

ВЛИЯНИЕ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ НА  
РАСПРОСТРАНЕНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН  
В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ

В.Ф. Куропатенко

При математическом моделировании неустановившихся движений многофазных сред в них возникают условия, приводящие к потере устойчивости и расщеплению сильных и слабых разрывов. Излагается неоднородный разностный метод, выделяющий на регулярной сетке сильные и слабые разрывы и поверхности межфазного взаимодействия и исследуются течения многофазных сред с расщеплением разрывов.

Математическое моделирование неустановившихся движений многофазных сред сопряжено с проблемами, которые отсутствуют в механике однофазных сред. Основной источник трудностей - фазовые переходы, для описания которых требуется усложненное описание таких свойств вещества, как сжимаемость, вязкость, теплопроводность, прочность и др. Второй источник трудностей - движение межфазных поверхностей и взаимодействие фаз друг с другом. Третий источник - возникновение новых типов разрывов (по сравнению с однофазной средой). Особенности возникают при пересечении изотерм, изэнтроп и ударных адиабат с поверхностями фазовых переходов второго рода либо с областями смеси фаз при фазовых переходах первого рода. Чтобы сделать единообразным описание фазовых переходов первого и второго рода, будем область равновесной смеси двух фаз трактовать как самостоятельную фазу со своим уравнением со-

стояния, ограниченную двумя поверхностями – фазовыми переходами второго рода.

Для математического моделирования ударных волн в сплошных средах широко применяются однородные разностные методы, в которых ударные волны "размазываются" на несколько интервалов сетки. В [1] показано, что при взаимодействии поверхности фазового перехода с "размазанной" ударной волной появляется конечная погрешность в решении, достигающая  $\sim 30\%$  и не уменьшающаяся при измельчении сетки. Этот недостаток однородных методов вместе с другими их недостатками, исследованными при моделировании однофазных течений, послужил основанием для применения неоднородного метода, в котором выделяются все перечисленные выше особенности в решении и для определения решения на линии каждой особенности решаются соответствующие системы уравнений на разрыве. Течение между разрывами предполагается непрерывным. Законы сохранения массы, импульса и энергии берутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} - \frac{(\gamma-1)uv}{r} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + p \frac{\partial v}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (I)$$

где  $\rho$  – плотность,  $v = 1/\rho$  – удельный объем,  $u$  – скорость,  $p$  – давление,  $E$  – удельная внутренняя энергия,  $r$  – эйлерова координата,  $\gamma$  – характеристика симметрии течения ( $\gamma = 1, 2, 3$ ), величина  $m$  связана с лагранжевой координатой  $M$  уравнением

$$dM = \gamma r^{\gamma-1} dm = \gamma r^{\gamma-1} \rho (dr - u dt).$$

Эти уравнения аппроксимируются системой разностных уравнений

$$r_i^{n+1} = r_i^n + \tau u_i^{n+0,5}, \quad (2)$$

$$\rho_{i+0,5}^{n+1} = \rho_{i+0,5}^n \frac{(r_{i+1}^n)^{\gamma} - (r_i^n)^{\gamma}}{(r_{i+1}^{n+1})^{\gamma} - (r_i^{n+1})^{\gamma}}, \quad (3)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\sigma}{2h} (\rho_{i+0,5}^n + \rho_{i+0,5}^{n+1} - \rho_{i-0,5}^n - \rho_{i-0,5}^n), \quad (4)$$

$$E_{i+0,5}^{n+1} = E_{i+0,5}^n - \sum_{k=1}^2 \rho_{i+0,5}^k \frac{V_{i+0,5}^{n+1} - V_{i+0,5}^n}{2}, \quad (5)$$

где  $Z$  - число слагаемых, определяемое всякий раз исходя из точности расчета энтропии. Давление  $p$  определяется из уравнения состояния

$$p_{i+0,5}^{n+1} = p(\rho_{i+0,5}^{n+1}, E_{i+0,5}^{n+1}). \quad (6)$$

В областях непрерывных решений допускается возможность появления слабых волн сжатия. В этом случае  $E^{n+1}$  определяется уравнением

$$E_{i+0,5}^{n+1} = E_{i+0,5}^n - 0,5(\bar{p}_{i+0,5}^n + \bar{p}_{i+0,5}^{n+1})(V_{i+0,5}^{n+1} - V_{i+0,5}^n), \quad (7)$$

где  $\bar{p}$  - динамическое давление. Величина  $\bar{p}$  определяется из системы уравнений на сильном разрыве

$$W\Delta V - \Delta u = 0,$$

$$W\Delta u + \Delta p = 0,$$

$$2\Delta E + (\rho_+ + \rho_-)\Delta V = 0, \quad (8)$$

где  $\Delta f = f_+ - f_-$  - скачок величины  $f$  на разрыве, величины  $f_-$  и  $f_+$  характеризуют состояния вещества перед и за скачком.

