

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

Б. Л. ГЛУШАК
В. Ф. КУРОПАТЕНКО
С. А. НОВИКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук
В. М. Фомин



НОВОСИБИРСК
«НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1992

Исследование прочности материалов при динамических нагрузках/Б. Л. Глушак, В. Ф. Куропатенко, С. А. Новиков.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992.— 295 с.

ISBN 5—02—029691—0

В монографии систематизируются результаты исследования прочности твердых тел главным образом металлов, сжатых ударными волнами, и данные об их разрушении импульсными растягивающими напряжениями. Большое внимание уделяется вопросам создания и применения математических моделей поведения вещества под действием динамических нагрузок. Рассматриваются экспериментальные способы получения импульсных нагрузок и методы определения сдвиговой прочности и параметров разрушающих растягивающих импульсных напряжений.

Книга рассчитана на специалистов по механике сплошных сред, физике прочности твердого тела и вычислительной математике, а также аспирантов и студентов вузов.

Табл. 24. Ил. 73. Библиогр.: 322 назв.

Рецензенты

доктора физико-математических наук
В. Г. Баженов, В. М. Ковеня, Ю. Г. Коротких,
кандидат физико-математических наук *Г. А. Сапожников*

Утверждено к печати
Институтом теоретической и прикладной механики
СО РАН

Создание новой техники, разработка новых технологий, проектирование различных сооружений требуют все более точных знаний свойств применяемых конструкционных материалов. Для решения многих задач достаточно изучить свойства веществ в статических или квазистатических условиях, когда внешние нагрузки меняются медленно. Однако такие исследования не обеспечивают надежного прогнозирования поведения веществ в экстремальных условиях. Это делает необходимым определение свойств материалов в области динамических нагрузок. Последние в отличие от статических являются кратковременными и сопровождаются образованием ударных волн и волн разрежения, интерференция которых может приводить к локальному перегреву вещества, большим деформациям, изменению кристаллической структуры и другим необратимым эффектам.

Поведение конструкционных материалов при высокоскоростном деформировании интенсивно изучается в СССР и за рубежом примерно с 50-х годов. За время, прошедшее после выхода в свет известной монографии Дж. С. Райнхарта и Дж. Пирсона «Поведение металлов при импульсных нагрузках» (1958 г.), неизмеримо расширилось понимание физических процессов, происходящих в твердых телах при воздействии на них ударных волн и волн разрежения, которое является основным экспериментальным способом реализации условий высокоскоростного деформирования.

Среди свойств материалов, проявляющихся при динамических нагрузках, экспериментально наиболее полно и последовательно изучена сжимаемость на ударных волнах. Ударные адиабаты экспериментально определены для большинства элементов периодической системы Менделеева, а также для многих химических соединений в широкой области изменения их термодинамических параметров. Большое количество экспериментов проведено с целью изучения области состояний, в которой вещества в процессе динамического нагружения и последующей разгрузки остаются в твердой фазе. В этой области в полной мере проявляется тензорный характер напряжений и деформаций материала. На фронте ударной волны в металлах область твердого тела охватывает широкий диапазон напряжений от нормального состояния до $\sim 10^2$ ГПа.

Малые времена действия растягивающих напряжений амплитудой несколько гигапаскалей реализуются при взаимодействии

встречных волн разрежения, в результате чего твердое тело может разрушиться. Такое разрушение называется откольным. Непосредственная регистрация экспериментальным путем изменения импульса растяжения, действующего в зоне возникновения и развития процесса откольного разрушения, не представляется возможной. Информацию об откольном разрушении получают в основном двумя методами: металлографическим анализом образцов, подвергнутых воздействию растягивающего напряжения, и последующим сопоставлением характера и степени повреждений с параметрами нагрузки; регистрацией скорости движения свободной поверхности плоского образца.

Бóльшие возможности имеются при экспериментальном изучении упругой и пластической деформации, порождаемой ударно-волновым нагружением материалов и последующей упругопластической волной разрежения. Сопротивление пластической деформации исследуется экспериментально регистрацией профиля волны нагрузки в твердом теле или измерением эффекта негидродинамического затухания ударной волны. В последние годы интенсивно развиваются самосогласованные методы одновременной регистрации нескольких физических характеристик материала, например метод регистрации главных напряжений. Следует особо подчеркнуть, что в отличие от применяемых в начале 60-х годов современные методы дают возможность регистрировать непрерывные зависимости изучаемых величин от времени, что резко повышает информативность экспериментальной информации.

Усилиями отечественных и зарубежных исследователей накоплен обширный запас опытных данных о свойствах веществ в экстремальных условиях нагружения. Их анализ позволил выявить ряд закономерностей поведения материалов в условиях высокоскоростного деформирования и одновременно установить, что реакция твердых тел на импульсное нагружение носит сложный, сугубо индивидуальный характер. Поэтому стало очевидным, что с помощью только экспериментальных методов вряд ли возможно исследовать свойства вещества в достаточно широкой области изменения параметров, характеризующих его состояние.

В связи с прогрессом в области электронных вычислительных машин (ЭВМ) резко возросла роль математического моделирования как средства изучения различных явлений и процессов, в том числе и динамических процессов в твердых телах. Проведение численных экспериментов на современных ЭВМ и сопоставление их результатов с результатами физических экспериментов составило основу дальнейшего исследования свойств материалов. Уже первые результаты сравнения расчетных и экспериментальных данных показали, что простейшие математические модели сплошной среды не дают адекватного описания наблюдаемых в опыте явлений. Потребовалось совершенствование моделей, углубление и обогащение их физического содержания. Современные математические модели, созданные с использованием обширной экспериментальной информации, позволяют не только описывать уже известные факты, но и

прогнозировать поведение вещества в таких условиях, когда измерения затруднены, а иногда вообще невозможны.

Метод исследования свойств веществ, когда физический эксперимент и математическое моделирование применяются совместно, дополняя друг друга, может быть назван расчетно-экспериментальным. Анализ совместной деятельности экспериментаторов и специалистов по математическому моделированию поведения вещества в разнообразных условиях и процессах позволяет сформулировать основные положения этого метода следующим образом. Свойства вещества исследуются экспериментально с максимально возможной точностью в доступной для этого области изменения его характеристик. Все полученные данные делятся на две группы: информационную и контрольную. Первая используется для выбора численных значений параметров математической модели. Контрольная группа данных применяется уже для верификации математической модели. При этом расчеты проводятся при фиксированных значениях параметров модели, выбранных на первом этапе. Если результаты расчетов удовлетворительно совпадают с опытными данными второй группы, модель рекомендуется для использования. В противном случае она нуждается в совершенствовании.

Следует подчеркнуть, что в расчетах должны быть учтены все особенности экспериментальных устройств, поведение датчиков информации и особенности применения измерительных методик.

Ценность метода возрастает, если математическая модель будет пригодна не только в области изменения характеристик, представляющей сиюминутный интерес, но и в более широкой. Для этого математическая модель должна обладать достаточным физическим содержанием, что повышает надежность прогнозирования свойств вещества вне экспериментально исследованной области.

В настоящей монографии обсуждаются различные аспекты создания и применения расчетно-экспериментального метода для описания поведения металлов в условиях динамических нагрузок. Вначале даются общие сведения о свойствах сплошной среды, формулируются уравнения движения и деформации среды и уравнения на сильных разрывах, а также описываются модели уравнения состояния вещества. При изложении результатов экспериментальных исследований свойств материалов основное внимание уделяется откольному разрушению и сдвиговой прочности. Наконец, приводится конструктивная теория исследования свойств математических моделей разрушения и сопротивления металлов пластической деформации при импульсных нагрузках.

Из множества предложенных в разные годы математических моделей поведения металлов под действием импульсных нагрузок в книге рассмотрены лишь наиболее характерные. При этом нашли отражение два типа математических моделей: так называемые точные модели, включающие эволюционные уравнения развития процессов деформирования и разрушения, и инженерные модели, в которых откольная прочность и динамический предел текучести представляются функцией интегральных характеристик вещества.

Авторы стремились последовательно изложить не только обобщенные и систематизированные результаты исследования разрушения и пластической деформации материалов в ударных волнах и волнах разрежения, но и математические модели, пригодные для численных экспериментов. Это потребовало уделить внимание широкому кругу задач, решаемых на стадиях получения, обобщения и использования данных о свойствах материалов. Насколько удачно сочетается широта проблемы с глубиной изложения отдельных вопросов — судить читателю.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность Н. М. Жуковой за помощь в оформлении рукописи.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

§ 1. Изучаемая среда

Физические модели вещества можно разделить на две группы в зависимости от того, на каком уровне (микро- или макроскопическом) рассматриваются его свойства. Как правило, макромоделли предназначены для описания поведения тел, размеры которых не соизмеримы с размерами микрочастиц. Свойства вещества в таких моделях определяются термодинамическими величинами, характеризующими средние свойства достаточно представительного ансамбля микрочастиц. В основе макромоделей лежит гипотеза о непрерывном изменении характеристик вещества в пространстве \vec{x} , t , позволяющая записать законы сохранения массы, количества движения и энергии в виде дифференциальных уравнений в частных производных. Наличие разрывов в параметрах не противоречит гипотезе сплошности, ибо в случае разрыва законы сохранения остаются справедливыми, принимая вид условий на разрыве. Именно к этой группе моделей относятся модели механики сплошной среды.

Различные типы сплошных сред характеризуются различными силами взаимодействия между соседними частицами вещества. Эти силы действуют на некоторых площадках. Вектором плоской площадки Σ , ограниченной произвольным контуром с выбранным положительным направлением, называют вектор \vec{F} , модуль которого равен Σ , а направление выбрано перпендикулярно к Σ так, чтобы положительный обход контура от его конца казался идущим против часовой стрелки.

Из всех поверхностных сил выделим силу $\vec{\sigma}$, действующую всегда по нормали к произвольно ориентированной площадке \vec{F} . Условием параллельности векторов $\vec{\sigma}$ и \vec{F} является равенство нулю их векторного произведения $\vec{\sigma} \times \vec{F} = 0$. Приравняв нулю каждую из компонент этого векторного произведения, получим $\frac{\sigma_x}{F_x} = \frac{\sigma_y}{F_y} = \frac{\sigma_z}{F_z}$.

Обозначим это отношение через P . Тогда $\vec{\sigma} = P\vec{F}$, или, что то же самое, $P = \frac{|\vec{\sigma}|}{|\vec{F}|}$.

Сила, действующая по нормали к единичной площадке независимо от ее ориентации, называется давлением. Среда, в которой давление является единственной поверхностной силой, характеризующей взаимодействие между макрочастицами, называется иде-

альной. Если кроме давления в среде действуют поверхностные силы, направленные не по нормали к произвольно ориентированной площадке, то в таком случае среда называется не идеальной, а жидкой, отнесенные к единичным площадкам, — напряжениями. Совокупность всех напряжений определяется двумя векторами: вектором силы и вектором площадки. Вследствие этого напряженное состояние характеризуется симметричным тензором напряжений

$$T_{\sigma} = \|\sigma_{ij}\| = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}, \quad (1.1)$$

где σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} — нормальные к площадке, а τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} — касательные к площадке напряжения, лежащие одновременно на единичных площадках, перпендикулярных к осям координат x , y , z .

Движение частиц (или точек) в процессе деформирования твердого тела определяется полем скорости \vec{U} в пространстве x , t . Траектория некоторой точки с координатами x_0 , y_0 , z_0 в момент $t=0$ определяется при $t \geq t_0$ системой уравнений

$$\begin{aligned} x &= x(t, x_0, y_0, z_0), \\ y &= y(t, x_0, y_0, z_0), \\ z &= z(t, x_0, y_0, z_0). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Запишем систему уравнений (1.2) в дифференциалах

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial x}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial x}{\partial z_0} dz_0, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial y}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial y}{\partial z_0} dz_0, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial t} dt + \frac{\partial z}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial z}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial z}{\partial z_0} dz_0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Система уравнений (1.3) содержит 12 производных. Три из них при dt определяют компоненты вектора скорости

$$U_x = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad U_y = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad U_z = \frac{\partial z}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Остальные 9 производных образуют матрицу градиентов относительных смещений

$$X_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix}.$$

Матрица $\|X_{ij}\|$ описывает все относительные смещения, в том числе и повороты абсолютно твердого тела. Разложим эту матрицу на

симметричную $\|\varepsilon_{ij}\|$, которая называется тензором деформаций T_ε , и кососимметричную матрицу $\|\omega_{ij}\|$, которая называется тензором поворотов T_ω :

$$T_\varepsilon = \|\varepsilon_{ij}\| = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}, \quad (1.5)$$

$$T_\omega = \|\omega_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0 & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & \omega_{zy} & 0 \end{vmatrix},$$

где $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial x}{\partial x_0}$, $\varepsilon_{yy} = \frac{\partial y}{\partial y_0}$, $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial z}{\partial z_0}$. Потребуем, чтобы при вращении абсолютно твердого тела изменение объема (дилатация) и изменение формы (дисторсия) были равны нулю, а $\text{rot } x \neq 0$, где x — вектор с компонентами (1.2). Компоненты тензора T_ω будем считать пропорциональными компонентам вектора $\text{rot } x$. Поскольку их три, кососимметричный тензор T_ω полностью определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \omega_{xy} &= -\omega_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial y_0} - \frac{\partial y}{\partial x_0} \right), \\ \omega_{xz} &= -\omega_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial z_0} - \frac{\partial z}{\partial x_0} \right), \\ \omega_{yz} &= -\omega_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial z_0} - \frac{\partial z}{\partial y_0} \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из уравнения $\|X_{ij}\| = \|\varepsilon_{ij}\| + \|\omega_{ij}\|$ и из (1.6) следует

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{\partial y}{\partial x_0} \right), \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial z_0} + \frac{\partial z}{\partial x_0} \right), \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial z_0} + \frac{\partial z}{\partial y_0} \right). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Рассмотрим прямоугольный элемент абсолютно жесткого тела (рис. 1.4). Выразив синус угла поворота элемента относительно оси z_0 через приращения Δx , Δy и начальные размеры ребер прямоугольника Δx_0 , Δy_0 , получим

$$\sin \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x_0} = -\frac{\Delta x}{\Delta y_0}.$$

Запишем аналогичные соотношения для поворотов относительно осей x_0 , y_0 и перейдем к пределу при $\Delta x_0 \rightarrow 0$, $\Delta y_0 \rightarrow 0$, $\Delta z_0 \rightarrow 0$. В результате

$$\frac{\partial y}{\partial x_0} = -\frac{\partial x}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial y}{\partial z_0} = -\frac{\partial z}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_0} = -\frac{\partial x}{\partial z_0}. \quad (1.8)$$

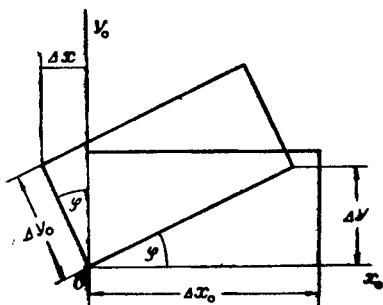


Рис. 1.1. Относительные смещения при повороте абсолютного твердого тела относительно оси z_0 .

Подстановка (1.8) в (1.6) и (1.7) дает

$$\begin{aligned}
 \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = 0, \\
 \omega_{xy} &= \frac{\partial x}{\partial y_0}, \quad \omega_{yz} = \frac{\partial y}{\partial z_0}, \quad \omega_{zx} = \frac{\partial z}{\partial x_0}, \\
 \omega_{yx} &= \frac{\partial y}{\partial x_0}, \quad \omega_{zy} = \frac{\partial z}{\partial y_0}, \quad \omega_{zx} = \frac{\partial z}{\partial x_0}.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Из (1.9) следует, что при повороте абсолютно твердого тела, в котором отсутствуют дилатация и дисторсия, тензор деформаций T_e равен нулю, а тензор вращений T_ω отличен от нуля. С другой стороны, из (1.7) вытекает, что при $\text{rot } \vec{x} = 0$ вращение отсутствует ($\omega_{xy} = \omega_{yz} = \omega_{zx} = 0$) и тензор T_ω равен нулю.

Три компоненты — ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} — тензора деформаций, стоящие по главной диагонали, называются деформациями сжатия (растяжения) или удлинениями. Три оставшиеся компоненты — γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} — тензора деформаций T_e называются деформациями сдвига.

При движении вдоль траектории (1.2) фиксированной частицы, находящейся при $t=0$ в точке с координатами x_0 , y_0 , z_0 , компоненты вектора скорости изменяются в соответствии с уравнениями

$$\begin{aligned}
 U_x &= U_x(t, x_0, y_0, z_0), \\
 U_y &= U_y(t, x_0, y_0, z_0), \\
 U_z &= U_z(t, x_0, y_0, z_0).
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Запишем систему (1.10) в дифференциалах

$$\begin{aligned}
 dU_x &= \frac{\partial U_x}{\partial t} dt + \frac{\partial U_x}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial U_x}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial U_x}{\partial z_0} dz_0, \\
 dU_y &= \frac{\partial U_y}{\partial t} dt + \frac{\partial U_y}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial U_y}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial U_y}{\partial z_0} dz_0, \\
 dU_z &= \frac{\partial U_z}{\partial t} dt + \frac{\partial U_z}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial U_z}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial U_z}{\partial z_0} dz_0.
 \end{aligned}$$

Три производные при dt определяют компоненты вектора ускорения, остальные 9 производных — матрицу градиентов скоростей относительных смещений. Представим эту матрицу в виде суммы симмет-

ричной матрицы $\|\xi_{ij}\|$, которая называется тензором скоростей деформаций T_{ξ} , и косимметричной матрицы $\|\psi_{ij}\|$, которая называется вектором вихря скорости

$$T_{\xi} = \|\xi_{ij}\| = \begin{vmatrix} \xi_{xx} & \eta_{yx} & \eta_{zx} \\ \eta_{xy} & \xi_{yy} & \eta_{zy} \\ \eta_{xz} & \eta_{yz} & \xi_{zz} \end{vmatrix}, \quad (1.11)$$

$$\|\Psi_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0 & \Psi_{yx} & \Psi_{zx} \\ \Psi_{xy} & 0 & \Psi_{zy} \\ \Psi_{xz} & \Psi_{yz} & 0 \end{vmatrix}.$$

Компоненты $\|\xi_{ij}\|$ и $\|\Psi_{ij}\|$ имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_{xx} &= \frac{\partial U_x}{\partial x_0}, & \eta_{xy} &= \eta_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y_0} + \frac{\partial U_y}{\partial x_0} \right), \\ \xi_{yy} &= \frac{\partial U_y}{\partial y_0}, & \eta_{yz} &= \eta_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial z_0} + \frac{\partial U_z}{\partial y_0} \right), \\ \xi_{zz} &= \frac{\partial U_z}{\partial z_0}, & \eta_{xz} &= \eta_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z_0} + \frac{\partial U_z}{\partial x_0} \right); \\ \Psi_{xy} &= -\Psi_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y_0} - \frac{\partial U_y}{\partial x_0} \right), \\ \Psi_{xz} &= -\Psi_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z_0} - \frac{\partial U_z}{\partial x_0} \right), \\ \Psi_{yz} &= -\Psi_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial z_0} - \frac{\partial U_z}{\partial y_0} \right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Величины ξ_{xx} , ξ_{yy} , ξ_{zz} определяют скорости относительных удлинений элементарного объема в направлениях координатных осей, а η_{xy} , η_{xz} , η_{yz} — угловые скорости изменения первоначально прямых углов.

В случае, если деформации малы, компоненты тензоров T_{ξ} и T_{ψ} связаны друг с другом уравнениями вида

$$\xi_{ij} = \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} \quad \text{или} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \int_{t_0}^t \xi_{ij} dt. \quad (1.13)$$

В твердом теле, т. е. в области давлений P и температур T , ограниченной линией плавления, деформации являются упругими или пластическими. Впрочем, в ряде сред наблюдаются сложные деформации типа вязкоупругих, упругопластических или вязкопластических. В областях жидкости, газа и плазмы чаще всего деформации носят вязкий характер. Система уравнений в частных производных, описывающих поведение сплошной среды, содержит три группы уравнений. К первой относятся законы сохранения массы, количества движения и энергии. Тензорный характер напряжений

и деформаций в неидеальной среде приводит к усложнению законов сохранения количества движения и энергии по сравнению с идеальной средой. Вторую группу составляют эволюционные уравнения, характеризующие процессы, протекающие в сплошной среде, и, как правило, содержащие производные по времени. К третьей группе относятся уравнения состояния — уравнения, определяющие индивидуальные свойства среды в равновесном состоянии.

Все изложенное очерчивает круг изучаемых сред — это деформируемые идеальные и неидеальные среды. В следующих параграфах будут кратко обсуждены вопросы, связанные с анализом напряженного состояния, характером деформаций сплошной среды, а также зависимости между тензорами напряжений, деформаций и скоростей деформаций. Без этих сведений трудно обойтись в последующих главах. Читатель, не удовлетворенный краткостью изложения теоретических вопросов механики сплошной среды, может обратиться к книге Л. И. Седова [1]. В ряде мест по ходу изложения будут опускаться громоздкие выкладки, часть из них читатель может восстановить, воспользовавшись книгами Н. И. Безухова [2], В. И. Блоха [3] или П. Ф. Папковича [4].

§ 2. Напряженное состояние

Рассмотрим напряженное состояние в момент $t = 0$ в некоторой фиксированной точке. Результирующую всех сил, действующих в этой точке, обозначим через $\vec{\Pi}$. Разложим $\vec{\Pi}$ на три составляющие

$$\vec{\Pi} = \Pi_x \vec{i} + \Pi_y \vec{j} + \Pi_z \vec{k}, \quad (1.14)$$

где
$$\Pi^2 = \Pi_x^2 + \Pi_y^2 + \Pi_z^2. \quad (1.15)$$

Введем единичную площадку \vec{F} , проходящую через точку x_0, y_0, z_0 и имеющую нормаль

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}, \quad (1.16)$$

где n_x, n_y, n_z — косинусы углов между нормалью и соответствующей координатной осью, удовлетворяющие условию

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \quad (1.17)$$

Векторы $\vec{\Pi}_x = \Pi_x \vec{i}$, $\vec{\Pi}_y = \Pi_y \vec{j}$, $\vec{\Pi}_z = \Pi_z \vec{k}$ выражаются через вектор $\vec{\sigma}$, направленный по нормали к \vec{n} , и три вектора $\vec{\tau}$, направленных по линиям пересечения площадки \vec{F} с тремя координатными плоскостями xOy, xOz, yOz . Эти выражения имеют вид

$$\begin{aligned} \Pi_x &= \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z, \\ \Pi_y &= \tau_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z, \\ \Pi_z &= \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Спроектируем вектор $\vec{\Pi}$ на направление нормали к площадке \vec{F} .

Для этого умножим Π_x на n_x , Π_y на n_y , Π_z на n_z и сложим. В результате получим

$$\sigma_n = \sigma_{xx}n_x^2 + \sigma_{yy}n_y^2 + \sigma_{zz}n_z^2 + 2(\tau_{xy}n_xn_y + \tau_{yz}n_y n_z + \tau_{xz}n_x n_z). \quad (1.19)$$

Касательная составляющая напряжения определяется уравнением

$$\tau_n^2 = \Pi^2 - \sigma_n^2. \quad (1.20)$$

В каждой точке среды существуют три взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения обращаются в нуль, т. е. $\tau_n = 0$. Направления нормалей к этим площадкам образуют главные направления (главные оси) тензора напряжений. Эти направления зависят только от величины силы $\vec{\Pi}$ и не зависят от исходной системы координат x, y, z . Определим эти главные напряжения и положения площадок, на которых они действуют. Обозначим искомое главное напряжение через σ . Спроектировав его на ось x, y, z , получим

$$\sigma n_x = \Pi_x, \quad \sigma n_y = \Pi_y, \quad \sigma n_z = \Pi_z. \quad (1.21)$$

Поскольку $\sigma = \sigma_n$, из (1.21), (1.20) и (1.17) следует, что $\tau_n = 0$ и действительно σ есть главное напряжение. После подстановки (1.21) в (1.18) получается система трех однородных уравнений:

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx} - \sigma)n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z &= 0, \\ \tau_{yx}n_x + (\sigma_{yy} - \sigma)n_y + \tau_{yz}n_z &= 0, \\ \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + (\sigma_{zz} - \sigma)n_z &= 0, \end{aligned} \quad (1.22)$$

содержащая четыре неизвестных: σ, n_x, n_y, n_z . Будем считать σ параметром. Тогда число неизвестных станет равно трем. В силу (1.17) система (1.22) не имеет тривиального решения. Условием существования нетривиального решения (1.22) является равенство нулю определителя системы

$$D = \sigma^3 - \sigma^2 I_1 + \sigma I_2 - I_3 = 0, \quad (1.23)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(T_\sigma) &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}, \\ I_2(T_\sigma) &= \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ I_3(T_\sigma) &+ \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{zx}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Корни уравнения (1.23) называются главными напряжениями σ_i ($i = 1, 2, 3$) и обычно располагаются в порядке убывания: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Три направляющих косинуса для каждого главного напряжения должны находиться из системы трех уравнений. Так как ранг матрицы системы (1.22) после подстановки в нее одного из главных напряжений равен двум, одно из уравнений (1.22) является следствием двух других. В качестве третьего уравнения для определения n_{xi}, n_{yi}, n_{zi} используется (1.17).

