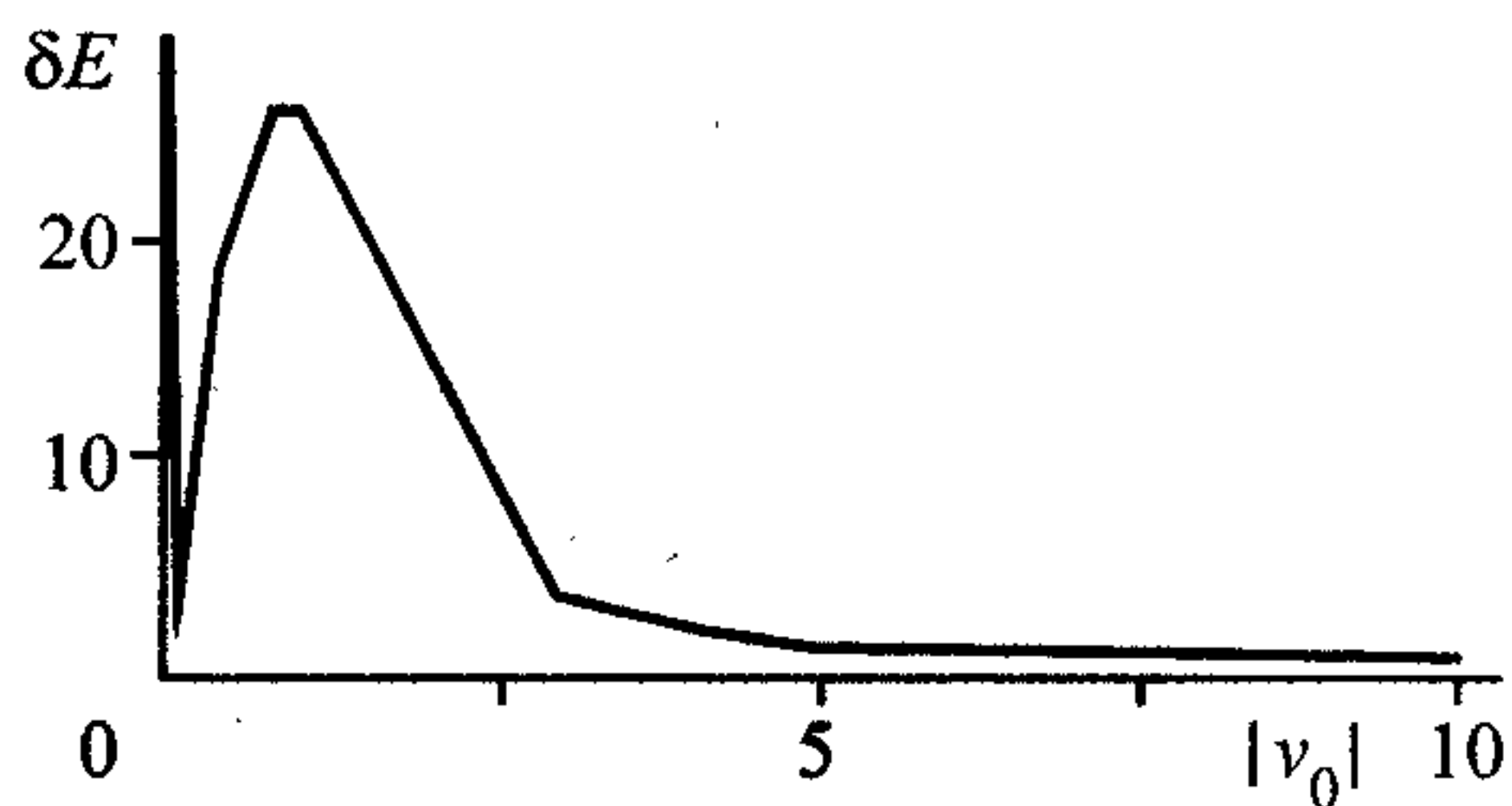


Рис. 9.12. Зависимость коэффициента диссипации  $\delta E$  (%) от модуля начальной скорости  $|v_0|$  (км/с) для 1D-кристалла Cu.

позволило ввести некоторую интегральную скорость  $a_w = L/\tau_c$ , которая не зависит ни от температуры, ни от  $L$ . Зависимость  $\tau_c$  от  $v_0$  представлена на рис. 9.11. Видна сильная нелинейность: при увеличении скорости от 0,005 до 10 км/с длительность  $\tau_c$  уменьшилась примерно в три раза.

Аналогичное исследование проведено и для коэффициента диссипации  $\delta E$  (9.8.1). На рис. 9.12 представлена зависимость  $|\delta E|$  от скорости  $v_0$ . Наблюдается резкий минимум в районе  $v_0 \approx 200$  м/с с последующим формированием максимума около  $v_0 \approx 1$  км/с. При дальнейшем увеличении скорости  $v_0$  относительная величина  $\delta E$  монотонно уменьшается, хотя абсолютное значение  $(E_c^{(0)} - E_c^{(f)})$  увеличивается.

**Мезоуровень.** Рассмотренные выше макропараметры дают описание системы как целого. Однако для более глубокого физического анализа необходимо исследование системы на более детализированном уровне — мезоуровне. Для этого вся цепочка делится на подсистемы — ячейки по 10 атомов. В каждой ячейке определялись: линейная плотность  $\rho$ , скорость центра масс  $v_c$ , внутренняя энергия  $E_{in}$  и ее доли — потенциальная  $U$  и кинетическая  $E_k$  (с точностью до константы она совпадает с температурой) энергии. Это позволило получать картину распределения этих величин по длине кристалла в любой момент времени в течение всего процесса столкновения.

В качестве примера на рис. 9.13, *a—d* представлено распределение этих величин в момент сформировавшейся ударной волны в кристалле Cu для  $T_0 = 200$  К и  $|v_0| = 1$  км/с. По оси абсцисс отложены координаты центров масс ячеек. Замеряя координаты фронта в различные моменты времени, можно определить скорость распространения ударной волны  $a_m$  в кристалле. Таким способом



$a_m$  была рассчитана в указанном выше диапазоне температур и скоростей  $v_0$ . Аналогично величине  $\tau_c$ , зависимость скорости  $a_m$  от температуры, в пределах погрешности обработки численных данных, не обнаружена. Зависимость  $a_m$  от начальной скорости кристалла  $v_0$  близка к кусочно-линейной и приведена на рис. 9.14, а.

Для малых скоростей налетающего кристалла скорость  $a_m = 3,69$  км/с и остается постоянной до  $v_0 \approx 200$  м/с. Эта область соответствует слабому удару, а скорость распространения возмущения — скорости звука. При температурах, близких к абсолютному нулю, теоретическое значение скорости звука равно 3,76 км/с, экспериментальное значение при  $T = 300$  К — 3,6 км/с. Таким образом, найденное численное значение 3,69 км/с совпадает в пределах 2,5% с экспериментальным, и такое сравнение служит дополнительной проверкой используемой модели и численной схемы.

Начиная с  $v_0 = 200$  м/с  $a_m$  начинает зависеть от  $v_0$ . При этом же значении наблюдается и минимум  $\delta E$  (8.1). Это объясняется тем, что возмущения в кристалле становятся достаточно большими, и механизм распространения возмущения уже обусловлен взаимодействием ангармонических мод.

Смена режима распространения возмущений наблюдается также и при достижении  $v_0$  скорости звука. Величина  $a_m$  слабо меняется в районе  $v_0 \approx 5$  км/с, а затем опять наблюдается линейный рост с увеличением  $v_0$ , но с меньшим углом наклона.

Как показали численные исследования, скорость ударной волны сильно

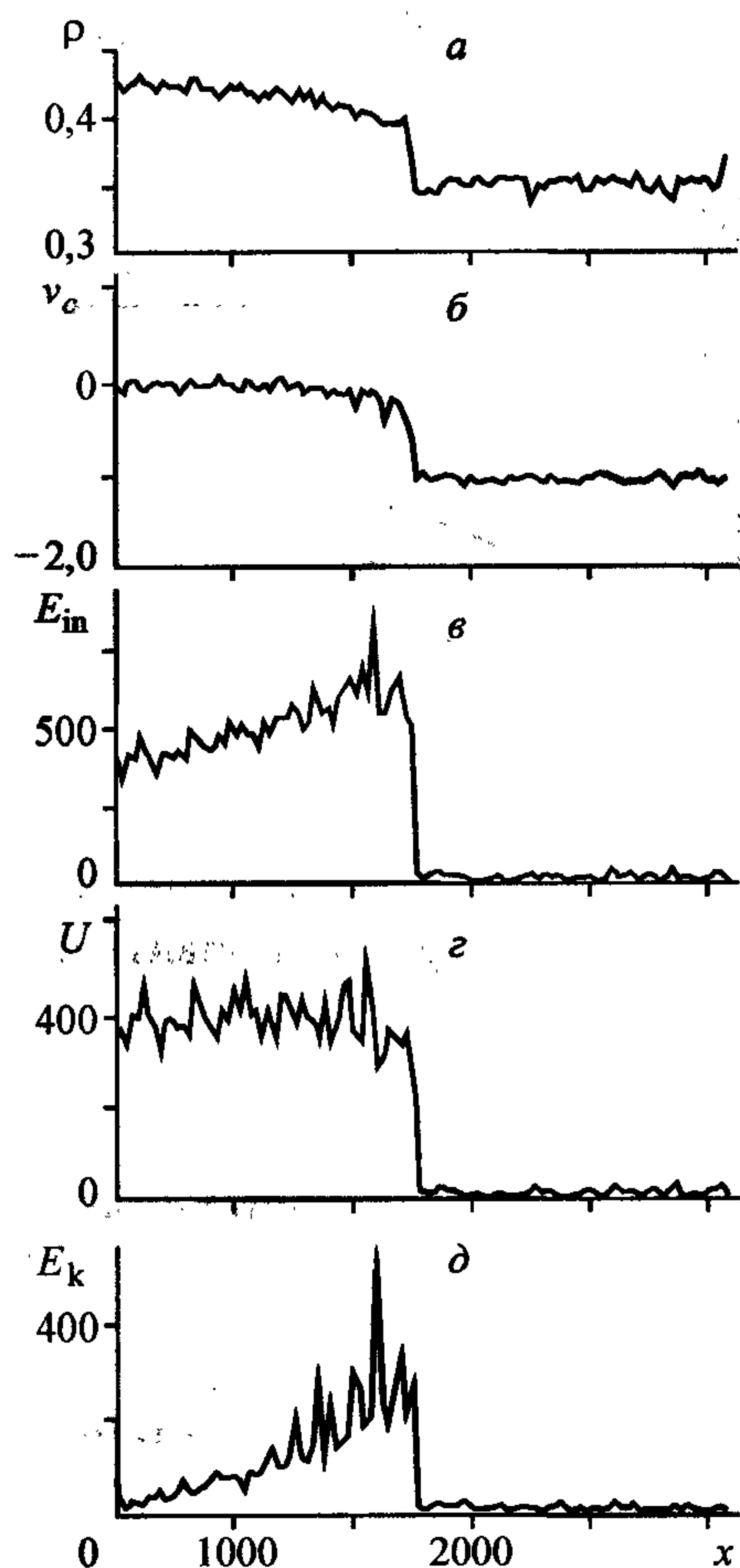


Рис. 9.13. Ударная волна в кристалле Си. Начальные параметры:  $T_0 = 200$  К и  $v_0 = 1$  км/с. а — плотность  $\rho$ ; б — скорости центров масс ячеек  $v_c$ ; в — внутренняя энергия  $E_{in}$ ; г — потенциальная  $U$ ; д — кинетическая  $E_k$  доли внутренней энергии.

