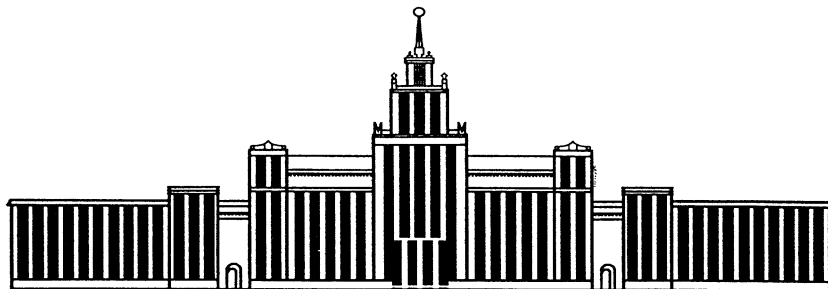


---

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---



---

ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

531(07)  
К562

Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко

# ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Учебное пособие

---

Челябинск  
2020

---

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Южно-Уральский государственный университет  
Кафедра «Вычислительная механика»

531(07)  
К562

Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко

# **ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД**

Учебное пособие

Челябинск  
Издательский центр ЮУрГУ  
2020

УДК 531/534 (075.8)  
К562

*Одобрено  
учебно-методической комиссией  
Института естественных и точных наук*

*Рецензенты:  
д.ф.-м.н., профессор А.Е. Дудоров,  
д.т.н. Г.Ф. Костин*

**Ковалев, Ю.М.**

К562 Введение в математические модели механики сплошных сред: учебное пособие / Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко. – Челябинск, Издательский центр ЮУрГУ, 2020. – 82 с.

Учебное пособие состоит из введения и трех глав. Во введении рассматриваются цели и задачи, стоящие перед механикой сплошной среды. В первой главе представлена методология перехода от атомно-молекулярного строения вещества к механике сплошных сред. Во второй главе приведены основы кинематики сплошных сред. Третья глава содержит основные элементы динамики сплошной среды. Достаточно широко в учебном пособии представлены задачи по кинематике и динамике сплошной среды, что позволяет отрабатывать практические навыки и умения студентов при работе с тензорами деформаций и напряжений.

Пособие рассчитано на студентов направлений «Механика и математическое моделирование» и «Прикладная математика и физика», а также может быть полезно студентам других физических специальностей вузов.

УДК 531/534 (075.8)

© Ковалев Ю.М., Куропатенко В.Ф., 2020  
© Издательский центр ЮУрГУ, 2020

## ВВЕДЕНИЕ

Механика сплошных сред является наукой, использующей и теоретические, и экспериментальные методы изучения процессов, происходящих с течением времени во всех известных агрегатных состояниях вещества (твердое тело, жидкость, газ, плазма), и переходы из одного состояния в другое – фазовые переходы.

Как наука, механика сплошных сред делится на ряд направлений в зависимости от изучаемых сред и протекающих в них процессов (механика деформированного твердого тела, механика жидкости, газа и плазмы, механика многокомпонентных и многофазных сред и т.д.).

Механика сплошных сред изучает поведение вещества на макроуровне в отличие от физики, которая изучает вещество на микроуровне. Конечно, любое вещество дискретно. Оно состоит из микрочастиц (молекул, атомов и т.д.) В этом смысле сплошная среда является не более, чем абстракцией описывающей свойства микрочастиц и результаты их взаимодействия в среднем. С другой стороны, человек живет на макроуровне и для него окружающая среда (вода, воздух, земля и т.д.) является реальной сплошной средой.

Принципиальное значение для развития механики сплошных сред сыграл закон Б. Паскаля (1623–1662 гг.) о независимости давления на площадку внутри жидкости от ориентации этой площадки (1651 г.).

Открытия Г. Галилея, Х. Гюйгенса и И. Ньютона послужили основой бурного развития механики жидкости и газа в конце XVII века. В 1746 г. Л. Эйлер и Д. Бернулли сформулировали закон сохранения моментов количества движения, а в 1748 г. М.И. Ломоносов сформулировал и экспериментально обосновал закон сохранения массы. В 1755 г. Л. Эйлер записал в дифференциальной форме законы сохранения массы и количества движения идеальной сплошной сжимаемой среды, в которой действует единственная сила – давление. Д. Бернулли (1700–1782 гг.) проинтегрировал уравнение сохранения массы и количества движения и получил для установившихся течений уравнение, связывающее давление со скоростью. Вообще говоря, механика сплошных сред, как наука, была создана двумя академиками Российской Академии наук Л. Эйлером и Д. Бернулли. Это стало возможным только благодаря тому, что Г. Лейбниц в 1684 г. изобрел понятие производной  $\frac{dy}{dx}$ . В середине XVII века

И. Ньютон и Г. Лейбниц заложили краеугольный камень дифференциального и интегрального исчисления, которое было существенно развито в работах учителя Л. Эйлера И. Бернулли (1667–1748).

Модель вязкой жидкости была сформулирована в 1822 г. французским ученым А. Навье примерно через 70 лет после появления

уравнений Л. Эйлера. Создание модели вязкой жидкости было завершено в 1847 г. Д. Стоксом, который обосновал линейную зависимость напряжений от скоростей деформаций. Предположив, что в малом диапазоне изменения давления среду можно считать несжимаемой, они написали законы сохранения массы и количества движения “несжимаемой” вязкой сплошной среды. Развитие модели “несжимаемой” вязкой жидкости отвечало потребностям гидродинамики и необходимости моделировать трение в машинах. Все вещества сжимаемы. Поэтому модель “несжимаемости” можно применять для моделирования лишь таких течений, в которых изменение плотности мало. Модель Навье – Стокса является локальной моделью, что не мешает ее широкому применению для практических применений. Локальными моделями являются также уравнения Р. Гука для упругих деформаций и ряд условий текучести для пластической дилатации.

В 1841 г. Ю.Р. Майер сформулировал закон сохранения энергии. В 1843 г. то же самое сделал Д.П. Джоуль, а в 1847 г. Г.А. Гельмгольц записал закон сохранения энергии идеальной сплошной среды в виде дифференциального уравнения в частных производных.

До настоящего времени в основе механики сплошных сред лежат три закона сохранения: массы, количества движения и энергии.

Уравнения Эйлера – Гельмгольца образуют ядро всех моделей механики сплошных сред. Поскольку из законов сохранения массы, импульса и энергии идеальной сжимаемой сплошной среды вытекает следствие – сохранение энтропии вдоль траектории (линии тока) любой частицы, то это ядро будем называть адиабатическим. Если теперь разделить тензор напряжений на шаровой тензор – давление  $P$  и девиатор тензора напряжений  $S_{ik}$ , то вязкость, упругость, пластичность, сухое трение в порошках описываются дополнительными членами в уравнениях движения и энергии адиабатического ядра. Теплопроводность учитывается добавлением соответствующего члена в уравнение энергии. Уравнения состояния вещества могут быть сколь угодно сложными и описывать равновесные фазовые переходы. Методы механики сплошной среды позволяют успешно описывать различные процессы, происходящие в многокомпонентных и гетерогенных средах. Это стало возможным с введением понятия многоскоростного континуума и определением взаимопроникающего движения компонентов составляющих смесь. Для описания неравновесных фазовых переходов, неравновесных химических реакций, неравновесного роста или залечивания микро- и макродефектов к уравнениям адиабатического ядра добавляются соответствующие кинетические эволюционные уравнения. От скорости деформаций могут зависеть также и предел упругости, и прочность. Структура моделей механики сплошных сред схематически изображена на рис. 1.1.

Разработка и создание образцов техники и различных сооружений требуют знания свойств, применяемых конструкционных материалов. Сугубо практические задачи механики диктуют необходимость все более полного и детального исследования явлений, сопровождающих воздействие нагрузок, особенно динамических, на материалы. Знание свойств материалов играет фундаментальную роль при решении задач безопасности и предотвращения разрушения конструкций практически во всех отраслях народного хозяйства.

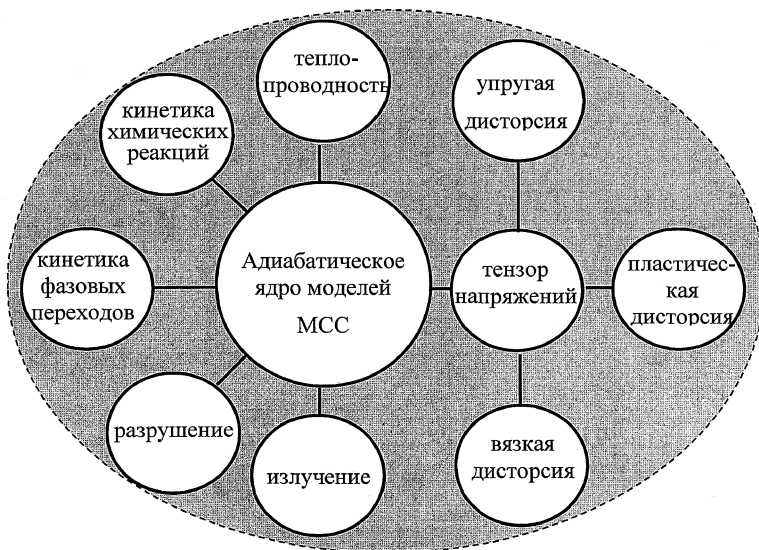


Рис. 1.1. Схематическое изображение структуры моделей механики сплошных сред. За рамками эллипса располагаются многоуровневые модели (молекулярной динамики, мезопластичности, многокомпонентных сред и др.)

Необходимость прогнозирования поведения образцов техники не только в режиме нормальной эксплуатации, но и в экстремальных условиях, резко повышает роль моделирования, как одного из основных методов механики сплошной среды, очень часто единственно возможного. Моделированием называют замену изучения свойств реального объекта (натуры) изучением свойств его модели. Модели делятся на два вида: лабораторные модели и математические модели. Соответственно и

моделирование делится на лабораторное и математическое. Очевидно, что модель не может быть тождественна натуре. Тогда это не модель. Как правило, лабораторная модель по наиболее существенным параметрам должна быть подобна натуре.

Математическое моделирование – это теоретическое описание и исследование изучаемого явления с помощью математического аппарата. Система уравнений, описывающих начальное состояние природы, ее поведение под действием внешних воздействий, сами внешние воздействия и свойства материалов природы называется математической моделью.

Следует отметить, что в последние 25–30 лет в связи с прогрессом в области электронных вычислительных машин роль математического моделирования резко возросла. Более того, есть такие проблемы, когда математическое моделирование является единственным средством предварительного изучения явления, например, быстротекающие процессы, когда за несколько микросекунд выделяется значительное количество энергии, распространение ударных волн, переход горения в детонацию и т.д.. С середины 90-х годов математические модели и математическое моделирование применяются практически во всех областях человеческой деятельности: механика сплошных сред, физика, электроника, электротехника, химия, технология химических, металлургических и других производств, экономика, социальные системы, биология, медицина и т.д.

При построении математических моделей физических, механических, химических и других процессов следует учитывать многие особенности этих процессов. Как правило, это делается путем включения в математическую модель специальных эволюционных уравнений, либо дополнительных членов в законах сохранения. Равновесные свойства вещества описываются уравнениями состояния. Развитие математического моделирования потребовало повышения их точности и увеличения объема информации о свойствах веществ, получаемой либо из экспериментов, либо из теоретических моделей вещества. В этих условиях одним из основных стал метод экспериментального измерения параметров ударных волн. Среди свойств материалов, проявляющихся при динамических нагрузках, экспериментально наиболее полно и последовательно изучена сжимаемость в ударных волнах и на основе этих исследований построены разнообразные математические модели уравнений состояния. В настоящее время ударные адиабаты экспериментально определены для большинства элементов периодической системы Менделеева, а также для многих химических элементов.

Трудности непосредственного измерения величин в процессе упругого и пластического деформирования и разрушения вещества активизировали развитие физических и математических моделей этих

явлений. Были созданы различные по глубине физического рассмотрения модели от моделей механики сплошной среды до физических моделей, описывающих упругость, пластичность и разрушение с помощью кинетических уравнений.

Особое место занимает область состояний, в которой вещества в процессе динамического нагружения и последующей разгрузки находятся в твердой фазе. В этой области в полной мере проявляются их неравновесные свойства, что приводит к широкому многообразию видов разрушения твердых тел.

К началу 90-х годов усилиями отечественных и зарубежных исследователей накоплен весьма обширный запас опытных данных о свойствах вещества в экстремальных условиях нагружения. Анализ этих данных позволил выявить ряд закономерностей поведения твердых, жидких и газовых сред в условиях высокоскоростного деформирования. Предложенные в разные годы математические модели описания материалов под действием импульсных нагрузок можно разделить на две группы. Прежде всего, это так называемые «точные» модели, включающие эволюционные уравнения процессов деформирования и разрушения. Второй подход представлен более простыми, так называемыми «инженерными» моделями, в которых свойства материалов представляются функцией некоторых интегральных характеристик вещества.

Однако, несмотря на значительные успехи, проблема изучения разрушения и пластического деформирования материалов при динамических нагрузках остается актуальной и в наши дни, поскольку среди исследователей нет единого подхода к трактовке и описанию этих явлений.

Несмотря на бурное развитие численных методов математического моделирования, в механике сплошных сред продолжают играть большую роль аналитические решения. Для их получения исходная система законов сохранения, как правило, упрощается, сохраняя основные закономерности изучаемого процесса. Очень часто решения строятся для простейших уравнений состояния – идеального газа, линейной зависимости давления от объема и т.д. Построение аналитических решений позволяет проанализировать особенности рассматриваемого движения сплошной среды и сделать оценки характеристик течения. Аналитические решения играют также важную роль в качестве эталонных решений для оценки свойств численных методов, применяемых для решения задач механики сплошных сред. Конечно, контроль имеет хотя и важное, но все-таки частое значение. Верификация любой математической модели механики сплошных сред невозможна без физического эксперимента. Проверка свойств математической модели делается, как правило, путем сравнения результатов расчета экспериментом.



# Глава 1. АТОМЫ, МОЛЕКУЛЫ И СПЛОШНАЯ СРЕДА

## 1.1. Агрегатные состояния вещества

Каждое вещество в зависимости от давления и температуры может находиться в одном из четырёх агрегатных состояний – твёрдом, жидком, газовом или плазме. Однако, в случае соединений это правило выполняется не всегда.

В твёрдом состоянии одно и то же вещество может иметь внутренние структуры, различающиеся по своим свойствам. Это явление существования нескольких модификаций одного соединения или простого вещества называется полиморфизмом. Устойчивость полиморфной модификации зависит от температуры и давления. В отличие от твёрдого тела жидкость и газ не имеют полиморфных модификаций.

Переход вещества из жидкого состояния в газ называется парообразованием. В частном случае, когда переход из жидкости в газ происходит с поверхности, процесс называется испарением. Обратный переход из газа в жидкость называется конденсацией. Возможен прямой переход из твёрдого состояния в газ. Он называется возгонкой или сублимацией. Обратный переход из газа в твёрдое состояние также возможен. Как и в случае с жидкостью он называется конденсацией пара. В соответствии с этим твёрдое и жидкое состояния часто объединяют общим термином конденсированное состояние.

Переход из твёрдого состояния в жидкое называется плавлением, а обратный переход – кристаллизацией. Переход из одного твёрдого состояния в другое называется полиморфным переходом.

Необходимость моделировать поведение вещества при изменении давления, температуры или других характеристик требует, чтобы свойства вещества описывались математическими уравнениями, которые учитывают все его особенности. Чтобы построить такие математические уравнения, нужно рассмотреть поведение вещества на микроуровне, т.е. рассмотреть взаимодействие его атомов или молекул друг с другом, а затем перейти к сплошной среде, уравнение состояния которой описывает на макроуровне перечисленные выше взаимодействия микрочастиц.

Названия состояний вещества и переходов из одного состояния в другое излагаются во многих монографиях по физической химии.

## 1.2. Атомы и молекулы

Почти 2400 лет тому назад древнегреческий философ Демокрит предположил, что все вещества состоят из отдельных неделимых частиц, которые он назвал атомами. Он ошибался только в одном – атом тоже

делим. Все атомы состоят из частиц трех типов: электронов, протонов и нейтронов. Протоны и электроны имеют одинаковые по абсолютной величине, но разные по знаку электрические заряды. Протон имеет заряд  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  Кл и массу  $M_p = 1,672 \cdot 10^{-24}$  г, электрон имеет отрицательный заряд  $e = -1,602 \cdot 10^{-19}$  Кл и массу  $M_e = 9,109 \cdot 10^{-28}$  г. Нейтрон не имеет электрического заряда. Устойчиво нейтрон существует в ядрах атомов длительное время. В свободном же состоянии он расщепляется на протон и электрон с периодом полураспада  $\sim 12$  минут. Масса нейтрона равна  $M_n = 1,673 \cdot 10^{-24}$  г. Вообще-то элементарных частиц много. Благодаря исследованию космического излучения и появлению мощных ускорителей обнаружено более 200 видов элементарных частиц. Все микрочастицы можно разделить на четыре группы:

1. Тяжелые частицы – протоны, нейтроны и ядра легких элементов.
2. Легкие частицы – электроны, позитроны, отличающиеся от электрона знаком заряда, фотоны, нейтрино.
3. Мезоны – нестабильные заряженные или нейтральные частицы с массой большей, чем масса электрона, но меньшей массы протона.
4. Гипероны – нестабильные заряженные или нейтральные частицы с массой, большей, чем у протона.

Несмотря на обилие микрочастиц, строительным материалом для атомов являются протоны, нейтроны и электроны. Протоны и нейтроны образуют атомное ядро и называются нуклонами. Они связаны в ядре силами ядерного взаимодействия, которые во много раз превосходят силы электростатического отталкивания, действующие между протонами. Электроны располагаются вокруг ядра в некоторой области. В ряде монографий и учебников излагаются различные модели строения атома. В предложенной Резерфордом простейшей модели электроны движутся вокруг атомного ядра подобно планетам вокруг Солнца. Действующая на них центробежная сила уравнивается электростатическим притяжением отрицательно заряженного электрона к положительно заряженному ядру.

В электронейтральных атомах число электронов равно числу протонов в ядре. При удалении одного или нескольких электронов атом становится положительным ионом, при присоединении электрона – отрицательным ионом. Число электронов в атоме определяет его поведение в химических реакциях. Заряд атомного ядра равен порядковому номеру элемента в периодической таблице Д.И. Менделеева, т.е. равен числу протонов в ядре. Именно число протонов определяет химическую индивидуальность атома. Если от ядра атома железа оторвать один протон, то атом железа превратится в атом марганца. Атом самого легкого элемента – водорода состоит из одного протона и одного электрона. При некоторых условиях количество нейтронов в ядре

меняется, что приводит к возникновению изотопов данного элемента, которые отличаются друг от друга количеством нейтронов в ядрах их атомов и, следовательно, массой. В природе встречаются два изотопа водорода: дейтерий с двумя нейтронами в ядре и тритий с тремя нейтронами. Ядро атома железа состоит из 26 протонов и 30 нейтронов – это наиболее распространенные в природе ядра железа. Но встречаются также устойчивые атомы железа, в ядрах которых число нейтронов равно 28, 31 и даже 32. И химические свойства у всех таких атомов железа одинаковы.

В книге по механике сплошных сред нет нужды углубляться в тонкости и детали квантовой механики. Поэтому ограничимся лишь сведениями, которые могут быть использованы при построении уравнений состояния вещества.

В настоящее время известно 105 различных атомов с различным числом протонов в ядре, т.е. 105 различных химических элементов. Атомы этих веществ могут соединяться друг с другом в различных комбинациях и создавать огромное количество соединений. Наименьшей микрочастицей химических соединений является молекула.

Молекулами называют материальные системы, которые состоят из двух или многих атомов, связанных между собой и образующих единое целое. Устойчивость молекулы обеспечивается тем, что силы притяжения между атомами в молекуле больше, чем силы взаимодействия молекулы с окружающим веществом. Силы, удерживающие атомы в составе молекулы, называются химическими связями. При внешних воздействиях на молекулу химические связи могут разрушаться. При этом образуются новые молекулы с другой группировкой атомов – происходит химическая реакция.

Молекула представляет собой не просто сумму атомов, а качественно новый продукт, свойства которого определяются совокупностью входящих в нее атомов. Одним из таких свойств является способность соединяться с другими молекулами, образуя химические соединения. Между молекулами действуют силы притяжения (силы Ван-дер-Ваальса). Эти силы намного слабее, чем связи атомов в молекуле.

Впервые понятие молекулы возникло при исследовании газообразного состояния вещества. Действительно, есть одноатомные газы, например, одноатомный водород  $H$ . Но есть в природе и водород, частицы которого состоят из молекул  $H_2$ , объединяющих два атома водорода. В газообразном состоянии каждое соединение состоит из молекул. Молекулы  $HCl$ ,  $H_2O$ ,  $NaCl$  и многие другие в газообразном состоянии движутся относительно самостоятельно.

В жидком и твердом агрегатных состояниях всё обстоит намного сложнее. Например, кристаллы твердого хлористого натрия представляют собой равномерную решётку, в узлах которой находятся относительно

самостоятельные ионы  $\text{Na}^+$  и  $\text{Cl}^-$ . Не всякое химическое соединение в твёрдом или жидком состояниях состоит из молекул. Но понятие молекулы не теряет своего смысла и в случае твёрдого тела или жидкости. Кристалл может также состоять из молекул, расположенных в узлах элементарных ячеек, и носит названия молекулярного кристалла.

### 1.3. Связи микрочастиц

В твёрдом или жидком состоянии атомы располагаются настолько близко друг к другу, что валентные электроны отрываются от своих атомов и свободно перемещаются внутри решетки. То есть в кристаллической решетке образуется однородное распределение электронов. Металлическая связь образуется вследствие взаимодействия положительных ионов с электронным газом. В отличие от ковалентной связи, когда электроны обобществляются парой атомов, в случае металлической связи в обобществлении электронов участвуют все атомы кристалла.

К молекулярным кристаллам относят твердые тела, в узлах кристаллической решетки которых располагаются либо одинаковые молекулы с насыщенными связями ( $\text{H}_2$ ,  $\text{Cl}_2$ ,  $\text{Br}_2$ ,  $\text{I}_2$ ), либо атомы инертных газов ( $\text{Ar}$ ,  $\text{Ne}$ ,  $\text{Kr}$ ,  $\text{Xe}$ ,  $\text{Rn}$ ). К молекулярным кристаллам относятся также кристаллы углеводородов. Одной из характерных особенностей молекулярных кристаллов является то, что основная связь между частицами – это Ван-дер-Ваальсова связь. Она очень слабая по сравнению с другими связями, но в то же время наиболее универсальна. Вследствие того, что энергия Ван-дер-Ваальсовской связи мала, все структуры, образованные ею, мало устойчивы, легко летучи и имеют низкие точки плавления.

В реальных твердых телах каждая из рассмотренных связей в чистом виде почти никогда не встречается. Практически всегда имеет место наложение нескольких типов связей, причём одна из них является основной и определяет структуру и свойства тела.

Связи ионных остовов делятся на три вида: межатомные, межмолекулярные и водородные.

**1. Межатомные связи** в свою очередь делятся на три подтипа:

1.1. **Ионная связь** устанавливается между атомами, имеющими кроме заполненных электронных оболочек валентные электроны, которые могут легко отдавать (щелочные металлы, галогены) или присоединять.

1.2. **Ковалентная связь** возникает в случае, когда атомы обмениваются своими валентными электронами ( $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{CH}_4$  и др.).

1.3. **Металлическая связь** возникает в случае, если положительно заряженные ионы плотно упаковываются в электронном газе, образованном свободными электронами.