Коэффициенты уравнения (1.23) не зависят от n_x, n_y, n_z , т. е. инвариантны относительно выбора площадки \vec{F} . Они называются инвариантами тензора напряжений и являются основными характеристиками напряженного состояния в точке. Поскольку σ_i являются корнями (1.23), это уравнение можно записать в виде

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0. \quad (1.25)$$

Из сравнения (1.23) и (1.25) следуют выражения инвариантов T_i через главные напряжения

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3, \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \quad (1.26)$$

В § 1 введено давление как сила, не зависящая от ориентации площадки. Инвариант I_1 тоже представляет собой силу, не зависящую от ориентации площадки \vec{F} . Поэтому естественно связать их друг с другом. Как правило, полагают

$$P = -\frac{1}{3} I_1 = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (1.27)$$

Знак «минус» в (1.27) не играет принципиального значения. Он означает лишь то, что при сжатии вещества давление в нем положительно, в то время как среднее напряжение отрицательно. И наоборот, при растяжении вещества давление становится отрицательным, а напряжения — положительными. Поскольку $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ действуют на площадках, на которых отсутствуют касательные напряжения, всестороннее напряжение P может вызвать лишь изменение объема (дилатацию), но не вызывает изменения формы (дисторсии).

Изменение формы тела определяется касательными напряжениями. Выберем в рассматриваемой точке главные оси тензора напряжений в качестве новых координатных осей x, y, z . Тогда на произвольно выбранной площадке нормальное и касательное напряжения по аналогии с (1.19) и (1.20) примут вид

$$\sigma_n = \sigma_1 n_x^2 + \sigma_2 n_y^2 + \sigma_3 n_z^2, \quad (1.28)$$

$$\tau^2 = P^2 - \sigma_n^2 = \sigma_1^2 n_x^2 + \sigma_2^2 n_y^2 + \sigma_3^2 n_z^2 - (\sigma_1 n_x^2 + \sigma_2 n_y^2 + \sigma_3 n_z^2)^2. \quad (1.29)$$

Исключим в (1.29), например, n_z^2 с помощью (1.17). После этого найдем такие n_x и n_y , при которых τ станет максимальным. Эти значения n_x, n_y определяют площадки, проходящие через одну из главных осей и делящие угол между двумя другими главными осями пополам. Подставив полученные значения n_x, n_y в (1.29), получим главные касательные напряжения, действующие по трем указанным плоскостям:

$$\begin{aligned} \tau_{12} &= \pm 0.5(\sigma_1 - \sigma_2), \\ \tau_{23} &= \pm 0.5(\sigma_2 - \sigma_3), \\ \tau_{31} &= \pm 0.5(\sigma_3 - \sigma_1). \end{aligned} \quad (1.30)$$

На площадках, где касательные напряжения достигают значений (1.30), нормальные напряжения принимают значения

$$\sigma_{12} = 0.5(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \sigma_{23} = 0.5(\sigma_2 + \sigma_3), \quad \sigma_{31} = 0.5(\sigma_3 + \sigma_1). \quad (1.31)$$

Поскольку σ_1 — наибольшее главное напряжение, а σ_3 — наименьшее, из (1.30) следует, что τ_{31} является максимальным главным касательным напряжением.

Остановимся еще на одном представлении тензора напряжений. Представим T_σ в виде суммы двух тензоров: $T_\sigma = T_{1\sigma} + D_\sigma$,

где

$$T_{1\sigma} = \begin{vmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{vmatrix},$$

$$D_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} + P & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y + P & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} + P \end{vmatrix}.$$

Тензор $T_{1\sigma}$ называется шаровым тензором напряжений и равен давлению с обратным знаком, а тензор D_σ , характеризующий касательные напряжения, называется девиатором напряжений. Нормальные составляющие тензора D_σ обозначают

$$S_{xx} = \sigma_{xx} + P, \quad S_{yy} = \sigma_{yy} + P, \quad S_{zz} = \sigma_{zz} + P. \quad (1.32)$$

По аналогии с тензором T_σ из уравнения

$$S^3 - S^2 I_1(D_\sigma) + S I_2(D_\sigma) - I_3(D_\sigma) = 0$$

находятся главные напряжения S_i тензора D_σ

$$S_1 = \sigma_1 + P, \quad S_2 = \sigma_2 + P, \quad S_3 = \sigma_3 + P. \quad (1.33)$$

Инварианты $I_1(D_\sigma)$, $I_2(D_\sigma)$, $I_3(D_\sigma)$ выражаются через компоненты девиатора напряжений следующим образом:

$$I_1(D_\sigma) = S_{xx} + S_{yy} + S_{zz},$$

$$I_2(D_\sigma) = S_{xx}S_{yy} + S_{yy}S_{zz} + S_{zz}S_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2,$$

$$I_3(D_\sigma) = S_{xx}S_{yy}S_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - S_{xx}\tau_{yz}^2 - S_{yy}\tau_{zx}^2 - S_{zz}\tau_{xy}^2. \quad (1.34)$$

Подставим в первое уравнение (1.34) выражение S через σ и P (1.32). В результате

$$I_1(D_\sigma) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} + 3P.$$

Из (1.24), (1.26) и (1.27) следует, что

$$P = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}). \quad (1.35)$$

Подставив P в выражение для $I_1(D_\sigma)$, получим

$$I_1(D_\sigma) = 0. \quad (1.36)$$

Если перейти к главным напряжениям, то инварианты девиатора

напряжений запишутся в виде

$$\begin{aligned} I_1(D_\sigma) &= S_1 + S_2 + S_3, \\ I_2(D_\sigma) &= S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1, \\ I_3(D_\sigma) &= S_1 S_2 S_3. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Из (1.36) следует, что

$$\begin{aligned} S_{xx} S_{yy} + S_{yy} S_{zz} + S_{zz} S_{xx} &= -\frac{1}{2} (S_{xx}^2 + S_{yy}^2 + S_{zz}^2), \\ S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1 &= -\frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2). \end{aligned} \quad (1.38)$$

С помощью этих уравнений $I_2(D_\sigma)$ может быть преобразовано к одной из следующих форм:

$$\begin{aligned} I_2(D_\sigma) &= -\frac{1}{2} (S_{xx}^2 + S_{yy}^2 + S_{zz}^2) - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ I_2(D_\sigma) &= -\frac{1}{6} ((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + \\ &+ (\sigma_{zz} + \sigma_{xx})^2) - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ I_2(D_\sigma) &= -\frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2), \\ J_2(D_\sigma) &= -\frac{1}{6} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 + \sigma_3)^2). \end{aligned} \quad (1.39)$$

Из (1.30) и последнего из уравнений (1.39) следует выражение $I_2(D_\sigma)$ через главные касательные напряжения

$$J_2(D_\sigma) = -\frac{2}{3} (\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2). \quad (1.40)$$

Величину

$$\tau_{\text{окт}} = \sqrt{-\frac{2}{3} I_2(D_\sigma)}$$

называют октаэдрическим напряжением.

Результаты многочисленных экспериментов показывают, что большинство твердых тел способно выдержать без разрушения большие всесторонние напряжения. В то же время значительно меньшие по величине напряжения сдвига вызывают разрушение тела. В связи с этим разделение тензора напряжений на шаровой тензор $T_{1\sigma}$ и девиатор D_σ существенно облегчает рассмотрение напряженного состояния тела, поскольку тензор $T_{1\sigma}$, вызывающий дилатацию, может быть связан с шаровым тензором деформаций или шаровым тензором скоростей деформаций, а тензор D_σ , вызывающий дисторсию, соответственно с девиаторами деформаций или скоростей деформаций. Выделение давления полезно еще и тем, что позволяет строить уравнение состояния вещества, непрерывно переходящее в уравнение состояния жидкости в условиях, когда компоненты тензора девиатора напряжений становятся пренебрежимо малы по сравнению с P .

§ 3. Деформация твердого тела

Остановимся на некоторых свойствах симметричного тензора деформаций T_ε , введенного в § 1. Вообще говоря, под деформацией понимают процесс изменения формы и объема тела. Следуя [5], деформацией будем называть такие движения среды, при которых меняются расстояния между материальными точками. В то же время довольно часто [4] деформацией называют не процесс, а относительные изменения характеристик тела (относительные приращения линейных отрезков, объема, углов и т. д.). Ниже термин «деформация» будет использоваться и в том и в другом смысле.

Рассмотрим в момент $t = 0$ точку с координатами x_0, y_0, z_0 . За время dt эта точка переместится на величину

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}, \quad (1.41)$$

$$\text{где} \quad R^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2. \quad (1.42)$$

Введем некоторую произвольно ориентированную плоскость \vec{F} , проходящую через точку x_0, y_0, z_0 и имеющую нормаль

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}. \quad (1.43)$$

Выразим векторы $\vec{R}_x = R_x \vec{i}$, $\vec{R}_y = R_y \vec{j}$, $\vec{R}_z = R_z \vec{k}$ через векторы $\vec{\varepsilon}$, направленные по нормали \vec{n} , и векторы $\vec{\gamma}$, направленные по линиям пересечения плоскости \vec{F} с тремя координатными плоскостями

$$\begin{aligned} R_x &= \varepsilon_{xx} n_x + \gamma_{xy} n_y + \gamma_{xz} n_z, \\ R_y &= \gamma_{yx} n_x + \varepsilon_{yy} n_y + \gamma_{yz} n_z, \\ R_z &= \gamma_{zx} n_x + \gamma_{zy} n_y + \varepsilon_{zz} n_z. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Спроектируем вектор \vec{R} на направление нормали \vec{n} . Для этого умножим R_x на n_x , R_y на n_y , R_z на n_z и сложим

$$R_n = \varepsilon_{xx} n_x^2 + \varepsilon_{yy} n_y^2 + \varepsilon_{zz} n_z^2 + 2(\gamma_{xy} n_x n_y + \gamma_{yz} n_y n_z + \gamma_{zx} n_z n_x). \quad (1.45)$$

Касательная составляющая смещения определяется уравнением

$$T_n^2 = R^2 - R_n^2. \quad (1.46)$$

В каждой точке среды имеется три взаимно перпендикулярные плоскости, на которых касательные смещения равны нулю. Направления нормалей к этим плоскостям образуют главные направления (главные оси) тензора деформаций. Эти направления зависят только от величины смещения \vec{R} и не зависят от исходной системы координат x, y, z . Для определения этих главных деформаций обозначим искомую главную деформацию через ε . Спроектировав ее на оси x, y, z , получим

$$\varepsilon n_x = R_x, \quad \varepsilon n_y = R_y, \quad \varepsilon n_z = R_z. \quad (1.47)$$

Поскольку $\varepsilon = \varepsilon_n$, из (1.47), (1.46) и (1.47) следует, что $T_n = 0$,

а значит, ε есть главная деформация. Подставим (1.47) в (1.44) и получим систему трех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon)n_x + \gamma_{xy}n_y + \gamma_{xz}n_z &= 0, \\ \gamma_{yx}n_x + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon)n_y + \gamma_{yz}n_z &= 0, \\ \gamma_{zx}n_x + \gamma_{zy}n_y + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon)n_z &= 0.\end{aligned}\quad (1.48)$$

Будем считать ε параметром. В силу (1.17) система (1.48) с тремя неизвестными (n_x, n_y, n_z) имеет нетривиальное решение в случае равенства нулю определителя системы

$$D = \varepsilon^3 - \varepsilon^2 I_1(T_\varepsilon) + \varepsilon I_2(T_\varepsilon) - I_3(T_\varepsilon) = 0. \quad (1.49)$$

Здесь

$$\begin{aligned}I_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}, \\ I_2(T_\varepsilon) &= \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \gamma_{xy}^2 - \gamma_{yz}^2 - \gamma_{zx}^2, \\ I_3(T_\varepsilon) &= \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + 2\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - \varepsilon_{xx}\gamma_{yz}^2 - \varepsilon_{yy}\gamma_{zx}^2 - \varepsilon_{zz}\gamma_{xy}^2.\end{aligned}\quad (1.50)$$

Корни уравнения (1.49) называются главными удлинениями, поскольку главные оси тензора деформаций обладают тем свойством, что вдоль них происходит только изменение длины при отсутствии деформаций сдвига. Обычно главные удлинения нумеруют в порядке их убывания: $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$. Три направляющих косинуса $-n_x, n_y, n_z$ для каждого ε_i находятся из любых двух уравнений (1.48) и уравнения (1.17). Величины $I_i(T_\varepsilon)$ называются инвариантами тензора деформаций. Запишем (1.49) в виде

$$(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_2)(\varepsilon - \varepsilon_3) = 0. \quad (1.51)$$

Из (1.51) и (1.49) следуют выражения инвариантов через главные деформации

$$\begin{aligned}I_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ I_2(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3, \\ I_3(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3.\end{aligned}\quad (1.52)$$

По аналогии с тензором напряжений представим тензор деформаций в виде суммы двух тензоров:

$$T_\varepsilon = T_{1\varepsilon} + D_\varepsilon, \quad (1.53)$$

где

$$T_{1\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{cp} \end{vmatrix}, \quad (1.54)$$

$$D_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}. \quad (1.55)$$

Здесь $e_{xx} = \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{cp}$, $e_{yy} = \varepsilon_{yy} - \varepsilon_{cp}$, $e_{zz} = \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{cp}$, а средняя деформация ε_{cp} определяется выражением

$$\varepsilon_{cp} = \frac{1}{3} I_1(T_e). \quad (1.56)$$

Тензор T_{1e} называется шаровым тензором деформации, а тензор D_e — девиатором деформаций. Шаровой тензор деформаций характеризует объемную деформацию в точке, а девиатор деформаций — формоизменение в окрестности этой точки.

Главные оси тензора деформаций совпадают с главными осями тензора напряжений. Инварианты девиатора деформаций имеют вид

$$\begin{aligned} I_1(D_e) &= e_1 + e_2 + e_3, \\ I_2(D_e) &= e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1, \\ I_3(D_e) &= e_1 e_2 e_3, \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$\text{где} \quad e_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_{cp}, \quad e_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_{cp}, \quad e_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon_{cp}. \quad (1.58)$$

Из (1.52), (1.56) — (1.58) следует, что

$$I_1(D_e) = 0. \quad (1.59)$$

Второй инвариант тензора D_e после подстановки в него (1.58), (1.56) и (1.52) принимает значение

$$I_2(D_e) = -\frac{1}{6} ((\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2). \quad (1.60)$$

Главные деформации сдвига расположены на плоскостях, проходящих через одну из главных осей и делящих угол между двумя другими главными осями пополам. Они выражаются через главные удлинения следующим образом:

$$\gamma_{12} = \pm 0.5(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad \gamma_{23} = \pm 0.5(\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \quad \gamma_{31} = \pm 0.5(\varepsilon_3 - \varepsilon_1). \quad (1.61)$$

Поскольку ε_1 — наибольшее главное удлинение, а ε_3 — наименьшее, величина γ_{31} является наибольшей деформацией сдвига. На площадках, где деформации сдвига определяются уравнениями (1.61), нормальные удлинения принимают значения

$$\varepsilon_{12} = 0.5(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad \varepsilon_{23} = 0.5(\varepsilon_2 + \varepsilon_3), \quad \varepsilon_{31} = 0.5(\varepsilon_3 + \varepsilon_1). \quad (1.62)$$

Выразим значение $I_2(D_e)$ через значения главных деформаций сдвига. Для этого подставим (1.61) в (1.60). В результате получим

$$I_2(D_e) = \frac{2}{3} (\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2). \quad (1.63)$$

Величину

$$\gamma_{\text{окт}} = \frac{2}{3} \sqrt{-6I_2(D_e)} \quad (1.64)$$

называют октаэдрической деформацией сдвига. При описании пластических деформаций часто используют величину, пропорциональ-

ную октаэдрическому сдвигу и называемую интенсивностью деформации или обобщенной деформацией

$$\varepsilon_n = \frac{3\sqrt{2}}{4(1+\mu)} \gamma_{\text{окт}}, \quad (1.65)$$

где μ — коэффициент Пуассона.

§ 4. Объемная деформация

Рассмотрим элемент массы dm , занимающий объем $d\Theta_0 = dx_0 dy_0 dz_0$. Удельный объем вещества в этом объеме $V_0 = \frac{d\Theta_0}{dm}$. После деформации масса dm займет объем $d\Theta = dx dy dz$, а удельный объем примет значение V . Свяжем V с V_0 и будем считать, что $x = x(x_0, y_0, z_0)$, $y = y(x_0, y_0, z_0)$, $z = z(x_0, y_0, z_0)$. Подставив dx, dy, dz в выражение

$$V = \frac{dx dy dz}{dm},$$

получим

$$V = \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial x}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial x}{\partial z_0} dz_0 \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial y}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial y}{\partial z_0} dz_0 \right) \times \\ \times \left(\frac{\partial z}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial z}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial z}{\partial z_0} dz_0 \right) / dm. \quad (1.66)$$

Предположим, что элемент dm не вращается, т. е. тензор T_0 равен нулю. Приравняв в (1.6) значения ω_{ij} нулю, получим

$$\frac{\partial x}{\partial y_0} = -\frac{\partial y}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial x}{\partial z_0} = -\frac{\partial z}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial y}{\partial z_0} = -\frac{\partial z}{\partial y_0}. \quad (1.67)$$

Сделаем еще одно предположение. Будем считать, что деформация такова, что все деформации сдвига равны нулю, т. е. равны нулю значения γ_{ij} в (1.7). Тогда

$$\frac{\partial x}{\partial y_0} = -\frac{\partial y}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial x}{\partial z_0} = -\frac{\partial z}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial y}{\partial z_0} = -\frac{\partial z}{\partial y_0}. \quad (1.68)$$

Из (1.67) и (1.68) следует, что

$$\frac{\partial x}{\partial y_0} = \frac{\partial x}{\partial z_0} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x_0} = \frac{\partial y}{\partial z_0} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x_0} = \frac{\partial z}{\partial y_0} = 0. \quad (1.69)$$

После подстановки (1.69) в (1.66) выражение для удельного объема упрощается:

$$V = \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} \frac{\partial z}{\partial z_0} \frac{\partial x_0 \partial y_0 \partial z_0}{dm}.$$

Поскольку $V_0 = dx_0 dy_0 dz_0 / dm$, выражение для удельного объема примет вид

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} \frac{\partial z}{\partial z_0}. \quad (1.70)$$

Приняв во внимание, что производные в правой части (1.70) равны главным удлинениям, запишем (1.70) так:

$$\frac{V}{V_0} = \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz}. \quad (1.71)$$

Величину V_0/V называют сжатием вещества. Характер деформации при сделанных выше предположениях определяет следующая

Теорема. Если вращение и деформация сдвигов равны нулю, то сжатие вещества является всесторонне равномерным и $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_s$.

Доказательство. Поскольку $\gamma_{ij} = 0$, выражения (1.42) и (1.45) примут вид

$$R^2 = \varepsilon_{xx}^2 n_x^2 + \varepsilon_{yy}^2 n_y^2 + \varepsilon_{zz}^2 n_z^2, \quad (1.72)$$

$$R_n = \varepsilon_{xx} n_x^2 + \varepsilon_{yy} n_y^2 + \varepsilon_{zz} n_z^2. \quad (1.73)$$

Подстановка (1.72) и (1.73) в выражение для касательной составляющей смещения (1.46) даст

$$T_n^2 = \varepsilon_{xx}^2 n_x^2 (1 - n_x^2) + \varepsilon_{yy}^2 n_y^2 (1 - n_y^2) + \varepsilon_{zz}^2 n_z^2 (1 - n_z^2) - 2\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} n_x^2 n_y^2 - 2\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} n_y^2 n_z^2 - 2\varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} n_z^2 n_x^2. \quad (1.74)$$

Вспользуемся соотношением между направляющими косинусами $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ и преобразуем (1.74) к виду

$$T_n^2 = (n_x n_y (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}))^2 + (n_y n_z (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz}))^2 + (n_z n_x (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx}))^2. \quad (1.75)$$

На главных площадках тензора деформаций $T_n = 0$. Поскольку n_x, n_y, n_z не равны нулю, это равенство возможно лишь при

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_s. \quad (1.76)$$

Теорема доказана.

В случае всесторонне равномерного сжатия инварианты тензора деформаций выражаются через ε_s :

$$I_1(T_\varepsilon) = 3\varepsilon_s, \quad I_2(T_\varepsilon) = 3\varepsilon_s^2, \quad I_3(T_\varepsilon) = \varepsilon_s^3.$$

Сжатие вещества также выражается через ε_s :

$$\frac{V_0}{V} = \varepsilon_s^{-3}.$$

Объемная деформация может происходить также при отличных от нуля деформациях сдвига. В этом случае в качестве координатных осей примем главные оси тензора деформаций. Поскольку на главных площадках деформации сдвига отсутствуют, для отношения V/V_0 получается уравнение

$$\frac{V}{V_0} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = I_3(T_\varepsilon). \quad (1.77)$$

Чтобы записать V/V_0 через ε_{ij} и γ_{ij} , следует в (1.77) подставить $I_3(T_\varepsilon)$ в виде (1.50).

§ 5. Главные оси тензора деформаций

Для нахождения направляющих косинусов главных осей тензора деформаций вернемся к системе уравнений (1.48). После того как найдены главные удлинения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, подставим каждое из них попеременно в (1.48) и получим систему уравнений для n_x, n_y, n_z главного направления тензора деформаций:

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_i)n_{xi} + \gamma_{xy}n_{yi} + \gamma_{xz}n_{zi} &= 0, \\ \gamma_{yx}n_{xi} + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_i)n_{yi} + \gamma_{yz}n_{zi} &= 0, \\ \gamma_{zx}n_{xi} + \gamma_{zy}n_{yi} + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_i)n_{zi} &= 0.\end{aligned}\quad (1.78)$$

Поскольку ранг матрицы системы (1.78) равен 2, выразим n_{yi} и n_{zi} через n_{xi} с помощью первых двух уравнений (1.78) и подставим эти выражения в уравнение

$$n_{xi}^2 + n_{yi}^2 + n_{zi}^2 = 1.$$

В результате получим

$$n_{xi} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + A_{ei}^2 + B_{ei}^2}}, \quad n_{yi} = A_{ei} n_{xi}, \quad n_{zi} = B_{ei} n_{xi}, \quad (1.79)$$

где

$$\begin{aligned}A_{ei} &= \frac{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_i)\gamma_{yz} - \gamma_{yx}\gamma_{xz}}{(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_i)\gamma_{xz} - \gamma_{xy}\gamma_{yz}}, \\ B_{ei} &= \frac{\gamma_{xy}A_{ei} + (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_i)}{\gamma_{xz}}.\end{aligned}$$

Таким образом направляющие косинусы главных осей тензора деформаций однозначно выражаются через $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ и главные удлинения.

Аналогичным образом находятся направляющие косинусы главных осей тензора напряжений. Очевидно, что в изотропной среде главные оси тензора напряжений и тензора деформаций должны совпадать. В случае их несовпадения симметричная система только нормальных напряжений вызвала бы несимметричную систему деформаций. Но для этого нет никаких причин.

Мы ограничимся приведенным нестрогим обоснованием соосности главных направлений тензора деформаций и тензора напряжений. Несмотря на эту нестрогость, далее мы будем использовать следствия соосности тензоров напряжений и деформаций в виде уравнений, связывающих напряжения и деформации:

$$A_{\sigma i} = A_{ei}, \quad B_{\sigma i} = B_{ei}, \quad (1.80)$$

где

$$\begin{aligned}A_{\sigma i} &= \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_i)\tau_{yz} - \tau_{yx}\tau_{xz}}{(\sigma_{yy} - \sigma_i)\tau_{xz} - \tau_{xy}\tau_{yz}}, \\ B_{\sigma i} &= \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_i) + \tau_{xy}A_{\sigma i}}{\tau_{xy}}.\end{aligned}$$

§ 6. Условия совместности деформаций

Шесть компонентов тензора деформаций ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} , определяемые частными производными трех независимых функций x , y , z по x_0 , y_0 , z_0 , имеют вид

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial x}{\partial x_0}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial y}{\partial y_0}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial z}{\partial z_0}, \quad (1.81)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{\partial y}{\partial x_0} \right), \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial z_0} + \frac{\partial z}{\partial x_0} \right), \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial z_0} + \frac{\partial z}{\partial y_0} \right). \end{aligned} \quad (1.82)$$

Продифференцируем γ_{xy} по x_0 , y_0 , γ_{xz} по x_0 , z_0 , γ_{yz} по y_0 , z_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x_0 \partial y_0} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial x_0 \partial y_0^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_0^2 \partial y_0} \right), \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x_0 \partial z_0} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial x_0 \partial z_0^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_0^2 \partial z_0} \right), \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y_0 \partial z_0} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial y_0 \partial z_0^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_0^2 \partial z_0} \right). \end{aligned} \quad (1.83)$$

Из (1.81) и (1.83) следует первая группа условий совместности деформаций

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x_0 \partial y_0} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x_0^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x_0 \partial z_0} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z_0^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x_0^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y_0 \partial z_0} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z_0^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y_0^2} \right). \end{aligned} \quad (1.84)$$

Продифференцируем далее γ_{xy} по z_0 , γ_{xz} по y_0 , γ_{yz} по x_0 и запишем полученную систему уравнений относительно производных $\frac{\partial^2 x}{\partial y_0 \partial z_0}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x_0 \partial z_0}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_0 \partial y_0}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial y_0 \partial z_0} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_0 \partial z_0} + 0 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x_0 \partial y_0} = 2 \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z_0}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial y_0 \partial z_0} + 0 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x_0 \partial z_0} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_0 \partial y_0} = 2 \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y_0}, \\ 0 \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial y_0 \partial z_0} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_0 \partial z_0} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_0 \partial y_0} = 2 \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x_0}. \end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial y_0 \partial z_0} &= -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x_0} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y_0} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z_0}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_0 \partial z_0} &= \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x_0} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y_0} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z_0}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_0 \partial y_0} &= \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x_0} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y_0} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z_0}.\end{aligned}\quad (1.85)$$

Дифференцируя первое уравнение по x_0 , второе по y_0 , третье по z_0 и используя уравнения (1.81), получим вторую группу уравнений совместности деформаций:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y_0 \partial z_0} &= \frac{\partial}{\partial x_0} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x_0} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y_0} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z_0} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x_0 \partial z_0} &= \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x_0} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y_0} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z_0} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x_0 \partial y_0} &= \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x_0} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y_0} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z_0} \right).\end{aligned}\quad (1.86)$$

Шесть дифференциальных уравнений (1.84), (1.86) называются условиями совместности деформаций или уравнениями Сен-Венана. Эти уравнения, как и законы сохранения, являются фундаментальными уравнениями, поскольку не зависят ни от механических свойств среды, ни от характера ее деформирования. Энергетический смысл уравнений (1.84), (1.86) заключается в том, что потенциальная энергия деформаций, накапливаемая телом, минимальна.