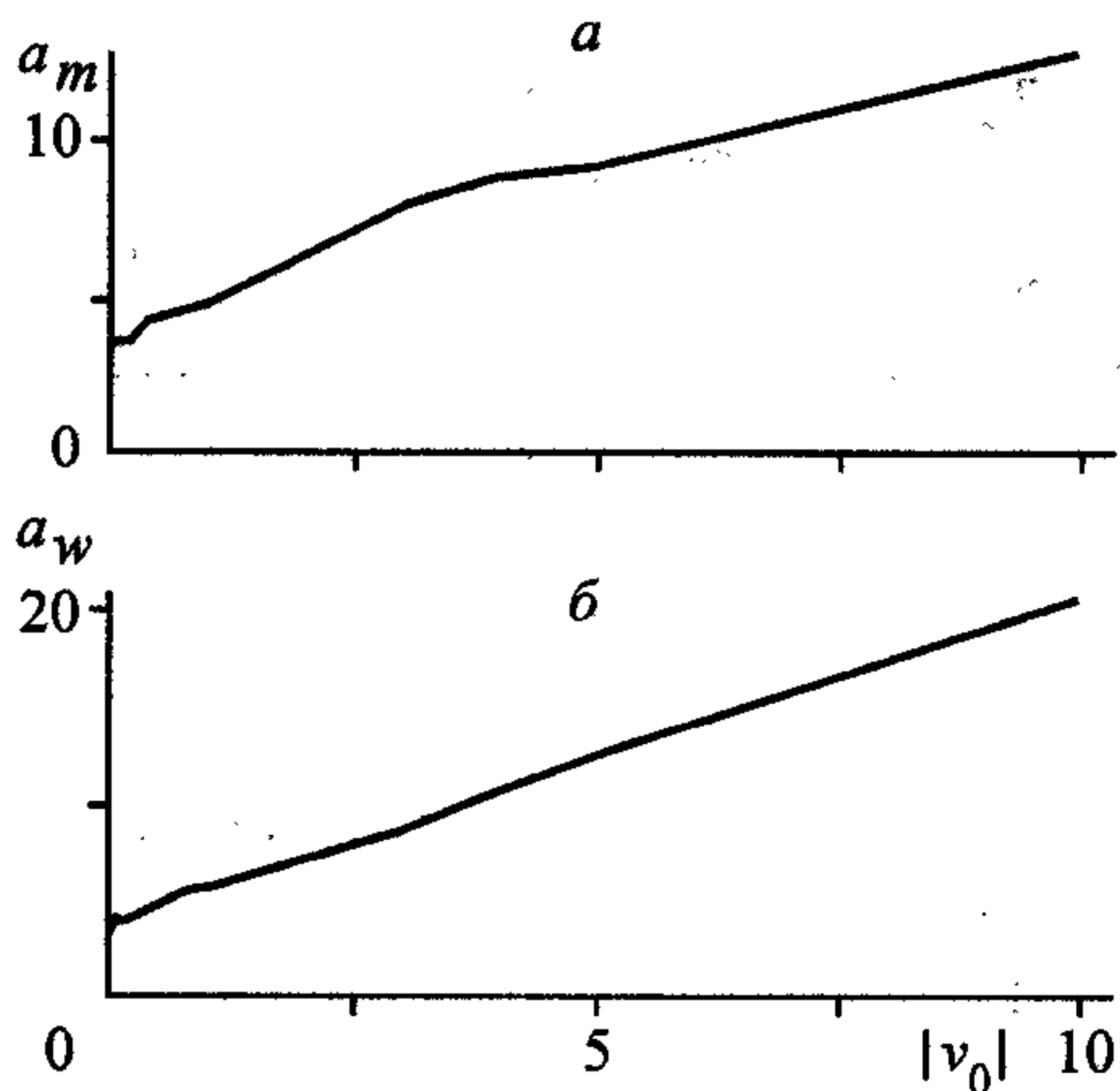


Рис. 9.14. Зависимость скорости распространения возмущений  $a_m$  (км/с) (а) и скорости  $a_w$  в кристалле Cu (б) от начальной скорости кристалла  $v_0$  (км/с).

Скорости фронта на рис. 9.14, а получены как некоторое среднее: брались полное время прохождения фронта от контакта до свободной границы и полный пройденный путь за это время.

Одновременно со скоростью распространения ударной волны  $a_m$  исследовалась и зависимость скорости  $a_w = 2L/\tau_c$  от величины  $v_0$  (рис. 9.14, б). Оказалось, что для малых  $v_0$  значения  $a_m$  и  $a_w$  почти совпадают, но с увеличением начальной скорости кристалла  $a_w$  начинает значительно превышать скорость