**2. Межмолекулярная связь** (Ван-дер-Ваальсова связь) возникает между молекулами.

**3. Водородная связь** возникает из-за того, что атом водорода способен связывать два отрицательных иона.

Все без исключения химические связи характеризуются энергией и длиной связи, т.е. расстоянием между центрами атомов или молекул, соединённых этой связью. Как всякая связь, химическая связь способна разрываться или возникать при возникновении необходимых условий. Разрыв или возникновение связей сопровождается выделением или поглощением энергии, что должно учитываться уравнением состояния вещества.

Атомы в молекуле не неподвижны. Они колеблются около положения равновесия. Амплитуда их колебаний зависит от температуры. При малых температурах амплитуды малы и колебания носят линейный (гармонический) характер.

#### 1.4. Сплошная среда

Атомно-молекулярные модели не могут использоваться для моделирования поведения веществ в технологических процессах, поведения конструкций или машин, имеющих промышленные размеры примерно 10 см или больше. В этом случае количество микрочастиц в рассматриваемом объекте столь велико, что современные ЭВМ, работающие со скоростью  $10^{16}$  операций в секунду, за обозримое время не могут рассчитывать характеристики такого тела или процесса. Этим объясняется широкое применение моделей механики сплошной среды, основанных на понятии сплошной среды и принципе инвариантности к преобразованию Галилея. Модели механики сплошной среды состоят из трёх одинаково важных составных частей:

- законов сохранения массы, импульса и энергии сплошной среды;
- уравнений состояния, связывающих термодинамические характеристики вещества – давление  $P$ , плотность  $\rho$ , удельную внутреннюю энергию  $E$ , температуру  $T$ , энтропию  $S$ , энтальпию  $H$ , свободную энергию Гельмгольца, Гиббса и т.д. Зависимость давления от  $\rho$  и  $T$  выражает свойства шаровой части тензора напряжений;
- определяющих уравнений, описывающих реальные свойства (вязкость, упругость, пластичность), являющиеся компонентами девиатора тензора напряжений, теплопроводность, взаимодействие вещества с различными излучениями и т.д.

До появления атомно-молекулярных моделей считалось, что всё вокруг нас – это сплошная среда, непрерывным образом заполняющая любой объём пространства. Затем был длительный период, когда

одновременно существовало два подхода к описанию поведения вещества. В первом подходе вещество рассматривалось как сплошная среда. Это макроуровень. Во втором подходе вещество рассматривалось как дискретная среда микрочастиц. Это микроуровень.

Рассмотрим дискретную среду микрочастиц. Пусть в некотором произвольном конечном объёме  $\Delta\theta$  находится  $n$  микрочастиц. Каждая частица имеет номер  $\nu$ , массу  $m_\nu$ , скорость  $\bar{U}_\nu$  и удельную внутреннюю энергию  $E_\nu$ . В некоторый произвольный момент времени  $t^*$  масса  $\Delta M$ , количество движения  $\Delta K$  и энергия  $\Delta Q$  всех  $n$  частиц определяются суммированием

$$\Delta M = \sum_{\nu=1}^n m_\nu, \quad \Delta \bar{K} = \sum_{\nu=1}^n m_\nu \bar{U}_\nu, \quad \Delta Q = \sum_{\nu=1}^n m_\nu (E_\nu + 0.5 \bar{U}_\nu^2) \quad (1.1)$$

Назовём вещество в объёме  $\Delta\theta$  макрочастицей и определим его термодинамические характеристики. Средние плотность, скорость и удельная энергия вещества макрочастицы определяются уравнениями

$$\rho_c = \frac{\Delta M}{\Delta\theta}, \quad \bar{U}_c = \frac{\Delta \bar{K}}{\Delta M}, \quad \varepsilon_c = \frac{\Delta Q}{\Delta M}. \quad (1.2)$$

Скорость  $\bar{U}_c$  является поступательной скоростью макрочастицы  $\Delta\theta$ . Удельная энергия макрочастицы состоит из удельной внутренней энергии  $E_c$  и удельной кинетической энергии  $0,5\bar{U}_c^2$ . Из (1.1) и (1.2) следует

$$\bar{U}_c = \sum_{\nu=1}^n \eta_\nu \bar{U}_\nu, \quad (1.3)$$

$$E_c + 0,5\bar{U}_c^2 = \sum_{\nu=1}^n \eta_\nu (E_\nu + 0,5\bar{U}_\nu^2), \quad (1.4)$$

где отношение  $\eta_\nu = \frac{m_\nu}{\Delta M}$  называется массовой концентрацией  $\nu$ -й микрочастицы. Используя уравнение (1.3), а также условие, которому удовлетворяют массовые концентрации  $\eta_\nu$

$$\sum_{\nu=1}^n \eta_\nu = 1,$$

запишем (1.4) в виде

$$E_c = \sum_{\nu=1}^n \eta_\nu (E_\nu + 0,5(\bar{U}_\nu - \bar{U}_c)^2). \quad (1.5)$$

Из (1.5) следует, что при переходе от микроуровня к макроуровню удельная внутренняя энергия возрастает.

$$E_c > \sum_{v=1}^n \eta_v E_v.$$

Подчеркнем, что переход от модели микроуровня к модели макроуровня вызван необходимостью решения технических проблем с помощью моделей, которые по силам современным ЭВМ. Для практики часто требуется знание только некоторых средних, суммарных или глобальных характеристик.

В механике сплошных сред для исследования движения деформируемых твердых, жидких или газообразных объектов вводится модель деформируемой сплошной среды, или деформируемого континуума, отвлекаясь от атомарно-молекулярного строения вещества. Это можно делать только в том случае, когда характерные размеры исследуемых объектов многократно больше этих атомарных или межмолекулярных размеров. Именно с такой ситуацией приходится иметь дело при решении практических задач, при проектировании, исследовании, расчетах рабочих процессов и прочности машин, самолетов, ракет, мостов, зданий, взрывов, при исследовании технологических процессов в реакторах, нефтяных пластах и т.д.

Каждый такой переход происходит в фиксированный момент времени и означает попытку создания такой модели, которая по возможности сохранила бы свойства вещества на микроуровне и в то же время позволила проводить расчеты макропроцессов на ЭВМ. Необходимым условием существования сплошной среды является непрерывность в каждой точке пространства  $x, y, z, t$  функций  $M, K, Q, \rho, \bar{U}, \varepsilon$ . Поскольку момент времени  $t^*$  для перехода от микроуровня к макроуровню был выбран произвольно, то законы сохранения массы, импульса и энергии (1.1) при переходе от микроуровня к сплошной среде справедливы в любой момент времени, а сами функции  $\rho, \bar{U}, \varepsilon$  непрерывны в четырехмерном пространстве  $x, y, z, t$  и имеют все частные производные.

Подводя итог рассуждениям, приведенным выше, сформулируем понятие сплошной среды. Окружающий нас мир состоит из отдельных частиц, но их много в любом существенном для нас объеме, поэтому тела можно приближенно рассматривать как среду, заполняющую пространство сплошным образом. Непрерывным континуумом можно считать не только обычные материальные тела, но и различные поля, например электромагнитное поле. Эта детализация, в частности, необходима для того, что мы хотим при исследовании движения деформируемых тел использовать аппарат непрерывных функций, дифференциальное и интегральное исчисление.

## Глава 2. КИНЕМАТИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

### 2.1. Два метода изучения движений сплошной среды

Уравнения механики сплошной среды могут быть записаны в двух различных формах – эйлеровой и лагранжевой.

Для получения уравнений в форме Эйлера в сплошной среде необходимо выделить некоторый объем и затем проследить за потоками массы, импульса и энергии через поверхность, ограничивающую этот объем. Одни частицы вещества втекают в выбранный объем, другие вытекают из него, но тем не менее всегда можно указать массу, количество движения и полную энергию вещества, находящегося в этом объеме.

В силу произвольности объема уравнения в форме Эйлера справедливы в каждой точке пространства. Они позволяют проследить изменение всех необходимых величин ( $P$ ,  $\rho$ ,  $E$ ,  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $U_z$  и др) в точке  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в зависимости от времени  $t$ .

Уравнения в форме Лагранжа получаются в том случае, когда объектом наблюдения является не объем, а некоторая масса вещества (частица). Каждой частице присваивается определенное значение координат Лагранжа, которые в процессе движения не меняются. В качестве координат Лагранжа может быть взято, например, начальное положение частицы или ее массовые координаты в некоторой системе отсчета, или просто номер частицы. Таким образом, уравнения в форме Лагранжа позволяют проследить изменение величин  $P$ ,  $\rho$ ,  $E$ ,  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $U_z$  в некоторой движущейся частице вещества с лагранжевыми координатами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  в зависимости от времени  $t$ . Очевидно, что эйлеровы координаты этой частицы меняются с течением времени. Эти изменения определяются уравнениями

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t).$$

Выразим производные по  $x, y, z$  некоторой функции  $f(x, y, z, t)$  через производные по  $a, b, c$ . В результате получим систему трех линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a}, \\ \frac{\partial f}{\partial b} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial b}, \\ \frac{\partial f}{\partial c} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial c}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

В системе уравнений (2.1) производные по  $a, b, c$  известны, поскольку



известны зависимости  $x, y, z$  от  $a, b, c$ . Производные  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$  являются решением системы уравнений (2.1) и выражаются через производные  $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}, \frac{\partial f}{\partial c}$  следующим образом

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{D_0} \left( D_{x1} \frac{\partial f}{\partial a} - D_{x2} \frac{\partial f}{\partial b} + D_{x3} \frac{\partial f}{\partial c} \right), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{D_0} \left( D_{y1} \frac{\partial f}{\partial a} - D_{y2} \frac{\partial f}{\partial b} + D_{y3} \frac{\partial f}{\partial c} \right), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{D_0} \left( D_{z1} \frac{\partial f}{\partial a} - D_{z2} \frac{\partial f}{\partial b} + D_{z3} \frac{\partial f}{\partial c} \right), \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} D_{x1} &= \frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial y}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial b}, & D_{x2} &= \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial y}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial a}, & D_{x3} &= \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial z}{\partial a}, \\ D_{y1} &= \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial b}, & D_{y2} &= \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial a}, & D_{y3} &= \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial z}{\partial a}, \\ D_{z1} &= \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial y}{\partial b}, & D_{z2} &= \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial y}{\partial a}, & D_{z3} &= \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial a}, \\ D_0 &= \frac{\partial x}{\partial a} D_{x1} - \frac{\partial x}{\partial b} D_{x2} + \frac{\partial x}{\partial c} D_{x3}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\text{div} \bar{f}$  и  $\text{grad} \varphi$  в лагранжевых переменных приобретают вид

$$\begin{aligned} \text{div} \bar{f} &= \frac{1}{D_0} \left( D_{x1} \frac{\partial f_x}{\partial a} - D_{x2} \frac{\partial f_x}{\partial b} + D_{x3} \frac{\partial f_x}{\partial c} - D_{y1} \frac{\partial f_y}{\partial a} + D_{y2} \frac{\partial f_y}{\partial b} - D_{y3} \frac{\partial f_y}{\partial c} + \right. \\ &\quad \left. + D_{z1} \frac{\partial f_z}{\partial a} - D_{z2} \frac{\partial f_z}{\partial b} + D_{z3} \frac{\partial f_z}{\partial c} \right), \quad (2.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{grad} \varphi &= \frac{1}{D_0} \left( \left( D_{x1} \frac{\partial \varphi}{\partial a} - D_{x2} \frac{\partial \varphi}{\partial b} + D_{x3} \frac{\partial \varphi}{\partial c} \right) \bar{i} - \left( D_{y1} \frac{\partial \varphi}{\partial a} - D_{y2} \frac{\partial \varphi}{\partial b} + D_{y3} \frac{\partial \varphi}{\partial c} \right) \bar{j} + \right. \\ &\quad \left. + \left( D_{z1} \frac{\partial \varphi}{\partial a} - D_{z2} \frac{\partial \varphi}{\partial b} + D_{z3} \frac{\partial \varphi}{\partial c} \right) \bar{k} \right). \quad (2.6) \end{aligned}$$

Рассмотрим полную производную функции  $f(t, x, y, z)$  вдоль некоторого направления, определяемого производными  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{x_0y_0z_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{xyz} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{tyz} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{x_0y_0z_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{txz} \left(\frac{dy}{dt}\right)_{x_0y_0z_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{txy} \left(\frac{dz}{dt}\right)_{x_0y_0z_0}.$$

Вдоль линии тока, определяемой уравнениями

$$dx = U_x dt, \quad dy = U_y dt, \quad dz = U_z dt,$$

производная  $df/dt$  является скоростью изменения величины  $f$ , характеризующей частицу вещества с координатами  $x_0, y_0, z_0$  (субстанцию). Поэтому полная производная, записанная в виде

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{xyz} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{tyz} U_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{txz} U_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{txy} U_z, \quad (2.7)$$

является субстациональной производной. Условие постоянства лагранжевой координаты  $a$  вдоль линии, в каждой точке которой касательные совпадают по направлению со скоростью в этой точке в данный момент времени, имеет вид

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} U_x + \frac{\partial a}{\partial y} U_y + \frac{\partial a}{\partial z} U_z = 0.$$

Точно такой же вид имеют уравнения для лагранжевых координат  $v$  и  $s$ .

Основное отличие методов Лагранжа и Эйлера заключается в том, что в методе Лагранжа величины  $x, y, z$  являются переменными координатами движущейся частицы жидкости, а в методе Эйлера  $x, y, z$  координаты фиксированных точек пространства, через которые проходят в данный момент времени различные частицы. Это позволяет определить выражения скоростей частиц в функции от времени  $t$  и координат, то есть задать поле скоростей.

## 2.2. Линии тока и траектории

Изучая движение сплошных сред в переменных Эйлера, в части пространства, занятого жидкостью, в каждый заданный момент времени в каждой точке можно построить вектор скорости. Совокупность таких векторов образует поле скоростей. Если при эйлеровом описании движение сплошной среды и ее параметры не зависят от времени, а только от координат, в этом случае поле скоростей называют стационарным или установившимся. В общем случае поле скоростей может быть и нестационарным. Обтекание одного и того же тела может быть как стационарным, так и нестационарным в зависимости от выбора системы координат, в которой рассматривается течение. Например, обтекание тела будет установившимся в системе координат, связанной с телом, но неустановившимся в системе координат, связанной наблюдателем.

Очевидно, что движение удобнее исследовать в представлении Эйлера в системе координат, где это движение является установившимся. В этом случае параметры течения не зависят от переменной, связанной со временем  $t$ , и максимальное число независимых переменных равно не четырем, а трем.

Поле скорости определяет векторные линии или линии тока. Линиями тока поля скоростей называются линии, в каждой точке которых касательные совпадают по направлению со скоростью в этой точке в данный момент времени. Условие совпадения направления касательной к линии тока и вектора скорости в этой точке позволяет представить систему дифференциальных уравнений линий тока в виде:

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)},$$

Кроме понятия линии тока, при описании сплошной среды вводят понятие траектории частицы. Траекторией частицы называется геометрическое место ее положения в различные моменты времени, следовательно, дифференциальные уравнения для описания траектории частицы имеют следующий вид:

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} = dt.$$

В уравнениях для траекторий частиц время  $t$  является независимым переменным, по которому дифференцируются и интегрируются уравнения, а в уравнениях для линий тока время  $t$  является фиксированным параметром. Линии тока дают мгновенную картину движения различных точек тела, а траектории дают историю движения различных точек тела в течение некоторого промежутка времени. В частном случае стационарного поля скоростей получаются одинаковые системы дифференциальных уравнений, как для линии тока, так и для траектории частиц, следовательно, в этом случае линии тока и траектории частиц совпадают.

Линии тока и траектории совпадают и для неустановившихся движений, когда со временем меняются только величины скоростей, но не их направления. Можно привести следующие примеры совпадения линий тока и траекторий для неустановившихся движений:

1. Ускоренное или замедленное вращение вокруг неподвижной оси, когда линии тока и траектории – это концентрические окружности с центрами на оси вращения.

2. Прямолинейное поступательное движение с переменной во времени скоростью, когда линии тока и траектории – параллельные прямые.

В остальных случаях неустановившихся движений линии тока и траектории различаются. В общем случае через каждую точку области движения сплошной среды, проходит линия тока и притом только одна. Исключением являются такие точки, через которые проходит либо несколько линий тока, либо, ни одной. Такие точки называются особыми или критическими. Очевидно, что если линии тока пересекаются в особой точке под различными углами, то в силу невозможности одной и той же точке иметь одновременно разные направления движения, следует, что скорость жидкости в этой точке равна либо нулю, либо бесконечности.

В заключении приведем несколько примеров линий тока и траекторий для некоторых движений без деформаций, или движений абсолютно твердого тела:

1. В случае поступательного движения тела со скоростью  $V$  линии тока прямые линии, параллельные скорости  $V$ , а траектории эквидистантные линии, определяемые траекторией одной из точек. Траектории в случае изменения направления  $V$  со временем могут иметь разнообразные формы.

2. В случае вращения тела вокруг неподвижной оси линии тока и траектории совпадают и являются концентрическими окружностями с центрами на неподвижной оси.

3. При произвольном движении абсолютно твердого тела (или движении без деформаций) линии тока – винтовые линии, траектории могут иметь разнообразные формы.

### 2.3. Движения сплошной среды

Согласно второму закону Ньютона любая не равная нулю сила, действующая в сплошной среде, вызывает ускорение в точке её приложения. Сплошная среда это континуум точек. Траектория любой произвольно выбранной точки с координатами  $x_0, y_0, z_0$  в момент  $t_0$  при  $t > t_0$  определяется системой уравнений

$$x = x(t, x_0, y_0, z_0), \quad y = y(t, x_0, y_0, z_0), \quad z = z(t, x_0, y_0, z_0). \quad (2.8)$$

При  $t > t_0$  координаты  $x, y, z$  характеризуют изменённое положение выбранной точки и называются эйлеровыми координатами. Координаты  $x_0, y_0, z_0$ , определяющие положение избранной точки в момент  $t_0$  и не изменяющиеся при движении этой точки, называются лагранжевыми.

Запишем систему уравнений (2.8) в дифференциалах

$$dx = \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0} dt + \left( \frac{\partial x}{\partial x_0} \right)_{t_0 y_0 z_0} dx_0 + \left( \frac{\partial x}{\partial y_0} \right)_{t_0 x_0 z_0} dy_0 + \left( \frac{\partial x}{\partial z_0} \right)_{t_0 x_0 y_0} dz_0,$$

$$dy = \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0} dt + \left( \frac{\partial y}{\partial x_0} \right)_{t_0 y_0 z_0} dx_0 + \left( \frac{\partial y}{\partial y_0} \right)_{t_0 x_0 z_0} dy_0 + \left( \frac{\partial y}{\partial z_0} \right)_{t_0 x_0 y_0} dz_0, \quad (2.9)$$

$$dz = \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0} dt + \left( \frac{\partial z}{\partial x_0} \right)_{t_0 y_0 z_0} dx_0 + \left( \frac{\partial z}{\partial y_0} \right)_{t_0 x_0 z_0} dy_0 + \left( \frac{\partial z}{\partial z_0} \right)_{t_0 x_0 y_0} dz_0.$$

Система уравнений (2.9) содержит 12 производных. Три производных при  $dt$  определяют компоненты вектора скорости

$$U_x = \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0}, \quad U_y = \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0}, \quad U_z = \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0}. \quad (2.10)$$

Следует помнить, что производные  $x$ ,  $y$ ,  $z$  по  $t$  берутся при постоянных значениях  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ . Остальные 9 производных образуют **матрицу градиентов относительных смещений** – фундаментальный тензор смещений

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{pmatrix}.$$

Согласно существующим моделям твёрдого тела фундаментальный тензор  $T$  описывает все относительные смещения, то есть деформации и повороты сплошной среды. В литературе по механике сплошных сред, движения среды, при которых меняются расстояния между материальными точками, называются **деформацией**. В то же время, довольно часто деформацией называют не процесс, а относительные изменения характеристик тела (относительные приращения линейных отрезков, объемов, углов и т.д.). Таким образом, термин «деформация» используется и в том, и в другом смысле. Однако, если обратиться к уравнениям (2.9), то становится ясно, что производные, являющиеся компонентами фундаментального тензора  $T$ , берутся при  $t = \text{const}$ . Иными словами, если рассматривается тензор  $T$ , то рассматривается только состояние в точке  $t_0$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  и ни о каких конечных изменениях объёма или формы речи не идёт. Конечные изменения могут появиться только после интегрирования тензора  $T$  по времени. Тем не менее, отдавая дань привычкам, будем придерживаться исторически сложившейся терминологии и называть тензора, возникающие после расщепления фундаментального тензора, тензором деформаций и тензором поворотов.

Разложим фундаментальный тензор  $T$  на симметричный тензор  $T_\varepsilon$ , который называется тензором деформаций, и несимметричный тензор  $T_\omega$ , который называется тензором поворотов

$$T = T_\varepsilon + T_\omega.$$

Введем следующие обозначения компонентов тензоров  $T_\varepsilon$  и  $T_\omega$

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad T_\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & \omega_{zy} & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что компоненты тензоров  $T$ ,  $T_\varepsilon$  и  $T_\omega$  связаны уравнениями:

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = \varepsilon_{xx}, \quad \frac{\partial y}{\partial y_0} = \varepsilon_{yy}, \quad \frac{\partial z}{\partial z_0} = \varepsilon_{zz}, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial y_0} &= \gamma_{xy} + \omega_{xy}, & \frac{\partial x}{\partial z_0} &= \gamma_{xz} + \omega_{xz}, \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} &= \gamma_{yx} + \omega_{yx}, & \frac{\partial y}{\partial z_0} &= \gamma_{yz} + \omega_{yz}, \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} &= \gamma_{zx} + \omega_{zx}, & \frac{\partial z}{\partial y_0} &= \gamma_{zy} + \omega_{zy}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

#### 2.4. Тензор поворотов и тензор скоростей поворотов

Рассмотрим вращение абсолютно жесткого тела, при котором деформации, т.е. изменение объема и изменение формы, равны нулю. Это значит, что

$$\varepsilon_{ii} = 0, \quad \gamma_{ij} = 0 \quad \text{и} \quad \omega_{ij} \neq 0.$$

При  $\varepsilon_{ii} = 0$ ,  $\gamma_{ij} = 0$  из (2.11), (2.12) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x_0} &= 0, & \frac{\partial y}{\partial y_0} &= 0, & \frac{\partial z}{\partial z_0} &= 0, \\ \omega_{xy} &= \frac{\partial x}{\partial y_0}, & \omega_{xz} &= \frac{\partial x}{\partial z_0}, & \omega_{yx} &= \frac{\partial y}{\partial x_0}, \\ \omega_{yz} &= \frac{\partial y}{\partial z_0}, & \omega_{zx} &= \frac{\partial z}{\partial x_0}, & \omega_{zy} &= \frac{\partial z}{\partial y_0}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Рассмотрим прямоугольный элемент абсолютно жесткого тела, изображенный на рис. 2.1, где  $\Delta x_0 = x_A - x_0$ ,  $\Delta y_0 = y_B - y_0$ . Выразив синус

угла поворота элемента относительно оси  $OZ_0$  через приращения  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и начальные размеры ребер прямоугольника  $\Delta x_0$ ,  $\Delta y_0$ , получим

$$\sin\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x_0} = -\frac{\Delta x}{\Delta y_0}.$$

Записав аналогичные соотношения для поворотов относительно осей  $Ox_0$ ,  $Oy_0$  и перейдя к пределу при  $\Delta x_0 \rightarrow 0$ ,  $\Delta y_0 \rightarrow 0$ ,  $\Delta z_0 \rightarrow 0$ , получим

$$\frac{\partial y}{\partial x_0} = -\frac{\partial x}{\partial y_0}; \quad \frac{\partial y}{\partial z_0} = -\frac{\partial z}{\partial y_0}; \quad \frac{\partial z}{\partial x_0} = -\frac{\partial x}{\partial z_0}. \quad (2.14)$$

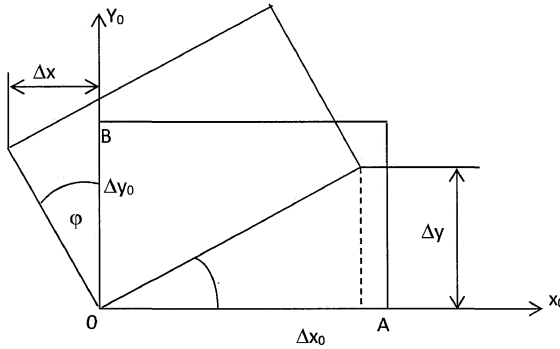


Рис. 2.1. Относительное смещение при повороте абсолютно твердого тела вдоль оси  $OZ_0$ .