§ 7. Скорость деформации

Тензор скоростей деформаций T_i с компонентами ξ_{xx} , ξ_{yy} , ξ_{zz} , η_{xy} , η_{yz} , η_{zx} , определяемыми уравнениями (1.12), так же как и тензор деформаций T_e , имеет главные направления, вдоль которых действуют главные компоненты тензора ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 . Направляющие косинусы главных осей тензора скоростей деформаций находятся так же, как и тензора деформаций, и имеют вид

$$n_{xi} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + A_{\xi_i}^2 + B_{\xi_i}^2}}, \quad n_{yi} = A_{\xi_i} n_{xi}, \quad n_{zi} = B_{\xi_i} n_{xi}, \quad (1.87)$$

где

$$\begin{aligned}A_{\xi_i} &= \frac{(\xi_{xx} - \xi_i) \eta_{yz} - \eta_{yx} \eta_{xz}}{(\xi_{yy} - \xi_i) \eta_{xz} - \eta_{xy} \eta_{yz}}, \\ B_{\xi_i} &= \frac{(\xi_{xx} - \xi_i) + \eta_{xy} A_{\xi_i}}{\eta_{xz}}.\end{aligned}$$

Будем считать, что в изотропной среде главные оси тензора скоростей деформаций совпадают с главными осями тензора дефор-

маций. В случае их несовпадения наличие скоростей деформаций только вдоль главных осей и отсутствие скоростей деформаций в касательных плоскостях вызвало бы деформацию вдоль касательных плоскостей, что противоречит физическому смыслу. Условия соосности тензоров T_{ξ} и T_{ϵ} имеют вид

$$A_{\xi i} = A_{\epsilon i}, \quad B_{\xi i} = B_{\epsilon i}. \quad (1.88)$$

Инварианты тензора скоростей деформации выражаются через компоненты $\xi_x, \xi_y, \xi_z, \eta_{xy}, \eta_{yz}, \eta_{zx}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} I_1(T_{\xi}) &= \xi_{xx} + \xi_{yy} + \xi_{zz}, \\ I_2(T_{\xi}) &= \xi_{xx}\xi_{yy} + \xi_{yy}\xi_{zz} + \xi_{zz}\xi_{xx} - \eta_{xy}^2 - \eta_{yz}^2 - \eta_{zx}^2, \\ I_3(T_{\xi}) &= \xi_{xx}\xi_{yy}\xi_{zz} + 2\eta_{xy}\eta_{yz}\eta_{zx} - \xi_{xx}\eta_{yz}^2 - \xi_{yy}\eta_{zx}^2 - \xi_{zz}\eta_{xy}^2. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Инварианты $I_1(T_{\xi}), I_2(T_{\xi}), I_3(T_{\xi})$ выражаются так же через главные скорости деформации:

$$\begin{aligned} I_1(T_{\xi}) &= \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \\ I_2(T_{\xi}) &= \xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_1, \\ I_3(T_{\xi}) &= \xi_1\xi_2\xi_3. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Средней скоростью деформации называется величина

$$\xi_{\text{ср}} = \frac{1}{3} I_1(T_{\xi}). \quad (1.91)$$

Главные скорости деформаций сдвига расположены на плоскостях, проходящих через одну из главных осей и делящих угол между двумя другими главными осями пополам. Они выражаются через скорости главных удлинений следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta_{12} &= \pm 0.5(\xi_1 - \xi_2), \\ \eta_{23} &= \pm 0.5(\xi_2 - \xi_3), \\ \eta_{31} &= \pm 0.5(\xi_3 - \xi_1). \end{aligned} \quad (1.92)$$

На этих площадках скорости нормальных удлинений принимают следующие значения:

$$\xi_{12} = 0.5(\xi_1 + \xi_2), \quad \xi_{23} = 0.5(\xi_2 + \xi_3), \quad \xi_{31} = 0.5(\xi_3 + \xi_1). \quad (1.93)$$

§ 8. Закон сохранения массы

Рассмотрим произвольный объем Ω , в котором отсутствуют разрывы. В некоторый момент времени t_0 масса находящегося в этом объеме вещества

$$M = \int_{\Omega} \rho \, d\Omega, \quad (1.94)$$

где плотность ρ — функция t, x, y, z . Скорость изменения плотности в каждой точке объема Ω есть $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{xyz}$, и, следовательно, изме-

нение массы вещества за время Δt в объеме Ω равно

$$\Delta M = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt d\Omega. \quad (1.95)$$

Будем считать, что источников массы нет и единственной причиной изменения массы в объеме Ω является поток вещества через поверхность F , ограничивающую объем Ω . Этот поток будет

$$\Delta M = - \int_F \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \rho \vec{U} d\vec{F} dt.$$

Заменяя с помощью теоремы Остроградского поверхностный интеграл объемным, получим

$$\Delta M = - \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \operatorname{div} \rho \vec{U} d\Omega dt. \quad (1.96)$$

Из (1.95) и (1.96) следует

$$\int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{U} \right) d\Omega dt = 0.$$

Поскольку Ω и Δt произвольны, подынтегральная функция равна нулю:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{U} = 0. \quad (1.97)$$

Преобразуем это уравнение, воспользовавшись понятием субстанциональной производной. Полная производная некоторой величины f по времени t определяется уравнением

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \quad (1.98)$$

Величины $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ указывают направление, в котором берется производная $\frac{df}{dt}$. Если это направление совпадает с касательной к траектории частицы, определяемой уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = U_x, \quad \frac{dy}{dt} = U_y, \quad \frac{dz}{dt} = U_z, \quad (1.99)$$

то (1.98) принимает вид

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + U_x \frac{\partial f}{\partial x} + U_y \frac{\partial f}{\partial y} + U_z \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (1.100)$$

Полная производная величины f по t , описываемая выражением (1.99), называется субстанциональной производной.

Используя (1.99) и заменив ρ на V , запишем (1.97) в виде

$$\frac{dV}{dt} - V \operatorname{div} \vec{U} = 0. \quad (1.101)$$

Получим уравнение (1.101) иным путем — используя уравнение для объемной деформации (1.70). Продифференцируем (1.70) по t и, приняв во внимание (1.99) и (1.100), имеем

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = V_0 & \left(\frac{\partial U_x}{\partial x_0} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} + \frac{\partial U_y}{\partial y_0} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} + \frac{\partial U_z}{\partial z_0} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \left(\frac{\partial U_x}{\partial y_0} + \frac{\partial U_y}{\partial x_0} \right) (\gamma_{yz} \gamma_{zx} - \right. \\ & - \varepsilon_{zz} \gamma_{xy}) + \left(\frac{\partial U_y}{\partial z_0} + \frac{\partial U_z}{\partial y_0} \right) (\gamma_{xy} \gamma_{zx} - \varepsilon_{xx} \gamma_{yz}) + \left(\frac{\partial U_z}{\partial x_0} + \frac{\partial U_x}{\partial z_0} \right) (\gamma_{xy} \gamma_{yz} - \\ & \left. - \varepsilon_{yy} \gamma_{zx}) + \left(\gamma_{yz}^2 \frac{\partial U_x}{\partial x_0} + \gamma_{zx}^2 \frac{\partial U_y}{\partial y_0} + \gamma_{xy}^2 \frac{\partial U_z}{\partial z_0} \right) \right). \quad (1.102) \end{aligned}$$

Перейдем в этом уравнении от производных по x_0, y_0, z_0 к производным по x, y, z по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = \frac{\partial f}{\partial x} \varepsilon_{xx} + \frac{\partial f}{\partial y} \gamma_{yx} + \frac{\partial f}{\partial z} \gamma_{zx}$$

Группировка членов в полученном после такого перехода уравнении даст уравнение

$$\frac{dV}{dt} = V_0 J_3(T_\varepsilon) \operatorname{div} \vec{U},$$

которое после подстановки вместо $J_3(T_\varepsilon)$ отношения V/V_0 в соответствии с (1.77) примет вид (1.101). Уравнение (1.101) называется уравнением неразрывности плотности или просто уравнением неразрывности.

§ 9. Закон сохранения количества движения

Вещество, находящееся в момент t_0 в объеме Ω , имеет количество движения

$$\vec{K} = \int_{\Omega} \rho \vec{U} d\Omega.$$

Величина $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{U})$ есть скорость изменения вектора $\rho \vec{U}$ в каждой точке объема Ω . За время Δt количество движения в объеме Ω изменится на величину

$$\Delta \vec{K} = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) d\Omega dt. \quad (1.103)$$

Это изменение количества движения произошло по двум причинам:

1) за счет потока количества движения через поверхность F ,

ограничивающую объем Ω

$$\vec{I}_1 = - \int_F \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \rho \vec{U} (\vec{U} \cdot d\vec{F}) dt;$$

2) из-за импульса поверхностных сил, действующих на поверхности \vec{F} . Рассмотрим вначале идеальную среду, в которой

$$\vec{I}_2 = - \int_F \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} P d\vec{F} dt.$$

Применив к \vec{I}_1 и \vec{I}_2 теорему Остроградского, приравняв $\vec{I}_1 + \vec{I}_2$ к величине $\Delta \vec{K}$ и приняв во внимание произвольность Δt и Ω , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) + \vec{U} \operatorname{div} \rho \vec{U} + \rho \left(U_x \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + U_y \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} + U_z \frac{\partial \vec{U}}{\partial z} \right) + \operatorname{grad} P = 0. \quad (1.104)$$

Из (1.104), (1.100) и (1.97) следует уравнение движения идеальной среды в виде

$$\rho \frac{d\vec{U}}{dt} + \operatorname{grad} P = 0. \quad (1.105)$$

В случае неидеальной среды на поверхности F действует тензор напряжений T_σ , вследствие чего интеграл \vec{I}_2 имеет вид

$$\vec{I}_2 = \int_F \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} (\vec{\sigma}_x dF_x + \vec{\sigma}_y dF_y + \vec{\sigma}_z dF_z) dt.$$

Проделав с \vec{I}_1 , \vec{I}_2 и $\Delta \vec{K}$ те же преобразования, что и в случае идеальной среды, получим уравнения движения в форме

$$\rho \frac{d\vec{U}}{dt} - \left(\frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (1.106)$$

Примем во внимание, что тензор напряжений T_σ представляется как сумма шарового тензора напряжений $T_{1\sigma}$ и дивергента напряжений D_σ , и заменим σ на $S - P$. Тогда (1.106) преобразуется:

$$\rho \frac{d\vec{U}}{dt} + \operatorname{grad} P - \left(\frac{\partial \vec{S}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{S}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{S}_z}{\partial z} \right) = 0, \quad (1.107)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{S}_x &= S_{xx} \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k}, \\ \vec{S}_y &= \tau_{yx} \vec{i} + S_{yy} \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k}, \\ \vec{S}_z &= \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} + S_{zz} \vec{k}. \end{aligned} \quad (1.108)$$

Уравнение движения в виде (1.107) содержит как часть уравнение движения идеальной среды (1.105) и переходит в него непрерывно при $\vec{S}_x \rightarrow 0$, $\vec{S}_y \rightarrow 0$, $\vec{S}_z \rightarrow 0$.

§ 10. Закон сохранения энергии

Удельная энергия \mathcal{E} складывается из удельной внутренней энергии E и удельной кинетической энергии $0.5U^2$. За время Δt энергия вещества в объеме Ω изменится на величину

$$\Delta Q_1 = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathcal{E}) dt d\Omega. \quad (1.109)$$

Если в объеме Ω отсутствуют источники энергии, то это изменение энергии определяется:

- энергией, которую приносит втекающая в объем Ω за время Δt среда;
- работой сил на поверхности F , ограничивающей объем Ω ;
- потоком тепла \vec{q} через поверхность F .

В случае идеальной среды эти причины записываются так:

$$\Delta Q_2 = - \int_F \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} (\rho \mathcal{E} \vec{U} + P \vec{U} - \vec{q}) d\vec{F} dt. \quad (1.110)$$

Применив теорему Остроградского в (1.110), приравняем ΔQ_1 и ΔQ_2 и в силу произвольности Ω и Δt подынтегральную функцию — нулю. В результате

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathcal{E} + \operatorname{div} \left((\rho \mathcal{E} + P) \vec{U} - \vec{q} \right) = 0. \quad (1.111)$$

Уравнение (1.111) является дифференциальной формой закона сохранения энергии и называется уравнением энергии идеальной среды.

Для неидеальной среды приток энергии в объем Ω через его границы определяется выражением

$$\begin{aligned} \Delta Q_3 = & - \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \left(\int_F (\rho \mathcal{E} \vec{U} - \vec{q}) d\vec{F} + \right. \\ & \left. + \int_F (\vec{\sigma}_x dF_x + \vec{\sigma}_y dF_y + \vec{\sigma}_z dF_z) \vec{U} \right) dt. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Применим в (1.112) теорему Остроградского, приравняем ΔQ_1 и ΔQ_3 в подынтегральную функцию — нулю. В результате получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathcal{E}) + \operatorname{div} (\rho \mathcal{E} \vec{U} - \vec{q}) - \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx} U_x + \tau_{xy} U_y + \tau_{xz} U_z) - \\ & - \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} U_x + \sigma_{yy} U_y + \tau_{yz} U_z) - \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} U_x + \tau_{zy} U_y + \sigma_{zz} U_z) = 0. \end{aligned} \quad (1.113)$$

Уравнение (1.113) выражает закон сохранения энергии в неидеальной среде в дифференциальной форме. Воспользуемся представлением тензора напряжений в виде суммы шарового тензора и девиатора и запишем (1.113) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathcal{E}) + \operatorname{div}((\rho \mathcal{E} + P)\vec{U} - \vec{q}) - \frac{\partial}{\partial x}(S_{xx}U_x + \tau_{xy}U_y + \tau_{xz}U_z) - \\ - \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}U_x + S_{yy}U_y + \tau_{yz}U_z) - \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}U_x + \tau_{zy}U_y + S_{zz}U_z) = 0. \quad (1.114)$$

В случае равенства нулю девиатора напряжений уравнение (1.114) совпадает с уравнением энергии идеальной среды (1.111). Такое представление уравнения энергии является хотя и не принципиальным, но все же важным шагом на пути построения математических моделей, применимых в широком диапазоне изменения термодинамических величин. Сама форма уравнения предполагает единство подходов к описанию поведения среды в области как малых напряжений и температур, так и высоких давлений и температур и дает возможность описывать поведение среды в переходных областях — от твердого тела к жидкости и от жидкости к газу или плазме. Уравнение энергии выражает фундаментальные свойства сплошной среды, поскольку не содержит величин, зависящих от свойств конкретного вещества.

§ 11. Законы сохранения в случае одномерного, пространственных движений

Рассмотрим вначале наиболее простой случай, когда все величины зависят от одной пространственной переменной, например x , а на любой плоскости, ортогональной оси x , каждая величина принимает единственное значение. Это дает основание называть такие течения одномерными течениями с плоской симметрией. В таком случае $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, $U = U_x$, $U_y = U_z = 0$ и уравнение (1.101) примет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} - V \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (1.115)$$

Прежде чем записать уравнения (1.107) и (1.114) для одномерного случая с плоской симметрией, рассмотрим внимательнее компоненты девиатора напряжений. Поскольку оси y и z равноправны, $S_{yy} = S_{zz}$ и $\tau_{xy} = \tau_{xz}$. Из (1.39) следует, что S_{yy} и S_{zz} выражаются через S_{xx} :

$$S_{yy} = S_{zz} = -0.5S_{xx}. \quad (1.116)$$

Из трех уравнений (1.107), записанных для компонент векторов, вытекают уравнение движения

$$\rho \frac{dU}{dt} + \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} = 0 \quad (1.117)$$

и условия, которым должны удовлетворять касательные напряжения

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0. \quad (1.118)$$

Поскольку движения вещества в плоскости yOz нет, то, очевидно, должно быть

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (1.119)$$

Инварианты тензора девиатора напряжений с учетом (1.116) и (1.119) принимают вид

$$I_1(D\sigma) = 0, I_2(D\sigma) = -\frac{3}{4} S_{xx}^2, I_3(D\sigma) = -\frac{1}{4} S_{xx}^2. \quad (1.120)$$

Из уравнений (1.38) и (1.120) найдем значения главных напряжений S_i . Из второго и третьего уравнений (1.120) следует

$$27I_3^2(D\sigma) + 4I_2^3(D\sigma) = 0. \quad (1.121)$$

Выразим S_3 из первых уравнений (1.38) и (1.120) через S_2 и S_1 :

$$S_3 = -(S_1 + S_2) \quad (1.122)$$

и подставим S_3 в (1.121). В результате получим уравнение относительно S_1 и S_2

$$(S_1 + 2S_2)^2 \left(S_1^4 - S_1^3 S_2 - \frac{3}{4} S_1^2 S_2^2 + 0.5 S_1 S_2^3 + 0.255 S_2^4 \right) = 0.$$

Отсюда и из (1.122) следует, что

$$S_2 = S_3 = -0.5 S_1. \quad (1.123)$$

В свою очередь, из (1.38), (1.120) и (1.123) вытекает

$$S_1 = S_{xx}, S_2 = S_{yy}, S_3 = S_{zz}.$$

Уравнение движения (1.107) и уравнения энергии (1.113) в рассматриваемом случае принимают вид

$$\rho \frac{dU}{dt} + \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial S_1}{\partial x} = 0, \quad (1.124)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathcal{E}) + \frac{\partial}{\partial x} ((\rho \mathcal{E} + P - S_1) U - q) = 0. \quad (1.125)$$

Уравнения (1.115), (1.124), (1.125) допускают ряд следствий. Рассмотрим одно из них. Для его получения подставим в (1.125) выражение для $\mathcal{E} = E + 0.5U^2$ и вычтем (1.115), умножив его предварительно на E , а затем вычтем еще раз (1.115), умножив его предварительно на $0.5U^2$. В результате получим уравнение

$$\rho \frac{dE}{dt} + U \left(\rho \frac{\partial U}{dt} + \frac{\partial (P - S_1)}{\partial x} \right) + (P - S_1) \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (1.126)$$

Умножим (1.124) на U и вычтем из (1.126). В новом уравнении заменим $V \partial U / \partial x$ на dV / dt с помощью (1.115). В результате полу-

чим уравнение производства внутренней энергии, которое является следствием системы законов сохранения:

$$\frac{dE}{dt} = -(P - S_1) \frac{dV}{dt} + V \frac{\partial q}{\partial x}. \quad (1.127)$$

В случае сферически- или цилиндрически-симметричных движений, когда все величины зависят только от времени и расстояния от центра или оси симметрии, система законов сохранения массы, количества движения и энергии записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U r^{\alpha-1})}{r^{\alpha-1} \partial r} = 0. \quad (1.128)$$

$$\frac{\partial (\rho U)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U^2 r^{\alpha-1})}{r^{\alpha-1} \partial r} + \frac{\partial (P - S_1)}{\partial r} - \frac{(\alpha - 1)(S_1 - S_2)}{r} = 0, \quad (1.129)$$

$$\frac{\partial (\rho \mathcal{E})}{\partial t} + \frac{\partial (U r^{\alpha-1} (\rho \mathcal{E} + P - S_1) - q)}{r^{\alpha-1} \partial r} = 0. \quad (1.130)$$

Запишем эти уравнения так, чтобы в них были разделены члены, содержащие компоненты шаровой части и дивергента напряжений. Одновременно перейдем от ρ к V и от частных производных по t к субстанциональным производным. В результате (1.128)–(1.130) примут вид

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{(\alpha - 1)U}{r}, \quad (1.131)$$

$$\frac{1}{V} \frac{dU}{dt} = -\frac{\partial (P - S_1)}{\partial r} + (\alpha - 1) \frac{(S_1 - S_2)}{r}, \quad (1.132)$$

$$\frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} = S_1 V \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{(\alpha - 1) S_2 UV}{r} + V \frac{\partial q}{\partial r}. \quad (1.133)$$

Будем обозначать дифференцирование вдоль линии тока точкой над величиной. Продифференцируем (1.77) по t вдоль линии тока

$$\frac{\dot{V}}{V_0} = \dot{\varepsilon}_1^0 \varepsilon_2^0 \varepsilon_3^0 + \varepsilon_1^0 \dot{\varepsilon}_2^0 \varepsilon_3^0 + \varepsilon_1^0 \varepsilon_2^0 \dot{\varepsilon}_3^0. \quad (1.134)$$

Разделив (1.134) на (1.77), получим

$$\frac{\dot{V}}{V} = \sum_{i=1}^3 \frac{\dot{\varepsilon}_i^0}{\varepsilon_i^0}. \quad (1.135)$$

Поскольку $\varepsilon_i^0 = \partial x_i / \partial x_i^0$, $\dot{\varepsilon}_i^0 = \partial U_i / \partial x_i^0$ и $\dot{\varepsilon}_i = \dot{\varepsilon}_i^0 / \varepsilon_i^0$, выражение (1.135) примет вид

$$\frac{\dot{V}}{V} = \sum_{i=1}^3 \dot{\varepsilon}_i. \quad (1.136)$$

В правой части (1.136) стоит первый инвариант тензора скоростей деформаций, с которым средняя скорость деформации связана уравнением (1.91). Обозначим $\xi_{\text{ср}} = \dot{\epsilon}_{\text{ср}}$, тогда

$$\dot{\epsilon}_{\text{ср}} = \frac{1}{3} \dot{V}. \quad (1.137)$$

Перейдем к компонентам диватора скоростей деформаций по формулам $\dot{e}_i = \epsilon_i - \dot{\epsilon}_{\text{ср}}$. С учетом (1.131), (1.136) и (1.137) \dot{e}_i примут вид

$$\dot{e}_1 = \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{3} \dot{V}, \quad (1.138)$$

$$\dot{e}_2 = \frac{(\alpha - 1)(4 - \alpha)}{2} \frac{U}{r} - \frac{1}{3} \dot{V}, \quad (1.139)$$

$$\dot{e}_3 = \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{2} \frac{U}{r} - \frac{1}{3} \dot{V}. \quad (1.140)$$

Воспользуемся (1.138)–(1.140) и запишем уравнение энергии (1.133) в виде

$$\dot{E} + P\dot{V} = V \sum_{i=1}^3 S_i \dot{e}_i + V \frac{\partial q}{\partial x}. \quad (1.141)$$

Рассмотрим сумму, стоящую в (1.141). Из (1.30) и (1.33) следуют уравнения

$$S_1 = -\frac{2}{3}(\tau_{31} - \tau_{12}), \quad S_2 = -\frac{2}{3}(\tau_{12} - \tau_{23}), \quad S_3 = -\frac{2}{3}(\tau_{23} - \tau_{31}). \quad (1.142)$$

Совершенно аналогично компоненты диватора скоростей деформаций \dot{e}_i выражаются с помощью (1.61) через деформации сдвига:

$$\dot{e}_1 = -\frac{2}{3}(\dot{\gamma}_{31} - \dot{\gamma}_{12}), \quad \dot{e}_2 = -\frac{2}{3}(\dot{\gamma}_{12} - \dot{\gamma}_{23}), \quad \dot{e}_3 = -\frac{2}{3}(\dot{\gamma}_{23} - \dot{\gamma}_{31}). \quad (1.143)$$

Подставив \dot{e}_i и S_i в

$$\dot{W} = V \sum_{i=1}^3 S_i \dot{e}_i, \quad (1.144)$$

получим

$$\dot{W} = \frac{4}{3} V \sum_{\substack{i=1, k=1 \\ i \neq k}}^3 \tau_{ik} \dot{\gamma}_{ik}. \quad (1.145)$$

Таким образом, \dot{W} есть энергия формоизменения, поскольку скорость ее изменения определяется суммой произведений касательных напряжений на скорости деформаций сдвига. Так как \dot{W} входит в (1.141) равноправно с $P\dot{V}$, энергия формоизменения входит как часть во внутреннюю удельную энергию E .