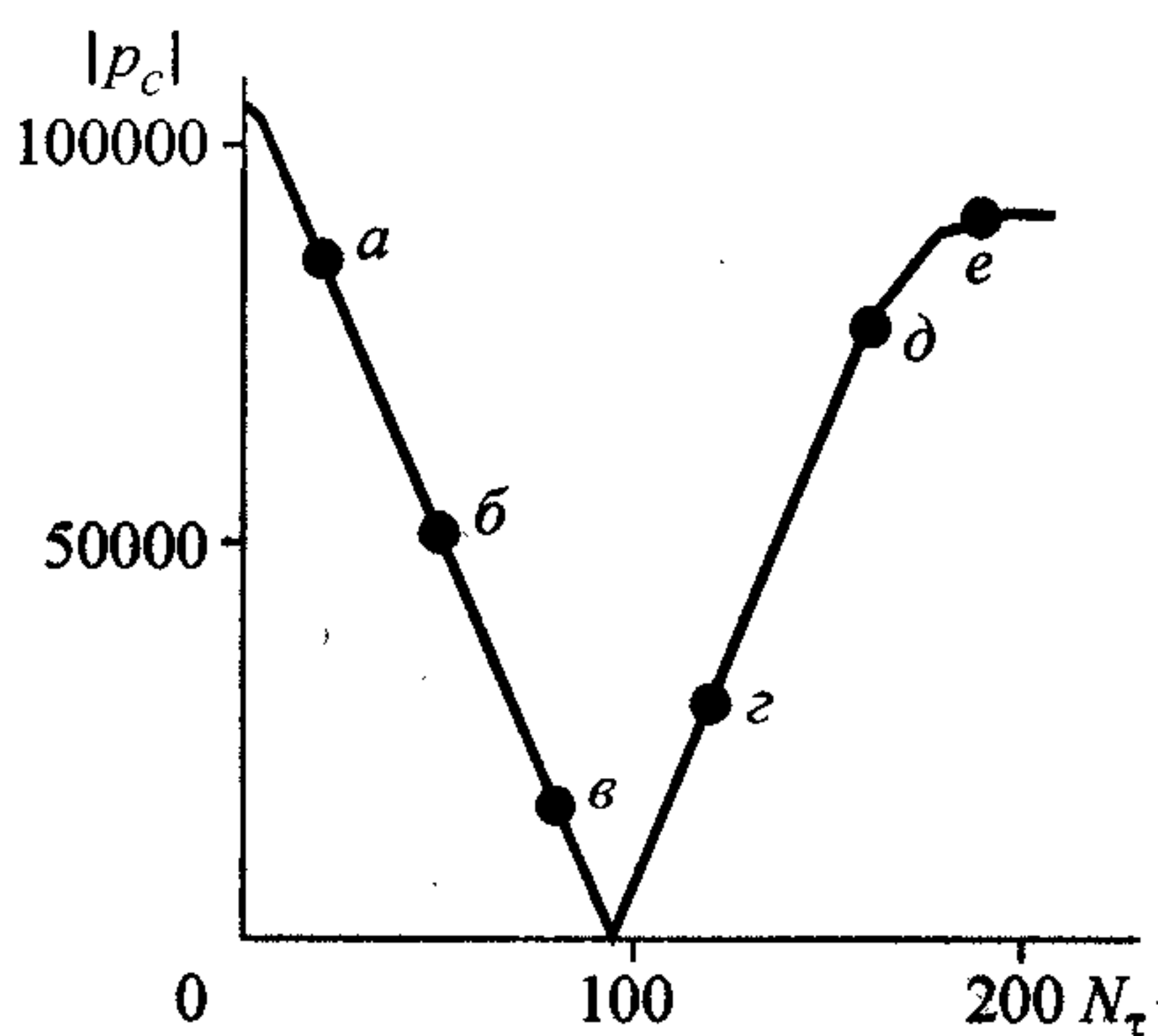


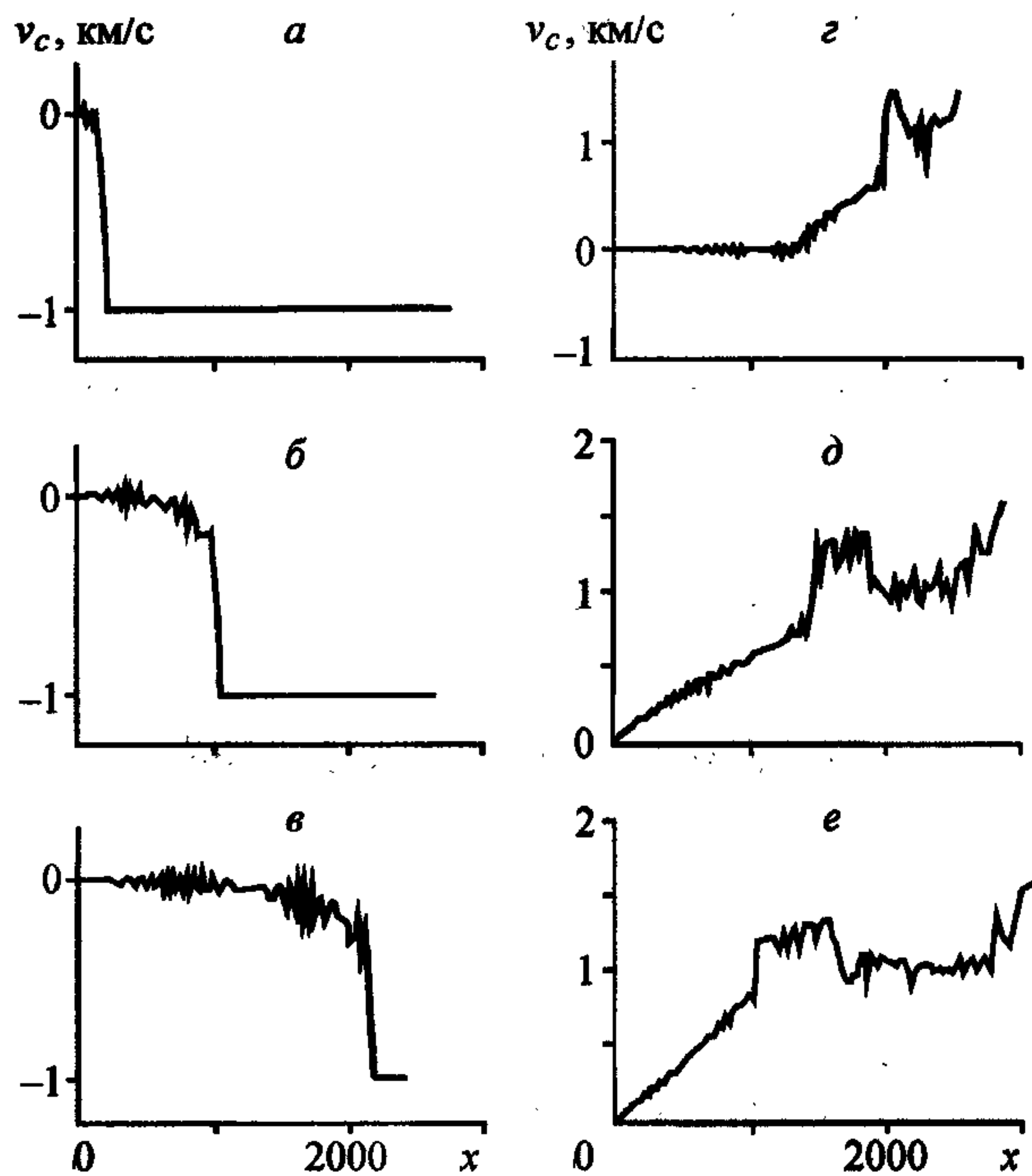
Рис. 9.15. Зависимость модуля импульса центра масс кристалла Cu от числа шагов по времени  $N_\tau \cdot 10^3$ .

Поясн. см. в тексте.

ударной волны. Для анализа этого явления были получены развертки во времени фронта ударной волны на мезоуровне в наиболее характерные фазы соударения. Для иллюстрации ниже приведены данные для кристалла Cu при  $T_0 = 0$  К, имеющего начальную скорость  $|v_0| = 1$  км/с. На рис. 9.15 представлена зависимость  $|P_c|$  от числа шагов  $N_\tau$  (при  $\tau = 0,005$ ) и точками на кривой отмечены моменты времени, в которые сделаны развертки на мезоуровне. На рис. 9.16, а—е представлены скорости центров

флуктуирует при ее прохождении от области контакта до свободной границы. Характер флуктуаций носит различный характер, зависящий от скорости соударения  $v_0$ . Так, например, для  $|v_0| = 800$  м/с значения скорости ударной волны достаточно равномерно заполняют интервал от 4,5 до 5,5 км/с. С другой стороны, для  $|v_0| = 4$  км/с значения  $a_m$  группируются около значений 7,5 и 10,2 км/с. Таким образом, следует ожидать, что в реальном трехмерном случае фронт ударной волны не будет гладкой поверхностью, а будет иметь “шероховатости” порядка  $10 \div 100$  Å. Значения скорости





**Рис. 9.16.** Структура фронта ударной волны для кристалла Си в моменты:  $a$  —  $N_{\tau} = 20 \cdot 10^3$ ;  $b$  —  $N_{\tau} = 50 \cdot 10^3$ ;  $v$  —  $N_{\tau} = 80 \cdot 10^3$ ;  $z$  —  $N_{\tau} = 120 \cdot 10^3$ ;  $d$  —  $N_{\tau} = 160 \cdot 10^3$ ;  $e$  —  $N_{\tau} = 190 \cdot 10^3$ . Ост. поясн. см. в тексте.

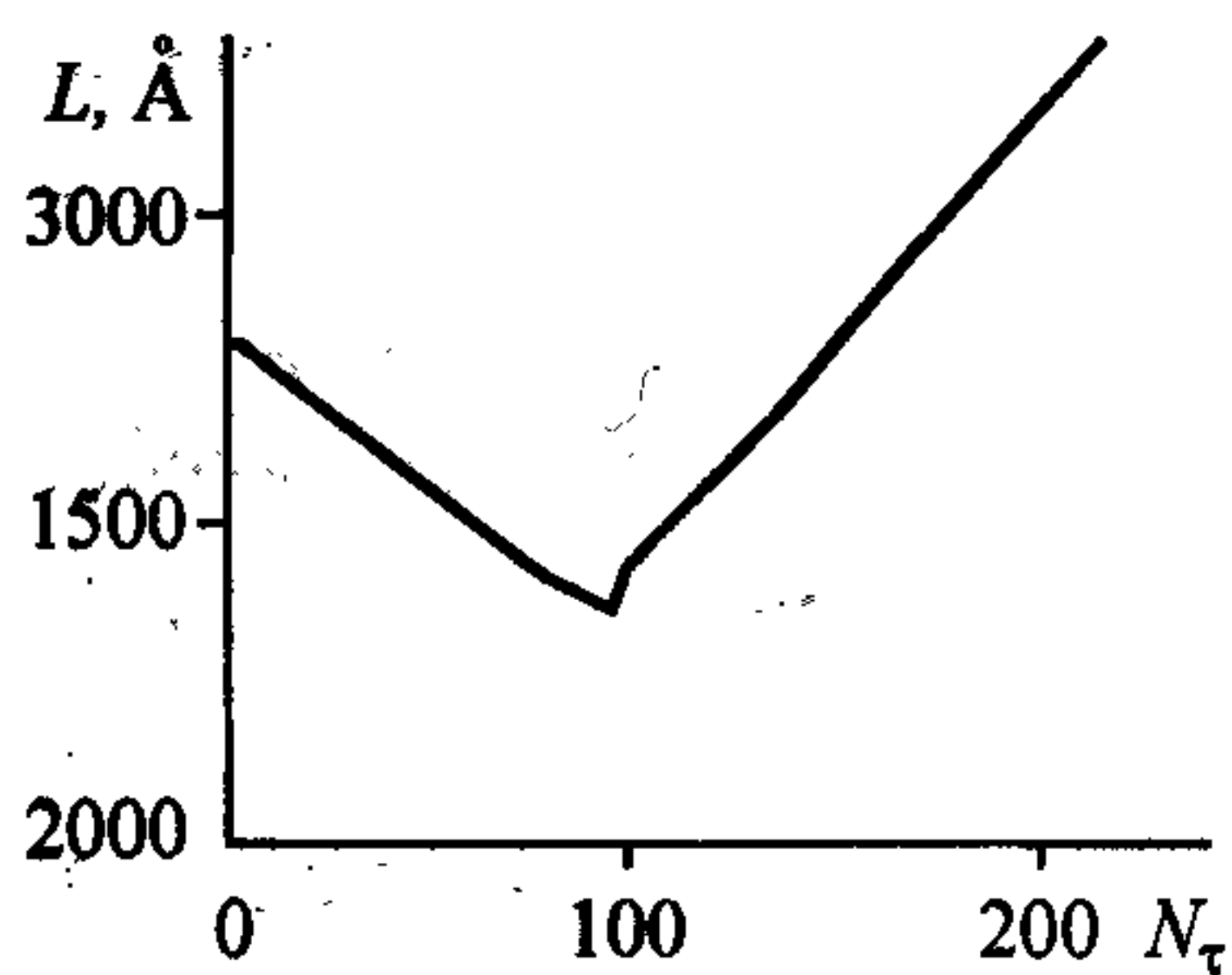
масс ячеек (на оси ординат отложены координаты центров масс ячеек). Точка  $a$  на рис. 9.15 соответствует началу формирования ударной волны (рис. 9.16,  $a$ ). Затормозились только ближайшие к барьеру ячейки. Точка  $b$  соответствует развитой ударной волне (см. рис. 9.16,  $b$ ), а точка  $v$  иллюстрирует подход к свободной границе (см. рис. 9.16,  $v$ ). В момент  $z$  ударная волна отразилась от свободной границы (см. рис. 9.16,  $z$ ). При этом сильно изменился ее профиль. Появилась область с достаточно гладким профилем возрастания скорости — своеобразный предвестник, затем — область скачкообразного роста скорости, плато размером около  $500 \text{ \AA}$  с последующим резким падением скорости ячеек. Свободная граница движется со скоростью порядка  $1,6 \text{ км/с}$ . Последующие моменты  $d$  и  $e$  (см. рис. 9.15) соответствуют окончанию взаимодействия кристалла с барьером. Как видно (см. рис. 9.16,  $d$ ,  $e$ ), предвестник (скорость  $\approx 6,25 \text{ км/с}$ ) опережает волну возмущения, которая движется со скоростью  $\approx 2,85 \text{ км/с}$ , и в момент  $N_{\tau} = 165 \cdot 10^3$  уже достигает контакта с барьером. В точке  $e$  (см. рис. 9.15) взаимодействие кристалла с барьером уже прекратилось, однако состояние системы далеко от равновесного (см. рис. 9.16,  $e$ ).