Из (2.13) и (2.14) следует

$$\omega_{xy} = -\omega_{yx}, \quad \omega_{xz} = -\omega_{zx}, \quad \omega_{yz} = -\omega_{zy}.$$

С другой стороны  $\omega_{xy} = \frac{\partial x}{\partial y_0}$  и одновременно  $\omega_{xy} = -\frac{\partial y}{\partial x_0}$ . Аналогично можно записать  $\omega_{xz}$  и  $\omega_{yz}$ . Сложив два выражения  $\omega_{xy}$  и разделив на два (и аналогично  $\omega_{yz}$  и  $\omega_{xz}$ ), получим

$$\begin{aligned} \omega_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial y_0} - \frac{\partial y}{\partial x_0} \right) = -\omega_{yx}, \\ \omega_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial z_0} - \frac{\partial z}{\partial x_0} \right) = -\omega_{zx}, \\ \omega_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial z_0} - \frac{\partial z}{\partial y_0} \right) = -\omega_{zy}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Чтобы от тензора поворотов перейти к тензору скоростей поворотов, воспользуемся определением скоростей (2.10). Будем обозначать производные по времени при постоянных лагранжевых переменных  $x_0, y_0, z_0$  точкой над величиной, которая дифференцируется. Продифференцировав компоненты тензора поворотов по времени  $t$ , получим тензор скоростей поворотов

$$T_{\text{св}} = \begin{vmatrix} 0 & \dot{\omega}_{xy} & \dot{\omega}_{xz} \\ \dot{\omega}_{yx} & 0 & \dot{\omega}_{yz} \\ \dot{\omega}_{zx} & \dot{\omega}_{zy} & 0 \end{vmatrix},$$

где

$$\dot{\omega}_{xy} = -\dot{\omega}_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y_0} - \frac{\partial u_y}{\partial x_0} \right), \quad (2.16)$$

$$\dot{\omega}_{xz} = -\dot{\omega}_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z_0} - \frac{\partial u_z}{\partial x_0} \right), \quad (2.17)$$

$$\dot{\omega}_{yz} = -\dot{\omega}_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z_0} - \frac{\partial u_z}{\partial y_0} \right). \quad (2.18)$$

По аналогии с тензором поворотов тензор скоростей поворотов является несимметричным. Покажем это. Условия отсутствия поворотов

$$\omega_{xy} = 0, \quad \omega_{yx} = 0, \quad \omega_{xz} = 0,$$

$$\omega_{zx} = 0, \quad \omega_{yz} = 0, \quad \omega_{zy} = 0$$

при переходе к тензору  $T_{\text{св}}$  принимают вид

$$\dot{\omega}_{xy} = 0, \quad \dot{\omega}_{yx} = 0, \quad \dot{\omega}_{xz} = 0, \quad (2.19)$$

$$\dot{\omega}_{zx} = 0, \quad \dot{\omega}_{yz} = 0, \quad \dot{\omega}_{zy} = 0$$

или в соответствии с (2.16)–(2.18) следующий вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial y_0} - \frac{\partial u_y}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial z_0} - \frac{\partial u_z}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z_0} - \frac{\partial u_z}{\partial y_0} = 0. \quad (2.20)$$

Из равенств (2.20) следует, что тензор скоростей поворотов также является несимметричным.

## 2.5. Тензор деформаций. Дисторсия

Три компоненты  $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$  тензора деформаций, стоящие на главной диагонали, называются деформациями сжатия (растяжения) или удлинениями. Шесть оставшихся компонентов  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{yx}, \gamma_{zy}, \gamma_{xz}$  тензора деформаций  $T_\epsilon$  называются деформациями сдвига. Возвращаясь к уравнениям (2.12) с учетом (2.15), получим для них следующие выражения



$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{\partial y}{\partial x_0} \right), \quad (2.21)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial z_0} + \frac{\partial z}{\partial x_0} \right), \quad (2.22)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial z_0} + \frac{\partial z}{\partial y_0} \right). \quad (2.23)$$

Шесть компонентов тензора деформаций  $\gamma_{yx}$ ,  $\gamma_{zx}$ ,  $\gamma_{zy}$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$  определяют **дисторсию**, то есть изменение формы тела. Из соотношений (2.11), (2.16)–(2.23) видно, что компоненты тензора деформаций являются относительными величинами, определёнными в точке  $t_0$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ . Рассмотрим некоторые свойства тензора деформаций. Проведём через точку  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  произвольно ориентированную площадку с нормалью

$$\bar{n} = n_x \bar{i} + n_y \bar{j} + n_z \bar{k}. \quad (2.24)$$

где направляющие косинусы  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  удовлетворяют уравнению

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \quad (2.25)$$

Компоненты тензора деформаций  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $\epsilon_{zz}$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$  заданы. Они определяют вектор смещения

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_x \bar{i} + \epsilon_y \bar{j} + \epsilon_z \bar{k}$$

действующий по эту площадку в точке  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ . Компоненты  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$  вектора  $\bar{\epsilon}$  образуем из компонентов тензора деформаций

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_{xx} n_x + \gamma_{xy} n_y + \gamma_{xz} n_z, \\ \epsilon_y &= \gamma_{yx} n_x + \epsilon_{yy} n_y + \gamma_{yz} n_z, \\ \epsilon_z &= \gamma_{zx} n_x + \gamma_{zy} n_y + \epsilon_{zz} n_z. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Квадрат модуля этого вектора имеет вид

$$\epsilon^2 = \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2. \quad (2.27)$$

Нормальная к выбранной площадке составляющая вектора  $\bar{\epsilon}$  определяется скалярным произведением  $\bar{\epsilon}$  на нормаль  $\bar{n}$  (2.24)

$$\epsilon_n = \epsilon_x n_x + \epsilon_y n_y + \epsilon_z n_z. \quad (2.28)$$

Преобразуем выражение  $\epsilon_n$ , подставив (2.26) в (2.270)

$$\epsilon_n = \epsilon_{xx} n_x^2 + \epsilon_{yy} n_y^2 + \epsilon_{zz} n_z^2 + 2(\gamma_{xy} n_x n_y + \gamma_{yz} n_y n_z + \gamma_{zx} n_z n_x). \quad (2.29)$$

Касательная составляющая смещения на площадке с нормалью  $\bar{n}$  определяется уравнением

$$\epsilon_\tau^2 = \epsilon^2 - \epsilon_n^2. \quad (2.30)$$

В каждой точке среды имеется три взаимно перпендикулярные плоскости, на которых касательные смещения равны нулю. Направления нормалей к этим плоскостям образуют главные направления (главные оси) тензора деформаций. Для их определения поступим следующим образом. Полагая в равенстве (2.30)  $\varepsilon_\tau = 0$  и подставляя в правую часть выражения для  $\varepsilon^2$  (2.27) и  $\varepsilon_n$  (2.28). В результате получим уравнение

$$(\varepsilon_x n_y - \varepsilon_y n_x)^2 + (\varepsilon_x n_z - \varepsilon_z n_x)^2 + (\varepsilon_y n_z - \varepsilon_z n_y)^2 = 0, \quad (2.31)$$

которое возможно, если каждое слагаемое равно нулю. Таким образом, из (2.31) следует система уравнений

$$\varepsilon_x n_y - \varepsilon_y n_x = 0, \quad (2.32)$$

$$\varepsilon_x n_z - \varepsilon_z n_x = 0, \quad (2.33)$$

$$\varepsilon_y n_z - \varepsilon_z n_y = 0. \quad (2.34)$$

Значения  $n_x, n_y, n_z$  не могут обращаться в ноль одновременно, поскольку имеется условие (2.25). Из уравнений (2.32)–(2.34) легко показать, что одно является следствием двух других. Поэтому значения  $n_x, n_y, n_z$  будем искать как решение системы, образованной двумя из уравнений (2.32)–(2.34) и уравнением (2.25).

Выразим из уравнения (2.32)  $\varepsilon_y$  через  $\varepsilon_x$ , а из (2.33)  $\varepsilon_z$  через  $\varepsilon_x$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_x \frac{n_y}{n_x}, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_x \frac{n_z}{n_x}. \quad (2.35)$$

Подставив (2.35) в (2.27), а затем в (2.30) при  $\varepsilon_\tau = 0$  и воспользовавшись соотношением (2.25), получим

$$\varepsilon_x = \varepsilon_n n_x. \quad (2.36)$$

Из равенств (2.35) и (2.36) следует

$$\varepsilon_y = \varepsilon_n n_y, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_n n_z. \quad (2.37)$$

Впрочем, такой же результат можно получить, проделав аналогичные преобразования с уравнениями (2.25), (2.28), (2.30), (2.32)–(2.34). Подставив выражения  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  (2.36) и (2.37) в (2.26), получим систему уравнений

$$(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_n) n_x + \gamma_{xy} n_y + \gamma_{xz} n_z = 0. \quad (2.38)$$

$$\gamma_{yx} n_x + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_n) n_y + \gamma_{yz} n_z = 0, \quad (2.39)$$

$$\gamma_{zx} n_x + \gamma_{zy} n_y + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_n) n_z = 0. \quad (2.40)$$

Величины  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  известны, значение  $\varepsilon_n$  и значения  $n_x, n_y, n_z$ , определяющие нормаль к площадке, на которой касательные деформации равны нулю, неизвестны. Будем считать  $\varepsilon_n$  параметром. Поскольку справедливо условие (2.25), то система (2.38)–(2.40) не имеет

тривиального решения. Необходимым условием существования нетривиального решения системы (2.38)–(2.40) является равенство нулю определителя из коэффициентов этой системы

$$D = \varepsilon_n^3 - \varepsilon_n^2 I_1(T_\varepsilon) + \varepsilon_n I_2(T_\varepsilon) - I_3(T_\varepsilon) = 0, \quad (2.41)$$

где

$$I_1(T_\varepsilon) = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}, \quad (2.42)$$

$$I_2(T_\varepsilon) = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \gamma_{xy}^2 - \gamma_{yz}^2 - \gamma_{zx}^2, \quad (2.43)$$

$$I_3(T_\varepsilon) = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + 2\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - \varepsilon_{xx}\gamma_{yz}^2 - \varepsilon_{yy}\gamma_{zx}^2 - \varepsilon_{zz}\gamma_{xy}^2. \quad (2.44)$$

Корни уравнения (2.41), которые дальше будем обозначать  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , называются главными удлинениями, поскольку главные оси тензора деформаций обладают тем свойством, что вдоль них происходит только изменение длины при отсутствии деформаций сдвига. Обычно главные удлинения нумеруют в порядке их убывания:  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ . Величины  $I_1(T_\varepsilon)$  называются инвариантами тензора деформаций. Поскольку величины  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ , входящие в выражения инвариантов (2.42)–(2.44), известны, то найти главные деформации из уравнения (2.41) является делом техники. Поэтому далее будем считать, что  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  найдены. Запишем уравнение (2.41) следующим образом

$$(\varepsilon_n - \varepsilon_1)(\varepsilon_n - \varepsilon_2)(\varepsilon_n - \varepsilon_3) = 0. \quad (2.45)$$

Из равенств (2.41) и (2.45) следуют выражения инвариантов через главные деформации

$$\begin{aligned} I_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ I_2(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_2, \\ I_3(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Равенства (2.46) позволяют определять инварианты тензора деформаций в случае заданных главных удлинений.

## 2.6. Главные оси тензора деформаций

Для нахождения направляющих косинусов главных осей тензора деформаций вернёмся к системе уравнений (2.38)–(2.40). После того как найдены главные удлинения  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , подставим каждое из них попеременно в (2.31)–(2.33) и получим систему уравнений для  $n_x, n_y, n_z$   $i$ -го главного направления тензора деформаций:

$$(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_i)n_{xi} + \gamma_{xy}n_{yi} + \gamma_{xz}n_{zi} = 0, \quad (2.47)$$

$$\gamma_{yx}n_{xi} + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_i)n_{yi} + \gamma_{yz}n_{zi} = 0, \quad (2.48)$$

$$\gamma_{zx}n_{xi} + \gamma_{zy}n_{yi} + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_i)\gamma_{zi} = 0. \quad (2.49)$$

Определим направляющие косинусы первого главного направления ( $i=1$ ). Из уравнений (2.48) и (2.49) исключим  $n_{z1}$ . Для этого умножим равенство (2.48) на  $\varepsilon_{zz} - \varepsilon_1$ , (2.49) на  $\gamma_{yz}$  и вычтем друг из друга. В результате получим зависимость  $n_{y1}$  от  $n_{x1}$

$$n_{y1} = n_{x1}A_1, \quad (2.50)$$

где

$$A_1 = \frac{\gamma_{xz}\gamma_{yz} - (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_1)\gamma_{yz}}{(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_1)(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_1) - \gamma_{yz}^2}. \quad (2.51)$$

Затем из тех же уравнений (2.48) и (2.49) исключим  $n_{y1}$ . В результате получим

$$n_{z1} = n_{x1}B_1, \quad (2.52)$$

где

$$B_1 = \frac{\gamma_{xy}\gamma_{yz} - (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_1)\gamma_{xz}}{(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_1)(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_1) - \gamma_{yz}^2}. \quad (2.53)$$

Подставив  $n_{y1}$  (2.50) и  $n_{z1}$  (2.51) в равенство (2.25), получим выражение  $n_{x1}$  через известные величины

$$n_{x1} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_1^2 + B_1^2}}. \quad (2.54)$$

После определения  $n_{x1}$  значения  $n_{y1}$ ,  $n_{z1}$  находятся из (2.50) и (2.52). В выражения для  $A_1$  и  $B_1$  входит значение  $\varepsilon_1$ , которое было найдено после решения уравнения (2.41).

Совершенно аналогично преобразуя уравнения (2.47) и (2.49), получим выражение  $n_{x2}$ ,  $n_{y2}$ ,  $n_{z2}$

$$n_{y2} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_2^2 + B_2^2}}, \quad n_{x2} = n_{y2}A_2, \quad n_{z2} = n_{y2}B_2, \quad (2.55)$$

где

$$A_2 = \frac{\gamma_{xz}\gamma_{yz} - \gamma_{xy}(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_2)(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_2) - \gamma_{xz}^2}, \quad (2.56)$$

$$B_2 = \frac{\gamma_{xy}\gamma_{xz} - \gamma_{yz}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_2)(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_2) - \gamma_{xz}^2}. \quad (2.57)$$

Наконец, повторяя аналогичные преобразования с уравнениями (2.47) и (2.48), получим

$$n_{z3} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_3^2 + B_3^2}}, \quad n_{x3} = n_{z3}A_3, \quad n_{y3} = n_{z3}B_3, \quad (2.58)$$

где

$$A_3 = \frac{\gamma_{xy}\gamma_{yz} - \gamma_{xz}(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_3)}{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_3)(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_3) - \gamma_{xy}^2}, \quad (2.59)$$

$$B_3 = \frac{\gamma_{xy}\gamma_{xz} - \gamma_{yz}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_3)}{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_3)(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_3) - \gamma_{xy}^2}. \quad (2.60)$$

Следовательно, направляющие косинусы главных осей тензора деформаций выражаются через  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  и главные удлинения  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

Из равенств (2.50)–(2.60) следует, что в случае отсутствия сдвигов ( $\gamma_{ij} = 0$ ) главные оси тензора деформаций совпадают с координатными осями. Соответствующие значения  $n_{xi}, n_{yi}, n_{zi}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Значения  $n_{xi}, n_{yi}, n_{zi}$  главных осей тензора деформаций при  
отсутствии сдвигов и поворотов

i	Название	$n_x$	$n_y$	$n_z$
1	Первая главная ось	$\pm 1$	0	0
2	Вторая главная ось	0	$\pm 1$	0
3	Третья главная ось	0	0	$\pm 1$

## 2.7. Дилатация. Уравнение неразрывности

Рассмотрим элемент массы  $dm$ , занимающий объем  $d\theta_0 = dx_0 dy_0 dz_0$ . Удельный объем вещества в этом объеме равен

$$V_0 = \frac{d\theta_0}{dm}.$$

Ограничимся частным случаем, когда этот элемент не меняет формы и не вращается. Изменяется лишь его объем. Тогда после деформации масса  $dm$  займет объем  $d\theta = dx dy dz$ , а удельный объем примет значение  $V$ . Свяжем  $V$  с  $V_0$ . Подставив  $dx, dy, dz$  из равенства (2.9) при постоянном времени  $t$  в выражение

$$V = \frac{dx dy dz}{dm},$$

получим

$$Vdm = \left( \frac{\partial x}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial x}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial x}{\partial z_0} dz_0 \right) \left( \frac{\partial y}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial y}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial y}{\partial z_0} dz_0 \right) \times \left( \frac{\partial z}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial z}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial z}{\partial z_0} dz_0 \right). \quad (2.61)$$

Считаем, что дисторсия и вращение элемента  $dm$  отсутствуют. Тогда из равенства (2.15) следует, что при отсутствии вращения выполнены уравнения

$$\frac{\partial x}{\partial y_0} = \frac{\partial y}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial x}{\partial z_0} = \frac{\partial z}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial y}{\partial z_0} = \frac{\partial z}{\partial y_0}, \quad (2.62)$$

а при отсутствии дисторсии выполнены уравнения

$$\frac{\partial x}{\partial y_0} = -\frac{\partial y}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial x}{\partial z_0} = -\frac{\partial z}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial y}{\partial z_0} = -\frac{\partial z}{\partial y_0}. \quad (2.63)$$

Из системы равенств (2.62) и (2.63) вытекают следующие соотношения

$$\frac{\partial x}{\partial y_0} = \frac{\partial x}{\partial z_0} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x_0} = \frac{\partial y}{\partial z_0} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x_0} = \frac{\partial z}{\partial y_0} = 0. \quad (2.64)$$

После подстановки (2.64) в (2.61) выражение для удельного объема упрощается

$$V = \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} \frac{\partial z}{\partial z_0} \cdot \frac{dx_0 dy_0 dz_0}{dm}.$$

Поскольку  $V_0 = dx_0 dy_0 dz_0 / dm$ , то выражение для удельного объема  $V$  принимает вид

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} \frac{\partial z}{\partial z_0}. \quad (2.65)$$

С помощью равенства (2.11) запишем отношение удельных объемов  $\frac{V}{V_0}$  сплошной среды (2.65) в разные моменты времени, которое называется **дилатацией**, в виде

$$\frac{V}{V_0} = \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \epsilon_{zz}. \quad (2.66)$$

Величину  $V_0/V$  обратную дилатации  $V/V_0$  называют **сжатием вещества**.

Введем уравнение для скорости изменения удельного объема. Продифференцируем  $V$  (равенство (2.66)) по  $t$  при постоянных  $x_0, y_0, z_0$ , то есть вдоль траектории этой частицы

$$\frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0} = \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} \left( \frac{1}{\varepsilon_{xx}} \left( \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0} + \frac{1}{\varepsilon_{yy}} \left( \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0} + \frac{1}{\varepsilon_{zz}} \left( \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0} \right)$$

Преобразуем первый член, стоящий в правой части полученного уравнения. Подставим в него выражение  $\varepsilon_{xx}$  из (2.11) и выражение  $U_x$  из (2.10)

$$\left( \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0} = \left( \frac{\partial U_\delta}{\partial x_0} \right)_{t y_0 z_0}. \quad (2.67)$$

Поскольку  $x, y, z$ , зависят от  $t, x_0, y_0, z_0$ , то справедливо выражение

$$\left( \frac{\partial U_x}{\partial x_0} \right)_{t_0 y_0 z_0} = \left( \frac{\partial U_\delta}{\partial x} \right)_{t y z} \left( \frac{\partial x}{\partial x_0} \right)_{t y_0 z_0} + \left( \frac{\partial U_\delta}{\partial y} \right)_{t x z} \left( \frac{\partial y}{\partial x_0} \right)_{t y_0 z_0} + \left( \frac{\partial U_\delta}{\partial z} \right)_{t x y} \left( \frac{\partial z}{\partial x_0} \right)_{t y_0 z_0}$$

При чистой дилатации, когда дисторсия и вращение отсутствуют и выполнены условия (2.64), выражение (2.67) с учетом полученного равенства упрощается

$$\left( \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} \right)_{t x_0 y_0 z_0} = \varepsilon_{\delta\delta} \left( \frac{\partial U_\delta}{\partial x} \right)_{t y z}. \quad (2.68)$$

Аналогично для второго и третьего слагаемых в правой части уравнения для относительного изменения удельного объема получаются зависимости

$$\left( \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial t} \right)_{t x_0 y_0 z_0} = \varepsilon_{yy} \left( \frac{\partial U_y}{\partial y} \right)_{t x z}, \quad \left( \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial t} \right)_{t x_0 y_0 z_0} = \varepsilon_{zz} \left( \frac{\partial U_z}{\partial z} \right)_{t x y}. \quad (2.69)$$

Подставив (2.66), (2.68) и (2.69) в уравнения для относительного изменения удельного объема, получим

$$\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0} = \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} \right)_{t y z} + \left( \frac{\partial U_y}{\partial y} \right)_{t x z} + \left( \frac{\partial U_z}{\partial z} \right)_{t x y}. \quad (2.70)$$

Перейдем от удельного объема к плотности  $\rho=1/V$ . Тогда (2.70) примет вид

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0} + \rho \operatorname{div} \bar{U} = 0. \quad (2.71)$$

Поскольку в каждой точке пространства  $\rho = \rho(t, x, y, z)$ , то с учетом (2.8) можно записать производную  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  в виде

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{x_0 y_0 z_0} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{xyz} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_{tyz} \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{x_0 y_0 z_0} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_{txz} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{x_0 y_0 z_0} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_{txy} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{x_0 y_0 z_0}$$

Из этого уравнения видно, что  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  при постоянных  $x_0, y_0, z_0$  отличается от  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  при постоянных  $x, y, z$ . Чтобы их различать, обозначим  $\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{x_0 y_0 z_0}$ .

Подставляя (2.8) в предыдущее уравнение, получим

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + U_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + U_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + U_z \frac{\partial \rho}{\partial z}. \quad (2.72)$$

Производная  $\frac{d\rho}{dt}$  в виде (2.72) называется **субстациональной**, т.к. она берется в направлении, касательном к траектории материальной частицы  $x_0, y_0, z_0$ . Из (2.71) и (2.72) следует уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \bar{U} = 0. \quad (2.73)$$

Производная  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  в уравнении (2.73) берется при постоянных значениях координат  $x, y, z$ . Это уравнение выражает закон сохранения массы и называется **уравнением неразрывности**.