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОТНЫХ СРЕД

§ 1. Термодинамические потенциалы

Термодинамика занимается рассмотрением макроскопических систем, включающих настолько большое число микрочастиц, что становится возможным перейти к средним по пространству и по времени характеристикам вещества. Вещество в некотором объеме Ω , ограниченном поверхностью F , в зависимости от условий на этой поверхности образует различные термодинамические системы. Вещество или поле, находящееся вне объема Ω , называется окружающей или внешней средой. Если на поверхности F , являющейся границей термодинамической системы, совершается работа каких-либо сил, то говорят о механическом взаимодействии термодинамической системы с окружающей средой. Взаимодействие системы с окружающей средой при отличном от нуля потоке тепла называется тепловым. Взаимодействие, которое приводит к обмену веществом между системой и окружающей средой, называется материальным взаимодействием. Если материальное взаимодействие отсутствует, то термодинамическая система называется замкнутой, а если присутствует, то открытой. При отсутствии механического, теплового и материального взаимодействия система называется изолированной.

Важнейшую роль в термодинамике играет понятие термодинамического равновесия системы. Изолированная термодинамическая система независимо от своего начального состояния в конце концов приходит в состояние, которое с течением времени не меняется. Это состояние называется состоянием термодинамического равновесия.

Система в состоянии термодинамического равновесия характеризуется различными связанными друг с другом определяющими уравнениями термодинамическими величинами. Особое место среди них занимают величины, которые называются термодинамическими функциями или термодинамическими потенциалами. Каждый термодинамический потенциал зависит от конкретного набора независимых термодинамических величин — аргументов. Все остальные термодинамические величины являются частными производными термодинамического потенциала по аргументам, а термодинамические уравнения представляют собой общие аналитические зависимости между этими величинами. Термодинамика дает только общие сведения о форме термодинамических функций и не может определить их вид для конкретного вещества.

Чтобы пояснить сказанное, рассмотрим подробнее один из термодинамических потенциалов — внутреннюю энергию замкнутой системы

$$E = E(V, S), \quad (2.1)$$

где V — объем, а S — энтропия системы. Давление и температура определяются уравнениями

$$P = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S, \quad T = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V \quad (2.2)$$

Полный дифференциал E , записанный с учетом (2.2) в виде

$$dE = -PdV + TdS, \quad (2.3)$$

является основным уравнением термодинамики и содержит пять термодинамических величин: P , V , E , T , S . Поскольку уравнение (2.1) содержит зависимость энергии от объема, а зависимость энергии от первого и второго инвариантов тензора деформаций отсутствует, уравнения (2.1)–(2.3) применимы для описания лишь идеальной среды.

Величина a , определяемая уравнением

$$a^2 = - \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S = \left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2} \right)_S, \quad (2.4)$$

называется жесткостью вещества. Квадрат жесткости с обратным знаком равен наклону изэнтропы в переменных P , V , который, в свою очередь, равен второй производной E по V . Жесткость равна произведению плотности на скорость звука $a = \rho c$. Иногда величину a называют акустическим импедансом. Она указывает, с какой скоростью перемещаются малые возмущения по веществу в лагранжевой системе координат.

Теплоемкость вещества при постоянном объеме определяется уравнением

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V. \quad (2.5)$$

Поскольку E зависит от V и S , а T определяется вторым уравнением (2.2), величина C_V выражается через первую и вторую производные E по S :

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V \left| \left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2} \right)_V \right.$$

Кроме внутренней энергии в термодинамике используются для описания свойств вещества следующие термодинамические потенциалы:

- 1) энтропия $S = S(V, E)$;
- 2) энтальпия $H = H(P, S) = E + PV$;
- 3) свободная энергия Гельмгольца или просто свободная энергия $F = F(V, T) = E - TS$;
- 4) свободная энергия Гиббса или просто термодинамический потенциал $G = G(P, T) = F + PV$;
- 5) функция Мазье $\Psi = \Psi(V, T^{-1}) = -FT^{-1}$;
- 6) функция Планка $\Phi = \Phi(P, T^{-1}) = GT^{-1}$.

Термодинамические величины, являющиеся аргументами термодинамических потенциалов, называются естественными независи-

мыми переменными. Если термодинамическая функция задана как функция естественных независимых переменных, то термодинамические свойства вещества определены полностью. Если же она задана как функция другого набора независимых переменных, то для определения всех термодинамических свойств этого недостаточно.

§ 2. Производные термодинамических величин и соотношения между ними

Из пяти термодинамических величин P , V , E , T , S , входящих в основное уравнение (2.3), любые две могут быть выбраны в качестве естественных независимых переменных. Поскольку ни одной из функций нельзя отдать предпочтения перед другими, для описания свойств вещества необходимо, вообще говоря, рассматривать все 60 частных производных.

Пусть между величинами x , y , z имеется некоторая зависимость. Предположим, что y и z независимы, тогда имеет место выражение для полного дифференциала

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz.$$

Если предположить, что независимыми являются x и z , то

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z dx + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x dz.$$

Выразим из этого уравнения dx :

$$dx = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z} dy - \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z} dz.$$

Потребовав, чтобы оба выражения dx через dy и dz совпадали, получим

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1, \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + 1 = 0. \quad (2.7)$$

Подставляя в (2.6), (2.7) вместо x , y , z поочередно все термодинамические величины, получим систему дифференциальных выражений в частных производных, являющихся частью системы дифференциальных уравнений термодинамики.

Рассмотрим теперь более сложную зависимость между четырьмя величинами x , y , z , η :

$$x = x(y(z, \eta), z).$$

Частные производные этой функции имеют вид

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_\eta = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_\eta, \quad (2.8)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)_z. \quad (2.9)$$

Эти уравнения также составляют часть системы дифференциальных уравнений термодинамики, если вместо x , y , z , η подставлять поочередно все термодинамические функции.

Наконец, еще одна группа уравнений получается из условия независимости второй производной термодинамического потенциала от порядка дифференцирования

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial y}. \quad (2.10)$$

Подставляя в (2.10) вместо x поочередно все термодинамические потенциалы, а вместо y , z их естественные независимые переменные, получаем уравнения Максвелла

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_P, \quad (2.11)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T, \quad (2.12)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_T = -\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P, \quad (2.13)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V = -\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S, \quad (2.14)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_E = P \left(\frac{\partial T}{\partial E}\right)_V - T \left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_V, \quad (2.15)$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P, \quad (2.16)$$

$$-T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_T + P \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T. \quad (2.17)$$

Получаемые после подстановки поочередно всех термодинамических функций в (2.6)–(2.10) 60 частных производных характеризуют свойства вещества, проявляющиеся в различных термодинамических процессах. Наиболее важные из них выражаются в виде соответствующих термодинамических коэффициентов.

1. Изобарическим температурным коэффициентом объемного расширения α называют относительное изменение объема вещества при изменении его температуры при постоянном давлении

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P. \quad (2.18)$$

2. Изотермическим коэффициентом сжимаемости вещества называется относительное изменение объема вещества при изменении

давления в нем при постоянной температуре

$$\beta_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (2.19)$$

3. Адиабатическим коэффициентом сжимаемости или просто сжимаемостью называется относительное изменение объема при изменении давления при постоянной энтропии

$$\beta_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S \quad (2.20)$$

Величина, обратная β_S , называется модулем упругости или модулем всестороннего сжатия

$$K = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S = \rho \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S \quad (2.21)$$

4. Адиабатической скоростью звука называется величина

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S} \quad (2.22)$$

С одной стороны, она указывает, с какой скоростью распространяются малые возмущения в покоящейся среде, а с другой — c^2 определяет наклон адиабат в переменных P, ρ .

5. Изотермической скоростью звука называется величина

$$c_T = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T} \quad (2.23)$$

Величина c_T^2 характеризует наклон изотерм в переменных P, ρ .

Часть термодинамических величин, например P, T, α, β_S, c , могут быть измерены экспериментально в некоторых областях их изменения. Для определения значений термодинамических величин, которые не поддаются прямому экспериментальному измерению, могут быть использованы соответствующие дифференциальные уравнения термодинамики, применение которых связано с необходимостью знать уравнение состояния вещества.

В качестве примера применения термодинамических уравнений выразим термодинамические коэффициенты (2.18) — (2.22) через производные известной функции $E(V, S)$. В § 1 было показано, что P, T, a^2 и C_V выражаются через частные производные E по V или S . Поэтому сразу перейдем к α, β_T, β_S и K . Сначала в (2.7) обозначим $x = P, y = V, z = S$. Тогда из (2.7) следует

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_P = - \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S / \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_V$$

Подставив сюда (2.2), получим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_P = - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2} \right)_S / \left(\frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S} \right) \quad (2.24)$$

Далее в (2.8) положим $x = T$, $y = S$, $z = V$, $\eta = P$. В результате

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S + \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_P. \quad (2.25)$$

Из (2.18), (2.24) и (2.25) вытекает, что

$$\alpha = \frac{\frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S}}{V \left(\left(\frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2} \right)_V \left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2} \right)_S \right)}. \quad (2.26)$$

Перейдем теперь к выражению β_T через частные производные функции E . Положим в (2.7) $x = T$, $y = V$, $z = S$. Из (2.7) при таком выборе x , y , z имеем

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = - \frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S} \left/ \left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2} \right)_V \right. \quad (2.27)$$

Положим $x = V$, $y = S$, $z = P$, $\eta = T$ и с помощью (2.6) запишем (2.8) в виде

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S + \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T. \quad (2.28)$$

Выразим отсюда $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$, подставим в полученное уравнение (2.24) и (2.27) и производную $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ — в (2.19). В результате

$$\beta_T = \frac{\left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2} \right)_V}{V \left(\left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2} \right)_S \cdot \left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2} \right)_V - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S} \right)^2 \right)}. \quad (2.29)$$

Величины β_S и K выражаются просто из (2.20) и (2.21):

$$\beta_S = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2} \right)_S^{-1}, \quad K = V \left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2} \right)_S. \quad (2.30)$$

Выразим еще теплоемкость C_P через частные производные функции E . Величина C_P может быть с хорошей точностью измерена экспериментально, а это может служить информацией для построения зависимости $E(V, S)$. По определению

$$C_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P. \quad (2.31)$$

Применим (2.8) и запишем:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P = \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V + \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P. \quad (2.32)$$

Производную $\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P$ запишем с помощью (2.7):

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P = - \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V / \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S. \quad (2.33)$$

Подставив (2.33) в (2.32), полученное выражение в (2.31) и приняв во внимание (2.2), получим

$$C_P = \frac{\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V \left(\frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S}\right)}{\left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\right) \left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S}\right)^2}. \quad (2.34)$$

Аналогично находятся все нужные производные термодинамических величин.

§ 3. Уравнения состояния металлов

Уравнения механики сплошной среды при отсутствии теплопроводности не содержат в явном виде температуру вещества. Для замыкания системы законов сохранения в случае адиабатических движений идеальной однокомпонентной среды достаточно уравнения состояния в форме

$$y = f(x_1, x_2), \quad (2.35)$$

где x_1, x_2 — независимые и y — единственная зависимая термодинамические величины. Законы сохранения массы, количества движения и энергии содержат давление P , удельную внутреннюю энергию E и удельный объем V (величина, обратная плотности ρ). Эти величины выбираются в (2.35) в качестве x_1, x_2, y . Количество типов уравнений состояния вида (2.35) равно числу сочетаний из 3 по 2, т. е. $C_2^3 = 3$. Вместо закона сохранения энергии часто используется одно из следствий системы законов сохранения в виде условия адиабатичности, содержащего удельную энтропию S . Число типов уравнений состояния, в которых в качестве x_1, x_2, y выбираются P, V, S , также равно трем. Все уравнения состояния вида (2.35) отнесем к классу «А».

Если теплопроводность является существенной характеристикой движений вещества, то возникает необходимость в расширении класса «А» добавлением к указанным термодинамическим переменным еще и температуры T . В этом случае уравнение состояния принимает форму системы двух термодинамически согласованных уравнений

$$y_1 = f_1(x_1, x_2), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2). \quad (2.36)$$

Если в качестве термодинамических переменных берутся P, V, E, T , то число типов уравнений состояния равно $C_4^2 = 6$. Все уравнения состояния вида (2.36) отнесем к классу «Т».

Для лагранжевой частицы, которая деформируется при постоянной энтропии, уравнение энергии записывается так: $dE + PdV =$

= 0. Если в качестве независимых термодинамических переменных взять P и V , то уравнение энергии при постоянном S будет

$$\frac{dP}{dV} = - \frac{P + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_P}{\left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_V}$$

При определении правой части этого уравнения нужно рассчитать три функции от P, V :

$$E = E(P, V), \quad \frac{\partial E}{\partial V} = \varphi_1(P, V), \quad \frac{\partial E}{\partial P} = \varphi_2(P, V).$$

Точно так же должно быть задано уравнение состояния в случае, когда независимыми являются P, E .

Если в качестве независимых термодинамических функций взять V, E , то уравнение энергии превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dE}{dV} = -P(V, E). \quad (2.37)$$

Уравнения состояния в этом случае достаточно задать в виде одной функции:

$$P = P(V, E), \quad (2.38)$$

что заметно проще, чем в двух предыдущих случаях. Этой функции оказывается достаточно, чтобы описать свойства вещества, проявляющиеся в адиабатических процессах без фазовых переходов. И лишь при необходимости (учет фазовых переходов испарения, плавления и полиморфных переходов, учет теплового расширения вещества или теплопроводности) уравнение состояния (2.38) должно дополняться вторым уравнением

$$T = T(V, E) \text{ либо } E = E(V, T), \quad (2.39)$$

т. е. переходить из класса «А» в класс «Т».

Подробное обоснование преимуществ уравнений состояния вида (2.38), (2.39) перед уравнениями состояния с другими независимыми функциями дано в [1].

Известно не так уж много аналитических форм уравнений состояния. Это вызвано тем, что все они опираются на одни и те же фундаментальные свойства вещества. Все вещества независимо от их агрегатного состояния состоят из частиц (атомов, молекул, электронов и др.), характер взаимодействия между которыми определяет разнообразие физических и механических свойств сплошной среды. Основной чертой, отличающей металлы в твердом (или жидком) состоянии от газов, является сильное взаимодействие между атомами, которое носит двоякий характер. С одной стороны, атомы, удаленные друг от друга на достаточно большое расстояние, притягиваются друг к другу, а с другой — сближенные на достаточно малое расстояние они будут отталкиваться друг от друга из-за взаимодействия электронных оболочек. Таким образом, при отсутствии

внешнего давления, должно существовать некоторое равновесное состояние и соответственно расстояние между атомами, в котором силы притяжения и отталкивания взаимно уравниваются. Очевидно, это равновесное состояние, как следует из принципа устойчивости в механике, отвечает минимуму энергии взаимодействия или минимуму потенциальной энергии. Чтобы сжать твердый или жидкий металл, необходимо преодолеть силы отталкивания, которые быстро растут при сближении атомов. Так, для сжатия металлов в 2 раза следует приложить внешнее давление в несколько сотен гигапаскалей.

Давление P и внутреннюю энергию E можно разделить на две составляющие следующим образом. Если в функцию $E(V, S)$ положить $S = 0$, то зависимость $E(V, 0)$ опишет зависимость удельной внутренней энергии от удельного объема на нулевой изэнтропе. Согласно теореме Нэрнста, нулевая изэнтропа совпадает с нулевой изотермой и на этой линии $S = 0$, $T = 0$, $C_p = 0$, $C_v = 0$. Поэтому энергию $E(V)$ вещества на нулевой изэнтропе можно считать «холодной». Обычно ее обозначают $E_x(V)$ и выражение для $E(V, S)$ представляют в виде

$$E = E_x(V) + E_\tau(V, S). \quad (2.40)$$

Тепловая энергия E_τ при таком представлении должна обращаться в нуль при $S = 0$. Из (2.2) и (2.40) следует уравнение для P и T

$$P = -\frac{dE_x}{dV} - \left(\frac{dE_\tau}{dV}\right)_S, \quad T = \left(\frac{\partial E_\tau}{\partial S}\right)_V. \quad (2.41)$$

Величины

$$P_x(V) = -\frac{dE_x}{dV}, \quad P_\tau = -\left(\frac{\partial E_\tau}{\partial V}\right)_S \quad (2.42)$$

называются холодным и тепловым давлением. В результате уравнение для P имеет вид

$$P = P_x(V) + P_\tau(V, S). \quad (2.43)$$

Поскольку P_x и E_x зависят только от V , процессы сжатия и расширения холодного вещества происходят обратимо при $S = 0$. Это дает основание называть $P_x(V)$, $E_x(V)$ упругим давлением и упругой энергией. Первые члены в правой части выражений (2.40) и (2.43) определяются силами взаимодействия между атомами и зависят только от удельного объема V или плотности ρ . Вторые члены в правой части выражений (2.40) и (2.43) связаны с тепловым движением атомов и зависят от удельного объема (плотности) и энтропии или температуры.

Теоретические расчеты зависимостей $P_x(V)$ и $E_x(V)$ в практически достигнутом диапазоне плотностей и давлений основаны на квантово-механическом рассмотрении взаимодействия атомов. При этом в ряде случаев теоретические результаты удовлетворительно согласуются с опытными данными. Однако основная информация о кривых упругого сжатия $P_x(V)$ и $E_x(V)$ в диапазоне давлений до нескольких сотен гигапаскалей извлекается путем обра-

ботки экспериментальных данных по ударно-волновой сжимаемости твердых тел.

Механически равновесное состояние конденсированного вещества при $T=0$ и $P=0$ характеризуется взаимной компенсацией межатомных сил притяжения и отталкивания и минимумом упругой энергии $E_x(V)$, который можно принять за начало ее отсчета: $E_x=0$ при $V=V_{0к}$. Величина $V_{0к}$ характеризует удельный объем кристаллического состояния с максимально плотной упаковкой атомов при температуре $T=0$ К. Это величина теоретическая. В нормальных условиях при $T=300$ К, $P=0.1$ МПа удельный объем вещества V всегда больше $V_{0к}$ из-за теплового объемного расширения и дефектов кристаллической структуры. Нормальный удельный объем вещества V_0 , как правило, превосходит удельный объем $V_{0к}$ на 1—2 %.

Холодному давлению для изотермического всестороннего сжатия вещества при $T=0$ из состояния равновесия необходимо совершить работу против сил отталкивания, аналогично для изотермического расширения — против сил притяжения. И в том и другом случае холодная энергия будет возрастать, поскольку в состоянии равновесия достигается ее минимум. Зависимость холодной энергии от удельного объема имеет такой же характер, как зависимость потенциальной энергии взаимодействия двух атомов в молекуле от расстояния между ядрами (рис. 2.1). С увеличением плотности ρ силы отталкивания быстро растут и соответственно растет холодная энергия. Изменение P_x и E_x при сжатии иллюстрируется следующими значениями для меди: при сжатии в 1.2 раза $P_x=38.67$ ГПа и $E_x \approx 0.302$ кДж/г, при сжатии в 2 раза $P_x=573.98$ ГПа и $E_x \approx 7.71$ кДж/г.

С уменьшением плотности силы взаимодействия быстро убывают, поэтому упругая энергия, возрастая, стремится к постоянному значению Q_0 , равному удельной теплоте испарения конденсированного вещества при нулевой температуре. Для металлов величина Q_0 составляет обычно несколько килоджоулей на грамм. Из рис. 2.1 видно, что $P_x(V) < 0$ при $V > V_{0к}$. Отрицательный знак давления означает, что для всестороннего расширения вещества необходимо приложить растягивающее усилие. Величина наименьшего давления $P_{x\min}$ зависит от вида кривой $P_x(V)$, а также от величины Q_0 . Связь между работой силы $P_x(V)$ и теплотой испарения Q_0 такова:

$$Q_0 = - \int_{V_{0к}}^{\infty} P_x(V) dV. \quad (2.44)$$

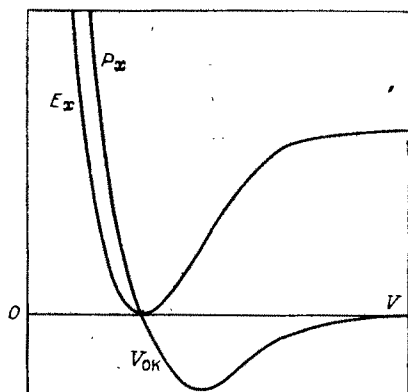


Рис. 2.1. Зависимость холодного давления P_x и холодной энергии E_x от удельного объема V .

При нагревании вещества атомы приходят в движение. Если температура не слишком высока, атомы совершают малые колебания около положения равновесия. С увеличением температуры растут амплитуда и энергия колебаний. Поскольку кривая потенциальной энергии E_x несимметрична относительно положения минимума при $V = V_{0н}$, колебания частиц в общем случае носят ангармоничный характер. Ангармоничность в металлах проявляется сильнее с ростом температуры. Это приводит к тому, что равновесное положение при повышении температуры смещается в сторону больших значений удельного объема — вещество расширяется. Когда энергия колебаний становится больше величины потенциального барьера, атомы начинают свободно перемещаться в объеме вещества. Тепловое движение атомов при этом приобретает сложный характер и становится хаотическим. Конденсированное вещество начинает вести себя как газ.

При сжатии вещества резко возрастают силы отталкивания между соседними атомами, что «как бы локализует» положение атомов, затрудняя их свободное перемещение. Данное обстоятельство поднимает потолок температур, при которых еще можно считать, что атомы совершают колебательное движение. Если температуры не слишком большие, то поведение веществ определяется конкретными особенностями электронного энергетического спектра атомов, составляющих кристаллическую решетку, вследствие чего поведение твердых тел характеризуется большим разнообразием свойств каждого химического элемента. Это требует привлечения для расчета свойств конденсированных сред прямых квантово-механических методов. Чаще всего предполагают, что тепловая энергия и тепловое давление определяются вкладом энергии ядер и электронов, которые рассматриваются независимо.

В простейших моделях металлов принято считать, что электроны образуют свободный электронный газ, который целиком заполняет объем и подчиняется квантовой статистике Ферми — Дирака (вырожденный газ). Металл для свободных электронов является как бы потенциальной ямой, выход из которой требует работы по преодолению сил связи, удерживающих электроны в металле. При повышении температуры металла тепловому возбуждению подвергается часть электронов, наиболее удаленных от ядра, число которых определяется приближенным уравнением

$$\frac{\Delta N}{N} \approx \frac{kT}{2E_F},$$

где E_F — энергия Ферми — максимальная кинетическая энергия, которой может обладать электрон при абсолютном нуле. Каждый термически возбуждаемый электрон поглощает энергию порядка kT . Энергия электронного газа равна произведению kT на число термически возбужденных электронов

$$E_e \approx \frac{N (kT)^2}{2E_F}.$$

Поскольку энергия Ферми зависит от плотности ρ , энергия электронного газа может быть записана в виде

$$E_c = \varphi(V) T^2 \quad (2.45)$$

§ 4. Зависимость E_x от удельного объема

Основными структурными элементами металлов являются положительные ионы и газ свободных электронов. Силы притяжения определяются кулоновским взаимодействием электронов с ионами, а также обменной энергией между электронами. Силы отталкивания также определяются кулоновским взаимодействием, кинетической энергией свободных электронов и перекрытием электронных оболочек ионов. Анализ указанных сил [2] приводит к следующей зависимости E_x от сжатия $\delta = \rho/\rho_{ок}$:

$$E_x = a \exp(b(1 - \delta^{-1/3})) + d\delta^{2/3} - c\delta^{1/3}. \quad (2.46)$$

В металлах со слабым перекрытием электронных оболочек влияние первого члена в (2.46) мало. Если вклад в энергию взаимодействия перекрытия оболочек не мал, то вторым членом в (2.46) можно пренебречь и зависимость $E_x(\delta)$, которая получается в этом случае

$$E_x = a \exp(b(1 - \delta^{-1/3})) - c\delta^{1/3}, \quad (2.47)$$

по форме будет совпадать с уравнением для ионных кристаллов. Уравнение (2.47) широко применяется для описания свойств холодных металлов [2, 3].