Таким образом, необходимо выделить две основные фазы столкновения. Первая соответствует распространению ударной волны до свободной границы по невозмущенному кристаллу, находящемуся в равновесном состоянии, а профиль ударной волны имеет вид ступеньки. Приведенные выше данные для скорости  $a_m$  (см. рис. 9.14, *a*) получены для этой фазы. С точки зрения макронаблюдателя первая фаза включает интервал от начала взаимодействия до полной остановки кристалла (см. рис. 9.15). Вторая фаза включает прохождение возмущения от свободной границы до контакта кристалла с барьером. Сам фронт возмущения имеет сложный профиль, отличный от привычного в виде ступеньки. Это объясняется тем, что возмущение распространяется по сильнодеформированному кристаллу, находящемуся в неравновесном состоянии. Эта фаза соответствует области разгона кристалла до некоторой постоянной скорости и прекращения взаимодействия с барьером (см. рис. 9.15).

В соответствии с тем, что эти фазы имеют совершенно различную картину развития внутренних процессов, также отличаются и механизмы формирования скорости  $a_w$ .

Хорошо видно (см. рис. 9.16, *a—в*), как ударная волна движется со скоростью  $a_m$  навстречу свободной границе стержня, у которого скорость в лабораторной системе отсчета  $v_0$ .

Для наглядности на рис. 9.17 представлена зависимость длины кристалла от времени. В этом случае  $a_w = a_m + |v_0|$ . Во второй фазе процесс протекает значительно сложнее. С одной стороны, время этой стадии столкновения определяется тем, что возмущение должно пройти по стержню, длина которого стала значительно меньше первоначальной. С другой стороны, уже невозможно вы-



**Рис. 9.17.** Зависимость длины кристалла  $L$  (Å) от числа шагов по времени  $N_\tau$ . Начальная температура  $T_0 = 0$  К и  $|v_0| = 1$  км/с.

делить явно составляющую возмущения, скорость которой определяла бы интервал разгона кристалла. Действительно, к моменту  $N_\tau = 160 \cdot 10^3$  предвестник уже достиг контакта кристалла со стенкой, скачок находится примерно в середине стержня (см. рис. 9.16, *д*), а сам стержень продолжает ускоряться (см. рис. 9.15). В момент прекращения взаимодействия стержня со стенкой (см. рис. 9.15, точка *e*) предвестник все еще находится у контакта, а скачок несколько сдвинулся к началу стержня (см. рис. 9.16, *e*). Таким образом, уже нет такой



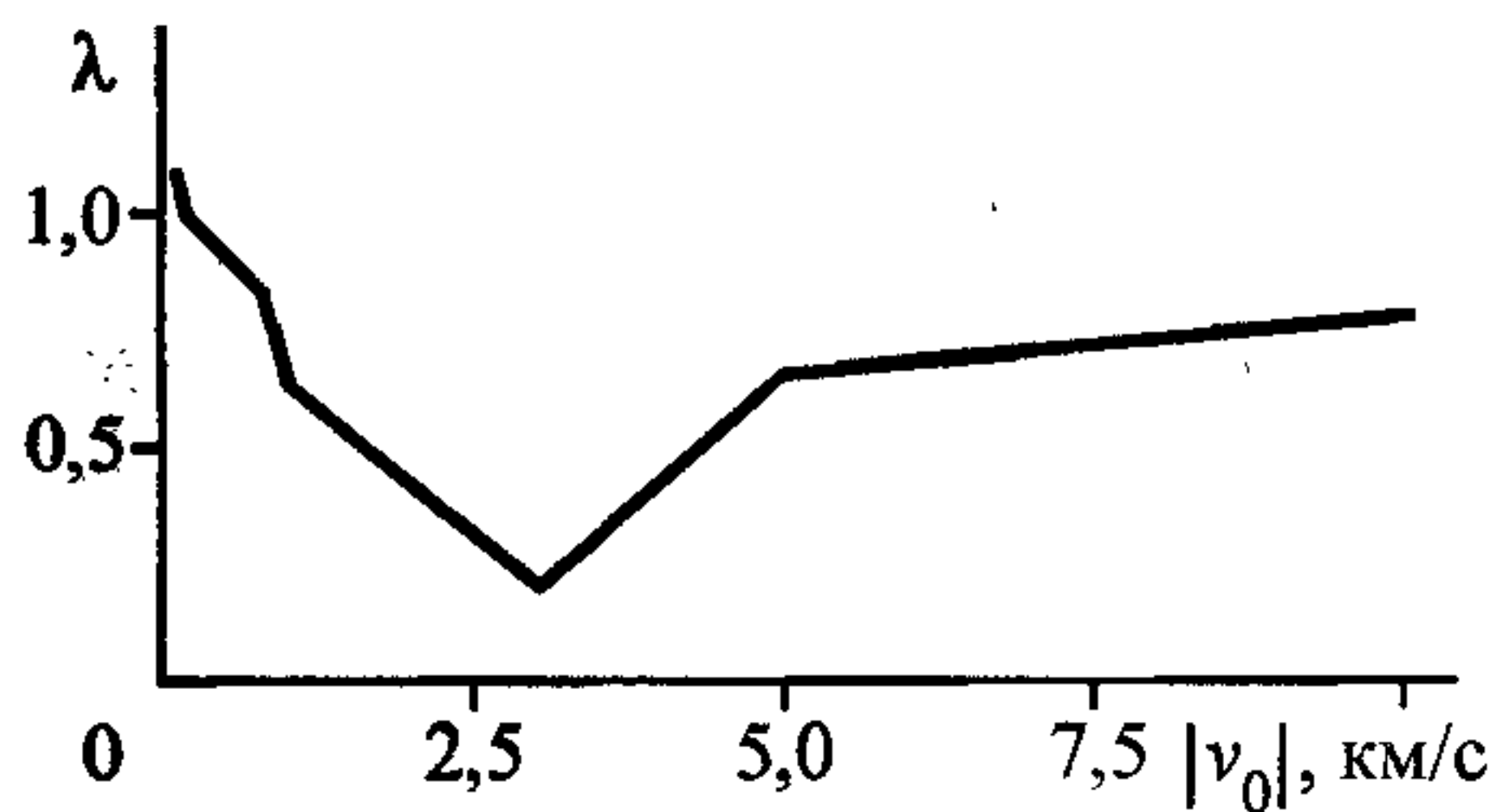


Рис. 9.18. Зависимость коэффициента  $\lambda$  от модуля начальной скорости кристалла Cu.

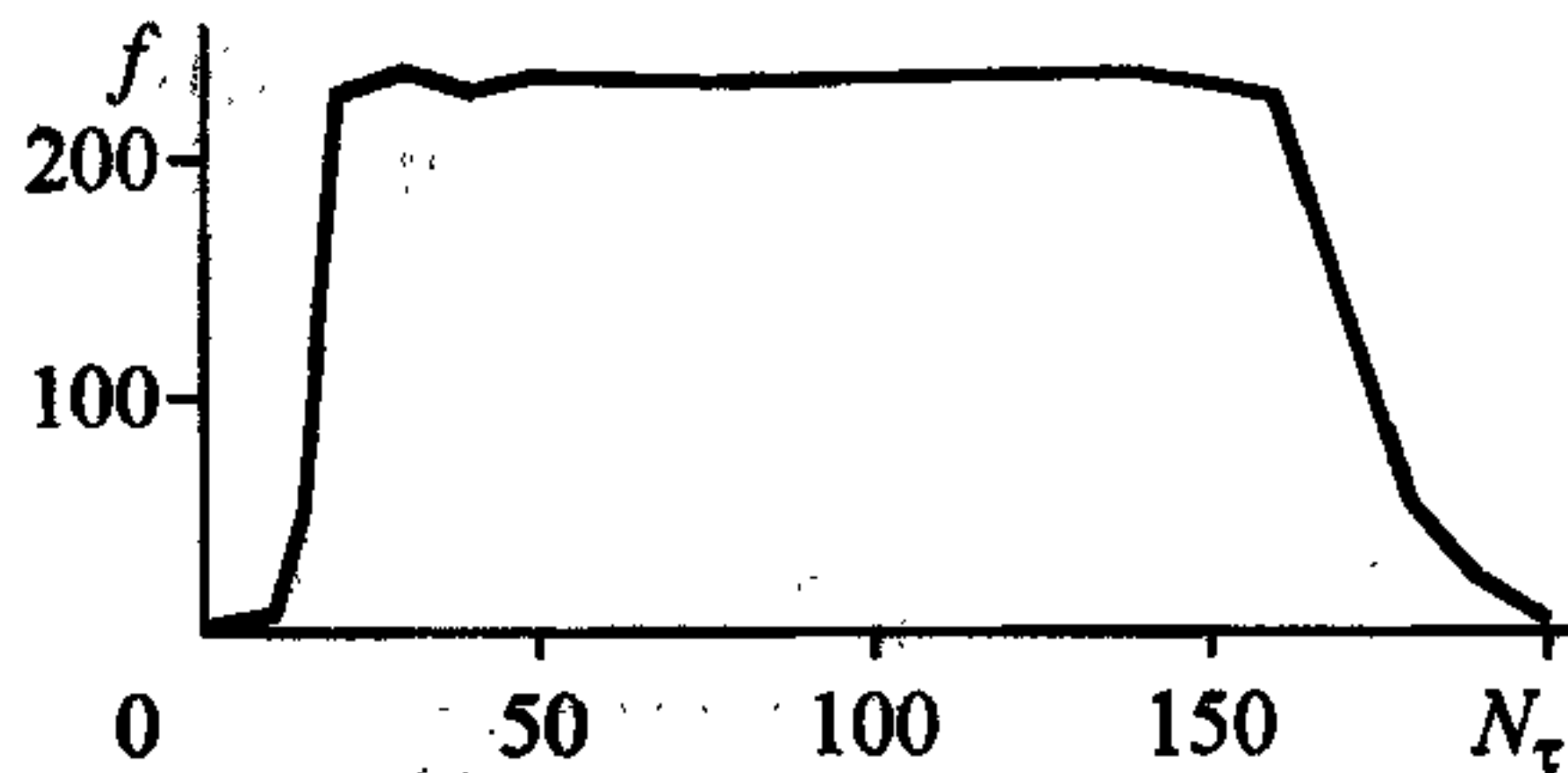


Рис. 9.19. Зависимость силы, действующей со стороны жесткой недеформируемой стенки на кристалл Cu, от времени.

Поясн. см. в тексте.