## 2.8. Условия совместности деформаций

Шесть компонентов тензора деформации  $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  определяются частными производными по  $x_0, y_0, z_0$  всего трех независимых функций  $x, y, z$  и имеют вид (2.11), (2.21)–(2.23). Уравнения совместности деформаций получаются следующим образом. Продифференцируем  $\gamma_{xy}$  (2.21) по  $x_0$  и  $y_0$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x_0 \partial y_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^3 x}{\partial x_0 \partial y_0^2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x_0^2 \partial y_0} \right).$$

Подставив в правую часть выражения для  $\epsilon_{xx}$  и  $\epsilon_{yy}$ , получим одно из уравнений совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x_0 \partial y_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x_0^2} \right). \quad (2.74)$$



Аналогично получаются уравнения

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x_0 \partial z_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z_0^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x_0^2} \right), \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y_0 \partial z_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z_0^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y_0^2} \right), \quad (2.76)$$

выражающие связь дилатации с дисторсией. Вторая группа уравнений совместности получается следующим образом. Продифференцируем  $\epsilon_{xx}$  по  $y_0$  и  $z_0$  и запишем полученный результат в виде

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y_0 \partial z_0} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{\partial}{\partial z_0} \left( \frac{\partial x}{\partial y_0} \right) + \frac{\partial}{\partial y_0} \left( \frac{\partial x}{\partial z_0} \right) \right). \quad (2.77)$$

Выражения для компонентов деформации сдвига  $\gamma_{xy}$  (2.21) и  $\gamma_{xz}$  (2.22) запишем в виде

$$\frac{\partial x}{\partial y_0} = 2\gamma_{xy} - \frac{\partial y}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial x}{\partial z_0} = 2\gamma_{xz} - \frac{\partial z}{\partial x_0}.$$

Подставив эти выражения для производных в равенство (2.77), получим следующее уравнение

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y_0 \partial z_0} = \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z_0} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y_0} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{\partial y}{\partial z_0} + \frac{\partial z}{\partial y_0} \right) \right).$$

Подставив в это уравнение выражение для компонентов деформации сдвига  $\gamma_{yz}$  (2.23), получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y_0 \partial z_0} = \frac{\partial}{\partial x_0} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x_0} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y_0} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z_0} \right). \quad (2.78)$$

Аналогично получаются уравнения

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z_0 \partial x_0} = \frac{\partial}{\partial y_0} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x_0} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y_0} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z_0} \right), \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x_0 \partial y_0} = \frac{\partial}{\partial z_0} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x_0} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y_0} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z_0} \right). \quad (2.80)$$

Шесть дифференциальных уравнений (2.76)–(2.80) называются условиями совместности деформаций или уравнениями Сен-Венана. Эти уравнения, как и законы сохранения, являются фундаментальными уравнениями. Они не зависят ни от механических свойств среды, ни от характера ее деформирования.

## 2.9. Тензор скоростей деформаций

В параграфе 2.8 было показано, что закон сохранения массы в дифференциальной форме имеет вид уравнений (2.70), (2.71) или (2.72). Уравнения (2.70), (2.71) содержат производные по времени удельного объема  $V$  или плотности  $\rho$  при постоянных  $x_0, y_0, z_0$ , а уравнение (2.73) – производную по времени плотности  $\rho$  при постоянных  $x, y, z$ . Продифференцируем компоненты тензора деформаций  $T_{\epsilon}$  по времени при постоянных  $x_0, y_0, z_0$  и обозначим производные по времени точкой над величиной, которая дифференцируется.

$$T_{\dot{\epsilon}} = \begin{vmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{yx} & \dot{\epsilon}_{yy} & \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} & \dot{\gamma}_{zy} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{vmatrix}, \quad (2.81)$$

где

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x_0}, \quad \dot{\epsilon}_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y_0}, \quad \dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z_0}, \quad (2.82)$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y_0} + \frac{\partial u_y}{\partial x_0} \right), \quad (2.83)$$

$$\dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z_0} + \frac{\partial u_z}{\partial x_0} \right), \quad (2.84)$$

$$\dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z_0} + \frac{\partial u_z}{\partial y_0} \right). \quad (2.85)$$

По аналогии с тензором деформаций тензор скоростей деформаций является симметричным. Три компонента  $\dot{\epsilon}_{xx}, \dot{\epsilon}_{yy}, \dot{\epsilon}_{zz}$  тензора  $T_{\dot{\epsilon}}$  стоящие на главной диагонали, определяют скорость дилатации (изменения объема). Шесть остальных компонентов  $\dot{\gamma}_{xy}, \dot{\gamma}_{xz}, \dot{\gamma}_{yx}, \dot{\gamma}_{yz}, \dot{\gamma}_{zx}, \dot{\gamma}_{zy}$  называются скоростями деформаций сдвига. Они определяют скорость дисторсии, т.е. скорость изменения формы тела.

Поскольку тензор скоростей деформаций  $T_{\dot{\epsilon}}$  получается из тензора деформаций  $T_{\epsilon}$  дифференцированием по  $t$  при постоянных  $x_0, y_0, z_0$ , то все рассуждения по определению главных осей тензора  $T_{\epsilon}$  и его инвариантов могут быть без изменений перенесены на тензор  $T_{\dot{\epsilon}}$ .

Разделим тензор скоростей деформаций  $T_{\dot{\epsilon}}$  на шаровой тензор  $T_{\dot{\epsilon}}^0$ , диагональными членами которого является скорость средней деформации  $\dot{\epsilon}_{cp}$ , и девiator скоростей деформации  $D_{\dot{\epsilon}}$

$$T_{\dot{\epsilon}} = T_{\dot{\epsilon}}^0 + D_{\dot{\epsilon}},$$

где

$$\mathbf{T}_{ce}^0 = \begin{vmatrix} \dot{\mathbf{E}}_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\mathbf{E}}_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\mathbf{E}}_{cp} \end{vmatrix}, \quad (2.86)$$

$$\mathbf{D}_{ce} = \begin{vmatrix} \dot{\mathbf{E}}_{xx} - \dot{\mathbf{E}}_{cp} & \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{yx} & \dot{\mathbf{E}}_{yy} - \dot{\mathbf{E}}_{cp} & \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} & \dot{\gamma}_{zy} & \dot{\mathbf{E}}_{zz} - \dot{\mathbf{E}}_{cp} \end{vmatrix}. \quad (2.87)$$

Среднюю скорость дилатации  $\dot{\mathbf{E}}_{cp}$  определим в соответствии следующим образом

$$\dot{\mathbf{E}}_{cp} = \frac{1}{3}(\dot{\mathbf{E}}_{xx} + \dot{\mathbf{E}}_{yy} + \dot{\mathbf{E}}_{zz}). \quad (2.88)$$

В этом случае диагональные компоненты девиатора скоростей деформаций  $\mathbf{D}_{ce}$  принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{xx} - \dot{\mathbf{E}}_{cp} &= \frac{1}{3}(2\dot{\mathbf{E}}_{xx} - \dot{\mathbf{E}}_{yy} - \dot{\mathbf{E}}_{zz}), \\ \dot{\mathbf{E}}_{yy} - \dot{\mathbf{E}}_{cp} &= \frac{1}{3}(-\dot{\mathbf{E}}_{xx} + 2\dot{\mathbf{E}}_{yy} - \dot{\mathbf{E}}_{zz}), \\ \dot{\mathbf{E}}_{zz} - \dot{\mathbf{E}}_{cp} &= \frac{1}{3}(-\dot{\mathbf{E}}_{xx} - \dot{\mathbf{E}}_{yy} + 2\dot{\mathbf{E}}_{zz}). \end{aligned} \quad (2.89)$$

Система уравнений (2.89) позволяет определять диагональную часть тензора скоростей деформации.

## Задачи к главе 2

### 2.1. Движение среды происходит по закону

$$x = \xi_1 + at\xi_2, \quad y = \xi_2 + bt\xi_1, \quad z = \xi_3, \quad a, b = const.$$

Показать, что числа  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  для индивидуальной частицы имеют смысл координат  $x, y, z$  точки пространства, в которой она находилась в момент времени  $t = 0$ . Найти поля скорости и ускорения в лагранжевом описании. Какая частица в момент времени  $t_0$  находится в точке пространства с  $(x_0, y_0, z_0)$ ?

### 2.2. Движение среды происходит по закону

$$x = \xi_1(1 + t/\tau), \quad y = \xi_2(1 + 2t/\tau), \quad z = \xi_1(1 + t^2/\tau^2), \quad \tau = const.$$

а). Найти поля скорости и ускорения в лагранжевом описании.

б). Где находится в момент времени  $t = 3\tau$  частица, которая в момент времени  $t = \tau$  находилась в точке пространства с координатами  $(a, b, c)$  ?

2.3. Найти поля скорости и ускорения в лагранжевом и эйлеровом описаниях, если движение среды происходит по закону

а)  $x = a(t)\xi_1, \quad y = b(t)\xi_2, \quad z = c(t)\xi_3;$

б)  $x = \xi_1 + b(t)\xi_2, \quad y = \xi_2, \quad z = \xi_3.$

2.4. Ввести лагранжевы координаты и найти закон движения среды, если оно происходит с полем скорости

$$v_1 = x/(t + \tau), \quad v_2 = 2ty/(t^2 + \tau^2), \quad v_3 = 3t^2z/(t^3 + \tau^3), \quad \tau = const.$$

2.5. а). Можно ли по известным траекториям частицы среды найти закон ее движения ?

б). Можно ли по известным в данный момент времени линиям тока найти мгновенное поле скорости ?

2.6. Могут ли частицы среды двигаться ускоренно, если

а) скорости всех частиц одинаковы?

б) в каждой точке пространства скорость не изменяется со временем?

2.7. Движение среды происходит с полем скорости

$$v_1 = kx, \quad v_2 = -ky, \quad v_3 = 0, \quad k = const.$$

и полем плотности

$$\rho = \rho_0 + Aye^{kt}, \quad \rho_0, A = const.$$

Найти скорость изменения плотности в каждой точке среды.

2.8. Движение среды происходит по закону

$$x = \xi_1, \quad y = \xi_2(1 + t/\tau), \quad z = \xi_3/(1 + t/\tau), \quad \tau = const.$$

а) Найти поля скорости и ускорения.

б) Найти в момент времени  $t = 2\tau$  скорость частицы, которая в момент времени  $t = \tau$  находилась в точке с координатами  $(a, a, a)$ .

2.9. Найти поля скорости и ускорения в лагранжевом и эйлеровом описаниях, если движение среды происходит по закону

$$x = \xi_1 + c(t)\xi_2, \quad y = \xi_2 + c(t)\xi_3, \quad z = \xi_3.$$

2.10. Движение среды происходит с полем скорости

$$v_1(x, t) = at, \quad v_2(x, t) = -uy/x, \quad v_3(x, t) = 0, \quad a, u = const.$$

и полем температуры

$$T = T_0(1 + t^2/\tau^2)(1 + R^2/(x^2 + y^2)), \quad T_0, \tau, R = \text{const.}$$

Найти в момент времени  $t = \tau$  скорость изменения температуры в координатами

$$x = u^2/a, \quad y = 2u^2/a, \quad z = 3u^2/a.$$

2.11. В результате перемещения частицы  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  среды оказались в точках с координатами

$$x = \xi_1 + a\xi_1, \quad y = \xi_2, \quad z = \xi_3, \quad a = \text{const.}$$

Относительно пространственной декартовой системы координат  $(x, y, z)$ . Что произошло в результате деформации с материальными элементами, первоначально расположенными параллельно и перпендикулярно координатной оси  $x$ , при  $a > 0$  и  $-1 < a < 0$ ?

2.12. Найти относительное изменение объема, если частицы  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  среды оказались в точках с координатами

$$x = \xi_1 + a\xi_1, \quad y = \xi_2, \quad z = \xi_3, \quad a = \text{const.}$$

2.13. В результате перемещения из начального состояния частицы  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  среды оказались в точках с координатами

$$x = \xi_2, \quad y = -(1 + a)\xi_1, \quad z = \xi_3, \quad a = \text{const} > -1$$

относительно пространственной декартовой системы координат  $(x, y, z)$ . Что произошло в результате деформации с материальными элементами, первоначально расположенными параллельно координатным осям?

2.14. В результате перемещения из начального состояния частицы  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  среды оказались в точках с координатами

$$x_i = \xi_i + a\xi_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad a = \text{const} > -1$$

Показать, что относительное удлинение всех материальных элементов одинаково. При каких значениях  $a$  происходит растяжение, при каких сжатие.

2.15. Простым сдвигом называется деформация сплошной среды, отвечающая закону движения

$$x = \xi_1 + a(t)\xi_2, \quad y = \xi_2, \quad z = \xi_3,$$

где  $(x, y, z)$  – пространственная декартова система координат;  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  – лагранжева система координат;  $a(t)$  – функция времени, причем  $a(0) = 0$ . Считая функцию  $a(t)$  заданной, найти тензоры деформаций Грина Альманси. Найти их главные компоненты и главные оси.

2.16. При простом сдвиге, отвечающему закону движения

$$x = \xi_1 + a(t)\xi_2, \quad y = \xi_2, \quad z = \xi_3,$$

Найти

- а) относительное удлинение материальных элементов с началом во всевозможных частицах  $\xi$  и до деформации параллельных осей  $x, y, z$  ;  
б) всевозможные материальные элементы, для которых относительное удлинение в момент времени  $t$  равно нулю.

2.17. При простом сдвиге, отвечающему закону движения

$$x = \xi_1 + a(t)\xi_2, \quad y = \xi_2, \quad z = \xi_3,$$

Найти относительное изменение величины малого объема среды.

2.18. Двойным сдвигом называется деформация сплошной среды, отвечающая закону движения

$$x = \xi_1 + b(t)\xi_2, \quad y = \xi_2 + b(t)\xi_3, \quad z = \xi_3,$$

где  $(x, y, z)$  – пространственная декартова система координат;  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  – лагранжева система координат;  $b(t)$  – функция времени, причем  $b(0) = 0$  .  
Считая функцию  $b(t)$  заданной, найти тензоры деформаций Грина Альманси.

2.19. При двойном сдвиге, отвечающему закону движения

$$x = \xi_1 + b(t)\xi_2, \quad y = \xi_2 + b(t)\xi_3, \quad z = \xi_3,$$

Найти компоненты поля перемещений в эйлеровом описании.

2.20. Показать, что следующие движения не сводятся друг к другу наложением дополнительного перемещения, не изменяющего расстояния между частицами, то есть вращения и переноса:

- а) поворот вокруг оси  $z$ ;  
б) одноосное растяжение вдоль оси  $x$ ;

$$x = \xi_1 + a\xi_1, \quad y = \xi_2, \quad z = \xi_3, \quad a = \text{const.}$$

- в) простой сдвиг в плоскости  $x, y$ ;

$$x = \xi_1 + a(t)\xi_2, \quad y = \xi_2, \quad z = \xi_3,$$

- г) двойной сдвиг

$$x = \xi_1 + b(t)\xi_2, \quad y = \xi_2 + b(t)\xi_3, \quad z = \xi_3.$$

## Глава 3. ДИНАМИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

### 3.1. Силы и напряжения

В основе моделей механики сплошной среды лежит гипотеза о непрерывном изменении характеристик вещества в пространстве  $x, y, z, t$ . Это сразу дает возможность записать законы сохранения массы, количества движения и энергии в виде дифференциальных уравнений в частных производных. Наличие разрывов в параметрах не противоречит гипотезе сплошности, ибо в случае разрыва законы сохранения остаются справедливыми, принимая вид условий на разрыве. Именно к этой группе моделей относятся модели механики сплошной среды.

Объектом механики сплошных сред являются процессы, протекающие в газах, жидкостях, твердых телах и плазме. Различные типы сплошных сред характеризуются различными силами взаимодействия между соседними частицами вещества. Эти силы действуют на некоторых площадках.

Вектором плоской площадки  $\Sigma$ , ограниченной некоторым контуром, вдоль которого установлено положительное направление, называется вектор  $\bar{\Pi}$ , модуль которого равен  $\Sigma$ , а направление выбрано перпендикулярно к  $\Sigma$  так, чтобы положительный обход контура от его конца казался идущим против часовой стрелки.

Из всех поверхностных сил  $\bar{F}$  выделим силу, действующую всегда по нормали произвольно ориентированной площадки  $\Sigma$ . Условием параллельности векторов  $\bar{F}$  и  $\bar{\Pi}$  является равенство нулю их векторного произведения

$$\bar{F} \times \bar{\Pi} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ \Pi_x & \Pi_y & \Pi_z \end{vmatrix} = 0.$$

Приравняв нулю каждую из компонент этого векторного произведения, получим

$$\frac{F_x}{\Pi_x} = \frac{F_y}{\Pi_y} = \frac{F_z}{\Pi_z}.$$

Обозначим это отношение через  $P$ . Сила, действующая по нормали к единичной площадке независимо от ее ориентации в пространстве, называется **давлением**.

Среда, в которой давление является единственной силой, характеризующей взаимодействие между макрочастицами, называется **идеальной**. Если же кроме давления в среде действуют силы,

направленные не по нормали к произвольной площадке, то в таком случае среда называется **неидеальной**, а силы – **напряжениями**.

Выше давление было названо силой. И в том, и в другом случае давление является скалярной величиной. В то же, время из второго закона Ньютона, который гласит, что ускорение  $\frac{d\bar{u}}{dt}$  материальной частицы с массой  $m$  равно действующей на неё силе  $\bar{F}$ , следует, что сила – это векторная величина. Кроме того из механики сплошной среды следует, что силой, вызывающей ускорение частицы, является  $\text{grad } P$ . Если  $P \neq 0$ , а  $\text{grad } P = 0$ , то ускорение вещества не будет. Из сказанного следует, что принятая в различных монографиях и учебниках терминология нуждается в уточнении. Везде ниже давление будет рассматриваться, как изотропное напряжение.

Рассмотрим **неидеальную среду**, в которой силы действуют не по нормали к произвольной площадке  $\bar{\Pi}$ . Такое рассмотрение является неотъемлемой частью монографий и учебных пособий по механике и физике твёрдого тела. При этом каждый автор по-своему расставляет акценты в зависимости от поставленных целей. Везде ниже будут рассматриваться такие модели механики сплошной среды, в которых зависимости между шаровыми тензорами напряжений и деформаций определяются уравнениями состояния вещества и не зависят от девиаторов напряжений и деформаций.

Пусть в некоторой точке  $O$  сплошной среды с координатами  $x_0, y_0, z_0$ , лежащей на единичной площадке  $\bar{\Pi}$ , приложена сила  $\bar{F}$ , которая создает в этой точке вполне конкретное напряженное состояние. Вообще говоря, площадку, проходящую через точку  $O$  можно ориентировать по-разному. В зависимости от ориентации площадки напряжения, нормальные и касательные к площадке, будут разными. Иными словами, в объёме, окружающем точку  $x_0, y_0, z_0$ , сила  $\bar{F}$  создаёт непрерывное неравномерное поле напряжений, зависящее от взаимной ориентации силы и площадки.

Пусть на площадку  $\bar{\Pi}_x$ , ортогональную оси  $Ox$  и проходящую через точку  $x_0, y_0, z_0$ , действует сила  $\bar{F}_x$  не по нормали к этой площадке. Представим эту силу в виде суммы трёх сил

$$\bar{F}_x = \sigma_{xx} \bar{i} + \tau_{xy} \bar{j} + \tau_{xz} \bar{k}, \quad (3.1)$$

где сила  $\sigma_{xx} \bar{i}$  действует по нормали к площадке  $\bar{\Pi}_x$ , а силы  $\tau_{xy} \bar{j}$  и  $\tau_{xz} \bar{k}$  – по касательным к этой площадке вдоль осей  $Oy$  и  $Oz$ . Аналогично запишем силы, действующие на площадки  $\bar{\Pi}_y$  и  $\bar{\Pi}_z$

$$\bar{F}_y = \tau_{yx} \bar{i} + \sigma_{yy} \bar{j} + \tau_{yz} \bar{k}, \quad (3.2)$$



$$\bar{F}_z = \tau_{zx} \bar{i} + \sigma_{zy} \bar{j} + \tau_{zz} \bar{k}. \quad (3.3)$$

Везде далее первая буква у выражения силы будет означать, что сила действует на площадку, ортогональную направлению, указанному буквой, а вторая буква у составляющих сил – координатную ось, вдоль которой действует эта составляющая.

Уравнения (3.1)–(3.3) содержат три нормальных и шесть касательных к площадкам  $\bar{\Pi}_x, \bar{\Pi}_y, \bar{\Pi}_z$  составляющих силы  $\bar{F}$ , приложенной к точке  $x_0, y_0, z_0$ . Они образуют тензор напряжений

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}.$$

Чтобы ответить на вопрос, симметричен ли тензор напряжений, рассмотрим куб (рис. 3.1), три ребра которого совпадают с координатными осями и имеют размеры  $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ . Касательные силы  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{yx}$ , действующие на грани  $\Pi_x$  и  $\Pi_y$ , не лежащие в координатных плоскостях, стремятся повернуть рассматриваемый куб вокруг оси  $Oz$ . Их действия определяются произведениями напряжений  $\tau_{xy}, \tau_{yx}$  на площади граней  $\Pi_x = \Delta y \Delta z$  и  $\Pi_y = \Delta x \Delta z$ . Для отсутствия вращения куба необходимо, чтобы результирующий момент сил относительно оси  $Oz$  был равен нулю, то есть выполняется равенство

$$\tau_{xy} \Delta x \Delta y \Delta z - \tau_{yx} \Delta x \Delta y \Delta z = 0,$$

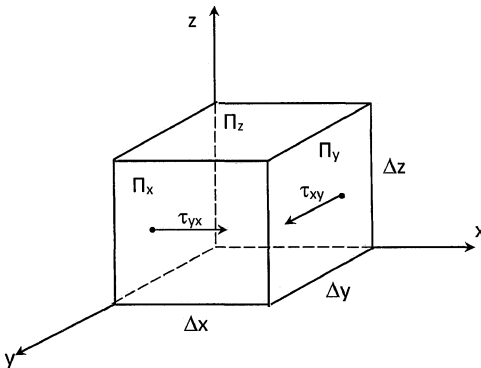


Рис. 3.1. Касательные напряжения  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{yx}$ , действующие на грани  $\Pi_y$  и  $\Pi_x$  куба.

Отсюда следует, что

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Аналогично легко получить дополнительные два условия равновесия выделенного куба

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

Таким образом, тензор напряжений  $T_\sigma$  является симметричным.

### 3.2. Главные напряжения

Рассмотрим теперь произвольную площадку, проходящую через точку  $x_0, y_0, z_0$ . Вектор нормали к площадке  $\bar{n}$

$$\bar{n} = n_x \bar{i} + n_y \bar{j} + n_z \bar{k} \quad (3.4)$$

является единичным. Проекции вектора  $\bar{n}$  на координатные направления равны его направляющим косинусам

$$n_x = \cos(n, x), \quad n_y = \cos(n, y), \quad n_z = \cos(n, z),$$

которые удовлетворяют уравнению

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \quad (3.5)$$

Сила  $\bar{F}$ , которая породила тензор напряжений  $T_\sigma$ , действует не по нормали к этой площадке. Представим силу  $\bar{F}$  в виде

$$\bar{F} = F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k}. \quad (3.6)$$

Модуль полного напряжения, действующего на площадке  $\Pi_n$ , определяется выражением

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2. \quad (3.7)$$

Проекция площадки  $\bar{\Pi}$  на координатные плоскости образуют вместе с площадкой  $\bar{\Pi}$  тетраэдр. Площади граней тетраэдра, лежащих в координатных плоскостях, обозначим  $\Pi_x, \Pi_y, \Pi_z$ , а площадь косоугольной грани  $\Pi_n$ . Рассмотрим условия равновесия тетраэдра в двумерном случае, когда координата  $z$  отсутствует. В этом случае проекция тетраэдра на плоскость  $Oxy$  имеет вид, изображенный на рис. 3.2.