Далее мы кратко изложим результаты обзора [3] по холодным потенциалам для разных типов веществ. Например, для валентных кристаллов предлагается уравнение

$$E_x = (a\delta^{1/3} - c) \exp(b(1 - \delta^{-1/3})). \quad (2.48)$$

Исходя из феноменологической теории конечных деформаций Мурнагана, Бэрч предложил для холодного давления уравнение

$$P_x = 1.5a_1(\delta^{7/3} - \delta^{5/3})(1 + a_2 - a_2\delta^{2/3}).$$

Если с помощью первого уравнения (2.42), записанного в виде

$$P_x = \rho_{ок}\delta^2 \frac{dE_x}{d\delta}, \quad (2.49)$$

перейти от $P_x(\delta)$ к $E_x(\delta)$, то уравнение Бэрча будет

$$E_x = \frac{3a_1}{4\rho_{ок}} (\delta^{4/3}(1.5 + 3a_2) - 3(1 + a_2)\delta^{2/3} - a_2\delta^2 + a_2 + 1.5). \quad (2.50)$$

Уравнение (2.50) получается, если деформация описывается в переменных Эйлера. Если точно такое рассмотрение провести в переменных Лагранжа, то зависимость холодной энергии от δ примет вид

$$E_x = \frac{3a_1}{4\rho_{ок}} (a_2\delta^{-2} + 1.5(1 - 2a_2)\delta^{-4/3} - 3(1 - a_2)\delta^{-2/3} + 1.5 - a_2). \quad (2.51)$$

Наиболее широкое распространение получило уравнение

$$E_x = A\delta^{m/3} - B\delta^{n/3}. \quad (2.52)$$

Рассматривая это уравнение в 1903 г., Ми полагал $n = 3$. Уравнение (2.52) при $n = 3$ использовал в 1923 г. Борн. Исследования многих ученых (Борна, Слейтера, Леннарда — Джонса, Грюнайзена, Паулинга, Бардина и др.) были направлены на уточнение n . Пак, Эванс и Джеймс использовали требование об экспоненциальном увеличении давления с ростом плотности и пришли к уравнению

$$E_x = \frac{3A}{\rho_{ок}} \left(\frac{1}{b} \left(\delta^{-4/3} + \frac{4}{b} \delta^{-1} + \frac{12}{b^2} \delta^{-2/3} + \frac{24}{b^3} \delta^{-1/3} + \frac{24}{b^4} \right) \exp(b(1 - \delta^{-1/3})) + \frac{1}{5} (\delta^{-5/3} - 1) - \frac{1}{b} \left(1 + \frac{4}{b} + \frac{12}{b^2} + \frac{24}{b^3} + \frac{24}{b^4} \right) \right). \quad (2.53)$$

Ряд других зависимостей E_x от δ обсуждается в [4, 5]. Анализ перечисленных и других зависимостей $E_x(\delta)$ показывает, что аналитическая форма неустойчива относительно квантово-механических предположений о свойствах вещества — небольшие их отличия приводят к сильно различающимся аналитическим зависимостям. Несмотря на заметное продвижение в области теоретических моделей кристаллического состояния вещества, в настоящее время не удается построить теоретическую зависимость $E_x(\delta)$, адекватно описывающую поведение вещества. Как правило, возникает необходимость использования экспериментальных данных для уточнения численных значений параметров, входящих в $E_x(\delta)$.

Рассмотрим несколько критериев, позволяющих выбрать из перечисленных типов зависимостей $E_x(\delta)$ физически непротиворечивые в широком диапазоне изменения δ . Эти условия имеют вид

$$P_x = 0, E_x = 0 \quad \text{при } \delta = 1, \quad (2.54)$$

$$P_x = 0, E_x = Q_0 \quad \text{при } \delta = 0, \quad (2.55)$$

$$P_x \rightarrow \infty \quad \text{при } \delta \rightarrow \infty, \quad (2.56)$$

$$\frac{dP_x}{d\rho} = c_{ок}^2 \quad \text{при } \delta = 1. \quad (2.57)$$

Уравнения (2.46) — (2.48), (2.51), (2.52) не удовлетворяют второму условию (2.55), уравнение (2.50) — условию (2.56). Остается уравнение (2.53), которое не противоречит условиям (2.54) — (2.57). Подставив (2.53) в (2.49), получим

$$P_x = A\delta^{-2/3} (\exp(b(1 - \delta^{-1/3})) - 1). \quad (2.58)$$

Из (2.58) следует, что $P_x \rightarrow -\infty$ при $\delta \rightarrow 0$, что противоречит условию (2.55). Таким образом, ни одно из рассмотренных выше уравнений $E_x(\delta)$ не удовлетворяет совокупности условий (2.54) — (2.57). Следовательно, эти уравнения применимы в существенно более узкой области изменения δ , чем область, охваченная условиями (2.54) — (2.57).

Для построения зависимости $E_x(\delta)$ может быть рекомендован следующий подход. Аналитические зависимости $E_x(\delta)$ при $\delta < 1$ и при $\delta > 1$ выбираются разными. В области $\delta < 1$ хорошие результаты дает зависимость P_x от δ :

$$P_x = \frac{\rho_{0к} c_{0к}^2}{m-n} (\delta^m - \delta^n). \quad (2.59)$$

Подставив (2.59) в (2.49) и проинтегрировав от 1 до δ , получим

$$E_x = \frac{c_{0к}^2}{m-n} \left(\frac{\delta^{m-1} - 1}{m-1} - \frac{\delta^{n-1} - 1}{n-1} \right). \quad (2.60)$$

Величина $c_{0к}$ должна быть измерена экспериментально. Связь m и n следует из второго условия (2.55) в виде

$$(m-1)(n-1)Q_0 = c_{0к}^2. \quad (2.61)$$

Метод определения Q_0 будет изложен ниже. Таким образом, остается одна величина (например, n), которую можно варьировать с целью наилучшего описания экспериментальных данных. Экспериментально измеряемыми величинами чаще всего бывают $\rho(T)$, $C_p(T)$, $c(T)$, $E(T)$ при постоянном давлении. Следовательно, появляется связь между параметрами зависимости холодной энергии от δ и тепловыми членами уравнения состояния.

В области $\delta > 1$ широко применяется [6] зависимость

$$E_x = c_{0к}^2 \sum_{i=1}^N a_i (\delta^{i/3} - 1) 3/i. \quad (2.62)$$

Этой зависимости $E_x(\delta)$ соответствует холодное давление

$$P_x = \rho_{0к} c_{0к}^2 \sum_{i=1}^N a_i \delta^{1+i/3}. \quad (2.63)$$

Параметры a_i связаны уравнениями, получаемыми из условий (2.54) — (2.57), в виде

$$\sum_{i=1}^N a_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{i} = -\frac{1}{3} \rho_{0к} Q_0. \quad (2.64)$$

В [6] приведены для ряда металлов численные значения всех параметров уравнения состояния и показано удовлетворительное совпадение теоретических ударных адиабат с экспериментальными из работ [7, 8].

§ 5. Квантовая теория теплоемкости одноатомных твердых тел

Если предположить, что атомы колеблются около положения равновесия независимо друг от друга, каждый из них имеет три степени свободы и частоты колебаний всех атомов одинаковы, то система из N атомов может быть замечена системой из $3N$ осцил-

ляторов с одной степенью свободы. Изменение энергии тела распределяется между осцилляторами целыми квантами, число которых на один осциллятор подчиняется распределению Больцмана

$$N = N_0 \exp(-ih\nu/kT),$$

где ν — частота колебаний; h — постоянная Планка, N_0 — число осцилляторов, не получивших ни одного кванта энергии; N — число осцилляторов, получивших по i квантов. При $T = 0$ удельная энергия тела равна $E_x(V)$. При изменении T внутренняя энергия растет

$$E = E_x(V) + nh\nu, \quad (2.65)$$

где n — число квантов энергии, которое получило тело при повышении температуры от 0 до T . Подставив E в (2.5), имеем

$$C_V = h\nu \frac{\partial n}{\partial T}. \quad (2.66)$$

Число квантов энергии n определяется из условия минимума свободной энергии системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия при постоянных T и V :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_{T,V} = 0.$$

Подставив сюда выражения для свободной энергии $F = E - TS$, а вместо E взяв выражение (2.65), получим

$$\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_{T,V} = h\nu - T \left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)_{T,V} = 0. \quad (2.67)$$

Для нахождения $\left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)_{T,V}$ используется формула, связывающая энтропию с термодинамической вероятностью состояния системы W

$$S = k \ln W. \quad (2.68)$$

Величина W выражается через число квантов N

$$W = \frac{(n + 3N - 1)! 3N}{n! (3N)!}. \quad (2.69)$$

Из (2.69) и (2.68) следует

$$S = k \left(\ln(n + 3N - 1)! - \ln n! + \ln \frac{3N}{(3N)!} \right). \quad (2.70)$$

Воспользовавшись формулой Стирлинга $\ln x! = x(\ln x - 1)$, преобразуем (2.70) и полученное уравнение подставим в (2.67). Тогда

$$n = \frac{3N - 1}{\exp(h\nu/kT) - 1}.$$

Поскольку $3N \gg 1$, единицу в числителе можно отбросить. Тепловая энергия системы получается после умножения энергии одного кванта $h\nu$ на число квантов n

$$E_T = \frac{3N h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}.$$

Умножив и разделив на k и приняв во внимание, что $Nk = R$, получим

$$E_T = \frac{3R (h\nu/k)}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (2.71)$$

Дифференцирование этого уравнения по T дает уравнение для теплоемкости

$$C_V = 3R \left(\left(\frac{h\nu}{kT} \right)^2 \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \right) / \left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right)^2. \quad (2.72)$$

Это есть формула Эйнштейна. При $T \rightarrow \infty$ $C_V \rightarrow 3R$ в соответствии с законом Дюлонга и Пти. С другой стороны, $C_V \rightarrow 0$ при $T \rightarrow 0$, что согласуется с теоремой Нэрнста.

Величина ν зависит от свойств вещества и для конкретного вещества является величиной постоянной. Поэтому можно для каждого вещества найти такую температуру Θ , при которой $\frac{h\nu}{k\Theta} = 1$, т. е. теплоемкости всех тел при температуре Θ будут одинаковыми и равными $2.78R$. Величина Θ называется характеристической температурой Эйнштейна. После введения характеристической температуры уравнения (2.71) и (2.72) запишутся так:

$$E_T = 3R\Theta / (\exp(\Theta/T) - 1), \quad (2.73)$$

$$C_V = 3R \left(\left(\frac{\Theta}{T} \right)^2 \exp\left(\frac{\Theta}{T}\right) \right) / \left(\exp\left(\frac{\Theta}{T}\right) - 1 \right)^2. \quad (2.74)$$

Теория теплоемкости твердого тела Эйнштейна в области низких температур не описывает экспериментальных данных. Несколько более точно зависимость E_T и C_V от T описывается теорией Дебая, применение которой приводит к уравнениям

$$E_T = 9R\Theta_D \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^4 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^3}{e^x - 1} dx, \quad (2.75)$$

$$C_V = 9R \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx. \quad (2.76)$$

Величина Θ_D есть характеристическая температура Дебая, при которой выполняется условие

$$\frac{h\nu_{\max}}{k\Theta_D} = 1,$$

где ν_{\max} — максимальная частота колебаний твердого тела. Значения температуры Дебая для некоторых веществ следующие:

Вещество	Be	Al	Cu	Fe	Ti	Mo	Pb	Mg
Θ_D , К	1160	423	342	457	425	459	102	396

Для большинства металлов температура Дебая находится в преде-

$$D\left(\frac{\Theta_D}{T}\right) = 3\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx \quad (2.77)$$

называется функцией Дебая. Значения $D(\Theta_D/T)$ представлены ниже:

T/Θ_D	0	0.100	0.200	0.333	0.500	0.833	1.000	1.250	2.000	5.000	∞
$D(T/\Theta_D)$	0	0.075	0.369	0.662	0.825	0.932	0.953	0.970	0.987	0.998	1.000

Как видно, при $T = \Theta_D$ значение функции Дебая близко к единице.

Таким образом, для большинства металлов уже в области умеренных температур удельная теплоемкость атомов близка к теоретическому значению, определенному правилом Дюлонга — Пти.

§ 6. Тепловая энергия и тепловое давление

Как показано в § 5, тепловые составляющие давления и энергии состоят из двух частей. Первое слагаемое описывает свойства атомов (ионов, ядер), второе — электронов. Из (2.73) и (2.75) видно, что тепловая энергия ядер зависит только от температуры, а тепловая энергия электронов удовлетворительно описывается уравнением (2.45). Следовательно,

$$E_T = f(T) + \varphi(V)T^2. \quad (2.78)$$

Преобразуем уравнение термодинамической совместности (2.16) с помощью (2.42) так, чтобы оно не содержало P_T и E_T :

$$\left(\frac{\partial E_T}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P_T}{\partial T}\right)_V - P_T. \quad (2.79)$$

Подставив (2.78) в (2.79), получим линейное дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial P_T}{\partial T}\right)_V - \frac{P_T}{T} = T \frac{d\varphi}{dV}, \quad (2.80)$$

решение которого определяет зависимость P_T от V и T :

$$P_T = \psi(V)T + \frac{d\varphi}{dV} T^2. \quad (2.81)$$

Найдем еще выражение для C_V , дифференцируя E_T по T :

$$C_V = \frac{df(T)}{dT} + 2\varphi(V)T. \quad (2.82)$$

Величина $\frac{df(T)}{dT}$ есть не что иное, как теплоемкость атомов (ионов, ядер) в узлах кристаллической решетки. В качестве функции $f(T)$ возьмем зависимость $E_T(T)$, определяемую выражением (2.75). Тогда

да (2.78) и (2.82) примут вид

$$C_V = 3RD \left(\frac{\Theta_D}{T} \right) + 2\varphi(V)T, \quad (2.83)$$

$$E_T = 3RTF \left(\frac{\Theta_D}{T} \right) + \varphi(V)T^2, \quad (2.84)$$

где

$$F \left(\frac{\Theta_D}{T} \right) = 3 \left(\frac{T}{\Theta_D} \right) \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^3}{e^x - 1} dx. \quad (2.85)$$

Построенные тепловые компоненты уравнения состояния содержат пока две не определенные функции $\varphi(V)$ и $\psi(V)$. Чтобы их найти, запишем уравнение, связывающее тепловые компоненты давления и энергии

$$P_T V = \Gamma E_T. \quad (2.86)$$

Величина Γ , называемая функцией или коэффициентом Грюнайзена, в общем случае зависит от двух термодинамических переменных. Выразим Γ из (2.86) и подставим в полученное уравнение P_T и E_T . В результате

$$\Gamma = \frac{\psi(V)V + TV \frac{d\varphi(V)}{dV}}{3RF(\Theta_D/T) + T\varphi(V)}. \quad (2.87)$$

Из (2.87) следует, что $\Gamma \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow 0$, поскольку $F(\Theta_D/T) \rightarrow 0$. Это резко противоречит предположению Грюнайзена о постоянстве $\Gamma = \Gamma_0$ в уравнении состояния Ми — Грюнайзена

$$P = P_x(V) + \frac{\Gamma_0}{V} E_T. \quad (2.88)$$

Рассмотрим условия, при которых уравнение состояния с тепловой энергией (2.78) может быть сведено к уравнению состояния Ми — Грюнайзена. Подставив (2.78) и (2.81) в (2.86), получим

$$\Gamma = \frac{VT\psi(V) + T^2 \frac{d\varphi}{dV} V}{f(T) + T^2\varphi(V)}. \quad (2.89)$$

Далее примем во внимание, что уравнение состояния Ми — Грюнайзена применимо при $T > \Theta_D$, т. е. в области, где $C_V \approx 3R$. Это означает, что должно быть

$$f(T) = 3RT. \quad (2.90)$$

С учетом (2.90) уравнение (2.89) примет вид

$$\Gamma_0 = \frac{\psi(V)V + TV \frac{d\varphi}{dV}}{3R + T\varphi(V)}. \quad (2.91)$$

Поскольку первые члены в числителе и знаменателе не зависят от

T , независимо друг от друга должны быть выполнены условия

$$V\psi(V) = 3R\Gamma_0, \quad \frac{d \ln \varphi}{d \ln V} = \Gamma_0. \quad (2.92)$$

Из второго условия (2.92) следует

$$\varphi(V) = BV^{\Gamma_0}, \quad (2.93)$$

где $B = \text{const}$, $\Gamma_0 = \text{const}$. Определение функций $\varphi(V)$ и $\psi(V)$ дает возможность записать выражение теплоемкости и тепловых компонент давления и энергии в уравнении состояния Ми — Грюнайзена.

$$\begin{aligned} E_T &= 3RT + BV^{\Gamma_0}T^2, \\ P_T V &= \Gamma_0(3RT + BV^{\Gamma_0}T^2), \\ C_V &= 3R + 2BV^{\Gamma_0}T. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Значение множителя Грюнайзена Γ_0 может быть выражено через величины, которые измеряются экспериментально. Продифференцируем (2.86) по T при постоянном V

$$\Gamma_0 \left(\frac{\partial E_T}{\partial T} \right)_V = V \left(\frac{\partial P_T}{\partial T} \right)_V. \quad (2.95)$$

Подставив (2.5) в (2.95), используя (2.7) в виде

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T,$$

и приняв во внимание, что $\left(\frac{\partial P_T}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$, получим

$$\Gamma_0 C_V = -V^2 \alpha \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T. \quad (2.96)$$

Заменяем C_V в (2.96) теплоемкостью C_P . Для этого исключим T в (2.5) и (2.31). В результате имеем

$$\frac{C_P}{C_V} = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V. \quad (2.97)$$

Производные энтропии по T заменим с помощью (2.7)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_S \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_T = -1, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_T = -1. \quad (2.98)$$

Выразив $\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P$, $\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V$ из (2.98) и подставив в (2.97), получим

$$\frac{C_P}{C_V} = \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_S \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S}{\left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T}$$

В силу (2.9) это уравнение упрощается:

$$\frac{C_P}{C_V} = \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}. \quad (2.99)$$

Выразим из (2.99) C_V и подставим в (2.96). Тогда

$$\Gamma_0 = \frac{\alpha c^2}{C_P}. \quad (2.100)$$

В правой части (2.100) стоят величины, которые определяются экспериментально: скорость звука, коэффициент объемного расширения и теплоемкость при постоянном давлении. Следует отметить, что при выводе этой формулы предполагалось, что $\Gamma_0 = \text{const}$. Следовательно, формула (2.100) может быть использована лишь в точке при фиксированных значениях P , T , V . Поскольку α , c и C_P измеряются в экспериментах независимо, то, вообще говоря, $\Gamma_0 \neq \text{const}$. Замена функции $\Gamma(V, T)$ постоянной величиной Γ_0 означает, что уравнение состояния Ми — Грюнрайзена применимо лишь там, где разность $\Gamma - \Gamma_0$ мала. Значения Γ_0 в нормальных условиях ($P = 10^{-4}$ ГПа, $T = 300$ К), полученные разными методами [9—14], для большинства металлов лежат в пределах 1.5—2.0 (табл. 2.1) и зависят от метода определения.

Из (2.91) следует, что при $T \rightarrow 0$ вклад вторых слагаемых в числителе и знаменателе уменьшается и Γ определяется отношением теплового давления ядер к их тепловой энергии. С целью повышения точности описания свойств веществ многими авторами вводится понятие о решеточном (холодном) коэффициенте Грюнрайзена. Для получения зависимости $\Gamma_x(V)$ предполагается, что средняя частота колебаний тела зависит от его объема. Согласно Слэтеру и Ландау, все частоты изменяются пропорционально скорости звука и обратно пропорционально межатомному расстоянию. Конкретизация этих предположений может приводить к различным теоретическим зависимостям $\Gamma_x(V)$. Их подробный анализ дан в

Т а б л и ц а 2.1

Металл	Значение функции Грюнрайзена Γ_0				Металл	Значение функции Грюнрайзена Γ_0			
	[10]	[11]	[12]	[14]		[10]	[11]	[12]	[14]
Li	—	0.83	0.89	1.17	Cu	1.97	2.10	1.96	1.96
Na	—	1.27	1.31	1.25	Zn	—	2.88	2.03	—
Al	2.18	1.70	2.14	2.17	Mo	1.65	2.30	1.61	1.57
K	—	1.47	1.34	1.34	Ag	—	2.50	2.43	2.40
Mg	1.63	—	—	—	Sn	—	1.96	2.22	—
Ti	1.33	1.71	1.28	—	Au	—	2.50	3.06	3.03
Fe	1.81	2.02	1.70	1.60	Pb	2.84	2.55	2.74	2.73
Ni	2.00	2.01	1.83	1.88					

δ	Значение Γ_x				δ	Значение Γ_x			
	Al	Cu	Ni	Pb		Al	Cu	Ni	Pb
1.1	1.862	1.983	2.013	2.265	1.6	1.403	1.732	1.693	1.661
1.2	1.711	1.927	1.930	2.056	1.7	1.358	1.692	1.648	1.607
1.3	1.604	1.872	1.858	1.913	1.8	1.319	1.655	1.607	1.561
1.4	1.522	1.821	1.797	1.808	1.9	1.285	1.621	1.569	1.522
1.5	1.457	1.775	1.742	1.726	2.0	1.254	1.589	1.535	1.487

[3], там же приведена обобщенная зависимость $\Gamma_x(V)$

$$\Gamma_x(V) = \frac{t-2}{3} - \frac{V}{2} \frac{d^2(P_x(V) V^{2t/3})/dV^2}{d(P_x(V) V^{2t/3})/dV}. \quad (2.101)$$

Значение $t=0$ отвечает теории Ландау — Слэтера, $t=1$ — Дугдэйла — Макдональда, $t=2$ — теория свободного объема. Предельное значение $\Gamma_x(V)$ при $V \rightarrow 0$ равно $2/3$.

Будем считать, что при $T \rightarrow 0$ величина Γ стремится к $\Gamma_x(V)$. Это предположение дает возможность оценить функцию $\psi(V)$

$$\psi(V) = \frac{3R\Gamma_x(V)}{V}. \quad (2.102)$$

Уравнение (2.91) после определения $\psi(V)$ принимает вид

$$\Gamma = \frac{3R\Gamma_x(V) + TV \frac{d\psi(V)}{dV}}{3R + T\psi(V)}. \quad (2.103)$$

Значения Γ_x в зависимости от безразмерной плотности для ряда металлов приведены в табл. 2.2.

При высоких температурах основной вклад в тепловое давление и тепловую энергию дают вторые слагаемые в числителе и знаменателе (2.103), определяемые тепловым возбуждением электронов. В предельном случае очень высоких температур электроны можно считать свободным электронным газом, в котором $\Gamma_\infty = 2/3$. Но при $T \rightarrow \infty$ (2.103) принимает вид

$$\Gamma = \frac{V}{\varphi(V)} \frac{d\varphi(V)}{dV}. \quad (2.104)$$

Подставив Γ_∞ в (2.104), получим выражение

$$\varphi(V) = \frac{1}{2} \beta_0 (V/V_{ок})^{2/3}. \quad (2.105)$$

Константы интегрирования в (2.105) взяты так, чтобы $\varphi(V)$ совпала с аналогичной функцией в [8]. После определения функций $\varphi(V)$ и $\psi(V)$ приходим к следующим выражениям:

$$P_\tau = \Gamma(V, T) E_\tau / V, \quad (2.106)$$

$$E_\tau = 3RT + 0.5\beta_0 (V/V_{ок})^{2/3} T^2, \quad (2.107)$$

$$C_V = 3R + \beta_0 (V/V_{ок})^{2/3} T, \quad (2.108)$$

$$\Gamma = \frac{3R\Gamma_x(V) + \frac{1}{3}\beta_0(V/V_{0K})^{2/3}T}{3R + 0.5\beta_0(V/V_{0K})^{2/3}T}. \quad (2.109)$$

Построенные изложенным способом зависимости P_x, E_x, C_v, Γ от V и T содержат две произвольные постоянные: β_0 в (2.106) — (2.109) и t в (2.101). Этого произвола часто оказывается недостаточно, чтобы описать экспериментальные данные по ударному сжатию и изобарическому тепловому расширению. Для повышения точности (2.107) — (2.109) иногда берут $C_{v0} \neq 3R$ и $\Gamma_\infty \neq 2/3$ [8].

Обратим внимание еще на одну особенность рассмотренных уравнений состояния. Она вытекает из предположения, что ядра и электроны находятся в тепловом равновесии и имеют одинаковую температуру. Это значит, что независимость ядерной и электронной компонент в P_T и E_T лишь кажущаяся. На самом деле они связаны друг с другом уравнениями, получающимися после исключения T из $P_{TЯ}, P_{Te}$ и $E_{TЯ}, E_{Te}$. В случае уравнения состояния (2.106) — (2.109) эти уравнения имеют вид

$$E_{Te} = \frac{\beta_0}{2} \left(\frac{V}{V_{0K}} \right)^{2/3} \left(\frac{E_{TЯ}}{3R} \right)^2, \quad (2.110)$$

$$P_{Te} = \frac{\beta_0 V}{3} \left(\frac{V}{V_{0K}} \right)^{2/3} \left(\frac{P_{TЯ}}{3R\Gamma_x(V)} \right)^2. \quad (2.111)$$

Из (2.110), (2.111) видно, что тепловые электронные компоненты энергии и давления обращаются в нуль одновременно с ядерными компонентами.

Уравнение состояния (2.106) — (2.109) может быть переведено из класса «Т» в класс «А». Для этого величина T выражается через E_T с помощью (2.107) в виде

$$T = \frac{3R}{\beta_0} \left(\frac{V_{0K}}{V} \right)^{2/3} \left(\sqrt{1 + \frac{2\beta_0}{9R^2} \left(\frac{V}{V_{0K}} \right)^{2/3} E_T} - 1 \right). \quad (2.112)$$

Подставив (2.112) в (2.108) и (2.109), получим выражения для C_v и Γ через V и E_T :

$$C_v = 3R \sqrt{1 + \frac{2\beta_0}{9R^2} \left(\frac{V}{V_{0K}} \right)^{2/3} E_T}. \quad (2.113)$$

$$\Gamma = \frac{\Gamma_x(V) + \frac{1}{3} \left(\sqrt{1 + \frac{2\beta_0}{9R^2} \left(\frac{V}{V_{0K}} \right)^{2/3} E_T} - 1 \right)}{1 + 0.5 \left(\sqrt{1 + \frac{2\beta_0}{9R^2} \left(\frac{V}{V_{0K}} \right)^{2/3} E_T} - 1 \right)}. \quad (2.114)$$

В заключение отметим, что изложенные уравнения состояния внутренне непротиворечивы: поведение P_x, E_x и P_T, E_T согласуется с основной гипотезой о независимости холодных и тепловых членов и не противоречит теореме Нэръста.