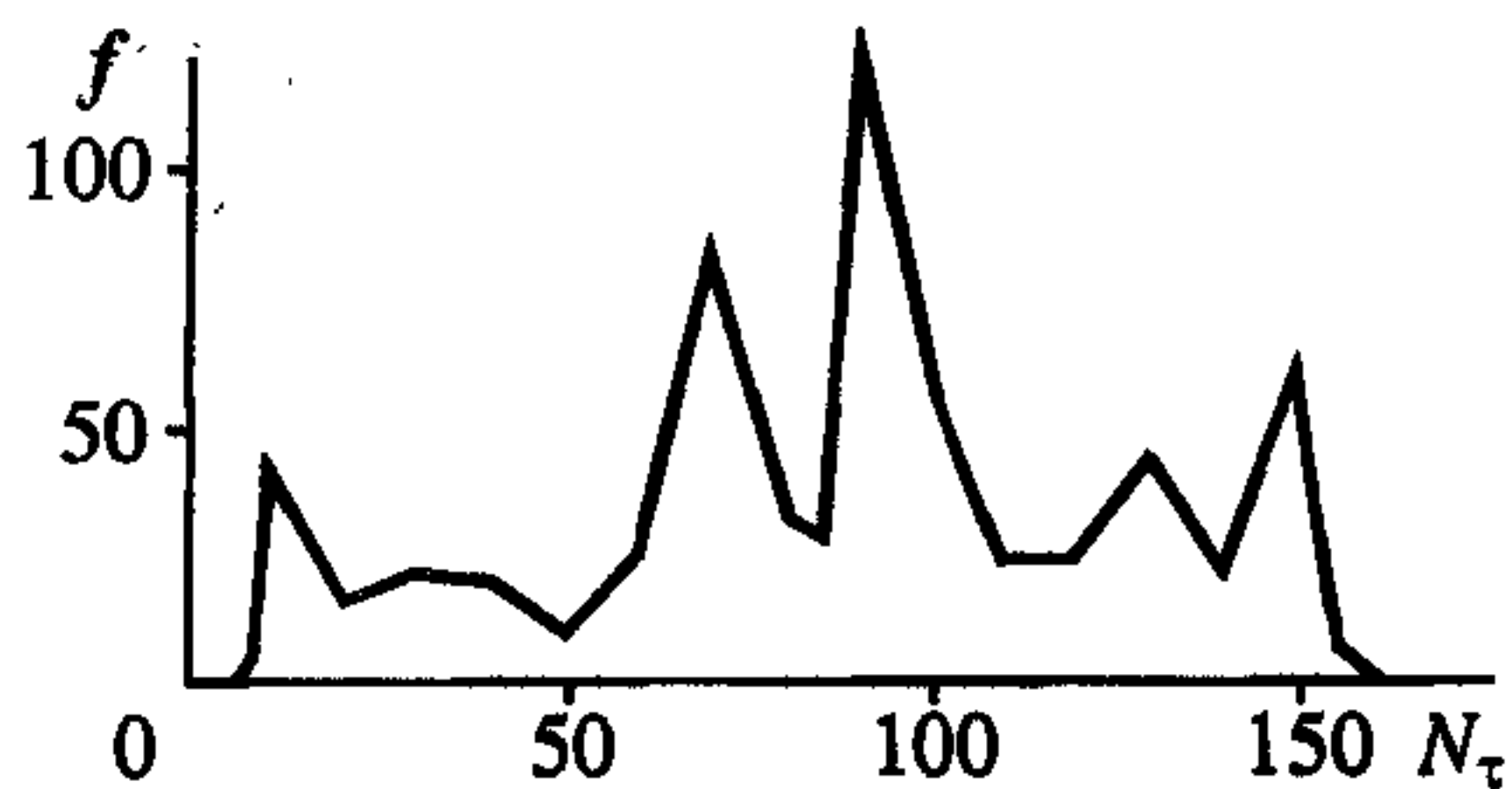
простой физической картины, как в первой фазе, и наиболее удобной является аппроксимация вида:  $a_w = a_m + \lambda(v_0)|v_0|$ . Коэффициент  $\lambda$  приведен на рис. 9.18. В области малых  $v_0$  возмущение очень мало и  $\lambda \approx 1$ . Затем наблюдаются значительные отклонения  $\lambda$  от этого значения в районе околосвуковых значений  $v_0$ . При высоких скоростях возмущение велико, состояние кристалла уже меньше сказывается на распространении фронта возмущений и  $\lambda$  опять приближается к единице.

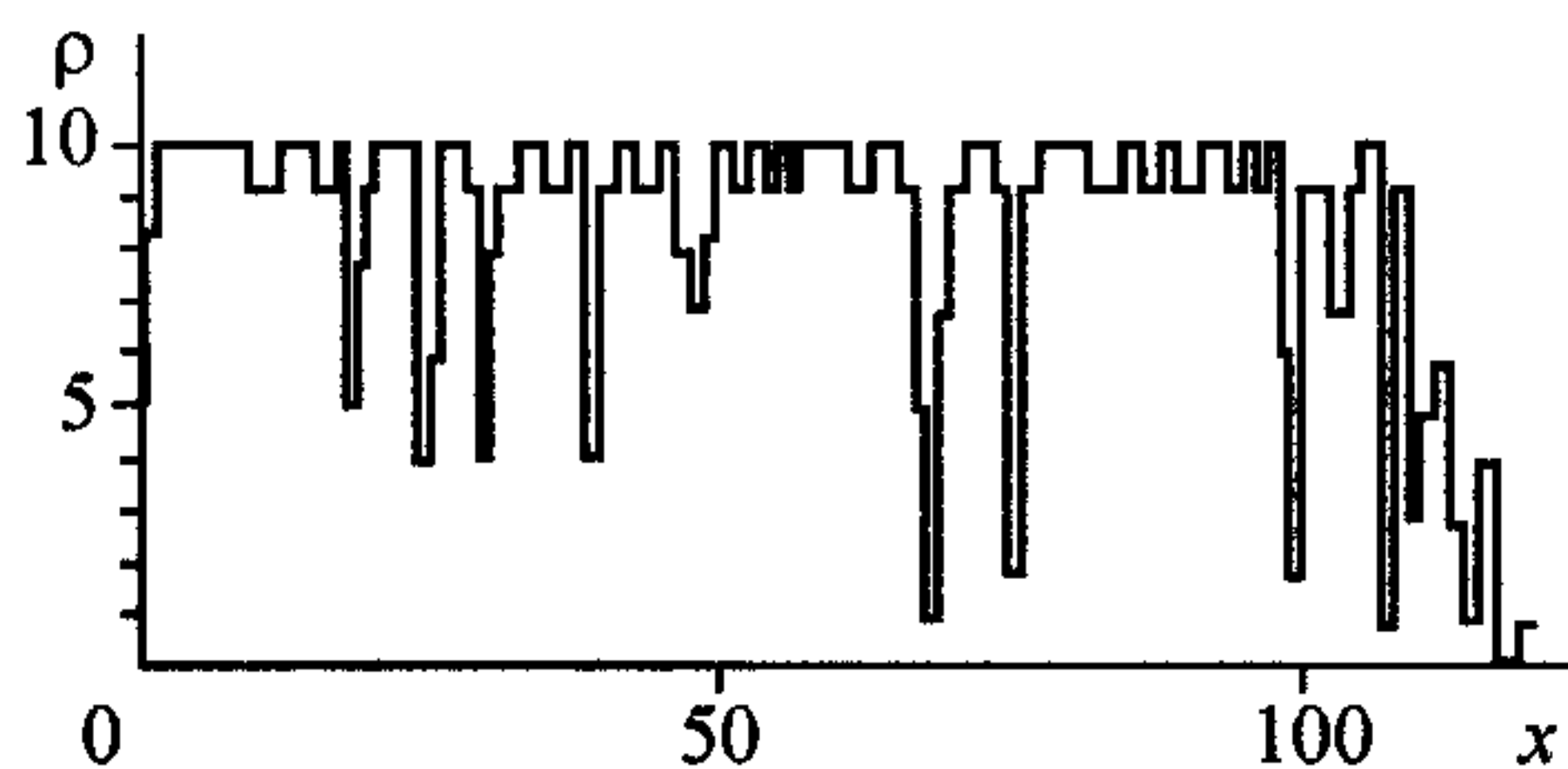
Особый интерес при столкновении кристалла с недеформируемой жесткой стенкой представляет область контакта. В рамках континуальной механики используется предположение, что сила взаимодействия является постоянной в течение столкновения. Для проверки этого предположения во всех расчетах выводилась величина

$$f = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial W_i}{\partial x_i}.$$

Действительно, для достаточно больших скоростей это предположение выполняется хорошо. В качестве примера на рис. 9.19 представлена зависимость силы от числа шагов по времени  $N_\tau$  для кристалла Cu при  $T_0 = 0$  К и  $|v_0| = 1$  км/с, шаг по времени  $\tau = 0,005$ . Однако при небольших скоростях ( $|v_0| = 200$  м/с) наблюдаются значительные осцилляции силы (рис. 9.20).

Рис. 9.20. Зависимость силы, действующей со стороны жесткой недеформируемой стенки на кристалл Cu, от времени (числа шагов по времени  $N_\tau \cdot 10^3$ ). Начальные параметры кристалла:  $T_0 = 0$  К и  $v_0 = -200$  м/с.





**Рис. 9.21.** Пространственное распределение атомов после столкновения кристалла Ag с потенциальным барьером.

Поясн. см. в тексте.

Одной из важнейших проблем механики является задача разрушения твердого тела. Для анализа этого явления в рамках ММД использовался следующий прием. Координатная ось разбивалась на ячейки размером  $10a$  ( $a$  — равновесное расстояние между атомами) и в моменты времени, значительно превышающие время столкновения, находилось количество частиц в этих ячейках. Эта величина — аналог линейной плотности — представлена на рис. 9.21 для кристалла Ag в момент  $N_\tau = 150 \cdot 10^3$  (начальные данные:  $T_0 = 10$  К,  $|v_0| = 200$  м/с,  $\tau = 0,01$ ; столкновение закончилось к  $N_\tau = 75 \cdot 10^3$ ). Видно, что имеются ячейки, в которых находится по одному атому. Следовательно, кристалл трансформировался в набор невзаимодействующих фрагментов, отлетающих от барьера, что можно трактовать как разрушение кристалла.

### 9.9. Столкновение одномерных кристаллов

Эта задача позволяет проанализировать возможность механоактивации поверхностных связей и обосновать граничные условия на стенке. Сталкивающиеся кристаллы рассматриваются как единая замкнутая изолированная система с известным парным взаимодействием атомов. При этом отпадает проблема моделирования силы взаимодействия между кристаллами.