На площадку  $\Pi_n$  действует вдоль оси  $Ox$  сила  $F_x$ , на площадку  $\Pi_y$  действует по касательной вдоль оси  $Ox$  сила  $\tau_{yx}$ , на площадку  $\Pi_x$  действует по нормали сила  $\sigma_{xx}$ . Таким образом, условие равновесия имеет вид

$$F_x \Pi_n = \sigma_{xx} \Pi_x + \tau_{yx} \Pi_y.$$

В случае трех переменных условие равновесия тетраэдра принимает вид

$$F_x \Pi_n = \sigma_{xx} \Pi_x + \tau_{yx} \Pi_y + \tau_{zx} \Pi_z. \quad (3.8)$$

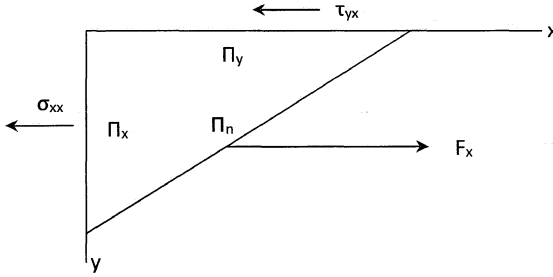


Рис. 3.2. Схема напряжений, удовлетворяющих условиям равновесия треугольника

Отношение площади любой из трех ортогональных граней к площади наклонной грани равно косинусу угла между нормальными к этим граням

$$\frac{\Pi_x}{\Pi_n} = \cos(x, n) = n_x, \quad \frac{\Pi_y}{\Pi_n} = \cos(y, n) = n_y, \quad \frac{\Pi_z}{\Pi_n} = \cos(z, n) = n_z,$$

Выразив  $\Pi_x$ ,  $\Pi_y$ ,  $\Pi_z$  через  $\Pi_n$ , подставив их в (3.8) и сократив на  $\Pi_n \neq 0$ , получим

$$F_x = \sigma_{xx}\Pi_x + \tau_{yx}\Pi_y + \tau_{zx}\Pi_z. \quad (3.9)$$

Аналогично получаются два других уравнения

$$F_y = \tau_{xy}\Pi_x + \sigma_{yy}\Pi_y + \tau_{zy}\Pi_z, \quad (3.10)$$

$$F_z = \tau_{xz}\Pi_x + \tau_{yz}\Pi_y + \sigma_{zz}\Pi_z. \quad (3.11)$$

Компоненты  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  не являются ни нормальными, ни касательными напряжениями к площадке  $\Pi_n$  и для рассмотрения напряженного состояния не удобны. Определим нормальное напряжение  $\sigma_n$ , действующее на площадку  $\Pi_n$ , ортогональную вектору  $\bar{n}$  (3.4). Оно равно скалярному произведению вектора  $\bar{F}$  на вектор  $\bar{n}$

$$\sigma_n = \bar{F} \cdot \bar{n} = F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z. \quad (3.12)$$

Из (3.9)–(3.12) следует

$$\sigma_n = \sigma_{xx} n_x^2 + \sigma_{yy} n_y^2 + \sigma_{zz} n_z^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + 2\tau_{yz} n_y n_z + 2\tau_{zx} n_z n_x. \quad (3.13)$$

Величина касательного напряжения  $\tau_n$  на площадке  $\Pi_n$  находится из уравнения

$$\tau_n^2 = F^2 - \sigma_n^2. \quad (3.14)$$

Из бесчисленного множества наклонных площадок, которые можно мысленно провести через точку  $O$ , будем считать ту площадку главной, на которой касательное напряжение  $\tau_n$  равно нулю, а действующая сила  $\bar{F}$  и нормальное напряжение  $\sigma_n$  совпадают по величине и направлению. Если обозначить главное напряжение через  $\sigma_v$ , то оно должно удовлетворять уравнению

$$\sigma_v \bar{n} = \bar{F}. \quad (3.15)$$

Подставив в (3.15) выражение вектора  $\bar{F}$  (3.6) и выражение вектора нормали  $\bar{n}$  (3.4), получим три уравнения

$$\sigma_v n_x = F_x, \quad \sigma_v n_y = F_y, \quad \sigma_v n_z = F_z. \quad (3.16)$$

С помощью уравнений (3.16) преобразуем систему уравнений (3.9)–(3.11) к виду

$$(\sigma_{xx} - \sigma_v)n_x + \tau_{yx}n_y + \tau_{zx}n_z = 0, \quad (3.17)$$

$$\tau_{xy}n_x + (\sigma_{yy} - \sigma_v)n_y + \tau_{zy}n_z = 0, \quad (3.18)$$

$$\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + (\sigma_{zz} - \sigma_v)n_z = 0, \quad (3.19)$$

эта система уравнений вместе с уравнением (3.5) образуют систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными  $\sigma_v$ ,  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$ . Если рассматривать  $\sigma_v$  как параметр, то уравнения (3.17)–(3.19) являются однородными относительно  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$ . В силу (3.5) система (3.17)–(3.19) не имеет тривиального (нулевого) решения. Условием же существования нетривиального решения этой системы является равенство нулю ее определителя

$$D = \sigma_v^3 - \sigma_v^2 J_1 + \sigma_v J_2 - J_3 = 0, \quad (3.20)$$

где

$$J_1(T_\sigma) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz},$$

$$J_2(T_\sigma) = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2,$$

$$J_3(T_\sigma) = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{zx}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2.$$

Коэффициенты уравнения (3.20) не зависят от  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$ , то есть они инвариантны относительно ориентации площадки  $\bar{F}$ . Поэтому они называются **инвариантами тензора напряжений** и являются основными характеристиками напряженного состояния в точке. Поскольку  $\sigma_v$  ( $v = 1, 2, 3$ ) являются корнями уравнения (3.20), то его можно записать в виде

$$(\sigma_v - \sigma_1)(\sigma_v - \sigma_2)(\sigma_v - \sigma_3) = 0,$$

или, что то же самое, в виде

$$\sigma_v^3 - \sigma_v^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_v(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) - \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0. \quad (3.21)$$

Из сравнения (3.20) и (3.21) следуют выражения инвариантов тензора напряжений  $T_\sigma$  через главные напряжения

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3,$$

$$J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Выше давление было определено, как сила, не зависящая от ориентации площадки. Поскольку из трех инвариантов  $J_1, J_2, J_3$ , не зависящих от ориентации площадки  $\bar{P}$ , только  $J_1$  имеет размерность силы, то естественно связать друг с другом  $P$  и  $J_1$ . Как правило, полагают

$$P = -\frac{1}{3}J_1 = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (3.22)$$

Корни уравнения (3.20) называются **главными напряжениями**  $\sigma_v$  ( $v = 1, 2, 3$ ) и обычно нумеруются в порядке убывания

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

Направление главного напряжения называется главной осью тензора напряжений. Таких осей три. Каждая характеризуется набором направляющих косинусов  $n_{xi}, n_{yi}, n_{zi}$ , определенных для соответствующего главного напряжения. Для каждого из главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  косинусы  $n_x, n_y, n_z$  должны находиться из системы трех уравнений. Поскольку ранг матрицы системы (3.17)–(3.19) после подстановки в нее одного из главных напряжений равен двум, в силу уравнения (3.20), то одно из уравнений (3.17)–(3.19) является следствием двух других. Поэтому в качестве третьего уравнения для определения  $n_{xi}, n_{yi}, n_{zi}$  используется уравнение (3.5). Следует заметить, что из трёх уравнений (3.17)–(3.19) в качестве независимых можно выбрать два произвольным образом.

Определим направляющие косинусы первого главного направления ( $v = 1$ ). Из уравнений (3.18) и (3.19) исключим  $n_{z1}$ . Для этого умножим (3.18) на  $\sigma_{zz} - \sigma_1$ , (3.19) на  $\tau_{zy}$  и вычтем друг из друга. В результате получим зависимость  $n_{y1}$  от  $n_{x1}$

$$n_{y1} = n_{x1}A_1 \quad (3.23)$$

где

$$A_1 = \frac{\tau_{xz}\tau_{yz} - (\sigma_{zz} - \sigma_1)\tau_{xy}}{(\sigma_{yy} - \sigma_1)(\sigma_{zz} - \sigma_1) - \tau_{yz}^2}. \quad (3.24)$$

Затем из тех же уравнений (3.18) и (3.19) исключим  $n_{y1}$ . В результате получим

$$n_{z1} = n_{x1} B_1, \quad (3.25)$$

где

$$B_1 = \frac{\tau_{xy} \tau_{yz} - (\sigma_{yy} - \sigma_1) \tau_{xz}}{(\sigma_{yy} - \sigma_1)(\sigma_{zz} - \sigma_1) - \tau_{yz}^2}. \quad (3.26)$$

Подставив  $n_{y1}$  (3.23) и  $n_{z1}$  (3.25) в (3.5), получим выражение  $n_{x1}$  через известные величины

$$n_{x1} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_1^2 + B_1^2}}. \quad (3.27)$$

После определения  $n_{x1}$  значения  $n_{y1}$  и  $n_{z1}$  находятся из (3.23) и (3.25). В выражения  $A_1$ ,  $B_1$  входит значение  $\varepsilon_1$ , которое найдено в результате решения уравнения (3.20).

Выберем теперь в качестве независимых уравнений (3.17) и (3.19). Повторив, аналогичные проделанным выше, преобразования, получим выражения для  $n_{x2}$ ,  $n_{y2}$ ,  $n_{z2}$

$$n_{y2} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_2^2 + B_2^2}}, \quad n_{x2} = n_{y2} \cdot A_2, \quad n_{z2} = n_{y2} \cdot B_2, \quad (3.28)$$

где

$$A_2 = \frac{\tau_{xz} \tau_{yz} - (\sigma_{zz} - \sigma_2) \tau_{xy}}{(\sigma_{xx} - \sigma_2)(\sigma_{zz} - \sigma_2) - \tau_{xz}^2}, \quad (3.29)$$

$$B_2 = \frac{\tau_{xy} \tau_{yz} - (\sigma_{xx} - \sigma_2) \tau_{yz}}{(\sigma_{xx} - \sigma_2)(\sigma_{zz} - \sigma_2) - \tau_{xz}^2}. \quad (3.30)$$

Наконец, выбрав, в качестве независимых, уравнения (3.17) и (3.18) и проделав аналогичные преобразования, получим

$$n_{z3} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + A_3^2 + B_3^2}}, \quad n_{x3} = n_{z3} \cdot A_3, \quad n_{y3} = n_{z3} \cdot B_3, \quad (3.31)$$

где

$$A_3 = \frac{\tau_{xy} \tau_{yz} - (\sigma_{yy} - \sigma_3) \tau_{xz}}{(\sigma_{xx} - \sigma_3)(\sigma_{yy} - \sigma_3) - \tau_{xy}^2}, \quad (3.32)$$

$$B_3 = \frac{\tau_{xy} \tau_{xz} - (\sigma_{xx} - \sigma_3) \tau_{yz}}{(\sigma_{xx} - \sigma_3)(\sigma_{yy} - \sigma_3) - \tau_{xy}^2}. \quad (3.33)$$

Из сказанного выше следует, что направляющие косинусы главных осей тензора напряжений однозначно выражаются через компоненты  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$  и главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ . При отсутствии

напряжений сдвига  $\tau_{xy} = 0, \tau_{yz} = 0, \tau_{zx} = 0$ , значения  $A_1$  (3.24),  $B_1$  (3.26),  $A_2$  (3.29),  $B_2$  (3.30),  $A_3$  (3.32),  $B_3$  (3.33) обращаются в ноль. Соответственно направляющие косинусы (3.23), (3.25), (3.27), (3.28), (3.31) принимают значения:

$$n_{x1} = \pm 1, n_{y1} = 0, n_{z1} = 0, n_{x2} = 0, n_{y2} = \pm 1, n_{z2} = 0, n_{x3} = 0, n_{y3} = 0, n_{z3} = \pm 1.$$

Это означает, что при отсутствии напряжений сдвига главные оси тензора напряжений совпадают с координатными осями.

### 3.3. Касательные напряжения

Выберем в рассматриваемой точке  $x_0, y_0, z_0$  главные оси тензора напряжений в качестве новых координатных осей  $x, y, z$ . Тогда индексы  $x, y, z$  заменяются индексами 1,2,3 и уравнения (3.4)–(3.6) запишутся в виде

$$\bar{n} = n_1 \bar{i} + n_2 \bar{j} + n_3 \bar{k}, \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad (3.34)$$

$$\bar{F} = F_1 \bar{i} + F_2 \bar{j} + F_3 \bar{k}. \quad (3.35)$$

Модуль вектора  $\bar{F}$  (3.35), действующего на площадке, ортогональной вектору  $\bar{n}$ , определяется выражением

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2, \quad (3.36)$$

где

$$F_1 = \sigma_1 n_1, \quad F_2 = \sigma_2 n_2, \quad F_3 = \sigma_3 n_3, \quad (3.37)$$

Нормальное напряжение, действующее на площадку, ортогональную вектору  $\bar{n}$ , определяется скалярным произведением вектора  $\bar{F}$  (3.35) на нормаль  $\bar{n}$  (3.34) и имеет вид

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2. \quad (3.38)$$

На произвольно выбранной площадке с нормалью  $\bar{n}$  (3.34) касательное напряжение определяется уравнением (3.5). После подстановки в него следующего из (3.36), (3.37) выражения  $F^2$

$$F^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2, \quad (3.39)$$

и значения  $\sigma_n$  (3.38) касательное напряжение на площадке с нормалью  $\bar{n}$  определяются выражением

$$\tau^2 = F^2 - \sigma_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2. \quad (3.40)$$

Исключим в (3.40), например,  $n_3^2$  с помощью второго уравнения (3.34). После этого найдем такие значения  $n_1$  и  $n_2$ , при которых величина  $\tau$  принимает экстремальное значение. Для этого подставим

$$n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2 \quad (3.41)$$

в (3.40). Условием экстремума  $\tau^2$  является равенство нулю частных производных

$$\frac{\partial \tau^2}{\partial n_1} = 0, \quad \frac{\partial \tau^2}{\partial n_2} = 0.$$

Проведя дифференцирование  $\tau^2$ , получим два уравнения

$$n_1(\sigma_1 - \sigma_3 - 2(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 - 2(\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2) = 0, \quad (3.42)$$

$$n_2(\sigma_2 - \sigma_3 - 2(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 - 2(\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2) = 0. \quad (3.43)$$

Рассмотрим различные решения системы уравнений (3.42), (3.43).

1.  $n_1 = 0, n_2 = 0$ . В этом случае из (3.34) следует  $n_3 = \pm 1$ .

2.  $n_1 = 0, n_2 \neq 0$ . В этом случае из (3.43) следует  $n_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ , а из уравнения

$$(3.41) \text{ следует } n_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

3.  $n_2 = 0, n_1 \neq 0$ . В этом случае из (3.42) и (3.34) следует  $n_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}, n_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ .

Если из равенства (3.23) выразить  $n_2^2$ , подставить полученное выражение в (3.16), продифференцировать по  $n_1$  и  $n_3$  и приравнять нулю производные  $\frac{\partial \tau^2}{\partial n_1}$  и  $\frac{\partial \tau^2}{\partial n_3}$ , то получим систему уравнений

$$\begin{aligned} n_1((\sigma_1 - \sigma_2)(1 - 2n_1^2) - 2(\sigma_3 - \sigma_2)n_3^2) &= 0, \\ n_3((\sigma_3 - \sigma_2)(1 - 2n_3^2) - 2(\sigma_1 - \sigma_2)n_1^2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Минимальное значение  $\tau^2$  соответствует решению

$$n_1 = 0, \quad n_2 = \pm 1, \quad n_3 = 0.$$

Максимальное значение  $\tau^2$  соответствует решению

$$n_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad n_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad n_3 = 0.$$

Все решения систем уравнений (3.42)–(3.44) и системы, получаемой точно так же при исключении в (3.40) значения  $n_1^2$ , приведены в таблице 3.1.

Значения направляющих косинусов в трех первых столбцах таблицы дают направления главных осей, выбранных так, что касательные напряжения на площадках ортогональных этим осям, равны нулю.



Таблица 3.1

Значения направляющих конусов главных осей тензора напряжений ( $\min \tau_n^2$ ) и линий максимальных касательных напряжений

ось	минимальное $\tau_n^2$			минимальное $\tau_n^2$		
	$\pm 1$	0	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0
$n_1$	$\pm 1$	0	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0
$n_2$	0	$\pm 1$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
$n_3$	0	0	$\pm 1$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$

Это результат тривиальный, т.к. изначально главные оси заменили оси  $Ox, Oy, Oz$ .

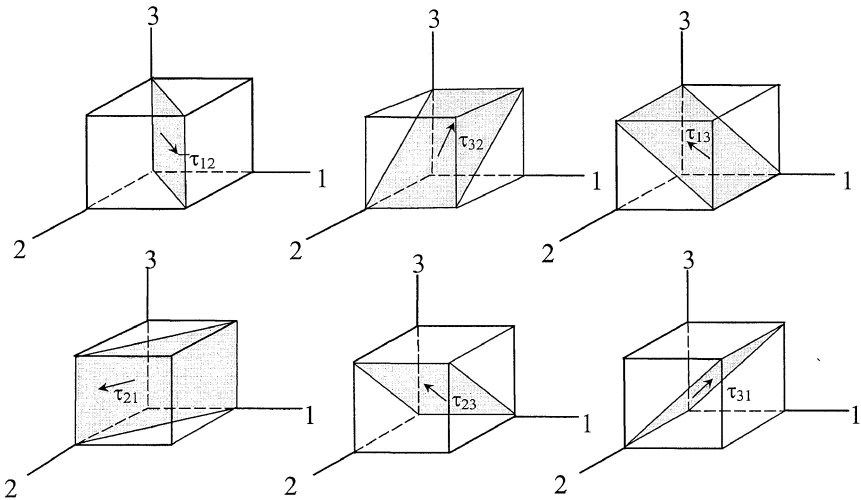


Рис. 3.3. Плоскости, на которых действуют главные касательные напряжения

В трех последних столбцах таблицы приведены значения косинусов, определяющие нормали к площадкам, проходящим через одну из главных осей и делящим угол между другими главными осями пополам (рис. 3.3). Подставив направляющие косинусы из трех последних столбцов в уравнение (3.40), получим значения главных (максимальных) касательных напряжений

$$\tau_{1,2} = \pm 0,5(\sigma_1 - \sigma_2), \quad \tau_{2,3} = \pm 0,5(\sigma_2 - \sigma_3), \quad \tau_{3,1} = \pm 0,5(\sigma_3 - \sigma_1). \quad (3.45)$$

На площадках, на которых касательные напряжения принимают значения (3.45), действуют также нормальные напряжения. Их значения получаются из (3.38) после подстановки направляющих косинусов из таблицы в виде

$$\sigma_{n1} = 0,5(\sigma_2 + \sigma_3), \quad \sigma_{n2} = 0,5(\sigma_1 + \sigma_3), \quad \sigma_{n3} = 0,5(\sigma_1 + \sigma_2).$$

Поскольку  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , то максимальное главное касательное напряжение равно

$$\tau_{3,1} = 0,5(\sigma_1 - \sigma_3).$$

### 3.4. Тензоры напряжений и скоростей деформации

Остановимся еще на одном представлении тензора напряжений. Для этого представим тензор напряжений  $T_\sigma$  в виде суммы двух тензоров

$$T_\sigma = T_\sigma^0 + D_\sigma,$$

где

$$T_\sigma^0 = \begin{vmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{vmatrix}, \quad D_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} + P & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} + P & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} + P \end{vmatrix}.$$

Тензор  $T_\sigma^0$  называется шаровым тензором напряжений и равен давлению с обратным знаком, а тензор  $D_\sigma$ , характеризующий касательные напряжения, называется **девиатором тензора напряжений**. Нормальные составляющие тензора  $D_\sigma$  обозначают

$$S_{xx} = \sigma_{xx} + P, \quad S_{yy} = \sigma_{yy} + P, \quad S_{zz} = \sigma_{zz} + P.$$

По аналогии с тензором  $T_\sigma$  из уравнения

$$S_v^3 - S_v^2 J_1(D_\sigma) + S_v J_2(D_\sigma) - J_3(D_\sigma) = 0$$

находятся главные напряжения  $S_v$  тензора  $D_\sigma$

$$S_1 = \sigma_1 + P, \quad S_2 = \sigma_2 + P, \quad S_3 = \sigma_3 + P. \quad (3.46)$$

Инварианты  $J_1(D_\sigma)$ ,  $J_2(D_\sigma)$ ,  $J_3(D_\sigma)$  следующим образом выражаются через компоненты девиатора напряжений

$$\begin{aligned} J_1(D_\sigma) &= S_{xx} + S_{yy} + S_{zz}, \\ J_2(D_\sigma) &= S_{xx}S_{yy} + S_{yy}S_{zz} + S_{zz}S_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ J_3(D_\sigma) &= S_{xx}S_{yy}S_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - S_{xx}\tau_{yz}^2 - S_{yy}\tau_{zx}^2 - S_{zz}\tau_{xy}^2. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Если перейти к главным напряжениям, то инварианты (3.47) девиатора тензора напряжений запишутся в виде

$$\begin{aligned} J_1(D_\sigma) &= S_1 + S_2 + S_3, \\ J_2(D_\sigma) &= S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_1, \\ J_3(D_\sigma) &= S_1S_2S_3. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Подставим (3.46) в первое уравнение (3.48). В результате получим

$$J_1(D_\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + 3P. \quad (3.49)$$

Из (3.22) и (3.49) следует, что

$$J_1(D_\sigma) = 0. \quad (3.50)$$

С помощью  $J_1$  (3.50) преобразуем  $J_2$  (3.48). Для этого разделим правую часть выражения  $J_2(D_\sigma)$  в (3.48) на два одинаковых слагаемых и в одну из половинок подставим поочередно

$$S_1 = -S_2 - S_3, \quad S_2 = -S_1 - S_3, \quad S_3 = -S_1 - S_2.$$

В результате получим выражение  $J_2(D_\sigma)$

$$J_2(D_\sigma) = -\frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2).$$

Отношение модуля  $|J_2(D_\sigma)|$  к квадрату давления  $P^2$  называют неидеальностью среды.

Многочисленные эксперименты показывают, что большинство твердых тел способно выдержать без разрушения большие всесторонние напряжения. В то же время, значительно меньшие по величине напряжения сдвига вызывают разрушение тела. В связи с этим, разделение тензора напряжений на шаровой тензор  $T_{1\sigma}$  и девиатор  $D_\sigma$  существенно облегчает рассмотрение напряженного состояния тела, поскольку тензор  $T_{1\sigma}$ , вызывающий дилатацию, может быть связан с шаровым тензором деформаций или шаровым тензором скоростей деформаций, а тензор  $D_\sigma$ , вызывающий дисторсию, соответственно с девиаторами тензоров деформаций или скоростей деформаций. Выделение давления полезно еще и тем, что позволяет строить уравнение состояния вещества, непрерывно переходящее в уравнение состояния жидкости в условиях, когда компоненты тензора напряжений становятся пренебрежимо малы по сравнению со значением давления  $P$ .