§ 7. Уравнения состояния в переменных V, T

Рассмотрим несколько конкретных уравнений состояния. Начнем с уравнения состояния, предложенного в [8] и принадлежащего классу «Т». Энергия и давление представляются в этом уравнении состояния в виде суммы трех компонент:

$$\begin{aligned} E &= E_x(V) + E_{тн}(V, T) + E_{те}(V, T), \\ P &= P_x(V) + P_{тн}(V, T) + P_{те}(V, T). \end{aligned} \quad (2.115)$$

Для компонент выбраны следующие выражения:

$$E_{тн} = C_{vP}(T - T_0) + E_0, \quad P_{тн} = \Gamma_x(V) E_{тн}/V, \quad (2.116)$$

$$\Gamma_x(V) = -\frac{1}{3} - \frac{V}{2} \frac{d^2(P_x(V) V^{2/3})/dV^2}{d(P_x(V) V^{2/3})/dV}, \quad (2.117)$$

$$E_{те} = 0.5\beta_0(V/V_{ок})^{0.5} T^2, \quad P_{те} = 0.25\beta_0(V/V_{ок})^{0.5} T^2/V. \quad (2.118)$$

Как и в рассмотренных в предыдущем параграфе уравнениях состояния, здесь сделано предположение, что температура ядер и электронов всегда одинакова, т. е. они находятся в тепловом равновесии. Это предположение в совокупности с наличием $T_0 \neq 0$ и $E_0 \neq 0$ в (2.111) приводит к некоторым противоречиям и сужает как область применимости уравнения состояния, так и класс функций, в котором может выбираться зависимость $E_x(V)$. Покажем это на простом примере. Рассмотрим холодную деформацию вещества при $T = 0$. В этом случае

$$\begin{aligned} E_{тн} &= E_0 - C_{vP}T_0 = \text{const}, \quad E_{те} = 0, \\ P_{тн} &= \Gamma_x(V) (E_0 - C_{vP}T_0)/V, \quad P_{те} = 0. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Поскольку $E_t \neq 0$, $P_t = F(V)$ при $T = 0$, это уравнение состояния формально не удовлетворяет требованию (2.40) о разделении холодных и тепловых компонент давления и энергии. Чтобы оно удовлетворило уравнению (2.40), следует $E_{те}$ и $P_{те}$, получаемые при $T = 0$, перенести в «холодные» члены. Новые холодные $P_x(V)$ и $E_x(V)$ примут вид

$$\begin{aligned} \bar{P}_x(V) &= P_x(V) + \Gamma_x(V) (E_0 - C_{vP}T_0)/V, \\ \bar{E}_x(V) &= E_x(V) + (E_0 - C_{vP}T_0). \end{aligned}$$

$\bar{P}_x(V)$, $\bar{E}_x(V)$ должны удовлетворять уравнению (2.42). Но так как $E_0 - C_{vP}T_0 = \text{const}$, то $\partial \bar{E}_x/\partial V = \partial E_x/\partial V$ и (2.42) переписывается следующим образом:

$$-\frac{dE_x}{dV} = P_x(V) + \frac{\Gamma_x(V)}{V} (E_0 - C_{vP}T_0). \quad (2.120)$$

Поскольку $P_x(V)$ и $E_x(V)$ связаны уравнением (2.42), то (2.120) справедливо лишь при

$$E_0 - C_{vP}T_0 = 0. \quad (2.121)$$

Верно также и обратное утверждение, что при $E_0 - C_{v_p} T_0 \neq 0$ $P_x(V)$ и $E_x(V)$ не должны удовлетворять уравнению (2.42). Поскольку, однако, $P_x(V)$ и $E_x(V)$ в [8] удовлетворяют уравнению (2.42), а $E_0 - C_{v_p} T_0 \neq 0$, то остается более внимательно рассмотреть поведение тепловых членов

$$P_T = \frac{\Gamma_x(V)(C_{v_p}(T - T_0) + E_0)}{V} + \frac{\beta_0}{4V} \left(\frac{V}{V_{ок}}\right)^{0.5} T^2, \quad (2.122)$$

$$E_T = C_{v_p}(T - T_0) + E_0 + \frac{\beta_0}{2} \left(\frac{V}{V_{ок}}\right)^{0.5} T^2. \quad (2.123)$$

Подставив (2.122), (2.123) в (2.79), приходим снова к условию (2.121). Однако из приведенных в [8] данных по E_0 и C_{v_p} в нормальных условиях следует, что $E_0 - C_{v_p} T_0 \neq 0$. Значит, тепловые члены в уравнении состояния (2.116)–(2.118) не удовлетворяют уравнению термодинамической совместности (2.79), и рассматриваемое уравнение состояния является термодинамически некорректным.

Аналогично ведут себя тепловые члены в уравнении состояния, предложенном в [15]. Указанная термодинамическая некорректность проявляется в области, где энергия E становится сравнимой с величиной $E_0 - C_{v_p} T_0$. Так, из [8] следует, что для алюминия $E_0 - C_{v_p} T_0 \approx 0.16$ кДж/г, а минимальная энергия на ударной адиабате в экспериментально изученном диапазоне ≈ 4.3 кДж/г. Погрешность, определяемая термодинамической некорректностью, составила, таким образом, $\approx 4\%$, что сравнимо с погрешностью экспериментальных данных. Хорошее совпадение теоретических ударных адиабат с экспериментальными в [8, 15] объясняется тем, что обе работы посвящены построению уравнений состояния для области высоких и сверхвысоких давлений.

В [16] сделан следующий шаг на пути совершенствования и усложнения уравнения состояния, описанного в предыдущих параграфах. Холодные и тепловые компоненты в энергии и давлении имеют вид

$$P_x = \frac{\rho_{ок} c_{ок}^2}{\left(\frac{q-1}{3} - \mu\right)} \left(\delta^{2/3} \exp(q(1 - \delta^{-1/3})) - \delta^{1+\mu}\right), \quad (2.124)$$

$$E_x = \frac{c_{ок}^2 (3\mu \exp(q(1 - \delta^{-1/3})) - q\delta^\mu + q - 3\mu)}{q\mu((q-1)/3 - \mu)}, \quad (2.125)$$

$$P_{тл} = \frac{C_{v_0} \Gamma_x(V) T + C_{v_{п}} \Gamma_{п} T^2 f(V)}{(1 + T f(V)) V}, \quad (2.126)$$

$$P_{те} = \frac{\Gamma_0 V_* \beta_0 \beta(V) T_\Phi T^2}{2V(V - V_*)(T_\Phi + T\beta(V))}, \quad (2.127)$$

$$E_{тл} = \frac{C_{v_0} T + C_{v_{п}} T^2 f(V)}{1 + T f(V)}. \quad (2.128)$$

$$E_{те} = \frac{\beta_0 \beta(V) T_\Phi T^2}{2(T_\Phi + T\beta(V))}. \quad (2.129)$$

Входящие в уравнения состояния три функции $\beta(V)$, $\Gamma_*(V)$ и $f(V)$ выбираются следующим образом:

$$\beta(V) = \left(\frac{VV_*}{V_{ок}(V+V_*)} \right)^{\Gamma_0}, \quad (2.130)$$

$$f(V) = f_0 \cdot \exp \left(\int \frac{C_{Vn}\Gamma_n + C_{V_0}\Gamma_x(V)}{(C_{Vn} - C_{V_0})V} dV \right), \quad (2.131)$$

$$\Gamma_x = \begin{cases} \Gamma_0 + \frac{t-2}{3} - \frac{V}{2} \frac{d^2(P_x V^{2t/3})/dV^2}{d(P_x V^{2t/3})/dV} & \text{при } V < V_{ок}; \\ \Gamma_n + \sum_{i=1}^4 \eta_i \left(\frac{V_{ок}}{V} \right)^i & \text{при } V \geq V_{ок}. \end{cases} \quad (2.132)$$

Уравнение состояния (2.124) — (2.132) термодинамически корректно и с хорошей точностью описывает поведение ряда металлов в области давлений до нескольких десятков мегабар. При этом удовлетворительно описывается поведение металлов в области не только средних и высоких, но и низких давлений.

Уравнение состояния (2.124) — (2.132) является примером того, как можно усложнением произвольных функций, входящих в уравнение состояния, описанное в § 6, расширить область удовлетворительного описания свойства веществ в сторону высоких давлений.

Уравнение состояния (2.124) — (2.132) обладает существенным недостатком, который заключается в неверном поведении $E_x(V)$ при $\delta \rightarrow \infty$. При этом $\lim_{\delta \rightarrow \infty} E_x(\delta) = -\infty$. Это ограничивает область применимости уравнения состояния со стороны высоких плотностей.

В работе [17] построено уравнение состояния, предназначенное для описания свойств веществ в области средних и высоких давлений и температур. Для этого в уравнения для давления и энергии аддитивно добавлены давление и энергия излучения

$$P = P_x(V) + P_{тн}(V, T) + P_{те}(V, T) + P_{и}(V, T), \quad (2.133)$$

$$E = E_x(V) + E_{тн}(V, T) + E_{те}(V, T) + E_{и}(V, T). \quad (2.134)$$

Для $P_{и}$, $E_{и}$, $P_{тн}$, $E_{тн}$ используются широко известные [18] выражения:

$$P_{и} = \frac{1.37}{3} T^4, \quad E_{и} = 1.37VT^4, \quad (2.135)$$

$$P_{тн} = RT/V, \quad E_{тн} = \frac{3}{2} RT. \quad (2.136)$$

Константы в (2.135) взяты так, чтобы величины имели следующие размерности: $[E]$ — мегаджоуль на грамм, $[T]$ — килоэлектронвольт. Для $P_x(V)$ и $E_x(V)$ предложены зависимости

$$P_x = \frac{2}{3} \rho \varepsilon(\rho) L(x), \quad E_x = \varepsilon(\rho) \Theta(x),$$

$$\varepsilon(\rho) = 0.15 \left(\frac{Z}{A} \right)^{5/3} \rho^{2/3}, \quad x = 1.578 \left(\frac{ZA}{\rho} \right)^{1/3}$$

$$L(x) = \frac{\sum_{h=0}^7 (K+2) a_h x^h}{\varphi(x)^2} - d_1 x,$$

$$\varphi(x) = \sum_{h=0}^7 a_h x^h, \quad \Theta(x) = \frac{1}{\varphi(x)} - d_1 x + d_2 x^2.$$

Значение a_0 задается равным единице, функции $L(x)$ и $\Theta(x)$ при $x=0$ также полагаются равными единице. Давление и энергия электронов определяются уравнениями

$$P_{\tau e} = Rz\rho TD(x, t), \quad E_{\tau e} = 1.5RzTB(x, t),$$

$$D(x, t) = 1 + 0.5x \sum_{i=1}^4 \eta_i \frac{d\xi_i}{dx} \Big/ (t + \xi_i(x)),$$

$$B(x, t) = t \sum_{i=1}^4 \eta_i / (t + \xi_i(x)),$$

$$\xi_i(x) = a_{i0} + a_{i1}/x + a_{i2}/x^2, \quad t = 10^{-4} T z^{-4/3}$$

Коэффициенты, входящие в $\varepsilon(x)$, t и x , зависят от атомного номера и атомной массы так, что уравнение состояния удовлетворительно описывает свойства многих материалов в области существования модели Томаса — Ферми и области средних давлений.

§ 8. Уравнения состояния в переменных ρ, E

Одно из наиболее простых уравнений состояния из класса «А» [18] — [21] получается из (2.59), (2.60) и (2.86) при $n=0$ и $\Gamma = \Gamma_0 = \text{const}$. Поскольку $E_{\tau} = E - E_x$, то, подставив E_{τ} в (2.86), получим

$$P_{\tau} = \Gamma_0 (E - E_x) / V. \quad (2.137)$$

Затем подставим (2.60) и (2.137) в (2.43). Тогда

$$P = \Gamma_0 \rho_{0\text{ок}} \delta E + \rho_{0\text{ок}} c_{0\text{ок}}^2 \left(\frac{m-1-\Gamma_0}{m(m-1)} \delta^m + \frac{\Gamma_0}{m-1} \delta - \frac{\Gamma_0+1}{m} \right). \quad (2.138)$$

Численные значения Γ_0 , m , $c_{0\text{ок}}$ подбираются с использованием экспериментальных данных следующим образом. Величина c_0 выражается через скорость звука c_l продольных волн в неограниченной упругой среде и модуль сдвига G по формуле

$$c_0^2 = c_l^2 - \frac{4G}{3\rho}.$$

Скорость звука $c_{0\text{ок}}$ отличается от c_0 так же, как и $\rho_{0\text{ок}}$ от ρ_0 . Для определения этого отличия необходимо провести экспериментальные измерения ρ_0 , c_l и G при постоянном давлении в диапазоне $T \leq 300$ К.

Таблица 2.3

Металл	ρ_0 , г/см ³	c_0 , км/с	λ
Cu	8.93	3.90	1.46
Zn	7.14	3.20	1.45
Ag	10.49	3.30	1.54
Cd	8.64	2.65	1.48
Au	19.30	3.15	1.47
Pb	11.34	2.30	1.27
Bi	9.80	2.00	1.34

Таблица 2.4

Металл	λ	Γ_0
Cu	1.46	1.62
Zn	1.45	1.59
Ag	1.54	1.88
Cd	1.48	1.68
Au	1.47	1.65
Pb	1.27	0.985
Bi	1.34	1.22

Величина Γ_0 определяется экспериментально по ударному сжатию следующим образом. Экспериментально измеренные D и U на ударной адиабате представляются в виде линейной зависимости $D = c_0 + \lambda U$. В табл. 2.3 приведены значения параметров линейной зависимости скорости ударной волны от массовой скорости за ее фронтом для некоторых металлов [7].

Из условий на сильном разрыве для линейной зависимости $D(U)$ следуют зависимости P и ρ от U

$$\rho(c_0 + (\lambda - 1)U) = \rho_0(c_0 + \lambda U), \quad (2.139)$$

$$P = \rho_0(c_0 + \lambda U)U. \quad (2.140)$$

В области малых сжатий представим δ так:

$$\delta = \rho/\rho_{0к} = 1 + x, \quad (2.141)$$

где $x \ll 1$. После подстановки (2.141) в (2.138), разложения $(1+x)^m$ в ряд и отбрасывания членов порядка x^3 уравнение состояния принимает вид

$$P = \Gamma_0 \rho_{0к} E (1+x) + \rho_{0к} c_{0к}^2 (x + 0.5(m-1-\Gamma_0)x^2). \quad (2.142)$$

Из условий на ударной волне и из (2.139) и (2.141) следует

$$E = \frac{P(x-x_0)}{2\rho_{0к}(1+x)(1+x_0)}. \quad (2.143)$$

Подставив (2.143) в (2.142), получим уравнение ударной адиабаты

$$P = \frac{2\rho_{0к} c_{0к}^2 x(1+x_0)(1+0.5(m-1-\Gamma_0)x)}{2(1+x_0) - \Gamma_0(x-x_0)}. \quad (2.144)$$

С другой стороны, из (2.139) и (2.140) следует уравнение ударной адиабаты в виде

$$P = \frac{\rho_0 c_0^3 (1+x)(x-x_0)}{(1+x-\lambda(x-x_0))^2}. \quad (2.145)$$

Поскольку в (2.144) и в (2.145) P одно и то же, приравняем правые части этих уравнений. Полученное уравнение упростим, предположив, что $c_0/c_{0к} \approx 1$, $\rho_0/\rho_{0к} = 1+x_0$, $x^3 \ll 1$, $x_0 \ll x$. В результате

получим связь между m , Γ_0 и λ :

$$(m - 4\lambda + 1) + x(\Gamma_0(2\lambda - 1) + 2(\lambda - m)(\lambda - 1)) = 0.$$

Поскольку это уравнение справедливо для множества x , то должно быть

$$m = 4\lambda - 1, \quad \Gamma_0(2\lambda - 1) + 2(\lambda - m)(\lambda - 1) = 0. \quad (2.146)$$

Подставим m во второе уравнение, получим

$$\Gamma_0 = \frac{2(\lambda - 1)(3\lambda - 1)}{2\lambda - 1}. \quad (2.147)$$

Значения Γ_0 , вычисленные по уравнению (2.147) для взятых из табл. 2.3 значений λ , приведены в табл. 2.4. Из сравнения со значениями Γ_0 , полученными другими способами, видно, что данный метод занижает Γ_0 . Это можно объяснить погрешностями $D(U)$ соотношения для слабых ударных волн, где становятся существенными упругопластические свойства вещества.

Если пойти по пути упрощений и положить $\Gamma_0 = m - 1$, то уравнение (2.138) существенно упрощается и принимает вид

$$P = (m - 1)\rho_{0к}\delta E + \rho_{0к}c_{0к}^2(\delta - 1). \quad (2.148)$$

В такой форме уравнение состояния использовалось в [22].

С помощью уравнений на фронте ударной волны

$$\begin{aligned} \rho(D - U) &= \rho_0 D, \quad P = \rho_0 D U, \\ E &= 0.5P(V_0 - V) \end{aligned} \quad (2.149)$$

выразим δ и E через P и U :

$$E = 0.5U^2, \quad \delta = P/(P - \rho_0 U^2).$$

Полагая для простоты $\rho_0 = \rho_{0к}$, подставим E и δ в (2.148). В результате получим уравнение, решение которого имеет вид

$$P = \frac{m+1}{4}\rho_0 U^2 + \sqrt{\left(\frac{m+1}{4}\rho_0 U^2\right)^2 + \rho_0^2 c_{0к}^2 U^2}. \quad (2.150)$$

В случае слабых ударных волн $c_{0к} \gg 0.25(m+1)U$, и уравнение (2.150) принимает вид

$$P = \rho_0 \left(c_{0к} + \frac{m+1}{4} U \right) U. \quad (2.151)$$

Сравнивая (2.151) и (2.140), получаем зависимость m от λ , совпадающую с первым уравнением (2.146). Это означает, что при малых x ударная адиабата мало отличается от изэнтропы и влияние численных значений Γ_0 на поведение ударной адиабаты не существенно.

В [23] рассмотрено уравнение состояния из класса «А», которое предназначено для описания свойств материалов в широком диапазоне изменения P и V . При построении зависимости $E_x(V)$ было подмечено, что при $i = 3k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, в выражении $E_x(\delta)$,

предложенном Берчем [2]:

$$E_x = \sum_{i=0}^N a_i \delta^{2i/3},$$

стоят члены с δ в четных целых степенях. В то же время в диапазоне $1 \leq \delta \leq 8$ величина $\delta^{2(3k+1)/3} + \delta^{2(3k+2)/3}$ мало отличается от величины $2.5 \delta^{2k+1}$, которая при $k = 1, 2, 3 \dots$ дает члены с δ в нечетных степенях. Это дало повод использовать в качестве зависимости $E_x(\delta)$ уравнение вида

$$E_x = \sum_{i=0}^N b_i \delta^i. \quad (2.152)$$

Уравнение (2.152) так же, как и хорошо обоснованное для газов вириальное уравнение состояния [24], есть ряд по степеням сжатия δ . Но эти уравнения состояния имеют разные области применимости. Вириальное уравнение состояния применимо при $\delta \leq 0.1$, а уравнение состояния Берча — при $0.9 \leq \delta \leq 1.2$. Исходя из этого, уравнение (2.152) используется для описания зависимости холодной энергии E_x от сжатия δ на всем промежутке $0 \leq \delta \leq 1$. На промежутке $1 \leq \delta \leq \delta_2$, где $\delta_2 \approx 4-5$, зависимость $E_x(\delta)$ изменяется путем добавления в (2.152) слагаемого, пропорционального δ^{-1} и дающего существенный вклад лишь в окрестности $\delta = 1$. С увеличением δ вклад этого слагаемого в E_x уменьшается. При $\delta > \delta_2$ все численные значения параметров b_i изменяются. Таким образом, зависимость $E_x(\delta)$ используется в виде кусочно-гладкой функции

$$E_x = c_{0к}^2 \sum_{l=-1}^5 a_{il} \delta^l,$$

где индекс i означает номер формулы (набора параметров a_{il}), применяемой на промежутке $\delta_{i-1} \leq \delta \leq \delta_i$. Холодное давление $P_x(\delta)$ получается после дифференцирования $E_x(\delta)$:

$$P_x = \rho_{0к} c_{0к}^2 \sum_{l=-1}^5 a_{il} \delta^{l+1}. \quad (2.153)$$

На границах промежутка $0 \leq \delta \leq 1$ параметры a_{il} должны удовлетворять условиям

$$P_x = 0, \quad E_x = 0, \quad \frac{dP_x}{d\delta} = \rho_{0к} c_{0к}^2 \quad \text{при } \delta = 1; \quad (2.154)$$

$$P_x = 0, \quad E_x = Q_0 \quad \text{при } \delta = 0,$$

где Q_0 — энергия, необходимая для сублимации и полного разлета холодного вещества, т. е. для разведения атомов холодного вещества на бесконечность.

Таким образом, на промежутке $0 \leq \delta \leq 1$ остается два параметра, которые можно варьировать для описания экспериментальных и теоретических данных о свойствах вещества.

На промежутке $\delta \geq \delta_2$ используются рекомендации из [25] и для $E_x(\delta)$ и $P_x(\delta)$ принимаются зависимости

$$\begin{aligned} E_x &= c_{0к}^2 (a_{31} \delta^{l_{31}} - a_{32} \delta^{l_{32}} + a_{33}), \\ P_x &= \rho_{0к} c_{0к}^2 (a_{31} l_{31} \delta^{l_{31}} - a_{32} l_{32} \delta^{l_{32}}) \delta. \end{aligned} \quad (2.155)$$

Параметры a_{31} , a_{32} , a_{33} , l_{31} , l_{32} подбираются так, чтобы наилучшим образом описать зависимость $P_x(\delta)$, полученную в модели Томаса — Ферми с квантовыми и обменными поправками [25] с уравнением для ядер [26].

Верхняя граница δ_2 промежутка $1 \leq \delta \leq \delta_2$ включается в число варьируемых параметров. Уравнения (2.152), (2.153) на границах этого промежутка должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} P_x = 0, \quad E_x = 0, \quad \frac{dP_x}{d\delta} &= \rho_{0к} c_{0к}^2 \quad \text{при } \delta = 1; \\ P_{x_1} = P_{x_2}, \quad E_{x_1} = E_{x_2}, \quad \left(\frac{dP_x}{d\delta} \right)_1 &= \left(\frac{dP_x}{d\delta} \right)_2 \quad \text{при } \delta = \delta_2. \end{aligned} \quad (2.156)$$

Таким образом, на двух рассмотренных промежутках по δ остается шесть варьируемых параметров.

Тепловые составляющие энергии и давления не разделяются на ядерные и электронные. Связь между P_T и E_T берется в виде (2.86). В нормальных условиях при $T = 300$ К $P = 10^{-4}$ ГПа, коэффициент Грюнайзена определяется из уравнения (2.100) по измеряемым экспериментально α , c и C_p . Затем из уравнения состояния

$$P = P_x(V) + \frac{\Gamma}{V} (E - E_x(V))$$

и уравнения на разрыве

$$E + 0.5P(V - V_0) = 0$$

исключается P и из полученного уравнения выражается Γ

$$\Gamma = \frac{V(2E + P_x(V)(V - V_0))}{(V_0 - V)(E - E_x(V))}.$$

На ударной адиабате все термодинамические величины, D и U выражаются через одну независимую величину. Если в качестве независимой взять V , то $\Gamma(V)$ оказывается неоднозначной функцией от V из-за того, что предельное сжатие вещества на ударной волне меньше максимального сжатия. Если в качестве независимой термодинамической функции выбрать E , то $\Gamma(E)$ вдоль ударной адиабаты оказывается функцией однозначной. По этой причине, а также с учетом того, что $\Gamma(E)$ является вдоль ударной адиабаты функцией немонотонной, выбирается следующее выражение для $\Gamma(E)$ на промежутке $E_{i-1} \leq E \leq E_i$:

$$\Gamma = \sum_{h=0}^5 c_{ih} x^h, \quad (2.157)$$

$$x = x_{i-1} + d_i \frac{E - E_{i-1}}{E_i - E_{i-1}}. \quad (2.158)$$

Здесь c_i, d_i — постоянные величины — параметры уравнения состояния на промежутке $E_{i-1} \leq E \leq E_i, i = 1-5$, а величины E_{i-1} — границы промежутков по энергии E , при переходе через которые параметры c_{i-1}, d_{i-1} изменяются на c_i, d_i . На границах промежутков E_i выполняются условия непрерывности Γ и производной $d\Gamma/dE$ в виде

$$(\Gamma)_{i+1} = (\Gamma)_i, \quad \left(\frac{d\Gamma}{dE}\right)_{i+1} = \left(\frac{d\Gamma}{dE}\right)_i \quad \text{при } E = E_i. \quad (2.159)$$

При $E = 0$ вводится требование в виде

$$\Gamma_1 \geq \Gamma_0, \quad \left(\frac{d\Gamma}{dE}\right)_1 = 0 \quad \text{при } E = 0. \quad (2.160)$$

При $E \geq E_5$ полагается $\Gamma = \Gamma_\infty = \text{const.}$

В области $\delta < 1$ качественно рассматривается поведение $\Gamma(E)$ вдоль линии $E_x(V)$. При $E = 0$, как уже отмечалось, $\Gamma = \Gamma_0$. С уменьшением δ холодная энергия стремится к Q_0 , а Γ изменяется от Γ_0 до значения Γ_* для пара. Если теперь при $\delta \ll 1$ увеличивать E вдоль изохоры, то при $E \rightarrow E_5$ должно быть $\Gamma \rightarrow \Gamma_\infty$. Такое поведение $\Gamma(\delta, E)$ в области $0 \leq \delta \leq 1$ качественно описывается зависимостью

$$\Gamma(\delta, E) = \Gamma(E) + (\Gamma_*(E) - \Gamma(E)) \varphi(\delta),$$

где $\Gamma_*(E)$ определяется на изохоре $\delta = \delta_*$ ($\delta_* \approx 10^{-4} - 10^{-5}$) уравнениями вида (2.157) — (2.160) с параметрами $c_{ik}^*, d_{ik}^*, E_i^*$. Функция $\varphi(\delta)$ берется в виде

$$\varphi(\delta) = \begin{cases} 1 & \text{при } \delta \leq \delta_*, \\ x^2(3 - 2x) & \text{при } \delta_* \leq \delta \leq 1, \\ 0 & \text{при } 1 \leq \delta. \end{cases}$$

Здесь $x = \log \delta / \log \delta^*$. Требуется, чтобы $\varphi(\delta)$ удовлетворяла условиям

$$\begin{aligned} \varphi(\delta) = 0, \quad \frac{d\varphi}{d\delta} = 0 & \quad \text{при } \delta = 1, \\ \varphi(\delta) = 1, \quad \frac{d\varphi}{d\delta} = 0 & \quad \text{при } \delta = \delta_*. \end{aligned}$$

В [23] приведены данные сравнения ряда ударных адиабат, полученных по этому уравнению состояния для свинца и алюминия, подтверждающие его удовлетворительную точность в широком диапазоне P и E .