В качестве иллюстрации ниже приведен пример столкновения одинаковых одномерных кристаллов Cu по 500 атомов каждый, в одинаковом начальном равновесном состоянии с температурой  $T_0 = 10$  К. Начальные скорости задавались одинаковыми по модулю и равными 100 м/с (шаг по времени  $\tau = 0,05$ ). Такая постановка задачи интересна тем, что макропараметры кристаллов (температуры, массы, энергии центров масс, размеры) обладали симметрией относительно начала координат, совпадающего с центром масс кристаллов, в то время как микропараметры кристаллов (координаты и импульсы атомов) не были симметричны. Необходимо сразу отметить, что в процессе соударения макросимметрия сохранялась, что служило дополнительным контролем работы



схемы. В связи с этим данные, приведенные ниже, относятся к одному кристаллу.

На рис. 9.22, *a* приведена зависимость модуля импульса центра масс одного из кристаллов от времени. При этом хорошо идентифицируются как момент полной остановки кристаллов, так и временной интервал их взаимодействия. После соударения уменьшился импульс центра масс, следовательно, и сумма кинетических энергий кристаллов  $E_c$ , т.е. столкновение происходит с диссипацией энергии упорядоченного движения и переходом во внутреннюю энергию хаотического движения.

Поведение параметра Колмогорова  $\lambda$  в течение столкновения приведено на рис. 9.22, *б*. Особенно сильный рост  $\lambda$  наблюдается на участке торможения. Затем, около точки полной остановки, система успевает перейти в состояние с распределением по импульсам, близким к максвелловскому. Участок увеличения импульса (разгона кристаллов) сопровождается вначале ростом неравновесности и дальнейшей релаксацией в равновесное состояние по мере прекращения разгона кристаллов. Хотя времена релаксации значительно меньше характерного времени столкновения, система находится большую часть в сильно неравновесном состоянии ( $\lambda > 1$ ).

Особый интерес представляет контакт кристаллов. На рис. 9.22, *в* дана зависимость расстояния между граничными атомами кристаллов от времени. (При  $t = 0$  оно было  $19 \text{ \AA}$ ). Видно, что в течение столкновения оно соответствует колебаниям около положения равновесия (высокие частоты сглажены), соответствующего атомам внутри кристалла. Кроме того, полная энергия этой пары атомов меньше глубины потенциальной ямы  $e$  в (9.2.2). На микроуровне это означает образование ван-дер-ваальсовой связи между "поверхностными" атомами кристаллов, что, видимо, приводит к тому, что кристалл не разрушается от волн разгрузки.

Распределение величины  $\rho/\rho_0$  в пространстве (рис. 9.23, штриховая линия)

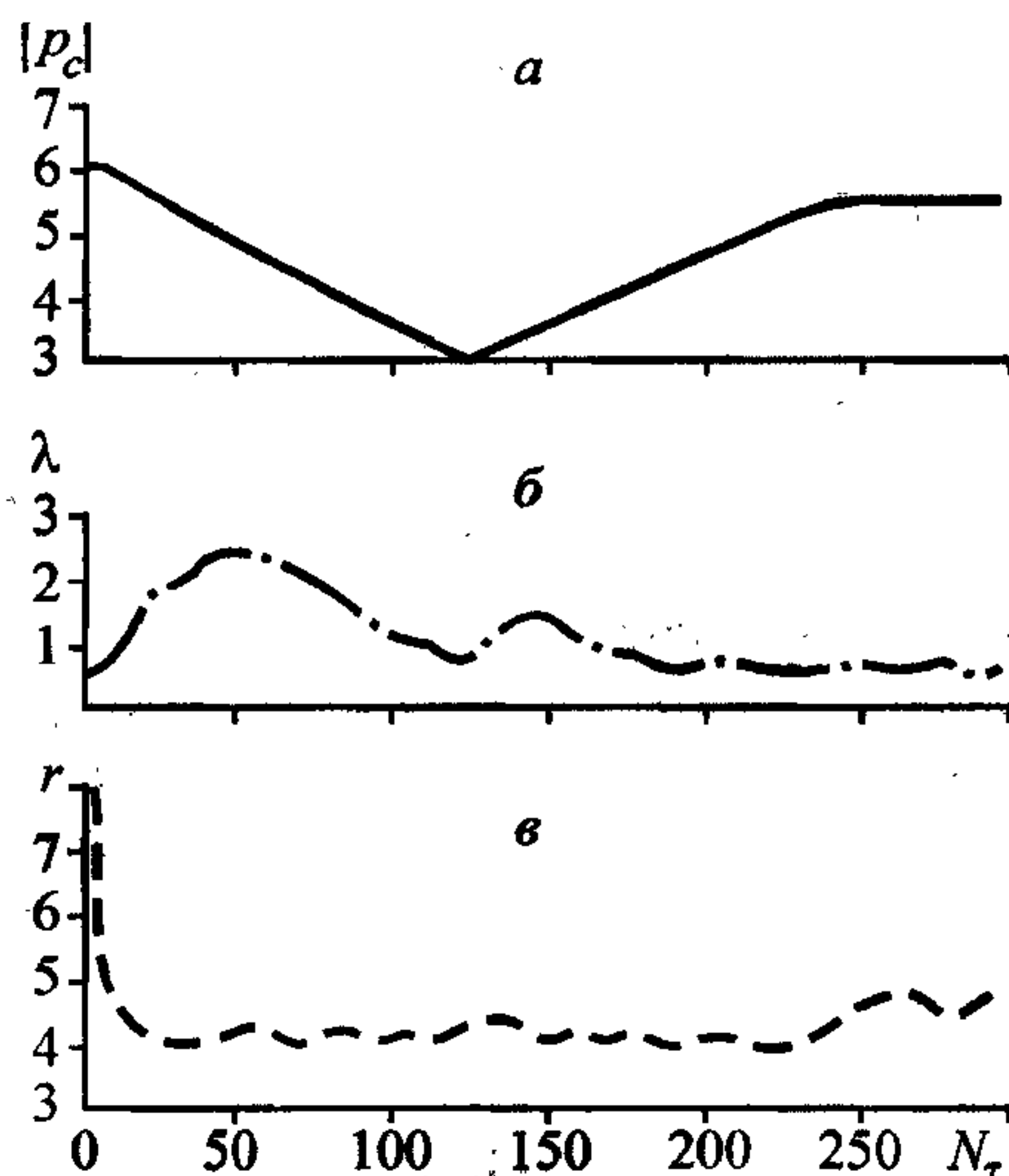
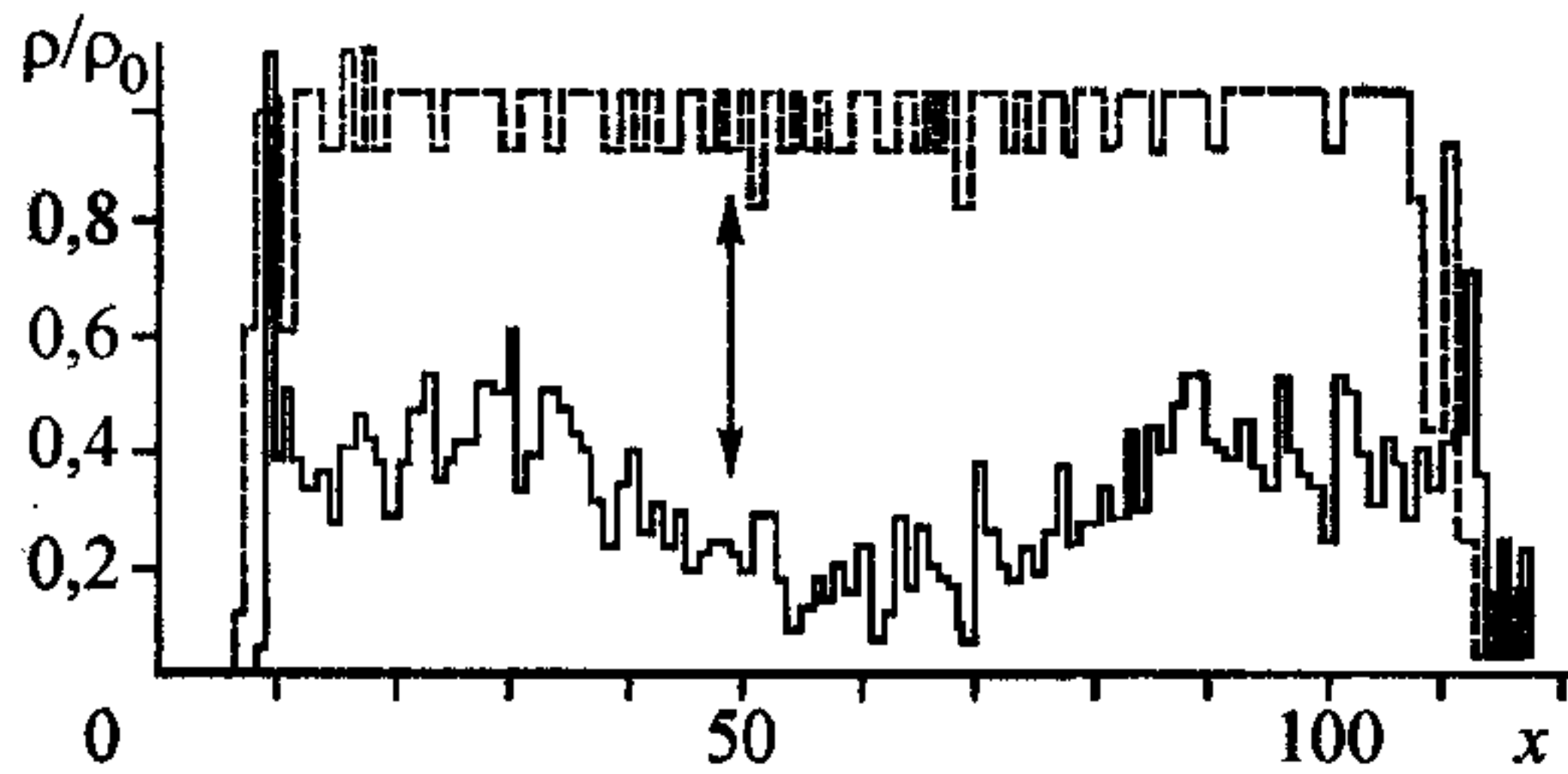


Рис. 9.22. Столкновение двух кристаллов Cu.

Зависимость от числа шагов по времени  $N_\tau \cdot 10^3$ : *a* — импульса центра масс; *б* — параметра Колмогорова  $\lambda$  для одного из кристаллов; *в* — расстояния  $r$  ( $\text{\AA}$ ) между "поверхностными" атомами.