### 3.5. Закон сохранения массы

В пространстве  $x, y, z$  рассмотрим произвольно взятый объем  $\Omega$ , в котором отсутствуют разрывы. В некоторый момент времени  $t_0$  масса вещества, находящегося в этом объеме, равна

$$M = \int_{\Omega} \rho d\Omega,$$

где плотность  $\rho$  есть функция аргументов  $x, y, z, t$ . Скорость изменения плотности в каждой точке объема  $\Omega$  есть  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{xyz}$  и, следовательно, изменение массы вещества за время  $\Delta t$  в объеме  $\Omega$  равно

$$\Delta M = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt d\Omega. \quad (3.51)$$

Будем считать, что источников массы нет, и единственной причиной изменения массы в объеме  $\Omega$  является поток вещества через поверхность  $\Pi$ , ограничивающую объем  $\Omega$ . Поток вещества за время  $\Delta t$  через всю поверхность равен

$$\Delta M = - \int_{\Pi} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \rho \bar{U} \cdot d\bar{\Pi} dt. \quad (3.52)$$

Заменяя в (3.52) с помощью теоремы Остроградского-Гаусса поверхностный интеграл объемным интегралом, получим

$$\Delta M = - \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \operatorname{div} \rho \bar{U} d\Omega dt. \quad (3.53)$$

Из равенства  $\Delta M$  в (3.51) и (3.53) следует

$$\int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{U} \right) d\Omega dt = 0.$$

Поскольку объем  $\Omega$  и промежуток времени  $\Delta t$  являются произвольными, то подынтегральная функция равна нулю

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{U} = 0. \quad (3.54)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (2.19), полученным путем рассмотрения дилатации сплошной среды. Закон сохранения массы в форме (3.54) называется уравнением неразрывности.

### 3.6. Закон сохранения количества движения идеальной среды

Вещество, находящееся в объеме  $\Omega$  в момент  $t_0$ , имеет количество движения  $\bar{K} = \int_{\Omega} \rho \bar{U} d\Omega$ . Величина  $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{U})$  есть скорость изменения вектора  $\rho \bar{U}$  в каждой точке объема  $\Omega$ . Если эта величина отлична от нуля, то за время  $\Delta t$  количество движения в рассматриваемом объеме изменится на величину

$$\Delta \bar{K} = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{U}) d\Omega dt. \quad (3.55)$$

Поскольку в объеме  $\Omega$  нет источников, то указанное изменение количества движения произошло по следующим причинам:

а) из-за потока количества движения через поверхность  $\Pi$

$$\bar{J}_1 = - \int_{\Pi} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \rho \bar{U} (\bar{U} \cdot d\bar{\Pi}) dt,$$

б) из-за импульса поверхностных сил, действующих на поверхности  $\Pi$

$$\bar{J}_2 = - \int_{\Pi} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} P d\bar{\Pi} dt.$$

Из всех поверхностных сил в выражение для импульса входит только давление  $P$ , поскольку мы рассматриваем идеальную среду.

Применяя теорему Остроградского-Гаусса к  $\bar{J}_1$  и  $\bar{J}_2$ , получим для их суммы выражение

$$\bar{J}_1 + \bar{J}_2 = - \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \left[ \bar{U} \operatorname{div}(\rho \bar{U}) + \rho \left( U_x \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + U_y \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + U_z \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) + \operatorname{grad} P \right] d\Omega dt. \quad (3.56)$$

Приравнявая затем изменение количества движения  $\Delta \bar{K}$  (3.55) импульсу давления и потоку через внешнюю поверхность (3.56) и принимая во внимание произвольность  $\Omega$  и  $\Delta t$ , получим закон сохранения количества движения в векторной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{U}) + \bar{U} \operatorname{div}(\rho \bar{U}) + \rho \left( U_x \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + U_y \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + U_z \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) + \operatorname{grad} P = 0. \quad (3.57)$$

### 3.7. Закон сохранения энергии идеальной среды

Пусть  $\varepsilon$  – энергия единицы массы вещества. Тогда  $\rho \varepsilon$  – энергия вещества, находящегося в единичном объеме. За время  $\Delta t$  энергия в объеме  $\Omega$  изменится на величину

$$\Delta Q = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) d\Omega dt. \quad (3.58)$$

Если в объеме  $\Omega$  отсутствуют источники энергии, то это изменение энергии определяется:

1. Энергией, которую приносит втекающая в объем  $\Omega$  за время  $\Delta t$  среда.

2. Работой поверхностных сил за время  $\Delta t$  на поверхности  $\Pi$ , ограничивающей объем  $\Omega$ .

3. Энергией, которая передается веществу, находящемуся в объеме  $\Omega$ , окружающими частицами вещества вследствие теплопередачи.

Математически эти причины изменения энергии в объеме  $\Omega$  записываются следующим образом

$$\Delta Q = - \int_{\Pi} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (\rho \varepsilon \bar{U} + P \bar{U} - \bar{q}) d\bar{\Pi} dt.$$

Здесь  $\bar{q}$  - поток тепловой энергии. Применяя теорему Остроградского-Гаусса, запишем это выражение в виде

$$\Delta Q = - \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (\operatorname{div}(\rho \varepsilon \bar{U} + P \bar{U} - \bar{q})) d\Omega dt. \quad (3.59)$$

Приравняв оба выражения  $\Delta Q$  (3.58) и (3.59) и принимая во внимание произвольность  $\Omega$  и  $\Delta t$ , приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \operatorname{div}(\rho \varepsilon \bar{U} + P \bar{U} - \bar{q}) = 0, \quad (3.60)$$

которое является дифференциальной формой закона сохранения энергии и называется **уравнением энергии идеальной среды**.

### 3.8. Законы сохранения в лагранжевых координатах

Законы сохранения в (3.55), (3.57), (3.60) могут быть записаны в лагранжевых координатах с помощью уравнений (2.1)–(2.6). Необходимым условием такой записи является введение лагранжевых координат. Однако, на практике переход к лагранжевым координатам осуществляется лишь частично. При этом используется только свойство лагранжевой координаты сохраняться вдоль траектории материальной частицы. Поэтому в уравнениях (3.54), (3.57) и (3.60) члены группируются с целью образования субстациональных производных. В оставшихся членах сохраняются производные по пространственным эйлеровым переменным.

Такой прием не требует конкретного определения лагранжевых переменных  $a, b, c$ .

Преобразуем уравнение (3.54) к виду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + U_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + U_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \operatorname{div} \bar{U} = 0. \quad (3.61)$$

В силу того, что первых четыре члена в этом уравнении есть субстациональная производная плотности, то используя равенство (2.7), запишем (3.61) в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{U} = 0. \quad (3.62)$$

Поскольку вдоль траектории каждой частицы сохраняются ее лагранжевы координаты, то полная производная плотности  $\rho$  в уравнении неразрывности (3.62) является частной производной  $\rho$  в лагранжевых координатах

$$\frac{d\rho}{dt} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{abc}.$$

Если от  $\rho$  перейти к удельному объему  $V = \frac{1}{\rho}$ , то уравнение (3.62) примет вид

$$\frac{dV}{dt} - V \operatorname{div} \bar{U} = 0. \quad (3.63)$$

С помощью выражения субстациональной производной (2.7) запишем уравнения (3.57) и (3.60) в виде

$$\frac{d\rho \bar{U}}{dt} + \rho \bar{U} \operatorname{div} \bar{U} + \operatorname{grad} P = 0, \quad (3.64)$$

$$\frac{d\rho \varepsilon}{dt} + \rho \varepsilon \operatorname{div} \bar{U} + \operatorname{div} P \bar{U} - \operatorname{div} \bar{q} = 0, \quad (3.65)$$

где

$$\frac{d\rho \bar{U}}{dt} = \left( \frac{\partial \rho \bar{U}}{\partial t} \right)_{abc}, \quad \frac{d\rho \varepsilon}{dt} = \left( \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} \right)_{abc}.$$

В случае отсутствия теплопроводности уравнение энергии идеальной сплошной среды принимает вид

$$\frac{d\rho \varepsilon}{dt} + \rho \varepsilon \operatorname{div} \bar{U} + \operatorname{div} P \bar{U} = 0. \quad (3.66)$$

### 3.9. Следствия законов сохранения идеальной среды

Продифференцировав почленно первое и второе слагаемые в уравнении (3.64) и от полученного уравнения отняв (3.62), получим первое следствие законов сохранения массы и количества движения

$$\rho \frac{d\bar{U}}{dt} + \text{grad}P = 0. \quad (3.67)$$

Перейдем теперь к закону сохранения энергии. Продифференцировав почленно первое и третье слагаемые в (3.65) и отняв уравнение (3.62), умноженное на  $\varepsilon$ , получим второе следствие системы законов сохранения

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + \text{div} P\bar{U} - \text{div}\bar{q} = 0. \quad (3.68)$$

Будем считать, что удельная энергия  $\varepsilon$  равна сумме удельной внутренней энергии  $E$  и удельной кинетической энергии  $0,5\bar{U}^2$

$$\varepsilon = E + 0,5\bar{U}^2. \quad (3.69)$$

Подставив  $\varepsilon$  в (3.68), почленно продифференцировав первое и второе слагаемые и отняв уравнение (3.67), умноженное на  $\bar{U}$ , получим третье следствие системы законов сохранения

$$\rho \frac{dE}{dt} + P \text{div} \bar{U} - \text{div}\bar{q} = 0.$$

С помощью (3.63) преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} = V \text{div}\bar{q}. \quad (3.70)$$

Сравним уравнение (3.70) со следствием второго закона термодинамики

$$\frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} = T \frac{dS}{dt}. \quad (3.71)$$

Из (3.70) и (3.71) следует

$$T \frac{dS}{dt} = \text{div}\bar{q},$$

где  $\bar{q} = -K \text{grad}T$  – тепловой поток. Поскольку  $\text{div}\bar{q}$  может принимать и положительные, и отрицательные значения, то знак  $\frac{dS}{dt}$  может быть любым.

В адиабатических процессах теплопроводность отсутствует, т.е.



$$\operatorname{div} \bar{q} = 0.$$

В этом случае вдоль траектории каждой частицы выполняется закон сохранения энтропии в виде

$$\frac{dS}{dt} = 0. \quad (3.72)$$

Уравнение (3.72) называют часто дополнительным **законом сохранения энтропии**. Течения, удовлетворяющие уравнению (3.72), называются **адиабатическими**.

Уравнение (3.72) в силу определения субстациональной производной (2.7) имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + U_x \frac{\partial S}{\partial x} + U_y \frac{\partial S}{\partial y} + U_z \frac{\partial S}{\partial z} = 0.$$

Течения, у которых выполняется не только (3.72), но также и

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial z} = 0,$$

называются **изэнтропическими**.

### 3.10. Закон сохранения количества движения неидеальной среды

В случае неидеальной среды напряжения на поверхности  $\bar{F}$  описываются тензором напряжений  $T_{\sigma}$ , вследствие чего импульс поверхностных сил, действующих на поверхности  $F$ , определяется выражением

$$\bar{J}_2 = \int_{\Pi} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (\bar{\sigma}_x d\Pi_x + \bar{\sigma}_y d\Pi_y + \bar{\sigma}_z d\Pi_z) dt,$$

где  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z$  – три компоненты силы  $\bar{F}$ , действующие на площадках  $d\Pi_x, d\Pi_y, d\Pi_z$ .

Для неидеальной среды изменение количества движения в объеме  $\Omega$  и поток количества движения через ограничивающую объем  $\Omega$  поверхность  $\Pi$  такие же, как и для идеальной среды

$$\Delta \bar{K} = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{U}) d\Omega dt, \quad \bar{J}_1 = - \int_{\Pi} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \rho \bar{U} (\bar{U} \cdot d\bar{\Pi}) dt.$$

Сложив  $\bar{J}_1$  и  $\bar{J}_2$ , приравняв эту сумму значению  $\Delta \bar{K}$  и применив теорему Остроградского-Гаусса получим, вследствие произвольности  $\Omega$  и  $\Delta t$ , как и выше, закон сохранения количества движения в виде

$$\frac{\partial \rho \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{U} U_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{U} U_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{U} U_z}{\partial z} - \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} = 0.$$

С помощью уравнения субстациональной производной преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{d\rho \bar{U}}{dt} + \rho \bar{U} \text{div} \bar{U} - \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} = 0.$$

Почленно продифференцируем  $\rho \bar{U}$  и, используя закон сохранения массы в виде (3.54), упростим это уравнение. Далее примем во внимание, что тензор напряжений  $T_\sigma$  представляется в виде суммы шарового тензора напряжений  $T_{1\sigma}$  и девиатора тензора напряжений  $D_\sigma$ . Заменяв  $\bar{\sigma}_x$  на  $\bar{S}_x - P \bar{i}$ ,  $\bar{\sigma}_y$  на  $\bar{S}_y - P \bar{j}$ ,  $\bar{\sigma}_z$  на  $\bar{S}_z - P \bar{k}$ , получим уравнение движения в виде

$$\rho \frac{d\bar{U}}{dt} + \text{grad}P - \left( \frac{\partial \bar{S}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{S}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{S}_z}{\partial z} \right) = 0, \quad (3.73)$$

где

$$\bar{S}_x = S_{xx} \bar{i} + \tau_{xy} \bar{j} + \tau_{xz} \bar{k},$$

$$\bar{S}_y = \tau_{yx} \bar{i} + S_{yy} \bar{j} + \tau_{yz} \bar{k},$$

$$\bar{S}_z = \tau_{zx} \bar{i} + \tau_{zy} \bar{j} + S_{zz} \bar{k}.$$

Уравнение движения (3.73) содержит в качестве составной части уравнение движения идеальной среды и переходит в него непрерывно при  $\bar{S}_x \rightarrow 0$ ,  $\bar{S}_y \rightarrow 0$ ,  $\bar{S}_z \rightarrow 0$ . Векторное уравнение движения (3.73) можно расщепить на три скалярных

$$\begin{aligned} \rho \frac{dU_x}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dU_y}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dU_z}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

### 3.11. Закон сохранения энергии неидеальной среды

Для неидеальной среды равный  $\Delta Q$  приток энергии через границы объема  $\Omega$ , работа напряжений и тепловые потоки на поверхности  $F$  имеют вид

$$\Delta Q = - \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \left( \int_{\Pi} (\rho \varepsilon \bar{U} - \bar{q}) d\Pi + \int_{\Pi} (\bar{\sigma}_x \bar{U} d\Pi_x + \bar{\sigma}_y \bar{U} d\Pi_y + \bar{\sigma}_z \bar{U} d\Pi_z) \right) dt. \quad (3.75)$$

Применив в (3.75) теорему Остроградского-Гаусса, приравняв  $\Delta Q$  (3.58) и  $\Delta Q$  в (3.75) и приравняв нулю подинтегральную функцию, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \operatorname{div} (\rho \varepsilon \bar{U} - \bar{q}) - \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx} U_x + \tau_{xy} U_y + \tau_{xz} U_z) - \\ - \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} U_x + \sigma_{yy} U_y + \tau_{yz} U_z) - \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} U_x + \tau_{zy} U_y + \sigma_{zz} U_z) = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение выражает закон сохранения энергии неидеальной среды (вязкой, упругой или пластичной) в дифференциальной форме. Воспользуемся представлением тензора напряжений в виде суммы шарового тензора и девиатора и запишем его в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \operatorname{div} ((\rho \varepsilon + P) \bar{U} - \bar{q}) - \frac{\partial}{\partial x} (S_{xx} U_x + \tau_{xy} U_y + \tau_{xz} U_z) + \\ - \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} U_x + S_{yy} U_y + \tau_{yz} U_z) - \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} U_x + \tau_{zy} U_y + S_{zz} U_z) = 0. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Преобразуем закон сохранения энергии (3.76) к уравнению энергии. Из законов сохранения массы и энергии и выражения для субстанциональной производной следует

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\varepsilon}{dt} + \operatorname{div} (P \bar{U} - \bar{q}) - \frac{\partial}{\partial x} (S_{xx} U_x + \tau_{xy} U_y + \tau_{xz} U_z) - \\ - \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} U_x + S_{yy} U_y + \tau_{yz} U_z) - \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} U_x + \tau_{zy} U_y + S_{zz} U_z) = 0. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Подставив сюда  $\varepsilon = E + 0,5 \bar{U}^2$  и уравнения движения (3.74), запишем (3.77) в виде

$$\rho \frac{dE}{dt} + P \operatorname{div} \bar{U} - \operatorname{div} \bar{q} - \bar{S}_x \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} - \bar{S}_y \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - \bar{S}_z \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = 0.$$

Заменим далее  $\operatorname{div} \bar{U}$  с помощью (3.63) на  $\frac{dV}{dt}$ . В результате получим

$$\frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} = V \left( \bar{S}_x \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{S}_y \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \bar{S}_z \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) + V \operatorname{div} \bar{q}. \quad (3.78)$$

В случае равенства нулю девиатора тензора напряжений уравнение (3.78) совпадает с уравнением энергии идеальной среды. Такое представление уравнения энергии является важным шагом на пути построения

математических моделей, применимых в широком диапазоне изменения термодинамических величин. Сама форма уравнения предполагает единство подходов к описанию поведения среды как в области малых напряжений и температур, так и в области высоких давлений и температур и дает возможность описывать поведение среды в переходных областях от твердого тела к жидкости и от жидкости к газу или плазме. Уравнение энергии выражает фундаментальные свойства сплошной среды, поскольку не содержит величин, зависящих от свойств конкретного вещества.

### 3.12. Законы сохранения идеальной среды для одномерных движений

Многие движения сплошной среды могут с большой точностью рассматриваться как одномерные, т.е. такие, когда все искомые функции зависят только от одной пространственной координаты. Пусть такой координатой будет  $x$ . Тогда  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ ,  $U_y = U_z = 0$  и уравнения (3.65), (3.67) и (3.68) упрощаются

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \rho \frac{dU}{dt} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \rho \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial(PU)}{\partial x} = 0. \quad (3.79)$$

Соответственно, упрощается и субстанциональная производная

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}.$$

Три уравнения (3.79) связывают 4 неизвестных функции  $P, \rho, \varepsilon, U$ . Четвертым уравнением этой системы является уравнение состояния, например,

$$P = f(\rho, E),$$

где  $f$  – некоторая функция. Удельная внутренняя энергия  $E$  связана с  $\varepsilon$  и  $\bar{U}$  уравнением (3.69). Таким образом, уравнения (3.69) вместе с уравнением состояния и уравнением (3.69) образуют систему пяти уравнений с пятью неизвестными.

Движение среды, описываемое уравнениями (3.79), называется **плоским**. Кроме плоских течений встречаются также одномерные движения со сферической симметрией (когда все искомые величины зависят только от расстояния до центра симметрии) и с цилиндрической симметрией (когда все искомые величины зависят только от расстояния до оси симметрии, а скорость ортогональна цилиндрической поверхности). Эти движения описываются уравнениями, отличными от (3.79).

Перейдем к новым координатам  $r, \varphi, \psi$  в соответствии с рис. 3.4.

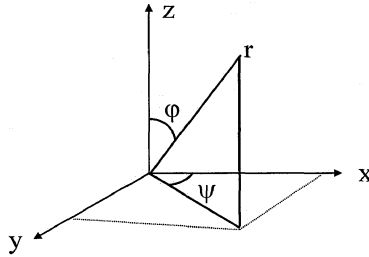


Рис. 3.4. Новая система координат

Декартовы координаты  $x, y, z$  выражаются через новые координаты следующим образом  $x = r \sin \varphi \cos \psi$ ,  $y = r \sin \varphi \sin \psi$ ,  $z = r \cos \varphi$ . Поскольку движение является сферически симметричным, то компоненты вектора скорости  $U_\varphi$  и  $U_\psi$  равны нулю и только  $U_r \neq 0$ . Выразим компоненты скорости в декартовых координатах через  $U_r, \varphi$  и  $\psi$

$$U_x = U_r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi,$$

$$U_y = U_r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi, \quad U_z = U_r \cdot \cos \varphi.$$

Выразим далее  $r, \varphi$  и  $\psi$  через  $x, y$  и  $z$

$$\varphi = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \psi = \arctg \frac{y}{x}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3.80)$$

Заменим далее все производные по  $x, y, z$ , входящие в уравнения газодинамики, производными по  $z, \varphi, \psi$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (3.81)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Производные от  $r, \varphi, \psi$  по  $x, y, z$  находятся дифференцированием (3.80)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \sin \varphi \cos \psi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi \sin \psi, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{r} \cos \varphi \cos \psi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{r} \cos \varphi \sin \psi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{r} \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\sin \psi}{r \sin \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r \sin \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

Подставим эти производные в (3.81) и с помощью полученных выражений преобразуем (3.62), (3.67), (3.68) к виду

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{2\rho U_r}{r} = 0,$$

$$\rho \frac{dU_r}{dt} + \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \quad (3.82)$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial}{\partial r}(P U_r) + \frac{2P U_r}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \left( K \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{2K}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0.$$

Таким образом, при переходе от плоского случая (уравнения (3.79)) к случаю сферически симметричных движений уравнение движения не меняется, а в уравнении неразрывности и в уравнении энергии появляются дополнительные слагаемые, содержащие  $r$  в знаменателе.

Рассмотрим далее цилиндрические координаты  $r, \varphi, z$ . Пусть ось симметрии совпадает с осью  $Oz$ ,  $r$  – расстояние до оси симметрии, а  $\varphi$  есть угол в плоскости  $x, y$ , отсчитываемый от оси  $Ox$ .

Цилиндрически симметричные движения являются одномерными лишь в случае, когда характеризующие течение величины зависят только от  $r$  и не зависят от  $\varphi$  и  $z$ . Если же все величины зависят от  $r$  и  $z$  и не зависят от  $\varphi$ , то течение является двумерным цилиндрически симметричным.