§ 9. Определение энергии сублимации холодного вещества

В промежутке $0 \leq \delta \leq 1$ холодное давление $P_x(V)$ должно удовлетворять условию (2.44), где Q_0 есть работа по разведению атомов холодного кристалла на бесконечное расстояние друг от дру-

га. Рассчитаем эту величину следующим образом. Определим энергию, которую нужно затратить, чтобы нагреть и затем испарить первоначально холодное вещество при постоянном давлении $P = 1.013 \cdot 10^{-4}$ ГПа:

$$E_{\Gamma} = \sum_{i=1}^n \left(\int_{T_{i-1}}^{T_i} c_{P_i}(T) dT + \Delta E_i \right), \quad (2.161)$$

где T_i — температуры и ΔE_i — теплоты фазовых переходов при постоянном давлении (полиморфных фазовых переходов, плавления, испарения). Точка с параметрами E_{Γ} , T_{Γ} , V_{Γ} , $P_{\Gamma} = 1.013 \cdot 10^{-4}$ ГПа соответствует полному испарению при указанном давлении. Из этой точки далее пар должен расширяться адиабатически до значения $V = \infty$. При таком разлете $P \rightarrow 0$, $T \rightarrow 0$, $V \rightarrow \infty$ и $E \rightarrow Q_0$. Будем считать разлетающийся пар идеальным газом с уравнением состояния

$$PV = AT, \quad E = E(T) \quad (2.162)$$

и постоянной теплоемкостью C_V . Это значит, что dE и dT связаны уравнением

$$dE = C_V dT. \quad (2.163)$$

Подставив (2.162), (2.163) в уравнение изэнтропы

$$dE + PdV = 0 \quad (2.164)$$

и проинтегрировав полученное уравнение, придем к зависимости T от V

$$T = T_{\Gamma} \left(\frac{V_{\Gamma}}{V} \right)^{\gamma-1},$$

где $\gamma - 1 = \frac{A}{C_V}$. Используя эту зависимость, исключим P и T в (2.162), (2.164), и проинтегрировав по V от V_{Γ} до $V = \infty$, получим

$$Q_0 = E_{\Gamma} - \frac{A}{\gamma-1} T_{\Gamma}. \quad (2.165)$$

Для твердого алюминия экспериментальные данные зависимости C_P от T из [27] хорошо описываются интерполяционной зависимостью

$$C_P = \frac{0.814}{100 + 0.6025T} \frac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot \text{град}}.$$

Для жидкого Al $C_P = 1.16$ Дж/(г · град). Согласно [27], теплота плавления $\Delta E_1 = 0.393$ кДж/г и теплота испарения $\Delta E_2 = 9.21$ кДж/г. Подставив эти данные в (2.161), получим $E_{\Gamma} = 12.6$ кДж/г. Воспользуемся теперь формулой (2.165). После подстановки E_{Γ} , $T_{\Gamma} = 2793$ К, $A = 0.308$ кДж/(г · град) и $\gamma = 5/3$ в (2.165) определяется численное значение $Q_0 = 11.31$ кДж/г. Аналогичные вычисления для свинца дают $Q_0 = 1.05$ кДж/г.

§ 10. Уравнение состояния смеси жидкости и пара

Есть ряд физических процессов, в которых твёрдое тело плавится и затем испаряется. Поэтому любое уравнение состояния, претендующее на описание свойств веществ в широком диапазоне изменения давления и плотности, должно описывать свойства вещества в области смеси жидкости и пара. Здесь будут рассмотрены вопросы построения уравнения состояния в области смеси жидкость — пар в основном так, как они излагаются в [28] — [30].

Пусть в однофазной области известно уравнение состояния

$$P = P(V, E), \quad T = T(V, E) \quad (2.166)$$

и изотермы $T = T_i = \text{const}$ имеют характерный для области смеси вид (рис. 2.2, кривая 1). Зафиксируем изотерму T_i . Тогда из второго уравнения (2.166) следует зависимость $E = E(V, T_i)$. Подставив ее в первое уравнение (2.166), получим семейство изотерм в переменных P, V :

$$P = P(V, E(V, T_i)). \quad (2.167)$$

Продифференцируем (2.167), по V

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_E + \left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_V \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T. \quad (2.168)$$

Из рис. 2.2 видно, что $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = 0$ в точках A и B . Приравняв нулю правую часть в (2.168), получим уравнение

$$F(V, T_i) = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_E + \left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_V \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = 0.$$

Корни этого уравнения — V_A и V_B — зависят от T_i , и их геометрическое место точек образует спинодаль. По V_A, V_B и T_i из (2.167) определяются P_A и P_B . Равновесное давление P_D двухфазной смеси находится из уравнения Максвелла

$$P_D(V_\Gamma - V_{\text{ж}}) - \int_{V_{\text{ж}}}^{V_\Gamma} P(V, E(V, T_i)) dV = 0, \quad (2.169)$$

где V_Γ и $V_{\text{ж}}$ — корни уравнения

$$P_D - P(V, E(V, T_i)) = 0. \quad (2.170)$$

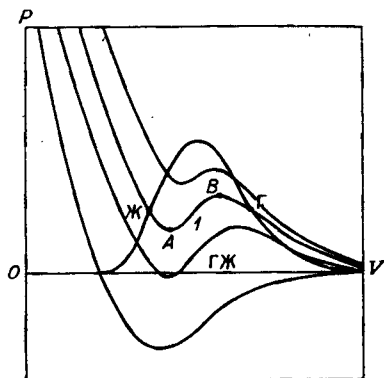


Рис. 2.2. Зависимость давления P от удельного объема V вдоль изотерм в области жидкости (Ж), газа (Г) и смеси газа с жидкостью (ГЖ).

Точки P_p , $V_{ж}$ и P_p , V_r образуют бинадаль. Ввиду сложности функции $P(V, E(V, T))$ система уравнений (2.169) и (2.170) решается численно. Поскольку функция $\Phi(P_p, T_i) = P_p(V_r - V_{ж}) - \int_{V_{ж}}^{V_r} P(V, T_i) dV$ имеет на концах промежутка $[P_A, P_B]$ разные знаки: $\Phi(P_{PA}, T_i) \leq 0$, $\Phi(P_{PB}, T_i) \geq 0$, то по теореме Больцано — Коши в промежутке $[P_A, P_B]$ найдется такое P_p , что при заданном T_i будет

$$\Phi(P_p, T_i) = 0,$$

и, следовательно, решение системы уравнений (2.169), (2.170) существует. Из второго уравнения (2.166) по V_r , $V_{ж}$, T_i находятся значения E_r и $E_{ж}$. Задавая нужный шаг по T , строят изложенным способом табличную зависимость, P_i , T_i , E_{ri} , V_{ri} , E_{ji} , V_{ji} вдоль бинадали.

Давление в смеси по заданным значениям V и E рассчитывается следующим образом. Задается первое приближение P . По нему отыскиваются на бинадали два узла таблицы так, чтобы выполнялись неравенства $P_{v-1} \leq P \leq P_v$. Далее интерполяцией находятся значения $V_{ж}$, $E_{ж}$ и V_r , E_r , соответствующие заданному P . Если P является решением, то функция

$$H(P) = (E - E_{ж})(V_r - V_{ж}) - (V - V_{ж})(E_r - E_{ж})$$

обращается в нуль. В противном случае рассматривается следующее приближение, например, методом Ньютона, и т. д.

Анализ изантроп в области смеси жидкости и пара, построенных по уравнениям состояния [24, 28], показывает, что для большого количества веществ они имеют простой вид и могут быть описаны простыми аналитическими зависимостями. Рассмотрим одно из уравнений состояния смеси жидкости и пара

$$P = \Gamma_c \rho (E - E_c(\rho)),$$

где
$$E_c = E_{п} + (Q_0 - E_{п}) \frac{\delta_{п} - \delta}{\delta_{п} + K_c \delta},$$

$\Gamma_c = \text{const}$, $\delta_{п}$, $E_{п}$ — безразмерная плотность (сжатие) и внутренняя энергия жидкости в точке кипения при нормальном давлении, K_c — параметр уравнения состояния. При таком описании области двухфазного состояния бинадаль находится как линия, при переходе через которую сохраняются непрерывными P и E . Эти значения находятся как решения системы двух нелинейных уравнений:

$$P - P_x(V) - \Gamma(E)(E - E_x(V))/V = 0,$$

$$P - \Gamma_c(E - E_c(V))/V = 0.$$

Зависимость $P(V)$ вдоль бинадали табулируется.

§ 11. Зависимость напряжений от упругих деформаций. Закон Гука

При низких значениях приложенного напряжения во многих твердых телах напряжения и деформации связаны линейным соотношением, не зависящим от времени. После снятия такой нагрузки полностью восстанавливаются объем и форма образца. Деформация, которая не зависит от времени и исчезает при снятии нагрузки, называется упругой. Во всех других случаях, когда при снятии нагрузки объем и форма не восстанавливаются, деформация называется неупругой. Напряжение, соответствующее моменту возникновения остаточных деформаций, называется пределом упругости материала. Деформация, которая не зависит от времени и сохраняется после снятия нагрузки, называется пластической. У металлов при достаточно высоких температурах деформация продолжает расти во времени даже при постоянном напряжении. Это явление называется ползучестью. Напряжение, требуемое для создания некоторой заданной пластической деформации (обычно несколько десятых долей процента), называется пределом текучести.

При увеличивающейся деформации растяжения материала напряжение, требуемое для его пластического деформирования, возрастает, а с некоторого значения деформации убывает. Значение максимальной нагрузки, деленное на исходную площадь образца в плоскости, ортогональной приложенному напряжению, называется пределом прочности при растяжении. Материалы, в которых перед разрушением происходит значительная пластическая деформация, называются пластическими. Если же пластическая деформация перед разрушением отсутствует, материал называется хрупким.

Упругие свойства отдельного кристалла зависят от направления кристаллографических плоскостей. Однако, поскольку подавляющее большинство конструкционных материалов являются поликристаллическими, состоящими из хаотически расположенных кристаллов, их упругие свойства принято считать изотропными.

Упругое поведение всякого изотропного тела характеризуется модулем продольной упругости E (модуль Юнга), модулем сдвига G , модулем всестороннего сжатия K (модуль объемной упругости) и коэффициентом Пуассона μ . Величины E , G и K являются коэффициентами пропорциональности между напряжениями и деформациями при растяжении, сдвиге и всестороннем сжатии

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.171)$$

$$\tau = 2G\gamma, \quad (2.172)$$

$$K = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S. \quad (2.173)$$

Из уравнений (2.173) и (2.22) следует

$$K = \rho c^2, \quad (2.174)$$

где ρ — плотность, а c — скорость звука.

Известно, что если брусок материала растягивается, то в плоскости, ортогональной растяжению, он сжимается. Коэффициент пропорциональности между относительным уменьшением толщины и относительным увеличением длины называется коэффициентом Пуассона $\mu > 0$. Рассмотрим вначале действие только напряжений σ_x . Если взять элементарный параллелепипед, то в направлении оси x он получит согласно первому закону Гука (2.171) удлинение

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad (2.175)$$

а в направлениях осей y и z согласно закону Пуассона

$$\bar{\varepsilon}_y = \bar{\varepsilon}_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E}. \quad (2.176)$$

Черта над ε_x , ε_y , ε_z означает, что эти деформации получены при одноосном напряженном состоянии. Рассматривая далее независимо два других напряженных состояния, имеем

$$\bar{\varepsilon}_y = \frac{\sigma_y}{E}, \quad \bar{\varepsilon}_x = \bar{\varepsilon}_z = -\mu \frac{\sigma_y}{E}, \quad (2.177)$$

$$\bar{\varepsilon}_z = \frac{\sigma_z}{E}, \quad \bar{\varepsilon}_x = \bar{\varepsilon}_y = -\mu \frac{\sigma_z}{E}. \quad (2.178)$$

Обсудим теперь по отдельности действие напряжений сдвига. Согласно второму закону Гука (2.172) имеем

$$\bar{\gamma}_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G}, \quad \bar{\gamma}_{yz} = \bar{\gamma}_{zx} = 0,$$

$$\bar{\gamma}_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G}, \quad \bar{\gamma}_{zx} = \bar{\gamma}_{xy} = 0, \quad (2.179)$$

$$\bar{\gamma}_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{2G}, \quad \bar{\gamma}_{xy} = \bar{\gamma}_{yz} = 0.$$

Если теперь рассматривать сложнапряженное состояние как суперпозицию одноосных напряженных состояний, то зависимости между напряжениями и деформациями примут вид

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)), \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z)), \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G}, \quad (2.180)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)), \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{2G}.$$

Поскольку E , G и μ не зависят от направления деформации, то, очевидно, уравнения (2.180) справедливы для изотропного упругого тела. Рассмотренное сложнапряженное состояние означает, что оси x , y , z являются главными направлениями тензоров деформаций

и напряжений и уравнения (2.180) преобразуются:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)), & \gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{2G}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu (\sigma_1 + \sigma_3)), & \gamma_{23} &= \frac{\tau_{23}}{2G}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} (\sigma_3 - \mu (\sigma_2 + \sigma_1)), & \gamma_{31} &= \frac{\tau_{31}}{2G}.\end{aligned}\quad (2.181)$$

Подставив в первое из уравнений (2.181) выражение τ_{12} через σ_1 и σ_2 , (1.30) и выражение γ_{12} через ε_1 и ε_2 , (1.61), получим

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2G(\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \quad (2.182)$$

Из (2.181) и (2.182) следует уравнение, связывающее E , G и μ :

$$E = 2G(1 + \mu). \quad (2.183)$$

Получим еще одно уравнение, связывающее K с E , G и μ . Для этого рассмотрим изменение объема элементарного параллелепипеда с размером граней h_x , h_y , h_z . Относительное изменение объема определяется формулой

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \left(1 + \frac{\Delta x}{h_x}\right) \left(1 + \frac{\Delta y}{h_y}\right) \left(1 + \frac{\Delta z}{h_z}\right) - 1.$$

Перемножив скобки и отбросив члены высокого порядка малости относительно Δx , Δy , Δz , получим

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta x}{h_x} + \frac{\Delta y}{h_y} + \frac{\Delta z}{h_z} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (2.184)$$

Подставим в (2.184) выражение (2.181) для ε_i и воспользуемся уравнением (1.27). В результате

$$\frac{\Delta V}{V_0} \approx -\frac{3P}{E}(1 - 2\mu). \quad (2.185)$$

Вернемся теперь к уравнению (2.173). Заменяем его разностным уравнением, полагая, что $P_0 = 0$ при $V = V_0$. Тогда

$$K \approx -\frac{V_0}{\Delta V} P. \quad (2.186)$$

Из (2.186) и (2.185) следует

$$K \approx \frac{E}{3(1 - 2\mu)}. \quad (2.187)$$

Из (2.187) вытекает, что $\mu \leq 0.5$, а по тому, как μ было введено, оно должно быть положительным.

Уравнения (2.183) и (2.187) содержат четыре величины: K , E , G , μ . Следовательно, две из них могут выбираться в качестве независимых. Если в качестве независимых взять K и E , то G и μ

выразятся через них с помощью уравнений

$$\mu = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E}{3K} \right), \quad G = \frac{E}{3 - \frac{E}{3K}}, \quad (2.188)$$

в которых мы перешли от приближенного равенства в уравнении (2.187) к точным равенствам. Такая замена допустима, поскольку входящие в уравнения (2.188) величины находятся экспериментально или теоретически с некоторой погрешностью. Единственное требование, которому должны удовлетворять уравнения типа (2.188), это строгое выполнение уравнения (2.183).

В ряде экспериментов определяются модуль Юнга E и модуль сдвига G . В этом случае K и μ выражаются через E и G с помощью уравнений

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1, \quad K = \frac{E}{3 \left(3 - \frac{E}{G} \right)}. \quad (2.189)$$

В твердом теле, как и в жидкостях, могут распространяться продольные упругие волны, в которых движение частиц происходит в направлении движения волны. Однако если в жидкости скорость звука связана с модулем всестороннего сжатия

$$K = \rho c^2, \quad (2.190)$$

то в неограниченном твердом теле скорость продольных звуковых возмущений определяется по формуле

$$c_{\text{прод}}^2 = \frac{E(1 - \mu)}{\rho(1 + \mu)(1 - 2\mu)}. \quad (2.191)$$

В то же время в твердом теле в отличие от жидкостей могут распространяться такие поперечные волны, в которых частицы вещества смещаются в плоскости, ортогональной направлению движения волны. Скорость звука поперечных возмущений находится из уравнения

$$c_{\text{поп}}^2 = \frac{G}{\rho}. \quad (2.192)$$

Выразим $c_{\text{прод}}$ и $c_{\text{поп}}$ через c . Для этого с помощью первого уравнения (2.188) выразим E через μ и K , а затем с помощью (2.190) выразим K через c^2 . В результате получим

$$c_{\text{прод}}^2 = \frac{3(1 - \mu)}{1 + \mu} c^2. \quad (2.193)$$

Аналогично из (2.188) и (2.192) следует

$$c_{\text{поп}}^2 = \frac{3(1 - 2\mu)}{1 + \mu} c^2. \quad (2.194)$$

В жидкости $\mu = 0.5$, и из (2.193), (2.194) вытекает, что $c_{\text{прод}} = c$, $c_{\text{поп}} = 0$. Иными словами, в жидкости волны сдвига существовать

не могут, так как скорость распространения слабых (звуковых) поперечных возмущений равна нулю. В то же время продольные волны в жидкости превращаются в волны всестороннего сжатия, распространяющиеся со скоростью звука жидкости.

В практических приложениях широко применяется закон Гука в форме, содержащей компоненты девиаторов напряжений и деформаций. Для получения такой формы подставим в (2.180) выражения ϵ_{ii} и σ_{ii} через e_{ii} , S_{ii} и σ_{cp} , ϵ_{cp}

$$\epsilon_{ii} = e_{ii} + \epsilon_{cp}, \quad \sigma_{ii} = S_{ii} + \sigma_{cp}.$$

В результате такой подстановки уравнение для ϵ_{xx} в (2.180) примет вид

$$e_{xx} + \epsilon_{cp} = \frac{1}{E} (S_{xx} - P - \mu (S_{yy} + S_{zz} - 2P)). \quad (2.195)$$

Из (1.50), (1.52), (1.56) и (1.184) следует, что

$$\epsilon_{cp} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

Подставив ϵ_{cp} в (2.195) и воспользовавшись уравнениями (1.38), (1.39), получим

$$e_{xx} = \frac{1 + \mu}{E} S_{xx}.$$

Заменим в полученном уравнении $(1 + \mu)/E$ через $1/2G$ в соответствии с (2.183). Аналогичные преобразования сделаем в уравнениях для e_{yy} и e_{zz} в (2.180). В результате получим закон Гука в виде

$$\begin{aligned} S_{xx} &= 2Ge_{xx}, & \tau_{xy} &= 2G\gamma_{xy}, \\ S_{yy} &= 2Ge_{yy}, & \tau_{yz} &= 2G\gamma_{yz}, \\ S_{zz} &= 2Ge_{zz}, & \tau_{zx} &= 2G\gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (2.196)$$

В силу специфичности проводимого рассмотрения направления осей x , y , z являются главными направлениями тензоров деформаций и напряжений. Поэтому уравнения (2.196) могут быть записаны так:

$$\begin{aligned} S_1 &= 2Ge_1, & \tau_{12} &= 2G\gamma_{12}, \\ S_2 &= 2Ge_2, & \tau_{23} &= 2G\gamma_{23}, \\ S_3 &= 2Ge_3, & \tau_{31} &= 2G\gamma_{31}. \end{aligned} \quad (2.197)$$

Из (1.39), (1.57) и (2.197) следуют еще две формы закона Гука:

$$I_2(D_\sigma) = 4G^2 I_2(D_\epsilon), \quad I_3(D_\sigma) = 8G^3 I_3(D_\epsilon). \quad (2.198)$$

В заключение этого параграфа отметим, что в области упругих деформаций условия соосности тензоров напряжений и деформаций выполняются автоматически. Это вытекает из (2.196), (2.197) и (1.80).

§ 12. Пластические деформации. Упрочнение

Зависимости напряжений от характера деформирования материала за пределом упругости являются намного более сложными, чем в области упругих деформаций. Характеристики поведения материалов при пластическом деформировании, как впрочем и любые данные о теплофизических свойствах материалов, либо измеряются в экспериментах, либо получаются с помощью физических теорий пластичности. Точно так же, как и в случае уравнений состояния, экспериментальные и теоретические данные используются при построении математических теорий пластичности. Эти теории опираются в основном на гипотезы и предположения феноменологического характера. Их характерной чертой является математическая простота, необходимая для проведения расчетов и качественного анализа поведения конструкций. Математические теории пластичности можно разделить на два вида: теории упругопластических деформаций и теории пластического течения. Первые являются обобщением теории упругости и опираются на уравнения, определяющие связь между напряжениями и деформациями. Вторые опираются на уравнения, связывающие напряжения со скоростями деформаций. Многочисленные экспериментальные данные показывают, что уравнения упругопластического деформирования должны содержать напряжения, деформации и скорости деформаций [31, 32]. С позиций такого подхода теории упругопластических деформаций и теории пластического течения должны рассматриваться как асимптотические теории, справедливые в случаях, когда одно из свойств материала пренебрежимо мало по сравнению с другими.

Для получения аналитических решений уравнений теории пластичности делается ряд упрощающих предположений. Очень широко применяется, например, предположение о постоянстве напряжений в области пластических деформаций. Соответствующую математическую модель материала называют идеально пластической. Уравнение, связывающее напряжения в области пластических деформаций с некоторой константой материала, называется поверхностью текучести. Экспериментально показано, что приложение гидростатического давления практически не вызывает пластического течения в теле, поскольку приводит лишь к объемной деформации при отсутствии деформаций сдвига. Таким образом, любое условие текучести должно зависеть не от давления P , а от некоторых функций компонент тензора дивергента напряжений D_{σ} . В случае идеально пластического тела поверхность текучести является одновременно критерием перехода от упругих деформаций к пластическим, а предел упругости и предел пластичности совпадают.

Наиболее простое условие текучести — условие максимального напряжения сдвига, предложенное Треска в 1964 г. Согласно этой теории пластическое течение начинается в тот момент, когда максимальное напряжение сдвига достигает некоторого критического значения τ_k . В соответствии с (1.30) главное касательное напряжение

равно 0.5 ($\sigma_1 - \sigma_3$). Следовательно, условие текучести Треска имеет вид

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_k, \quad (2.199)$$

где τ_k — константа материала. Запишем (2.194) в форме, содержащей компоненты девиатора напряжений D_σ

$$S_1 - S_3 = 2\tau_k. \quad (2.200)$$

В случае одноосного растяжения значение σ_1 равно пределу текучести при растяжении Y , а $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Таким образом, $2\tau_k = Y$ и условие Треска принимает форму $S_1 - S_3 = Y$. Это условие пластичности означает, что при $S_1 - S_3 < Y$ деформации являются упругими и определяются законом Гука. В 1913 г. Мизес предложил условие пластичности в виде

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = \tau_m^2, \quad (2.201)$$

где τ_m^2 — константа материала. При переходе от σ_i к компонентам S_i девиатора напряжений уравнение (2.201) принимает вид

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \frac{1}{3} \tau_m^2.$$

В случае одноосного растяжения $\sigma_1 = Y$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Подставив эти значения в (2.201), получим

$$\tau_m^2 = 2Y^2. \quad (2.202)$$

Из (2.201), (2.202) следует, что условие пластичности Мизеса может быть записано так:

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \frac{2}{3} Y^2. \quad (2.203)$$

Воспользуемся уравнением (1.39) и запишем уравнение поверхности текучести (2.203) в форме, содержащей второй инвариант тензора девиатора напряжений

$$I_2(D_\sigma) + \frac{1}{3} Y^2 = 0. \quad (2.204)$$

В области упругих деформаций идеального упругопластического тела

$$I_2(D_\sigma) + \frac{1}{3} Y^2 > 0. \quad (2.205)$$

Условие упругости (2.205) имеет простой физический смысл. Поскольку энергия W_ϕ изменения формы тела в области упругих деформаций связана со вторым инвариантом $I_2(D_\sigma)$ уравнением

$$W_\phi = -\frac{1}{2G} I_2(D_\sigma),$$

то, заменив $I_2(D_\sigma)$ в (2.205) на W_ϕ , получим условие упругости в виде

$$W_\phi < \frac{1}{6G} Y^2. \quad (2.206)$$

Иными словами, деформации остаются упругими до тех пор; пока работа, затраченная на изменение формы тела, меньше некоторого значения, определяемого свойствами тела.