**Рис. 9.23.** Распределение по координатным ячейкам относительной плотности (штриховая линия) и энергии (сплошная линия) после столкновения двух кристаллов Cu.

энергии не выделяется среди других. Следовательно, данное явление можно трактовать как образование единого связанного кристалла, сопровождающееся образованием осколков на концах цепочек.

после столкновения ( $N_{\tau} = 3 \cdot 10^5$ ) позволяет сделать вывод об образовании единого кристалла с одновременным появлением осколков на концах, уносящих избыток энергии. (Стрелочкой указано место контакта). Распределение полной энергии по координатным ячейкам размером  $10a$  (рис. 9.23, сплошная линия) также иллюстрирует тот факт, что ячейка контакта кристаллов по

## Литература к главе 9

1. Tsai D. H., Beckett C. W. Shock wave propagation in cubic lattices// J. Geophys. Res. — 1966. — V. 71, N 10. — P. 2601—2608.
2. Tsai D. H., MacDonald R. A. Second sound in a solid under shock compression// J. Phys. C: Solid State Phys. — 1973. — V. 6, N 8. — P. L171—L175.
3. Tsai D. H., MacDonald R. A. Shock wave profile in a crystalline Solid// Ibid. — 1978. — V. 11, N 10. — P. L365—L371.
4. Dickey I. M., Paskin A. Computer simulation of the lattice dynamics of solids// Phys. Rev. — 1969. — V. 188, N 3. — P. 1407—1418.
5. Paskin A., Dienes G. J. Molecular dynamic simulations of shock waves in a three-dimensional solid// J. Appl. Phys. — 1972. — V. 43, N 4. — P. 1605—1610.
6. Paskin A., Dienes G. J. A model for of shock waves in solid and evidence for a thermal catastrophe// Solid State Comm. — 1975. — V. 17. — P. 197—200.
7. Paskin A., Gohar A., Dienes G. J. Simulation of shock waves in solids// J. Phys. C: Solid State Phys. — 1977. — V. 10. — P. L563—L566.
8. Paskin A., Gohar A. Simulation of shock waves in solids// J. Phys. Chem. Solids. — 1978. — V. 39, N 12. — P. 1307—1311.
9. Holian B. L., Straub G. K. Molecular dynamics of shock waves in one-dimensional chains// Phys. Rev. B. — 1978. — V. 18, N 4. — P. 1593—1608.
10. Straub G. K., Holian B. L., Petschek R. B. Molecular dynamics of shock waves in one-dimensional chains. II. Termolization// Phys. Rev. B. — 1979. — V. 19, N 8. — P. 4049—4055.
11. Batteh J. H., Powell J. D. Shock propagation in the one dimensional lattice at a nonzero initial temperature// J. Appl. Phys. — 1978. — V. 49, N 7. — P. 3933—3940.
12. Powell J. D., Batteh J. H. Effects of solitary waves upon the shock profile in a three-



- dimensional lattice// *Ibid.* — 1980. — V. 51, N 7. — P. 2050—2058.
13. Могилевский М. А., Ефремов В. В., Мынкин И. О. Поведение кристаллической решетки при сильном одномерном сжатии// *ФГВ.* — 1977. — Т. 13, № 5. — С. 750—754.
  14. Клименко В. Ю., Дремин А. Н. Структура фронта ударной волны в твердом теле// *Докл. АН СССР* — 1980. — Т. 251, № 6. — С. 1379—1381.
  15. Коростелев С. Ю., Псахье С. Г., Панин В. Е., Фадеев А. В. Распространение ударной волны в неоднородной цепочке атомов. — Томск, 1985. (Деп. в ВИНТИ; № 6080-85.)
  16. Psakhie S. G., Korostelev S. Yu., Panin V. E. Molecular dynamical study of the crystal fragmentation on conditions under propagation of a shock wave// IX Международная конференция по высокоэнергетическому воздействию на материалы, 18—22 августа 1986. — Новосибирск, 1986. — С. 111—115.
  17. Korostelev S. Yu., Psakhie S. G., Panin V. E. Molecular-dynamical study of the changes in the atomic structure of a material induced by a shock wave with a distorted front// *Phys. State. Sob.(b).* — 1988. — V. 148, N 2. — P. 483—488.
  18. Псахье С. Г., Коростелев С. Ю., Панин В. Е. О возникновении областей с разнупорядоченной структурой при распространении ударной волны в кристалле// *Письма в ЖТФ.* — 1988. — Т. 14, вып. 18. — С. 1645—1648.
  19. Коростелев С. Ю., Псахье С. Г., Панин В. Е. Молекулярно-динамическое исследование атомной структуры материала при распространении ударной волны// *ФГВ.* — 1988. — Т. 24, № 6. — С. 124—127.
  20. Могилевский М. А., Мынкин И. О. Влияние точечных дефектов на одномерное сжатие решетки// *Там же.* — 1978. — Т. 14, № 5 — С. 159—163.
  21. Могилевский М. А., Мынкин И. О. Роль флуктуаций в зарождении сдвигов при одномерном сжатии решетки// *Там же.* — 1985. — Т. 21, № 3 — С. 113—120.
  22. Могилевский М. А., Мынкин И. О. Картина развития пластической деформации на последовательных стадиях ударно-волнового нагружения кристалла. — Новосибирск, 1985. — С. 1—30. (Деп. ВИНТИ; № 4115-85.)
  23. Могилевский М. А., Мынкин И. О. О теоретической прочности кристалла в условиях ударно-волнового нагружения// *ФГВ.* — 1988. — Т. 24, № 6. — С. 106—111.
  24. Ющенко В. С., Гривцов А. Г., Шукин Е. Д. Численное моделирование деформации молекулярного кристалла// *Докл. АН СССР.* — 1974. — Т. 215, № 1. — С. 148—151.
  25. Ющенко В. С., Шукин Е. Д. Молекулярно-динамическое исследование элементарных процессов разрушения под действием постоянной нагрузки// *Там же.* — 1978. — Т. 242, № 3. — С. 653—656.
  26. Ющенко В. С., Шукин Е. Д. Молекулярно-динамическое моделирование при исследовании механических свойств// *Физ.-хим. механика материалов.* — 1981. — Т. 17, № 4. — С. 46—60.
  27. Shchukin E. D., Yushchenko V. S. Molecular dynamics simulation of molecular behavior// *J. of Material Sci.* — 1981. — V. 16, N 2. — P. 313—330.
  28. Psakhie S. G., Korostelev S. Yu., Negreskul S. I. et al. Vortex mechanism of plastic deformation of grain boundaries computer simulation// *Phys. Stat. sol. (b).* — 1993. — V. 176. — P. k41—k44.
  29. Псахье С. Г., Дмитриев А. К. О влиянии точечных дефектов в проблеме устойчи-

- ности двумерных атомных решеток// Письма в ЖТФ. — 1994. — Т. 20, № 7. — С. 83—87.
30. Гайнутдинов И. И., Павлюхин Ю. Т., Болдырев В. В. Компьютерное моделирование пластической деформации двумерных кристаллов. Потенциал взаимодействия Леннарда—Джонса// Докл. РАН. — 1995. — Т. 344, № 2. — С. 189—193.
  31. Щукин Е. Д., Ющенко В. С. Молекулярная динамика смачивания// Коллоидный журнал. — 1977. — Т. XXXIX, № 2. — С. 331—334.
  32. Ющенко В. С., Гривцов А. Г., Щукин Е. Д. Устойчивость динамики капли на поверхности твердого тела// Там же. — С. 335—338.
  33. Ющенко В. С., Гривцов А. Г., Щукин Е. Д. Численное моделирование эффекта Ребиндера// Докл. АН СССР. — 1974. — Т. 219, № 1. — С. 162—165.
  34. Гривцов А. Г., Ющенко В. С. К анализу механики адсорбционного понижения прочности// Физ.-хим. механика материалов. — 1976. — № 1. — С. 31—34.
  35. Бутягин Г. Ю., Ющенко В. С. Молекулярная динамика деформационного перемешивания в смесях твердых веществ// Кинетика и катализ. — 1988. — Т. 296, № 5. — С. 1249—1252.
  36. Amini M., Fincham D., Hockey R. W. A molecular dynamical study of the melting of alkali halide crystals// J. Phys. C: Solid State Phys. — 1979. — V. 12. — P. 4707—4720.
  37. Shinjn K., Shin T. Structural relaxation in a model amorphous alloy// J. Phys. F: Met. Phys. — 1984. — V. 14. — P. 23—36.
  38. Welch D. O., Dienes G. J., Paskin A. A molecular dynamical study of the equation of state of solids at high temperature and pressure// J. Phys. Chem. Sol. — 1978. — V. 39, N 6. — P. 589—603.
  39. Alder B. J., Wenwright T. E. Studies in molecular dynamics. I. General method// J. Chem. Phys. — 1959. — V. 31, N 2. — P. 459—466.
  40. Verlet L. Computer “experiments” on classical fluids. I. Thermodynamical properties of Lennard-Jones molecules// Phys. Rev. — 1967. — V. 159, N 1. — P. 98—103.
  41. Rahman A. Correlations in the motion of atoms in liquid argon// Ibid. — 1964. — V. 136, N 2. — P. 405—411.
  42. Билер Дж. Машинное моделирование при исследовании материалов. — М.: Мир, 1974. — 416 с.
  43. Хеерман Д. В. Методы компьютерного эксперимента в теоретической физике. — М.: Наука, 1990. — 176 с.
  44. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. — М.: Наука, 1966. — 300 с.
  45. Zwanzig R. W. Statistical mechanics of irreversibility// Lectures in theoretical physics. V. III. — N.Y.: Interscience publishers, Inc., 1961. — P. 106—141.
  46. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. Т. 1. — М.: Мир, 1978. — 405 с.
  47. Фаддеев Л. Д., Якубовский О. А. Лекции по квантовой механике. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. — 200 с.
  48. Zwanzig R. W. Ensemble method in the theory of irreversibility// J. Chem. Phys. — 1960. — V. 33, N 5. — P. 1338—1341.
  49. Царегородцев А. И., Горлов Н. В., Демьянов Б. Ф., Старостенков М. Д. Атомная структура антифазной границы и ее влияние на состояние решетки вблизи дислокации в упорядоченных сплавах со сверхструктурой  $Li_2$ // Физика металлов и металловедение. — 1984. — Т. 58, вып. 2. — С. 336—343.
  50. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. — М.: Мир, 1975. — 392 с.