Декартовы координаты  $x, y$  и компоненты скорости  $U_x, U_y$  выражаются через цилиндрические координаты  $r, \varphi$  и компоненты скорости  $U_r, U_\varphi=0$  по формулам

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi, & U_x &= U_r \cos \varphi, \\ y &= r \cdot \sin \varphi, & U_y &= U_r \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Соответственно,  $r$  и  $\varphi$  выражаются через  $x$  и  $y$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}.$$

Производные  $r$  и  $\varphi$  по  $x$  и  $y$  имеют вид

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{r} \sin \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{r} \cos \varphi.$$

Используем эти производные и выразим  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$  через  $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}.\end{aligned}\tag{3.84}$$

Подставляя (3.83) и (3.84) в (3.54), (3.57) и (3.60) при  $K = 0$ , получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + U_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + U_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial U_r}{\partial r} + \rho \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\rho U_r}{r} &= 0, \\ \rho \left( \frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) + \frac{\partial P}{\partial r} &= 0, \\ \rho \left( \frac{\partial U_z}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial P}{\partial z} &= 0, \\ \rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + U_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{\partial (P U_r)}{\partial r} + \frac{\partial (P U_z)}{\partial z} + \frac{P U_r}{r} &= 0.\end{aligned}\tag{3.85}$$

Уравнения (3.85) описывают двумерное цилиндрически симметричное движение. Предположение о том, что искомые функции не зависят не только от  $\varphi$ , но и от  $z$ , приводит к упрощению уравнений (3.85)

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} + U_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\rho U_r}{r} &= 0, \\ \rho \left( \frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial P}{\partial r} &= 0, \\ \rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + \frac{\partial (P U_r)}{\partial r} + \frac{P U_r}{r} &= 0.\end{aligned}\tag{3.86}$$

Если ввести коэффициент  $\alpha$ , то уравнения (3.82), (3.86), описывающие одномерные движения идеальной среды при отсутствии теплопроводности, можно записать в общем виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\alpha \rho U_r}{r} = 0, \quad \rho \frac{dU_r}{dt} + \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \quad \rho \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial}{\partial r} (P U_r) + \frac{\alpha P U_r}{r} = 0.$$

Эти уравнения при  $\alpha = 0$  описывают движения с плоской симметрией, при  $\alpha = 1$  — с цилиндрической симметрией, при  $\alpha = 2$  — со сферической симметрией. Объединим вторые и третьи члены в уравнениях неразрывности и энергии и запишем их в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial r^\alpha U_r}{r^\alpha \partial r} = 0, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial r^\alpha P U_r}{\rho r^\alpha \partial r} = 0.$$

Если ввести лагранжеву координату уравнением

$$a = \int_0^r \rho r^\alpha dr$$

и с помощью уравнения

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial r},$$

преобразовать (3.86), то в лагранжевой постановке они примут вид

$$\frac{dV}{dt} - \frac{\partial r^\alpha U_r}{\partial a} = 0, \quad \frac{dU_r}{dt} + r^\alpha \frac{\partial P}{\partial a} = 0, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial r^\alpha P U_r}{\partial a} = 0.$$

### 3.13. Преобразование Галилея

Инвариантность законов сохранения сплошной среды, записанных в виде системы нелинейных уравнений в частных производных, является фундаментальным принципом механики. Иными словами, уравнения механики сплошной среды не должны изменяться при переходе от одной инерциальной системы координат в другую, движущуюся относительно первой с постоянной скоростью  $\bar{C} = \text{const}$ . Преобразование Галилея рассмотрим на примере уравнений идеальной сплошной среды (3.54), (3.57) и (3.60). Все величины в неподвижной системе координат будем обозначать индексом "0", в подвижной – индексом "1".

Перейдем от системы координат  $x_0, y_0, z_0, t$  к системе, связанной с исходной системой уравнениями

$$x_1 = x_0 + C_x t, \quad y_1 = y_0 + C_y t, \quad z_1 = z_0 + C_z t, \quad (3.87)$$

$$U_{1x} = U_{0x} + C_x, \quad U_{1y} = U_{0y} + C_y, \quad U_{1z} = U_{0z} + C_z, \quad (3.88)$$

$$\bar{U}_1 = \bar{U}_0 + \bar{C}. \quad (3.89)$$

Поскольку в уравнения (3.54), (3.57), (3.60) входят производные по  $t$  и по координатам, введем следующие обозначения

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{x_0, y_0, z_0} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{x_1, y_1, z_1} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_1,$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_0} \right)_{y_0, z_0, t} = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_{y_1, z_1, t} = \frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial y_0} \right)_{x_0, z_0, t} = \frac{\partial}{\partial y_0}, \quad \left( \frac{\partial}{\partial y_1} \right)_{x_1, z_1, t} = \frac{\partial}{\partial y_1},$$



$$\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)_{x_0, y_0, t} = \frac{\partial}{\partial z_0}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)_{x_1, y_1, t} = \frac{\partial}{\partial z_1}.$$

Соотношение, связывающее производные по времени в исходной и в новой системах координат, рассмотрим на примере плотности  $\rho$ . В исходной системе координат  $\rho$  является функцией четырех аргументов  $\rho(t, x_0, y_0, z_0)$ , в движущейся системе координат  $\rho$  является сложной функцией тех же аргументов  $\rho(t, x_1(x_0, t), y_1(y_0, t), z_1(z_0, t))$ . По правилам дифференцирования сложной функции

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{x_0, y_0, z_0} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{x_1, y_1, z_1} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1}\right)_{t, y_1, z_1} \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)_{x_0} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y_1}\right)_{t, x_1, z_1} \left(\frac{\partial y_1}{\partial t}\right)_{y_0} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z_1}\right)_{t, x_1, y_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial t}\right)_{z_0}$$

Подставив сюда результат дифференцирования  $x_1, y_1, z_1$  (3.45) по  $t$ , получим соотношение

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_0 = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1 + \bar{C}(\nabla_1 \rho). \quad (3.90)$$

Входящая в уравнение (3.90) термодинамическая величина  $\rho$  при преобразованиях системы координат (3.87), (3.88) не изменяется, как, впрочем, и другие термодинамические величины ( $P, E$ ).

Перейдем теперь к преобразованию производных по пространственным переменным. Входящее в уравнение (3.54) выражение  $\nabla_0(\rho \bar{U}_0)$  выразим через производные в новой системе координат

$$\nabla_0(\rho \bar{U}_0) = \nabla_1(\rho \bar{U}_1) - \bar{C}(\nabla_1 \rho). \quad (3.91)$$

Подставив  $\nabla_0(\rho \bar{U}_0)$  (3.91) и  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_0$  (3.91) в уравнение (3.55), получим уравнение неразрывности в новой системе координат

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1 + (\text{div } \rho \bar{U}_1)_1 = 0. \quad (3.92)$$

Это уравнение отличается от уравнения (3.54) только индексом 1. Это значит, что уравнение (3.54) инвариантно относительно преобразования Галилея (3.87), (3.88).

Рассмотрим далее преобразование уравнения (3.57) в новую систему координат. Следуя правилам дифференцирования, запишем

$$\left(\frac{\partial \rho \bar{U}_0}{\partial t}\right)_0 = \left(\frac{\partial \rho \bar{U}_1}{\partial t}\right)_1 - \bar{C} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1 + (\bar{C} \cdot \nabla_1) \rho \bar{U}_1 - (\bar{C} \cdot \nabla_1) \rho \bar{C}_1. \quad (3.93)$$

$$\bar{U}_0(\nabla_0\rho\bar{U}_0) = \bar{U}_1(\nabla_1\rho\bar{U}_1) - \bar{C}(\nabla_1\rho\bar{U}_1) - \bar{U}_1(\nabla_1\rho\bar{C}) + \bar{C}(\nabla_1\rho\bar{C}). \quad (3.94)$$

$$\rho(\bar{U}\nabla_0)\bar{U}_0 = \rho(\bar{U}_1\nabla_1)\bar{U}_1 - \rho(\bar{C}\nabla_1)\bar{U}_1. \quad (3.95)$$

Подставив (3.93)–(3.95) в (3.57), сократив подобные члены и используя уравнение (3.92), получим

$$\left(\frac{\partial\rho\bar{U}_1}{\partial t}\right)_1 + \bar{U}_1(\nabla_1\rho\bar{U}_1) + \rho(\bar{U}_1\nabla_1)\bar{U}_1 + \nabla_1 P = 0. \quad (3.96)$$

Это уравнение отличается от уравнения (3.57) лишь индексом 1. Следовательно, уравнение (3.57) является инвариантно относительно преобразования Галилея.

Наконец перейдем к преобразованию уравнения энергии (3.60). При переходе в движущуюся систему координат удельная полная энергия

$\varepsilon_0 = E + \frac{1}{2}\bar{U}_0^2$  изменяется по формуле

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1 - \bar{U}_1\bar{C} + \frac{1}{2}\bar{C}^2. \quad (3.97)$$

С учетом соотношения (3.97) производная по времени в уравнении (3.60) преобразуется так

$$\left(\frac{\partial\rho\varepsilon_0}{\partial t}\right)_0 = \left(\frac{\partial\rho\varepsilon_1}{\partial t}\right)_1 - \bar{C}\left(\frac{\partial\rho\bar{U}_1}{\partial t}\right)_1 + \frac{1}{2}\bar{C}^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_1 + \bar{C}\cdot\nabla_1\left(\rho\varepsilon_1 - \rho\bar{U}_1\bar{C} + \frac{1}{2}\rho\bar{C}^2\right) \quad (3.98)$$

Преобразуем далее второе слагаемое в (3.18)

$$\begin{aligned} & \nabla_0(\rho\varepsilon_0\bar{U}_0 + P\bar{U}_0 - \bar{q}) = \\ & = \nabla_1(\rho\varepsilon_1\bar{U}_1 + P\bar{U}_1 - \bar{q}) - \nabla_1\left(\rho\bar{C}\bar{U}_1^2 + \rho\varepsilon_1\bar{C} + P\bar{C} - \frac{3}{2}\rho\bar{C}^2\bar{U} + \frac{1}{2}\rho\bar{C}^2\bar{C}\right). \end{aligned} \quad (3.99)$$

Выразим  $\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_1$  и  $\left(\frac{\partial\rho\bar{U}_1}{\partial t}\right)_1$  с помощью уравнений (3.92) и (3.96) через производные по  $x_1, y_1, z_1$  и подставим в (3.98)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\rho\varepsilon_0}{\partial t}\right)_0 & = \left(\frac{\partial\rho\varepsilon_1}{\partial t}\right)_1 + \bar{C}\cdot\nabla_1\left(\rho\varepsilon_1 - \rho\bar{U}_1\bar{C} + \frac{1}{2}\rho\bar{C}^2\right) + \\ & + \bar{C}\bar{U}_1\nabla_1\rho\bar{U}_1 + \rho\bar{C}(\bar{U}\nabla_1)\bar{U} + \bar{C}\nabla_1 P - \frac{1}{2}\bar{C}^2\nabla_1\rho\bar{U}_1. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Подставив (3.99) и (3.100) в (3.60), получим

$$\left(\frac{\partial\rho\varepsilon_1}{\partial t}\right)_1 + \nabla_1(\rho\varepsilon_1\bar{U}_1 + P\bar{U}_1 - \bar{q}) = \Omega, \quad (3.101)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega = & -\bar{C} \left( \frac{\partial \rho \bar{U}_1}{\partial t} \right)_1 + \frac{1}{2} \bar{C}^2 \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) - \bar{C} \nabla_1 (\rho \bar{U}_1 \bar{C}) + \frac{1}{2} \bar{C} \nabla_1 (\rho \bar{C}^2) - \\ & - \nabla_1 \rho \bar{C} \bar{U}_1^2 + \frac{3}{2} \nabla_1 \rho \bar{U} \bar{C}^2 - \frac{1}{2} \nabla_1 \rho \bar{C} \bar{C}^2 - \nabla P \bar{C}. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Рассмотрим по отдельности некоторые члены в выражении (3.102). Подставим в (3.102) производные  $\rho$  и  $\rho \bar{U}_1$  по времени из (3.92) и (3.96). Затем воспользуемся очевидными соотношениями

$$\nabla_1 (\rho \bar{U} \bar{C}^2) = \bar{C} \nabla_1 \rho \bar{U} \bar{C}, \quad (3.103)$$

$$\frac{1}{2} \bar{C} \nabla_1 \rho \bar{C}^2 = \frac{1}{2} \bar{C}^2 \nabla_1 \rho \bar{C}, \quad (3.104)$$

$$\nabla_1 \rho \bar{C} \bar{U}_1^2 = (\bar{C} \bar{U}_1) \nabla_1 \rho \bar{U}_1 + \rho \bar{C} (\bar{U}_1 \nabla) \bar{U}_1. \quad (3.105)$$

Сократив одинаковые члены, входящие в выражение  $\Omega$  (3.102) с разными знаками, получим  $\Omega = 0$ . Таким образом, уравнение (3.101) отличается от уравнения (3.60) лишь индексом. Следовательно, уравнение энергии (3.60) инвариантно к преобразованию Галилея.

### 3.14. Механика многокомпонентных и гетерогенных сред

Предшествующие параграфы содержали вывод основных уравнений динамики и термодинамики *однородной* сплошной среды. Значительные трудности возникают при установлении аналогичных уравнений для *неоднородных* сред, представляющих механическую смесь разнообразных компонент.

Чистых веществ в природе чрезвычайно мало. В основном это многокомпонентные среды. Сплошную среду в малом объеме  $dV$  называют многокомпонентной, если в этом объеме перемешаны несколько  $(N-1)$  веществ. Под такое определение подпадают все известные типы многокомпонентных сред: гомогенные (все компоненты одинаковы по своему фазовому составу и перемешаны на молекулярном уровне), гетерогенные или многофазные (в смеси имеются компоненты, различающиеся друг от друга по фазе), коллоидные растворы, которые замещают промежуточное состояние.

Каждый компонент может находиться в одном из известных агрегатных состояниях: Т – твердое тело, Ж – жидкость, Г – газ, П – плазма. В смеси возможны комбинации компонентов в любых агрегатных состояниях. Например, в двухкомпонентной смеси возможны следующие типы смесей: Г + Ж – аэрозоль, Г + Т – пузырьковая среда, Ж + Ж –

эмульсия, Ж + Т – суспензия, Т + Т – скальные породы, грунты, композиционные материалы, сплавы и т.д. Конкретные агрегатные состояния, в которых находятся компоненты, определяют характер их взаимодействия. Взаимодействие компонентов зависит еще от ряда других характеристик: от размера и формы частиц, взаимных адгезионных свойств, теплоемкости, скорости звука и т.д. Физические процессы, происходящие в многокомпонентной среде, могут привести к изменению агрегатного состояния одного или нескольких компонентов. Это явление называется тиксотропией. При этом изменяется характер взаимодействия компонентов. В технике встречается настолько большое количество многокомпонентных сред, что дать их полную классификацию очень трудно.

Процессы внутри многокомпонентных сред возникают при любых видах воздействий: механических, тепловых, радиационных, химических, комбинированных. Воздействия приводят к взаимным перемещениям компонентов (перемешиванию или сепарации), к нагреванию и деформациям компонентов, к фазовым переходам и т.о. к смене типа многокомпонентной среды, к химическим реакциям в компонентах.

Если давление  $P_i$  (где  $i$  – номер компонента), температуры  $T_i$  и скорости  $U_i$  для всех компонентов одинаковы, то смесь называется равновесной. В противном случае многокомпонентная среда неравновесна. Каждый вид неравновесности (механическое при  $p_i \neq p_j$ , тепловое при  $T_i \neq T_j$ , кинематическое при  $U_i \neq U_j$ ) порождает соответствующий релаксационный процесс, приводящий к уменьшению разницы между неравновесными величинами. Времена релаксации  $\tau^U, \tau^P, \tau^T$  зависят от свойств взаимодействующих компонентов.

Модели многокомпонентных сред интенсивно развиваются. Это вызвано потребностями очень многих областей человеческой деятельности:

– В энергетике. Моделирование процессов в существующих энергетических установках (тепловые, атомные, гидроэлектростанции), с целью повышения их эффективности и долговечности и создание новых источников энергии (лазерный, газодинамический, магнитный “термояд”).

– В добывающей промышленности. Моделирование процессов фильтрации нефти, газа, воды через пористый грунт с целью интенсификации добычи.

– При тушении лесных пожаров. Стволы деревьев, ветки, листва, кустарник, кислород и азот воздуха, вода являются типичными компонентами многокомпонентной среды, по которой распространяется пожар. Моделирование этих процессов может позволить повысить эффективность методов тушения лесных пожаров.

– Плавление металлов. Моделирование процесса плавки, когда разные компоненты шихты плавятся при разных температурах может повысить чистоту продукта и снизить энергозатраты.

– Горение топлива в рабочих камерах как двигателей внутреннего сгорания, так и в ракетных двигателях.

– Плазма в магнитных полях. Каждый сорт ионов и электроны – это компоненты многокомпонентной среды – плазмы. Каждый компонент имеет свою скорость и по-своему взаимодействует с магнитным полем.

– Взрывы запыленных газов в шахтах.

– Химические технологии разделения или образования новых продуктов.

– Разлет продуктов разрыва. Например, продукты взрыва гексогена состоят из полутора десятка компонентов. Свойства каждого из них определяются индивидуальными уравнениями состояния.

– Сепарация, разделение компонентов на центрифугах.

– Нанесение защитных покрытий путем напыления порошков металлов или других веществ двухкомпонентными газовыми струями.

– Эрозия поверхности летательных аппаратов при движении в запыленной атмосфере.

– Движение крови в кровеносных сосудах живых организмов.

Приведенный список является далеко не полным. Но уже из него видно, что потребности в моделях многокомпонентных сред очень велики и их применение может дать существенный эффект.

Математические модели сплошных сред, широко применяемые для решения различных задач физики, химии и технологии, содержат, как правило, упрощающие гипотезы и эмпирические параметры. Это позволило разделить единую науку – механику сплошной среды на направления, в каждом из которых для отыскания решений формулируются дополнительные упрощающие гипотезы и применяются оригинальные методы. Несмотря на то, что такой подход оказался эффективным для построения аналитических решений, применение основанных на упрощающих гипотезах математических моделей механики сплошных сред для математического моделирования сложных динамических процессов не позволяет в полной мере использовать возможности современной вычислительной техники. В силу того, что физический эксперимент все чаще стал заменяться математическим, успехи в этом направлении невозможны без создания математических моделей нового поколения, учитывающих неоднородность и реальные свойства веществ.

Теоретическое описание неоднородных по физическому или химическому составу потоков, независимо от того, будет ли поток гомогенным или гетерогенным, требует принятия основного допущения о *сплошности* всех совместно движущихся совокупностей частиц, как

отдельных составляющих, так и смеси их в целом. Аналогично тому, как это принимается в механике однородной сплошной среды, следует допустить, что в элементарном объеме смеси, так же, как и в элементарных объемах составляющих, несмотря на малость этих объемов, содержится *достаточно большое число* частиц, для того чтобы можно было в допустимом приближении применять *статистическое осреднение* физических параметров этих частиц по их множеству.

В случае гомогенной *газовой* смеси такого рода осреднение оправдывается давно уже строго установленными методами кинетической теории газов. В случае же движений *жидкостей*, а также *гетерогенных* сред приходится пользоваться различными методами осреднения, как-то отражающими имеющиеся представления о внутреннем механизме движущейся среды.

Наиболее полными и перспективными являются математические модели, основанные на гипотезе взаимопроникающих взаимодействующих континуумов. *Многоскоростной континуум* представляет собой совокупность  $N$  континуумов, каждый из которых относится к своей составляющей (фазе или компоненте) смеси и заполняет один и тот же объем, занятый смесью.

В классе этих математических моделей есть простые и более сложные. Сложность математических моделей зависит от сделанных упрощений. Из-за сложности математической модели в процессе упрощения при переходе от общей математической модели к частной могут возникать физические противоречия такие как, на пример, не инвариантность относительно преобразования Галилея.

В настоящее время теория математических моделей механики многокомпонентных сред активно развивается. С помощью изучения и применения упрощенных математических моделей идет накопление информации и опыта решения задач механики многокомпонентных сред. Продолжают сосуществовать диффузионные модели и математические модели, основанные на теории взаимопроникающих взаимодействующих континуумов. Математические модели, основанные на теории взаимопроникающих взаимодействующих континуумов, являются не замкнутыми. Для замыкания их требуются дополнительные соотношения, определяющие взаимодействие компонентов и фаз.

Рассмотрим элемент смеси, имеющий объем  $d\theta$  и массу  $dM$ . По определению плотность смеси равна

$$\rho = \frac{dM}{d\theta} \quad (3.106)$$

Смесь в объеме  $d\theta$  состоит из компонентов. Каждый из них занимает объем  $d\theta_i$  и имеет  $dM_i$ . По определению физическая плотность  $i$ -го

компонента равна

$$\rho_i = \frac{dM_i}{d\theta_i} \quad (3.107)$$

Объем и масса смеси складываются из объемов и масс компонентов

$$dM = \sum_{i=1}^N dM_i \quad (3.108)$$

$$d\theta = \sum_{i=1}^N d\theta_i \quad (3.109)$$

Уравнения (3.108), (3.109) определяют объемную и массовую концентрации  $i$ -го компонента

$$\alpha_i = \frac{d\theta_i}{d\theta} \quad , \quad \eta_i = \frac{dM_i}{dM} \quad (3.110)$$

Из равенств (3.108) - (3.110) следует, что

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \quad \sum_{i=1}^N \eta_i = 1 \quad (3.111)$$

Будем считать, что каждый компонент в своем объеме  $d\theta_i$  характеризуется физическими величинами  $P_i$  – давление,  $\rho_i$  – плотность,  $T_i$  – температура,  $E_i$  – удельная внутренняя энергия,  $S_i$  – энтропия,  $S_{ikl}$  – компоненты девиатора тензора напряжений,  $U_i$  – скорость и т.д. Термодинамические величины  $P_i$ ,  $\rho_i$ ,  $T_i$ ,  $E_i$ ,  $S_i$  связаны уравнением состояний. В объеме смеси  $d\theta$  каждый компонент характеризуется парциальными величинами  $\alpha_i P_i$ ,  $\alpha_i \rho_i$ ,  $\eta_i U_i$ ,  $\eta_i E_i$  и др., которые получаются из физических величин умножением на  $\alpha_i$  или  $\eta_i$ . В соответствии с принятым определением парциальных величин они непрерывны в объеме смеси  $d\theta$ . Непрерывность парциальных величин позволяет написать для них законы сохранения в частных производных. Такой подход означает, что в каждой точке пространства одновременно находятся все  $N$  компонентов.

Получим уравнение, выражающее плотность смеси  $\rho$  через парциальные плотности компонентов  $\alpha_i \rho_i$ . Для этого подставим (3.106) и (3.107) в (3.108). В результате получим

$$\rho d\theta = \sum_{i=1}^N \rho_i d\theta_i \quad (3.112)$$

После в равенство (3.112) значения  $d\theta_i$  из равенства (3.110) и сокращения на величину  $d\theta \neq 0$  получаем, что плотность смеси равна сумме парциальных плотностей отдельных компонентов

$$\rho = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i . \quad (3.113)$$

Из уравнений (3.106), (3.107) и (3.111) следует уравнение, выражающее парциальную плотность  $i$ -го компонента через плотность смеси

$$\alpha_i \rho_i = \rho \eta_i . \quad (3.114)$$

При  $t=const$  кроме законов сохранения масс (3.108) и объемов (3.109) запишем закон сохранения движения и энергии

$$d\bar{K} = \sum_{i=1}^N d\bar{K}_i , \quad (3.115)$$

$$dQ = \sum_{i=1}^N dQ_i . \quad (3.116)$$

По определению

$$d\bar{K} = \bar{U} dM , \quad d\bar{K}_i = \bar{U}_i dM_i \quad (3.117)$$

А из равенств (3.111), (3.115) и (3.117) следует выражение для скорости смеси

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^N \eta_i \bar{U}_i . \quad (3.118)$$

Скорость смеси, определяемая уравнением (3.116), называется **барицентрической**. Поскольку время  $t$  заморожено, то переходы энергии из одного вида в другой отсутствуют. Поэтому уравнение (3.116) можно применить как у удельной внутренней энергии  $E$ , так и к удельной полной энергии  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N \eta_i \varepsilon_i . \quad (3.119)$$

$$E = \sum_{i=1}^N \eta_i E_i . \quad (3.120)$$

Каждый компонент имеет уравнение состояния, а смесь не имеет уравнения состояния. Тем не менее, удельную и внутреннюю энергию  $E(V,S)$ , как и  $E_i(V_i, S_i)$ , можно рассматривать как термодинамические потенциалы

$$dE = \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_S dV + \left( \frac{\partial E}{\partial S} \right)_V dS, \quad (3.121)$$



$$dE_i = \left( \frac{\partial E_i}{\partial V} \right)_{S_i} dV + \left( \frac{\partial E_i}{\partial S_i} \right)_{V_i} dS_i. \quad (3.122)$$

По определению

$$P = - \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_S, \quad P_i = - \left( \frac{\partial E_i}{\partial V} \right)_{S_i}. \quad (3.123)$$

По аналогии с термодинамикой будем рассматривать изэнтропический процесс при постоянных массовых и объемных концентрациях. Тогда равенства (3.120) и (3.122) примут следующий вид

$$dE = -PdV, \quad dE_i = -P_i dV_i. \quad (3.124)$$

Продифференцируем равенство (3.120) при  $\eta_i = \text{const}$  и в полученное уравнение подставим (3.124). В результате получим

$$PdV = \sum_{i=1}^N \eta_i P_i V_i. \quad (3.125)$$

Но при  $\eta_i = \text{const}$ ,  $\alpha_i = \text{const}$  из соотношения (3.113) следует следующее уравнение

$$\eta_i dV_i = \alpha_i dV. \quad (3.126)$$

Подставив (3.126) в (3.125) и сократив на  $dV \neq 0$ , получим, что давление смеси равно сумме парциальных давлений компонентов

$$P = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i. \quad (3.127)$$

Это уравнение было получено Дальтоном для смеси идеальных газов, находящихся в тепловом равновесии, и известно, как закон Дальтона.