В качестве величин перед скачком берутся  $\rho_{i+0,5}^n, V_{i+0,5}^n, E_{i+0,5}^n$ .

В качестве скачка скорости берется разность

$$\Delta u_{i+0,5} = |u_{i+1}^{n+0,5} - u_i^{n+0,5}|.$$

В случае акустических сжатий, когда

$$\rho_{i+0,5}^n \Delta u_{i+0,5} \ll \alpha_{i+0,5}^n,$$

где  $\alpha^2 = -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S$  динамическое давление согласно [2] определя-

ется приближенным уравнением

$$\bar{p}_{i+0,5}^{n+1} = p_{i+0,5}^n + \Delta u (a_{i+0,5}^n + \kappa_1 \rho_{i+0,5}^n \Delta u), \quad (9)$$

где  $\kappa_1 \approx 1 + 0,5\Gamma$ ,  $\Gamma$  - коэффициент Грюнайзена. Уравнения (2)-(9) определяют алгоритм расчета параметров течения в регулярных точках пространственно-временной сетки.

Выделенные сильные разрывы рассчитываются как особенности, перемещающиеся по регулярной сетке. Для расчета величин за выделенными сильными разрывами используются уравнения (8), к которым добавляются еще два уравнения

$$r^{n+1} = r^n + \sigma D^{n+0,5}, \quad (10)$$

$$\Delta p^{n+1} = \Delta p^n - \frac{(a_+^n)^2}{w^n} (\Delta u^{n+1} - \Delta u^n) - \tau A, \quad (11)$$

где

$$A = \frac{(\gamma-1)u_+^n v_+^n (a_+^n)^2}{r^n} + \frac{(a_+^n)^2 - (w^n)^2}{w^n} \left( \frac{\partial p}{\partial m} \right)^n + \frac{dp}{dt} + \frac{(a_+^n)^2}{w^n} \frac{du}{dt}. \quad (12)$$

Разностное уравнение (11) аппроксимирует обыкновенное дифференциальное уравнение вдоль фронта разрыва

$$\frac{d\Delta p}{dt} + \frac{a_+^2}{w} \frac{d\Delta u}{dt} = A. \quad (13)$$

Это уравнение получается следующим образом. Запишем полные производные  $p$  и  $u$  по времени вдоль линии разрыва

$$\frac{dp}{dt} = -a^2 \frac{\partial u}{\partial m} - \frac{(\gamma-1)a^2 u v}{r} + \frac{\partial p}{\partial m} W, \quad (14)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial m} + \frac{\partial u}{\partial m} W. \quad (15)$$

Вычтем  $dp/dt$  из (14) и  $du/dt$  из (15). Умножив второе из полученных уравнений на  $a^2/W$  и сложив с первым, получим (13).

Состояние вещества перед сильным разрывом в момент  $t^{n+1}$  определяется разностными уравнениями для регулярной точки сетки с

добавлением интерполяционных уравнений.

Если после расчета параметров выделенной ударной волны оказывается, что вещество перед и за фронтом находится в одной фазе, то в веществах с нормальным уравнением состояния такая ударная волна устойчива. Если же вещество перед и за скачком находится в разных фазах, то условия устойчивости скачка могут оказаться нарушенными. Для проверки устойчивости скачка строится ударная адиабата и через точки в плоскости  $P, V$ , характеризующие состояния перед и за скачком проводится луч. Если все точки ударной адиабаты лежат не выше луча, то такой скачок устойчив. Если хотя бы одна точка ударной адиабаты лежит выше луча, то такой скачок неустойчив. Он разрушается с образованием системы скачков и новых волн сжатия или разрежения.

Если состояние перед сильным разрывом лежит на линии фазового перехода, то может оказаться, что  $a_2 > W$ . В этом случае сильный разрыв посылает перед собой акустические волны, то есть происходит непрерывное расщепление сильного разрыва.

Для расчета выделенных слабых разрывов привлекаются условия на слабых разрывах

$$\Delta \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \right) + W \Delta \left( \frac{\partial f_i}{\partial m} \right) = 0, \quad (16)$$

где  $f_1 = \rho$ ,  $f_2 = v$ ,  $f_3 = E$ ,  $f_4 = \mathcal{U}$ . Уравнения (16) аппроксимируются разностными уравнениями, которые дополняют уравнения расчета величин в регулярных точках сетки вместе с интерполяционными уравнениями.