51. Головнев И. Ф., Калинина А. П. Применение оператора эволюции в методе классических траекторий// Моделирование в механике. — 1992. — Т. 6, № 2. — С. 13—24.
52. Головнев И. Ф., Калинина А. П. Применение оператора эволюции для описания динамики гамильтоновых систем. — Новосибирск, 1993. — 27 с. (Препринт/СО РАН, ИТПМ; № 6-93).
53. Golovnev I. F., Kalinina A. P., Khokhlov O. V. et al. Numerical simulation of scattering of the molecules of yttrium tris (dipivaloymethane) ( $Y(C_{11}H_{19}O_2)_3$ ) in the potential field of crystal MgO and formation of near-surface layer// Thin solid films. — 1997. — V. 292. — P. 43—49.
54. Головнев И. Ф., Долгушев С. В., Калинина А. П., Хохлов О. В. Численное моделирование динамики систем Лиувилля. — Новосибирск, 1993. — 36 с. (Препринт/СО РАН, ИТПМ; № 8-93).
55. Головнева Е. И., Головнев И. Ф. Численное моделирование процессов в кристалле при импульсном механическом нагружении// Труды III международной научно-технической конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения”. Т. 6, № 2. — Новосибирск, 1996. — С. 17—22.
56. Golovneva E. I., Golovnev I. F., Fomin V. M. Simulation on nonequilibrium processes under collisions of solids by molecular dynamics method// Abstracts V International Conference “Computer aided design of advanced materials and technologies”, August 4—6, 1997, Baical Lake, Russia. — P. 113—114.
57. Aizu K. Time-reversal and linear multistep methods for integration dynamical systems// J. Comp. Phys. — 1984. — V. 55, N 1. — P. 154—156.
58. Aizu K. Canonical transformation invariance and linear multistep formula for integration of Hamiltonian systems// Ibid. — 1985. — V. 58, N 2. — P. 270—274.
59. Зубарев Д. Н. Неравновесная статистическая термодинамика. — М.: Наука, 1971. — 415 с.
60. Рудяк В. Я. Статистическая теория диссипативных процессов в газах и жидкостях. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1987. — 272 с.
61. Greer J. C. An approximate time evolution operator to generate the Verlet algorithm// J. Comp. Phys. — 1994. — V. 115, N 1. — P. 245—247.
62. Tsai D. H., Bullough R., Pevin R. C. Molecular dynamical studies of the motion of point defects in a crystalline lattice// J. Phys. C: Solid State Phys. — 1970. — V. 3, N 10. — P. 2022—2036.
63. Ферми Э. Научные труды. Т. II. — М.: Наука, 1972. — 762 с.
64. Колмогоров А. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986. — 534 с.
65. Мартынов Г. А. Неравновесная статистическая механика, уравнения переноса и второе начало термодинамики// УФН. — 1996. — Т. 166, № 10. — С. 1105—1133.
66. Уленбек Дж., Форд Дж. Лекции по статистической механике. — М.: Мир, 1965. — 307 с.

<b>ОТ РЕДАКТОРА</b> .....	4
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	7
<b>Глава 1</b>	
<b>МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕЛ</b> .....	12
1.1. Основные физические явления, сопровождающие высокоскоростное взаимодействие тел .....	—
1.2. Математические модели, описывающие распространение и затухание сильных ударных волн в конденсированных средах .....	21
1.3. Разностная схема типа М. Уилкинса и особенности счета на границах контактов .....	42
1.4. Примеры решения практических задач .....	55
Литература к главе 1 .....	82
<b>Глава 2</b>	
<b>УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ В МОДЕЛЯХ СПЛОШНЫХ СРЕД</b> .....	89
2.1. Выбор независимых термодинамических переменных .....	92
2.2. Холодные компоненты энергии и давления .....	94
2.3. Тепловая энергия и тепловое давление .....	99
2.4. Простейшее уравнение состояния конденсированного вещества .....	108
2.5. Уравнение состояния в области расширения вещества .....	110
2.6. Уравнения состояния металлов в области ударного сжатия .....	114
2.7. Уравнение состояния с переменной теплоемкостью ядер .....	119
2.8. Плавление, испарение и ионизация .....	125
2.9. Уравнение состояния равновесной смеси фаз .....	130
2.10. Табличная форма уравнения состояния .....	132
Литература к главе 2 .....	136
<b>Глава 3</b>	
<b>ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕЛ</b> .....	138
3.1. Постановка задачи и метод решения .....	139
3.2. Разностная схема и ее физическая интерпретация .....	144
3.3. Моделирование процессов проникновения ударников в массивные мишени .....	151
3.4. Моделирование процессов деформирования и откольного разрушения при ударном нагружении пластин .....	170
3.5. Пробитие однослойных и многослойных преград по нормали дефор-	



мируемым ударником . . . . .	191
Приложение А. Алгоритм расчета контактной поверхности с симметричным учетом взаимодействующих границ . . . . .	206
Приложение Б. Алгоритмы реализации численных моделей разрушения . . . . .	215
Приложение В. Структура данных при программной реализации алгоритма . . . . .	228
Литература к главе 3 . . . . .	233

**Глава 4**

<b>ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПРОНИКНОВЕНИЯ В МНОГОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ. . . . .</b>	<b>238</b>
4.1. О методе верхней оценки предельной нагрузки . . . . .	—
4.2. Внедрение ударника с клиновидной головной частью в полуплоскость . . . . .	240
4.3. Внедрение цилиндра с конической головной частью в полупространство. . . . .	243
4.4. Пробивание плиты гладким тупым цилиндром . . . . .	247
4.5. Проникание осесимметричных ударников под углом в преграду. . . . .	252
4.6. Масштабный эффект в задаче о пробивании пластины жестким ударником . . . . .	260
Литература к главе 4 . . . . .	265

**Глава 5**

<b>ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ВЗРЫВНОМ НАГРУЖЕНИИ . . . . .</b>	<b>266</b>
5.1. Анализ проблемы . . . . .	—
5.2. Моделирование однородной фрагментации тонкостенных цилиндрических и сферических оболочек . . . . .	268
5.3. Моделирование фрагментации тонкостенных сферических оболочек с учетом распределения фрагментов по массе . . . . .	277
5.4. Моделирование деформирования и разрушения тонкостенной композитной оболочки, заполненной жидкостью, под действием взрыва заряда, расположенного в центре конструкции . . . . .	284
Литература к главе 5 . . . . .	297

**Глава 6**

<b>МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ МЕТАНИЯ ПЛАСТИН И ОБЛИЦОВОК . . . . .</b>	<b>301</b>
6.1. Разлет и схлопывание оболочек под действием продуктов детонации ВВ. . . . .	—
6.2. Многоступенчатый метод разгона пластин и оболочек до больших скоростей . . . . .	342
6.3. Распространение ударных волн в многослойной системе с послойно	

уменьшающейся (увеличивающейся) акустической жесткостью .....	359
6.4. Сопоставление методов. Инженерно-аналитические решения .....	368
6.5. Физические аспекты кумуляции .....	379
6.6. Метание продуктами детонации ВВ облицовок кумулятивных зарядов .....	400
6.7. Метание пологих облицовок .....	427
Литература к главе 6 .....	474

## Глава 7

### ПРИЛОЖЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ К ОПИСАНИЮ

<b>ДИНАМИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ.</b> .....	<b>479</b>
7.1. Основные положения .....	—
7.2. Модели деформирования пористой среды .....	480
7.3. Кинетические уравнения накопления повреждений .....	491
7.4. Разрушение хрупких мишеней при ударных воздействиях .....	501
Литература к главе 7 .....	518

## Глава 8

### УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛАХ.

8.1. Предварительные замечания .....	—
8.2. Математические модели пористых материалов .....	—
8.3. Математическая модель пористого упругопластического материала ...	526
8.4. Численное моделирование распространения ударных волн в пористом алюминии и железе .....	531
8.5. Ударная волна разрежения в пористом материале .....	538
8.6. Структура волны сжатия в пористом упругопластическом материале ..	544
8.7. Взрывное компактирование порошков, природа возникновения “холодного” слоя .....	550
Литература к главе 8 .....	556

## Глава 9

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СОУДАРЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ

<b>МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ</b> .....	<b>559</b>
9.1. Анализ проблемы .....	—
9.2. Физическая система .....	561
9.3. Численный метод .....	562
9.4. Контроль точности схемы .....	570
9.5. Начальные данные .....	572
9.6. Дополнительные требования к работе схемы .....	576
9.7. Метод молекулярной динамики и второе начало термодинамики .....	579
9.8. Соударение твердого тела с абсолютно жесткой стенкой .....	583
9.9. Столкновение одномерных кристаллов .....	592
Литература к главе 9 .....	594



Тематический план  
выпуска изданий СО РАН  
на 1999 г., № 15

Научное издание

*Василий Михайлович Фомин,  
Александр Иванович Гулидов,  
Геннадий Алексеевич Сапожников и др.*

# **ВЫСОКОСКОРОСТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТЕЛ**

Редактор *Н. А. Лившиц*  
Художественный редактор *М. Г. Рудакова*  
Технический редактор *Н. В. Бутакова*  
Корректор *И. А. Абрамова*  
Обложка *Д. К. Томашевский*

---

Лицензия ЛР 020909 от 01.09.94.

Подписано в печать с оригинал-макета 24.11.99. Формат 70 × 100/16.

Уч.-изд. 38 л. Усл. печ. л. 48,38. Гарнитура Times. Печать офсетная.

Тираж 600 экз. Заказ № 229.

---

Издательство СО РАН  
630090, Новосибирск, 90, Морской пр., 2

### Список замеченных опечаток

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
17	Табл. 1.5, 1-я колонка, 3-я строка	$M_0 = U_0/a_0$	$M_0 = U_0/c_0$
29	15 сверху	скоростям	плоскостям
47	8 сверху	разряжения	разрежения
74	Ф-ла (1.4.12)	$\sigma_z \leq Y_0$	$\sigma_z \geq Y_0$
83	12 сверху	Сепанов Т. В.	Степанов Г. В.
86	23, 24 сверху	Степанов Г. В. Упругопластическое деформирование материалов под действием импульсных нагрузок. — Киев: Наук. думка, 1979. — 266 с.	Дерибас А. А., Нестеренко В. Ф. Сапожников Г. А. и др. Исследование процесса затухания ударных волн в материалах при нагружении контактным взрывом// ФГВ. — 1979 — Т. 15, № 2. — С. 126—131.
124	Табл. 2.9, последняя колонка 1-я строка	8	7,8
168	7 снизу	сохранялись.	сохранялись [88].
297	6 снизу	Антуков В. Н.	Антуков В. Н.