Далее для простоты изложения будем рассматривать адиабатическое ядро системы законов сохранения  $i$ -го компонента с нулевым дивергентом тензора напряжений, без теплопроводности, без химических реакций и без воздействия полей излучения. При необходимости физические процессы (вязкость, упругость, пластичность, сухое трение, теплопроводность и др.) добавляются в законы сохранения – уравнения адиабатического ядра.

С учетом сказанного выше, законы сохранения массы, количества движения и энергии  $i$ -го компонента запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_i \rho_i) + \nabla (\alpha_i \rho_i \bar{U}_i) = 0, \quad (3.128)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_i \rho_i \bar{U}_i) + \Delta \alpha_i P_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\alpha_i \rho_i \bar{U}_i U_{ki} + \alpha_i \bar{F}_{ksi}) - \alpha_i \bar{R}_{si} = 0, \quad (3.129)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i \varepsilon_i) + \nabla(\alpha_i U_i (P_i + \rho_i \varepsilon_i)) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\alpha_i \bar{F}_{ksi} \bar{U}_i) + \\ + \nabla(\alpha_i \bar{Q}_{si}) - \alpha_i A_i - \alpha_i \Phi_{si} = 0, \quad (3.130)$$

$$\varepsilon_i = E_i + 0,5 U_i^2, \quad P_i = P_i(p_i, E_i) \quad (3.131)$$

Вектор  $\bar{R}_{si}$  описывает сумму парных обменов количеством движения  $i$ -го компонента со всеми остальными компонентами,  $A_{si}$  – работа вектора  $\bar{R}_{si}$ , функция  $\Phi_{si}$  описывает сумму парных обменов энергией  $i$ -го компонента со всеми остальными компонентами смеси, тензор  $\bar{F}_{si}$  описывает воздействие смеси на  $i$ -ый компонент в результате кластерного взаимодействия (вектор  $\bar{F}_{ksi}$  образован элементами  $k$ -й строки ( $k=1,2,3$ ) тензора  $\bar{F}_{si}$ ),  $\bar{Q}_{si}$  описывает поток энергии со стороны смеси к  $i$ -му компоненту в результате кластерного взаимодействия.

Система уравнений (3.128) – (3.131) не является замкнутой, поскольку к физическим величинам  $P_i$ ,  $\rho_i$ ,  $E_i$ ,  $\varepsilon_i$ ,  $\bar{U}_i$  добавилась еще объемная концентрация  $\alpha_i$ .

### 3.15. Парное взаимодействие компонентов

Предполагается, что два компонента с номерами  $i$  и  $j$  взаимодействуют друг с другом независимо от остальных компонентов. Интенсивность потока количества движения определяются вектором  $\bar{R}_{ij}$ , который, как правило, имеет вид

$$\bar{R}_{ji} = a_{ij}(\bar{U}_j - \bar{U}_i). \quad (3.132)$$

Порядок индексов указывает направление действия. Вектор  $\bar{R}_{ji}$  действует со стороны  $j$ -го компонента на  $i$ -й. Функция  $a_{ij}$  удовлетворяет условиям Онзагера  $a_{ij} = a_{ji}$ . Интенсивность обмена энергией определяется функцией

$$\Phi_{ij} = b_{ij}(P_j - P_i) - c_{ij}(T_j - T_i), \quad (3.133)$$

где  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  также удовлетворяют условиям взаимности Онзагера

$$b_{ij} = b_{ji}, \quad c_{ij} = c_{ji}. \quad (3.134)$$

Вектор  $\bar{R}_{ji}$  и функция  $\Phi_{ij}$  отличны от нуля только в том случае отсутствия равновесия при  $\bar{U}_j \neq \bar{U}_i$ ,  $P_j \neq P_i$  или  $T_j \neq T_i$ . В равновесной смеси  $\bar{R}_{ji} = 0$ ,  $\Phi_{ji} = 0$ . Следствием условий Онзагера является равенство нулю суммы членов с разным порядком индексов

$$\bar{R}_{ij} + \bar{R}_{ji} = 0, \quad \Phi_{ij} + \Phi_{ji} = 0. \quad (3.135)$$

Условия (3.135) являются важной особенностью парных взаимодействий. Полное действие всех компонентов на  $i$ -й компонент получается суммированием по  $j$

$$\bar{R}_{Si} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \bar{R}_{ji}, \quad \Phi_{Si} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_{ji}. \quad (3.136)$$

Из (3.136) следует еще одно свойство парных взаимодействий

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j \bar{R}_{ji} = 0, \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j \Phi_{ji} = 0. \quad (3.137)$$

Несколько слов следует сказать о выборе функций  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$ . Неравновесность по  $\bar{U}$ ,  $P$  и  $T$  порождает соответствующий релаксационный процесс. Время релаксации зависит от многих факторов. Так, например, время релаксации скоростей  $\tau_{ij}^U$  зависит от размеров и формы частиц взаимодействующих компонентов, их адгезионных характеристик, шероховатости частиц и т.д. Функционально  $\tau_{ij}^U$  зависит от большого числа факторов. Теоретически обосновать эти зависимости трудно. Как правило, для выбора  $\tau_{ij}^U$  привлекаются результаты экспериментов. Поскольку размерность  $\dim \alpha_{ij} = \rho/t$ , то с учетом условий Онзагера наиболее простое выражение для  $\alpha_{ij}$  можно принять таким

$$\alpha_{ij} = \frac{\rho_i \rho_j (\alpha_i + \alpha_j)}{(\alpha_i \rho_i + \alpha_j \rho_j) \tau_{ij}^U}, \quad (3.138)$$

Аналогичные рассуждения приводят к следующим выражениям для  $b_{ij}$  и  $c_{ij}$

$$b_{ij} = \frac{\tau}{\tau_{ij}^P}, \quad c_{ij} = \frac{\rho_i \rho_j C_{Vi} C_{Vj} (\eta_i + \eta_j) (\alpha_i + \alpha_j)}{(\eta_i C_{Vi} + \eta_j C_{Vj}) (\alpha_i \rho_i + \alpha_j \rho_j) \tau_{ij}^T}, \quad (3.139)$$

где  $C_V$  - теплоемкость при постоянном удельном объеме  $V$ . Для определения времен релаксации  $\tau_{ij}^P$ ,  $\tau_{ij}^T$  чаще всего строят изолированную ячейку из компонентов  $i$  и  $j$ , в которой происходит установление равновесия.

### 3.16. Кластерное взаимодействие компонентов

Одновременно с парным взаимодействием в законы сохранения вводятся члены, выражающие кластерное взаимодействие  $i$ -го компонента со смесью. Эти члены отличны от нуля только в случае отсутствия равновесия по скоростям. Поскольку скорости компонентов направлены произвольно, то сила их взаимодействия должна зависеть от ориентации выбранной площадки, т.е. быть тензором. Условия кластерного взаимодействия имеют вид

$$\bar{F}_S = \sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{F}_{iS} = - \sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{F}_{Si}, \quad \bar{Q}_S = \sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{Q}_{Si} = - \sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{Q}_{Si} \quad (3.140)$$

Для ранее введенных характеристик смеси  $P$ ,  $\rho$ ,  $E$ ,  $\bar{U}$ ,  $\varepsilon$  законы сохранения сплошной среды имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{U}) = 0, \quad (3.141)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{U}) + \nabla P + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho \bar{U} U_{ki} + \bar{F}_{kS}) = 0, \quad (3.142)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \nabla(\bar{U}(P + \rho \varepsilon)) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{U} \bar{F}_{kS}) + \nabla \bar{Q}_S = 0. \quad (3.143)$$

В рамках принятых ранее гипотез уравнение состояния смеси не существует. Тензор  $F_S$  и поток энергии  $Q_S$  действуют на смесь со стороны всех компонентов. Для выбора их функциональной зависимости от остальных функций, входящих в уравнения (37)–(39), сформулируем два требования:

1. Уравнения (3.141)–(3.143) должны получаться путем суммирования по  $i$  соответствующих законов сохранения  $i$ -го компонента (3.128)–(3.130).
2. Уравнения (3.128)–(3.130) и (3.141)–(3.143) должны быть инвариантны к преобразованию Галилея.

После выполнения приведенных выше требований для  $\bar{F}_{kS}$  и  $\bar{Q}_S$  могут быть получены следующие выражения

$$\bar{F}_{kS} = -0,5\rho_i(\bar{U}_i - \bar{U})(U_{ki} - U_k), \quad (3.144)$$

$$\bar{Q}_{Si} = 0,5\rho_i(\bar{U} - \bar{U}_i)(P_i + \rho E_i). \quad (3.145)$$

Выражения (3.144), (3.145) являются замыкающими для системы законов сохранения массы, количества движения и энергии для компонентов смеси.

### 3.17. Уравнения для объемной концентрации компонентов

Из законов сохранения  $i$ -го компонента (3.128)–(3.130) с помощью тождественных преобразований получим уравнение для производства энтропии  $i$ -го компонента

$$\alpha_i \rho_i T_i \frac{d_i S_i}{dt} - P_i \frac{d_i \alpha_i}{dt} + \alpha_i (\bar{R}_{Si} \bar{U}_i - A_{Si} - \Phi_{Si}) +$$

$$+\alpha_i \sum_{k=1}^3 \left( \bar{F}_{ksi} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \right) + \nabla \alpha_i \bar{Q}_{si} = 0. \quad (3.146)$$

Это уравнение содержит субстациональную производную  $i$ -го компонента, которая для производной функции  $f$  имеет вид

$$\frac{d_i f}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + U_i \nabla f \quad (3.147)$$

Совершенно аналогично уравнение производства энтропии смеси получим из (3.141)–(3.143) в следующем виде

$$\rho T \frac{dS}{dt} + \frac{\partial \rho H}{\partial t} + \nabla(\rho H \bar{U}) + \sum_{k=1}^3 \left( \bar{F}_{ks} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x_k} \right) + \nabla \bar{Q}_s = 0, \quad (3.148)$$

где

$$\rho H = 0,5 \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i (\bar{U} - \bar{U}_i)^2. \quad (3.149)$$

Субстациональная производная вдоль траектории смеси связана с субстациональной производной  $i$ -го компонента уравнением

$$\frac{df}{dt} = \frac{d_i f}{dt} + (\bar{U}_i - \bar{U}) \nabla f \quad (3.150)$$

Потребуем, чтобы производство энтропии смеси было равно суммарному производству энтропии компонентов

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i T_i \frac{dS_i}{dt}. \quad (3.151)$$

Подставив сюда выражения для производства энтропии (3.146) и (3.148) с учетом связи субстациональных производных (3.150) получим уравнение для объемной концентрации

$$P_i \frac{d_i \alpha_i}{dt} - \left( \frac{P_i}{\rho_i} + E_i \right) \nabla(\alpha_i \rho_i (\bar{U}_i - \bar{U})) + \alpha_i (\Phi_{si} + A_{si} - \bar{R}_{si} \bar{U}_i) = 0. \quad (3.152)$$

Это уравнение замыкает систему законов сохранения  $i$ -го компонента.

Изложенная в этой главе модель многокомпонентной среды основана на новой кластерной форме взаимодействия компонентов, которая порождает тензор взаимодействий и потоки энергии. Модель позволяет описать едиными уравнениями множество физических процессов в многокомпонентных средах и повысить точность прогнозирования их поведения.

### Задачи к главе 3

3.1. В некоторой точке тела в декартовой ортогональной системе координат тензор напряжений задан своими компонентами (в паскалях):

$$(p^{ij}) = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 160 \\ 100 & 0 & -150 \\ 160 & -150 & -60 \end{pmatrix}.$$

Для площадки с нормалью  $n_1 = \frac{1}{2}$ ,  $n_2 = \frac{1}{2}$ ,  $n_3 = 1/\sqrt{2}$ , найти компоненты вектора  $\mathbf{p}_n$ , а также величины касательного  $p_{nt}$  и нормального  $p_{nn}$  напряжений. Найти угол  $\theta$  между векторами  $\mathbf{p}_n$  и  $\mathbf{n}$ .

3.2. В точке  $M$  в декартовой системе координат компоненты тензора напряжений заданы матрицей

$$(p^{ij}) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определить вектор напряжений  $\mathbf{p}_n$  на площадке с нормалью

$$\mathbf{n} = \frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

3.3. Векторы напряжений  $\mathbf{p}_n$  и  $\mathbf{p}_{n1}$  действуют в точке  $M$  на площадках с нормальными  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{n}_1$ . Показать, что если тензор напряжений симметричен, то выполнено равенство  $\mathbf{p}_{nn1} = \mathbf{p}_{n1n}$ .

3.4. Главной системой координат для тензора  $\mathbf{P}$  называют декартову ортогональную систему координат, в которой

$$p_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Его компоненты

$$p_{11} = p_1, \quad p_{22} = p_2, \quad p_{33} = p_3$$

в этой системе координат называют главными компонентами, оси главной системы координат – главными осями тензора  $\mathbf{P}$ . Показать, что на площадках, перпендикулярных главным осям тензора напряжений, векторы напряжений направлены по нормали.

3.5. В декартовой системе координат компоненты тензора напряжений в точке  $M$  таковы:

$$p_{11} = 12, \quad p_{12} = p_{13}, \quad p_{23} = 8, \quad p_{22} = p_{33} = 0.$$

- Определить главные компоненты и главные оси тензора напряжений.
- Разложить тензор напряжений на сумму шарового тензора и девиатора.

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ И ОТВЕТЫ

2.1. Поле скорости:

$$u = a\xi_2, \quad v = b\xi_1, \quad w = 0,$$

Поле ускорения

$$a_1 = a_2 = a_3.$$

В точке пространства с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$  в момент времени  $t_0$  находится материальная точка, имеющая лагранжевы координаты

$$\xi_1 = \frac{x_0 - at_0 y}{(1 - abt_0^2)}, \quad \xi_2 = \frac{y_0 - bt_0 x}{(1 - abt_0^2)}, \quad \xi_3 = z.$$

2.2. а). Поле скорости:

$$u = \xi_1/\tau, \quad v = 2\xi_2/\tau, \quad w = 2\xi_3 t/\tau^2,$$

поле ускорения:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad w = 2\xi_3/\tau^2$$

б). Частица находится в точке с координатами  $(2a, 7b/3, 5c)$ .

2.3. В эйлеровом описании поля скорости  $V$  и ускорения  $a$  имеют следующий вид (точка обозначает производную по времени):

$$v_i = \dot{a} \frac{x_i}{a}, \quad a_i = \ddot{a} \frac{x_i}{a}, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$v_1 = \dot{b} x_2, \quad v_2 = v_3 = 0, \quad a_1 = \ddot{b} x_2, \quad a_2 = a_3 = 0.$$

2.4. Закон движения имеет следующий вид:

$$x = \xi_1/(1 + t/\tau), \quad y = \xi_2/(1 + t^2/\tau^2), \quad z = \xi_3/(1 + t^3/\tau^3),$$

где в качестве лагранжевых координат введены координаты положения индивидуальной частицы в момент времени  $t = 0$ .

2.5. а). Нельзя: для каждой частицы известна кривая, по которой она движется, однако это движение может происходить с разной по величине скоростью.

б). Нельзя: в каждой точке известна прямая, вдоль которой направлена скорость, но величина ее может быть разной.

2.6. а). Могут. б). Могут.

2.7. 0.

2.8. Эти материальные элементы переместились параллельно самим себе. Относительное удлинение элемента, направленного вдоль оси  $x$ , равно  $a$ ;  $a$  элементов, перпендикулярных оси  $x$  равно 0. При  $a > 0$  происходит растяжение  $-1 < a < 0$  - сжатие материальных элементов.

2.9. Относительное изменение объема равно  $a$ .

2.10. Отрезки, первоначально параллельные оси  $z$ , переместились параллельно себе без удлинения; отрезки, параллельные оси  $y$ , переносятся без удлинения и поворачиваются на угол вокруг оси  $\pi/2$ ; отрезки, параллельные оси  $x$ , поворачиваются таким же образом и удлиняются в  $(1+b)$  раз.

2.11. В случае  $a > 1$  происходит растяжение, при  $a < 1$  - сжатие.

2.12. Тензор деформаций Грина определяется соотношением

$$\varepsilon = \frac{a}{2}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) + \frac{a^2}{2}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2,$$

его главные значения и соответствующие главные оси суть

$$\lambda_{1,2} = \frac{a^2}{4} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^4}{16}}, \quad \lambda_3 = 0, \quad \mathbf{e}_1 + \frac{2}{a}\lambda_{1,2}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3.$$

Тензор Альманси определяется соотношением вида:

$$\varepsilon = \frac{a}{2}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) - \frac{a^2}{2}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2,$$

его главные значения и соответствующие главные оси суть

$$\lambda_{1,2} = \frac{a^2}{4} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^4}{16}}, \quad \lambda_3 = 0, \quad \mathbf{e}_1 + \frac{2}{a}\lambda_{1,2}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3.$$

2.13. а). Относительное удлинение всех материальных элементов, параллельных в начальном состоянии оси  $x$  или оси  $z$  равны нулю, а параллельных оси  $y$  отличны от нуля:

$$l_2 = \sqrt{1 + a^2} - 1.$$

б). Это материальные элементы, расположенные в момент времени  $t$  в плоскости  $y = const$  или в плоскости  $x - ay/2 = const$ .

2.14. 0.

2.15. Компоненты тензоров деформаций Грина и Альманси в базисе  $\mathbf{e}_i$  образуют соответственно матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ \frac{b}{2} & \frac{b^2}{2} & \frac{b}{2} \\ 0 & \frac{b}{2} & \frac{b^2}{2} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{2} & -\frac{b^2}{2} \\ \frac{b}{2} & -\frac{b^2}{2} & \frac{b(1+b^2)}{2} \\ -\frac{b^2}{2} & \frac{b(1+b^2)}{2} & -\frac{b^2(1+b^2)}{2} \end{pmatrix}$$

2.16. Поле перемещений имеет следующий вид:



$$w(x, t) = b(y - bz)\mathbf{e}_1 + bz\mathbf{e}_2,$$

тензор малых деформаций

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{b}{2}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2).$$

2.17. Необходимо сравнить главные значения тензоров деформаций, которые не изменяются при совершении дополнительного поворота или переноса.

$$3.1. p_n^1 \approx 213 \text{ Па}, p_n^2 \approx -56 \text{ Па}, p_n^3 \approx -32 \text{ Па}, |\mathbf{p}_n| \approx 223 \text{ Па},$$

$$p_{nn} \approx 56 \text{ Па}, p_{n\tau} \approx 216 \text{ Па}, \cos \theta = p_{nn} / |\mathbf{p}_n| \approx 0.25, \theta \approx 75^\circ.$$

$$3.2. \mathbf{p}_n = -\frac{10}{3}\mathbf{j} + \frac{4}{3}\mathbf{k}.$$

3.3. Запишем выражения  $p_{nn_1}$  и  $p_{n_1n}$  через тензор напряжений

$$p_{nn_1} = p^{ij}n_jn_{1i}, p_{n_1n} = p^{ij}n_{1j}n_i = p^{ji}n_{1i}n_j;$$

так как  $p^{ij} = p^{ji}$ , то  $p_{nn_1} = p_{n_1n}$ .

3.4. В главной системе координат для тензора напряжений, например, на площадке перпендикулярной оси  $x$ , по формуле Коши имеем:

$$p_{n1} = p_{11}, p_{n2} = p_{21} = 0, p_{n3} = p_{31} = 0.$$

3.5. а). Главные компоненты тензора напряжений таковы:

$$p_1 = -8, p_2 = 4, p_3 = 16.$$

Направляющие косинусы главных осей тензора напряжений следующие:

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

б). Для заданного тензора напряжений компоненты шарового тензора и дивергатора следующие:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} -8 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 8 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1. М.: Наука, 1994.
2. Годунов С.К., Роменский Е.И. Элементы механики сплошной среды и законы сохранения. Новосибирск: Изд-во Научная книга, 1998.
3. Куропатенко В.Ф. Модели механики сплошных сред. Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2007.
4. Эглит М.Э. Лекции по основам механики сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 2008.
5. Яловец А.П. Механика сплошных сред для физиков: конспект лекций с вопросами и задачами. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2018.
6. Механика сплошных сред в задачах. Т.1. Теория и задачи. Под ред. Эглит М.Э. М.: Московский лицей, 1996.
7. Механика сплошных сред в задачах. Т.2. Ответы и решения. Под ред. Эглит М.Э. М.: Московский лицей, 1996.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	3
Глава 1. Атомы, молекулы и сплошная среда .....	
1.1. Агрегатные состояния вещества .....	8
1.2. Атомы и молекулы .....	8
1.3. Связи микрочастиц .....	11
1.4. Сплошная среда .....	12
Глава 2. Кинематика сплошных сред .....	
2.1. Два метода изучения движений сплошной среды .....	15
2.2. Линии тока и траектории .....	17
2.3. Движения сплошной среды .....	19
2.4. Тензор поворотов и тензор скоростей поворотов .....	21
2.5. Тензор деформаций. Дисторсия .....	23
2.6. Главные оси тензора деформаций .....	26
2.7. Дилатация. Уравнение неразрывности .....	28
2.8. Условия совместности деформаций .....	31
2.9. Тензор скоростей деформаций .....	33
Задачи к главе 2 .....	34
Глава 3. Динамика сплошных сред .....	
3.1. Силы и напряжения .....	38
3.2. Главные напряжения .....	41
3.3. Касательные напряжения .....	46
3.4. Тензоры напряжений и скоростей деформации .....	49
3.5. Закон сохранения массы .....	51
3.6. Закон сохранения количества движения идеальной среды .....	52
3.7. Закон сохранения энергии идеальной среды .....	52
3.8. Законы сохранения в лагранжевых координатах .....	53
3.9. Следствия законов сохранения идеальной среды .....	55
3.10. Закон сохранения количества движения неидеальной среды .....	56
3.11. Закон сохранения энергии неидеальной среды .....	57
3.12. Законы сохранения идеальной среды для одномерных движений .....	59
3.13. Преобразование Галилея .....	63
3.14. Механика многокомпонентных и гетерогенных сред .....	66
3.15. Парное взаимодействие компонентов .....	73
3.16. Кластерное взаимодействие компонентов .....	74
3.17. Уравнения для объемной концентрации компонентов .....	75
Задачи к главе 3 .....	77
Решения задач и ответы .....	78
Библиографический список .....	81

*Учебное издание*

**Ковалев** Юрий Михайлович,  
**Куропатенко** Валентин Федорович

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ  
МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Учебное пособие

Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 05.11.2020. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 4,88. Тираж 50 экз. Заказ 336/57.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.  
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.