Все слабые разрывы разделим на два типа. Слабым разрывом типа 1 назовем слабый разрыв, на котором выполнено условие

$$W \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial m} \right)_{x+0} - \left( \frac{\partial \rho}{\partial m} \right)_{x-0} \right] < 0. \quad (17)$$

Соответственно слабым разрывом типа 2 назовем слабый разрыв, на котором выполнено условие

$$W \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial m} \right)_{x+0} - \left( \frac{\partial \rho}{\partial m} \right)_{x-0} \right] > 0. \quad (18)$$

В случае равенства слабый разрыв исчезает.

При расчете течений с фазовыми переходами слабый разрыв может стать неустойчивым. Условие неустойчивости слабого разрыва

имеет вид

$$W(a_{x+0} - a_{x-0}) > 0. \quad (19)$$

При выполнении условия (19) слабый разрыв расщепляется на два слабых разрыва. Вперед распространяется слабый разрыв со скоростью  $W$ , равной наибольшему из значений  $a_{x+0}, a_{x-0}$  следом за ним распространяется слабый разрыв со скоростью  $W$ , равной наименьшему из значений  $a_{x+0}, a_{x-0}$ . При условии  $W(a_{x+0} - a_{x-0}) \leq 0$  слабый разрыв устойчив.

Типы новых разрывов определяются условиями (17), (18), в которых полагается  $\partial p / \partial m = 0$  за вперед идущим разрывом и перед разрывом, идущим вслед первому.

Имеется еще один вид неустойчивости - неустойчивость волны разрежения. Если луч, соединяющий любые две точки в теле волны разрежения, лежит не ниже изэнтропы, то волна разрежения устойчива. В противном случае волна становится неустойчивой и в ее теле возникает ударная волна разрежения.

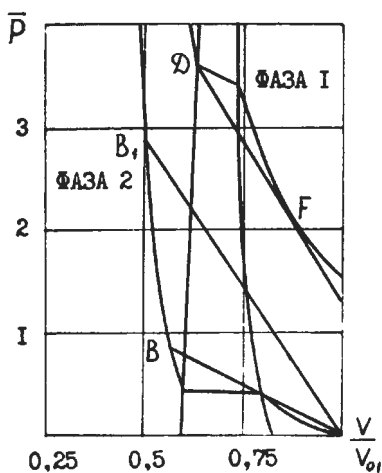


Рис.1

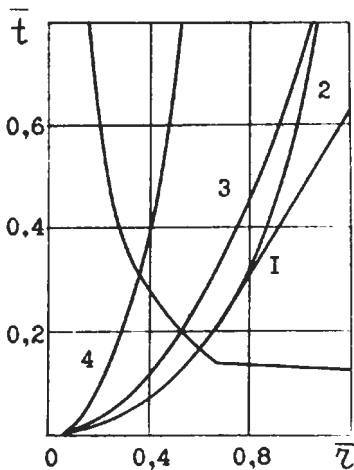


Рис.2

Изложенная математическая модель была применена для расчета ударных волн и волн разрежения в двухфазном веществе. Уравнение состояния вещества, в котором рассчитывается взрыв, было взято

из /I/. На рис. I приведены ударная адиабата, изэнтропа и линии фазовых переходов второго рода в веществе с фазовым переходом, по своим параметрам близким к кварцу и стипшовиту. Индексом 1 обозначены параметры менее плотной фазы (кварц), индексом 2 - более плотной фазы (стипшовит).

При  $t = 0$  в кварце задавалось  $P=0$ ,  $\rho = \rho_{01}$ ,  $E=0$ ,  $u=0$ . В центре системы задавалась сферическая полость, заполненная разогретым газом.

На рис. 2 в безразмерных переменных  $\bar{r} = r/r_0$ ,  $\bar{t} = c_{01} t/r_0$ , где  $r_0 = \sqrt[3]{Q/(\rho_{01} c_{01}^2)}$ ,  $Q$  - начальная энергия газа, изображена траектория головной ударной волны 1, траектория второй ударной волны 2, ударной волны разрежения 3 и граница продуктов взрыва 4.

На первой стадии взрыва по веществу распространяется устойчивая ударная волна, за которой следует волна разрежения. В некотором месте волны разрежения образуется скачок разрежения с состоянием перед фронтом, соответствующим точке  $D$  на рис. I. Давление за этим скачком с течением времени падает. В этом случае условие устойчивости скачка требует, чтобы параметры за его фронтом соответствовали бы точке  $F$  (рис. I). Таким образом,

$\alpha$  характеристики, выходящие с границы полости, не догоняют скачок разрежения, поскольку он движется относительно вещества со скоростью звука. В то же время сам скачок разрежения является источником  $\alpha$  характеристик, догоняющих фронт ударной волны сжатия. Когда давление на головной ударной волне упадет из-за затухания до давления в точке  $B$  (рис. I), волна расщепляется. После расщепления вторая волна продолжает быстро затухать. Вещество, по которому распространяется вторая ударная волна, само движется от центра, то есть  $\rho$  и  $\rho$  в нем падают со временем. Условие же устойчивости второй ударной волны требует, чтобы состояние перед ее фронтом все время находилось на границе фазы I. Это приводит к тому, что вторая волна непрерывно испускает вперед звуковые волны сжатия.

Закон затухания первой ударной волны определяется, таким образом, двумя факторами: сферичностью, ослабляющей волну, и волной сжатия, усиливающей ее. В результате этого изменение скорости фронта ударной волны до расщепления и после него резко различаются. Зависимость  $\bar{D} = D/c_{01}$  от  $\bar{r}$  приведена на рис. 2 (линия 5).

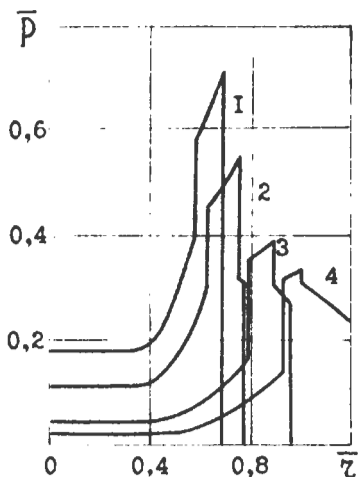


Рис.3

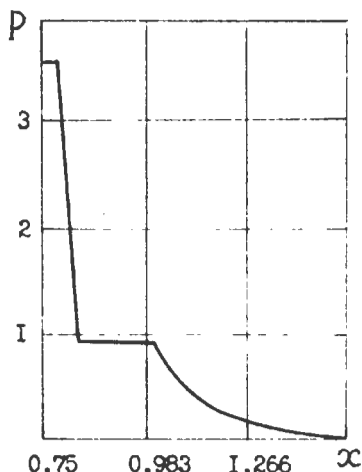


Рис.4

На рис.3 приведены распределения безразмерного давления  $\bar{p} = \rho / (\rho_0 C_0^2)$  в различные моменты времени (1 - до расщепления, 2, 3, 4 - после расщепления).

В задаче № 2 рассмотрена структура волны разрежения в железе  $0 \leq x \leq 1$ , которое в начальный момент времени находится в состоянии с параметрами:  $\rho = 3,67$ ,  $\rho = 4$ ,  $E = 6$ ,  $\mathcal{U} = 0$ . Уравнение состояния железа взято из [3]. На границе  $x_0 = 1$  задано краевое условие  $\rho = 0$ . Такой разрыв при  $t = 0$  является неустойчивым. После распада разрыва образуется четыре слабых разрыва:

- 1)  $\mathcal{D} = -3,19$ ,  $\rho = 3,67$ ,  $\rho = 4,0$ ,  $E = 6,0$ ,  $\mathcal{U} = 0$ ;
- 2)  $\mathcal{D} = -2,46$ ,  $\rho = 0,975$ ,  $\rho = 3,69$ ,  $E = 5,95$ ,  $\mathcal{U} = 0,238$ ;
- 3)  $\mathcal{D} = -0,0924$ ,  $\rho = 0,975$ ,  $\rho = 3,69$ ,  $E = 5,95$ ,  $\mathcal{U} = 0,236$ ;
- 4)  $\mathcal{D} = 6,26$ ,  $\rho = 0$ ;  $\rho = 0$ ;  $E = 2,71$ ;  $\mathcal{U} = 6,32$

На рис.4 приведена зависимость  $\rho(x)$  на момент  $t = 0,0692$ , полученная в расчетах с помощью описанного выше метода. Различие между численным решением и точным решением задачи на графике различить невозможно, хотя в области  $0,7 < x_0 < 1$ , приведенной на рис.4, взято всего 5 точек регулярной пространственной сетки.



1. Куропатенко В.Ф., Сапожников А.Т. Расчет неустановившихся движений сжимаемых сред с фазовыми переходами. - В кн.: Числен. методы механ. сплошной среды. Т.2, № 5. - Новосибирск: Изд.ВЦ и Ин-та теорет. и прикл. механ. СО АН СССР, 1971, с.83
2. Куропатенко В.Ф. Об одной форме псевдовязкости. - Изв. СО АН СССР, сер.техн. 1967, № 13, вып. 3.
3. Куропатенко В.Ф., Минаева И.С. Уравнение состояния некоторых металлов. - В кн.: Числен. методы механ. сплошной среды. Т.13, № 6. - Новосибирск: Изд.ВЦ и Ин-та теорет. и прикл. механ. СО АН СССР, 1982, с. 69-76.

Поступила в редакцию  
23 мая 1984 г.