Рассмотрим уравнения пластического деформирования, построенные для плоского случая Сен-Венаном, а для пространственного — Леви и Мизесом. Предполагается, что компоненты девиатора напряжений пропорциональны компонентам девиатора скоростей деформаций:

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \lambda \dot{\epsilon}_{xx}, & \tau_{xy} &= \lambda \dot{\gamma}_{xy}, \\ S_{yy} &= \lambda \dot{\epsilon}_{yy}, & \tau_{yz} &= \lambda \dot{\gamma}_{yz}, \\ S_{zz} &= \lambda \dot{\epsilon}_{zz}, & \tau_{zx} &= \lambda \dot{\gamma}_{zx}. \end{aligned} \quad (2.207)$$

Величина λ — модуль пластичности — находится после подстановки (2.207) в уравнение пластичности Мизеса (2.203) в виде

$$\lambda = \pm \dot{Y} / (1.5 (\dot{\epsilon}_{xx}^2 + \dot{\epsilon}_{yy}^2 + \dot{\epsilon}_{zz}^2))^{0.5}. \quad (2.208)$$

Значения e_{ii} связаны с $\dot{\epsilon}_{ii}$ уравнениями

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \dot{e}_{xx} - \dot{\epsilon}_{cp}, \quad \dot{\epsilon}_{yy} = \dot{e}_{yy} - \dot{\epsilon}_{cp}, \quad \dot{\epsilon}_{zz} = \dot{e}_{zz} - \dot{\epsilon}_{cp}, \quad (2.209)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{cp} &= \frac{1}{3} (\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz}), \\ \dot{\epsilon}_{xx} &= \frac{\partial U_x}{\partial t}, \quad \dot{\epsilon}_{yy} = \frac{\partial U_y}{\partial y}, \quad \dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Для металлов в области пластических деформаций предел текучести возрастает с ростом деформаций. Металл как бы приобретает дополнительные упругие свойства и теряет способность к пластической деформации. Это явление называется упрочнением. В случае упрочнения в модели Мизеса предполагается, что предел текучести \dot{Y} зависит от интенсивности скоростей деформаций сдвига $\dot{\gamma}_n$

$$\dot{Y} = Y(\dot{\gamma}_n),$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_n &= \frac{2}{3} \sqrt{-6I_2(D\dot{\xi})}, \\ I_2(D\dot{\xi}) &= -(\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2 + \frac{1}{6} ((\dot{\epsilon}_{xx} - \dot{\epsilon}_{yy})^2 + (\dot{\epsilon}_{yy} - \dot{\epsilon}_{zz})^2 + \\ &\quad + (\dot{\epsilon}_{zz} - \dot{\epsilon}_{xx})^2)). \end{aligned}$$

Однако в области пластичности с упрочнением в модели Мизеса предполагается, что упругие деформации постоянны. Поскольку это противоречит экспериментальным фактам, модель Мизеса можно применять лишь в случаях, когда упрочнение мало.

Более точно описывает поведение пластического тела с упрочнением теория Прандтля — Рейсса [33, 34]. Предполагается, что

полные деформации состоят из упругих (с индексом e) и пластических (с индексом p) деформаций

$$\begin{aligned} e_{xx} &= e_{xx}^e + e_{xx}^p, & \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^e + \gamma_{xy}^p, \\ e_{yy} &= e_{yy}^e + e_{yy}^p, & \gamma_{yz} &= \gamma_{yz}^e + \gamma_{yz}^p, \\ e_{zz} &= e_{zz}^e + e_{zz}^p, & \gamma_{zx} &= \gamma_{zx}^e + \gamma_{zx}^p. \end{aligned} \quad (2.210)$$

Упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука (2.196)

$$\begin{aligned} e_{xx}^e &= \frac{1}{2G} S_{xx}, & \gamma_{xy}^e &= \frac{1}{2G} \tau_{xy}, \\ e_{yy}^e &= \frac{1}{2G} S_{yy}, & \gamma_{yz}^e &= \frac{1}{2G} \tau_{yz}, \\ e_{zz}^e &= \frac{1}{2G} S_{zz}, & \gamma_{zx}^e &= \frac{1}{2G} \tau_{zx}. \end{aligned} \quad (2.211)$$

Скорости пластических деформаций связаны с напряжениями уравнениями Мизеса (2.207)

$$\begin{aligned} \dot{e}_{xx}^p &= \frac{1}{\lambda} S_{xx}, & \dot{\gamma}_{xy}^p &= \frac{1}{\lambda} \tau_{xy}, \\ \dot{e}_{yy}^p &= \frac{1}{\lambda} S_{yy}, & \dot{\gamma}_{yz}^p &= \frac{1}{\lambda} \tau_{yz}, \\ \dot{e}_{zz}^p &= \frac{1}{\lambda} S_{zz}, & \dot{\gamma}_{zx}^p &= \frac{1}{\lambda} \tau_{zx}. \end{aligned} \quad (2.212)$$

Продифференцируем по t вдоль траектории частицы все величины, входящие в (2.210) и (2.211), и подставим скорости упругих и пластических деформаций в уравнение, полученное дифференцированием (2.210). В результате имеем

$$\begin{aligned} \dot{e}_{xx} &= \frac{1}{2G} \dot{S}_{xx} + \frac{1}{\lambda} S_{xx}, & \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{1}{2G} \dot{\tau}_{xy} + \frac{1}{\lambda} \tau_{xy}, \\ \dot{e}_{yy} &= \frac{1}{2G} \dot{S}_{yy} + \frac{1}{\lambda} S_{yy}, & \dot{\gamma}_{yz} &= \frac{1}{2G} \dot{\tau}_{yz} + \frac{1}{\lambda} \tau_{yz}, \\ \dot{e}_{zz} &= \frac{1}{2G} \dot{S}_{zz} + \frac{1}{\lambda} S_{zz}, & \dot{\gamma}_{zx} &= \frac{1}{2G} \dot{\tau}_{zx} + \frac{1}{\lambda} \tau_{zx}. \end{aligned} \quad (2.213)$$

Величина λ определяется с помощью условия пластичности (2.204). Для этого запишем (2.204) в виде

$$S_{xx}^2 + S_{yy}^2 + S_{zz}^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = \frac{2}{3} Y^2. \quad (2.214)$$

Продифференцируем (2.214) по t :

$$S_{xx} \dot{S}_{xx} + S_{yy} \dot{S}_{yy} + S_{zz} \dot{S}_{zz} + 2(\tau_{xy} \dot{\tau}_{xy} + \tau_{yz} \dot{\tau}_{yz} + \tau_{zx} \dot{\tau}_{zx}) = \frac{2}{3} Y \dot{Y}. \quad (2.215)$$

Умножим (2.214) на $1/\lambda$ и сложим с (2.215), умножив его предварительно на $1/2G$. В полученное уравнение подставим (2.213).

В результате

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{3\Phi}{2Y^2} - \frac{1}{2G} \frac{\dot{Y}}{Y}, \quad (2.216)$$

где $\Phi = S_{xx}\dot{e}_{xx} + S_{yy}\dot{e}_{yy} + S_{zz}\dot{e}_{zz} + 2(\tau_{xy}\dot{\gamma}_{xy} + \tau_{yz}\dot{\gamma}_{yz} + \tau_{zx}\dot{\gamma}_{zx})$.

При таком способе определения λ уравнения Праудтля — Рейсса (2.213) образуют систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно компонент девиатора напряжений.

§ 13. Уравнение состояния продуктов детонации

Для описания поведения продуктов детонации (ПД) взрывчатых веществ широко используется уравнение состояния [35—37]

$$P = A\rho^n \quad (2.217)$$

или его обобщения

$$P = (\gamma - 1)\rho E + A\rho^n \quad (2.218)$$

с постоянными A , n , γ . Однако эти уравнения состояния не описывают всей совокупности известных экспериментальных данных [38] о поведении ПД. Точность описания свойств ПД повышается при использовании более сложных уравнений состояния [39—41].

Рассмотрим несколько уравнений состояния продуктов детонации, предназначенных для описания свойств ПД как при их расширении, так и при небольших сжатиях по сравнению с начальной плотностью взрывчатого вещества.

Уравнение состояния гексогена [40] представляет собой систему уравнений

$$\begin{aligned} P &= P_x + P_\tau, \quad E = E_x + E_\tau, \\ P_x &= 15.4\rho^3 - 12.6\rho^2, \quad E_x = 7.7\rho^2 - 12.6\rho, \\ P_\tau &= \frac{R\varphi(E_\tau - \Delta)\rho}{C_V^* + 0.3R(\varphi - 1)}, \quad \varphi = 1 + \frac{2.7\tau^2 + 16\tau^4}{1 + 2.6\tau^4}, \\ \tau &= 0.72\rho T_*^{-0.3}, \quad T_* = \frac{0.3P_\tau}{\rho\varphi} = 10^{-3}T, \\ C_V^* &= 2.624R + \frac{1.76R\Theta^2 \exp \Theta}{(\exp \Theta - 1)^2}, \end{aligned} \quad (2.219)$$

$$\Theta = \frac{3200}{T}, \quad \Delta = \frac{1.76RT\Theta}{\mu(\exp \Theta - 1)} \left(1 - \frac{\Theta \exp \Theta}{\exp \Theta - 1} \right),$$

$\mu = 25$, P измеряется в килобарах, E — килоджоулях на грамм. Численные значения пятнадцати параметров этого уравнения подобраны так, чтобы с помощью уравнений (2.219) описать экспериментальные данные о зависимостях D , U , Q от начальной плотности ρ_0 для гексогена и удовлетворить требованиям некоторых правдоподобных гипотез о поведении ПД. Без предварительного подбора численных значений параметров это уравнение состояния

не может быть использовано для описания свойств других ПД, кроме гексогена.

Уравнение состояния, предложенное для описания свойств широкого класса ПД [35], имеет более простой вид

$$P = P_x + P_T, \quad P_x = -\frac{dE_x}{dV},$$

$$P_T = \gamma(\rho)\rho(E - E_x), \quad (2.220)$$

$$\gamma(\rho) = \gamma_0 + \frac{e}{\rho} \exp\left(-\frac{K}{\rho}\right),$$

$$E_x = a \exp\left(-\frac{K}{\rho}\right) - b\rho^m + A((\rho - \rho_1)^3 + B) \exp(-\alpha(\rho - \rho_1)^2).$$

Для выбора численных значений 10 параметров уравнений (2.220) в [39] используются данные, полученные при измерении траекторий частиц ПД за фронтом детонационной волны и некоторые гипотезы о поведении величин (например, γ). Для тех же целей в [38] применяются экспериментальные данные о кривой торможения ПВ. Численные значения параметров уравнений (2.220) подбираются для каждого ПД индивидуально и не могут удовлетворительно описывать свойства других ПД.

При построении уравнения состояния ПД [41] были использованы данные о зависимостях calorийности, скорости детонационной волны и массовой скорости на сильном разрыве от начальной плотности. Уравнение состояния

$$P = (\gamma(\rho) - 1)\rho E + \Phi(\rho) \quad (2.221)$$

отличается от (2.218) тем, что, во-первых, γ предполагается не постоянной величиной, а функцией от ρ и, во-вторых, функция $\Phi(\rho)$ имеет иной вид. Для нахождения функций $\gamma(\rho)$ и $\Phi(\rho)$ строится уравнение линии точек Жуге, соответствующих различным значениям ρ_0 . Эта линия определяется уравнением (2.221) и уравнениями на сильном разрыве в предположении, что $U_0 = 0$, $E_0 = 0$ и $P_0 = 0$

$$P = \rho_0 D U, \quad \rho(D - U) = \rho_0 D,$$

$$E = 0.5U^2 + Q, \quad D = U + c, \quad c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S. \quad (2.222)$$

Система пяти уравнений (2.222) содержит восемь неизвестных функций от ρ_0 . Значит, любые две из этих функций должны быть определены из каких-либо дополнительных предположений. Для каждого ВВ вводится две размерные характеристики ρ_{0k} — кристаллическая или максимальная плотность при давлении 10^{-4} ГПа и D_k — скорость нормальной детонации, соответствующая плотности ρ_{0k} . Уравнения (2.221), (2.222) записываются в безразмерном виде

$$\Pi = W^2 \Delta / (N + 1), \quad (2.223)$$

$$\delta = \Delta (N + 1) / N, \quad (2.224)$$

$$I = 0.5M^2 + K, \quad (2.225)$$

$$W = M + Z, \quad (2.226)$$

$$\Pi = (\gamma - 1)\delta I + \Phi, \quad (2.227)$$

$$Z^2 = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \delta} \right)_S, \quad (2.228)$$

$$N = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_S = \delta Z^2 / \Pi, \quad (2.229)$$

где $\Delta = \rho_0 / \rho_{0K}$, $\Pi = P / \rho_{0K} D_K^2$, $I = E / D_K^2$,

$$K = Q / D_K^2, \quad Z = c / D_K, \quad W = D / D_K,$$

$$\delta = \rho / \rho_{0K}, \quad M = U / D_K, \quad \Phi = \varphi / \rho_{0K} D_K^2.$$

Преобразуем уравнения (2.223) — (2.229) так, чтобы получилось уравнение, которое позволило бы выразить функцию $\gamma(\rho)$ через функции, измеряемые экспериментально. Для этого продифференцируем все величины, входящие в (2.227), по δ вдоль изэнтропы и полученное выражение подставим в (2.228). В результате

$$Z^2 = \frac{\gamma \Pi}{\delta} + \frac{d\Phi}{d\delta} - \frac{\Phi}{\delta} + \frac{\Pi - \Phi}{\gamma - 1} \frac{d\gamma}{d\delta}. \quad (2.230)$$

Из (2.229), (2.230) следует уравнение

$$\frac{d\Phi}{d\delta} - \frac{\Phi}{\delta} + \frac{\Pi - \Phi}{\gamma - 1} \frac{d\gamma}{d\delta} + \frac{(\gamma - N)\Pi}{\delta} = 0. \quad (2.231)$$

Будем считать, что $N = N(\Delta)$. При этом предположении дифференцирование (2.224) дает

$$\frac{d\delta}{d\Delta} = \frac{N + 1}{N} - \frac{\Delta}{N^2} \frac{dN}{d\Delta}. \quad (2.232)$$

Умножим (2.231) на $d\delta/d\Delta$ и в полученном уравнении исключим Π с помощью (2.223)

$$\frac{d\Phi}{d\Delta} + \frac{(\gamma - N)W^2N}{(N + 1)^2} \frac{d\delta}{d\Delta} + \frac{W^2\Delta - (N + 1)\Phi}{(\gamma - 1)(N + 1)} \frac{d\gamma}{d\Delta} - \frac{\Phi N}{(N + 1)\Delta} = 0. \quad (2.233)$$

Далее подставим (2.223) и (2.224) в (2.229). Тогда

$$Z = WN / (N + 1). \quad (2.234)$$

Из (2.226) и (2.234) следует

$$M = W / (N + 1). \quad (2.235)$$

Подставим (2.235) в (2.225) и полученное уравнение в (2.227)

$$\Pi = \Phi + \frac{(\gamma - 1)\Delta(W^2 + 2K(N + 1)^2)}{2N(N + 1)}. \quad (2.236)$$

Из (2.223) и (2.236) выразим Φ через W , Δ , N , γ и K :

$$\Phi = \frac{\Delta W^2}{N+1} - \frac{(\gamma-1)(N+1)\Delta K}{N} - \frac{(\gamma-1)\Delta W^2}{2(N+1)N}. \quad (2.237)$$

Исключив Φ в уравнениях (2.233) и (2.237) и заменив $d\delta/d\Delta$ выражением (2.232), получим уравнение линии точек Жуге в виде

$$W\Delta(2N - \gamma + 1)\frac{dW}{d\Delta} - \Delta(\gamma - 1)(N + 1)^2\frac{dK}{d\Delta} + W^2N(\gamma - N) = 0. \quad (2.238)$$

Это уравнение содержит три функции от $\Delta(W(\Delta), K(\Delta), N(\Delta))$, которые могут быть измерены экспериментально. После определения указанных функций уравнение (2.232) позволяет найти зависимость

$$\gamma = 1 + \frac{2\Delta - W(N-1)}{\frac{\Delta}{N}\frac{dW}{d\Delta} + \frac{\Delta(N+1)^2}{WN}\frac{dK}{d\Delta} - W}. \quad (2.239)$$

Поскольку зависимости W , K , N от Δ являются достаточно сложными, то и $\gamma(\Delta)$ также получается сложной. Далее совершается переход от $\gamma(\Delta)$ к зависимости $\gamma(\delta)$. Эта сложная функция аппроксимируется более простой [41]:

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_0 + (\gamma_\infty - \gamma_0)x(3 - 3x + x^2) & \text{при } x \leq 1, \\ \gamma_\infty & \text{при } x > 1, \end{cases} \quad (2.240)$$

где $x = \delta/\delta_*$. После нахождения $\gamma(\delta)$ из уравнения (2.237) находится зависимость $\Phi(\delta)$, которая с хорошей точностью аппроксимируется зависимостью вида

$$\Phi(\delta) = \begin{cases} \rho_{ок} D_k^2 A (x-1)^m & \text{при } x > 1, \\ 0 & \text{при } x \leq 1. \end{cases}$$

Численные значения параметров A , m , δ_* выбираются так, чтобы наилучшим образом описывались экспериментальные зависимости N , W , K от Δ . Для широкого класса ПД значения величин, входящих в уравнение состояния, таковы [41]: $m = 2.284$, $\gamma_\infty = 1.67$, $\gamma_0 = 1.375$, $\delta_* = 0.35$, $A = 0.0139$. Для конкретных ПД в [41] рекомендуются следующие значения: для тротила $\rho_{ок} = 1.663$ г/см, $D_k = 7.15$ км/с, для гексогена $\rho_{ок} = 1.820$ г/см, $D_k = 8.80$ км/с. Для смесевых ПД значения $\rho_{ок}$, D_k выражаются через $\rho_{окi}$, D_{ki} компонент с помощью простых уравнений

$$\rho_{ДК} = 1 / \left(\sum_i \kappa_i / \rho_{окi} \right), \quad D_k^2 = \sum_i \kappa_i D_{ki}^2,$$

где κ_i — массовая концентрация компоненты с индексом i .

ОДНОМЕРНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ СЖИМАЕМЫХ СРЕД

§ 1. Уравнения механики сплошной среды в случае малых возмущений

Если в некоторой точке сплошной среды изменить хотя бы одну из величин, характеризующих состояние и движение вещества, то это возмущение с течением времени будет распространяться во все стороны. Рассмотрим дифференциальные уравнения, описывающие малые возмущения в идеальной жидкости. Исходными уравнениями для них являются уравнения неразрывности (1.97) и движения (1.105), которые в случае одномерного движения среды принимают вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} + \rho U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad (3.2)$$

$$P = P(\rho, S).$$

Производную $\partial P/\partial x$ заменим выражением

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_\rho \frac{\partial S}{\partial x}, \quad (3.3)$$

а $(\partial P/\partial \rho)_S$ — величиной c^2 в соответствии с (2.22). В результате получим

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} + \rho U \frac{\partial U}{\partial x} + c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_\rho \frac{\partial S}{\partial x} = 0. \quad (3.4)$$

Сделаем следующие упрощающие предположения:

— $S = \text{const}$, т. е. $\partial S/\partial x = 0$;

— $c^2 = \text{const}$;

— величины ρ и U имеют вид $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, $U = \delta U$, где $\rho_0 = \text{const}$, а $\delta\rho$ и δU малы настолько, что их произведениями $\delta\rho\delta U$, $(\delta\rho)^2$, $(\delta U)^2$ можно пренебречь.

Эти условия являются качественной и количественной характеристикой малых возмущений. Если возмущения таковы, что указанные условия выполняются хотя бы приближенно, то эти возмущения можно считать малыми. После сделанных предположений линеаризованные уравнения (3.1), (3.4) принимают вид

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \delta U}{\partial x} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial \delta U}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \delta\rho}{\partial x} = 0. \quad (3.5)$$

Продифференцируем первое из уравнений (3.5) по t , второе по x и вычтем их друг из друга. В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} = 0, \quad (3.6)$$

которое является классическим уравнением колебаний. Здесь под δ подразумевается малое возмущение δr , но при ином порядке дифференцирования аналогичное уравнение получается и для δU . Если предположить, что при $t = 0$ $\delta = f(x)$, $\partial\delta/\partial t = 0$, то решение уравнения (3.6) имеет вид

$$\delta = 0.5(f(x + ct) + f(x - ct)). \quad (3.7)$$

Иными словами, начальное возмущение $f(x)$ при $t > 0$ распадается на две одинаковые волны $0.5f(x + ct)$ и $0.5f(x - ct)$, которые переносятся вдоль характеристик $x + ct = x_0$ и $x - ct = x_0$, со скоростью, равной их наклону

$$\frac{dx}{dt} = \pm c.$$

Эта скорость зависит только от свойств среды и не зависит от формы возмущения. Типичными для сплошных сред малыми возмущениями являются шумы, звуковые сигналы, поэтому величина c называется скоростью звука.

Остановимся теперь на уравнениях для малых возмущений в упругой среде. Запишем уравнение движения (1.106) в виде трех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial U_x}{\partial t} - \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) &= 0, \\ \rho \frac{\partial U_y}{\partial t} - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) &= 0, \\ \rho \frac{\partial U_z}{\partial t} - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Рассмотрим такое возмущение, в котором все величины зависят только от x и не зависят от y и z . Если еще предположить, что отсутствует вращение частиц тела, то многие частные производные принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial z_0} = \frac{\partial z}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial z_0} = \frac{\partial z}{\partial y_0} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x_0} = \frac{\partial x}{\partial y_0} = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial y_0} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial z_0} = 1, \\ \frac{\partial x_0}{\partial z} = \frac{\partial z_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial y_0}{\partial z} = \frac{\partial z_0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial y_0}{\partial x} = \frac{\partial x_0}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial y_0} \frac{\partial y_0}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial z_0} \frac{\partial z_0}{\partial z} = 1. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Выразим далее с помощью уравнений (2.180) σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} через ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} ((1 - \mu)\epsilon_{xx} + \mu(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})), \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} ((1 - \mu)\epsilon_{yy} + \mu(\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz})), \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} ((1-\mu)\epsilon_{zz} + \mu(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})),$$

$$\tau_{xy} = 2G\gamma_{xy}, \tau_{xz} = 2G\gamma_{xz}, \tau_{yz} = 2G\gamma_{yz}.$$

Подставим (3.10) в уравнения (3.8), затем в полученные уравнения подставим выражения (1.7) для γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} и выражения для ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} . Приняв во внимание производные (3.9), получим вместо (3.8) систему уравнений

$$\begin{aligned} \rho \frac{dU_x}{dt} - \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \frac{\partial^2 x}{\partial x_0^2} \frac{\partial x_0}{\partial x} &= 0, \\ \rho \frac{dU_y}{dt} - G \frac{\partial^2 y}{\partial x_0^2} \frac{\partial x_0}{\partial x} &= 0, \\ \rho \frac{dU_z}{dt} - G \frac{\partial^2 z}{\partial x_0^2} \frac{\partial x_0}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из (1.77) с учетом (3.9) получаем

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = \frac{V}{V_0} \quad \text{или} \quad \frac{\partial x_0}{\partial x} = \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (3.12)$$

Будем считать, что U есть малое возмущение скорости, так что произведениями U_i на производные $\partial U_k / \partial x_i$ можно пренебречь. Тогда в (3.11) полные производные по t можно заменить частными производными по t . И, наконец, подставим в полученные уравнения выражения (1.4) для U_x , U_y , U_z и воспользуемся обозначениями (2.191) и (2.192). В результате получим систему уравнений, известных под названием волновых уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - c_{\text{прод}}^2 \frac{\partial^2 x}{\partial x_0^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c_{\text{поп}}^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x_0^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c_{\text{поп}}^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_0^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Таким образом, в упругой изотропной среде возможны две плоские независимые волны: продольная и поперечная. В продольной волне смещение совпадает с направлением распространения волны, в ней же происходит изменение плотности. Это следует из (3.12), поскольку $\partial x_0 / \partial x \neq 0$. В поперечной волне смещение лежит в плоскости, перпендикулярной направлению распространения упругой волны. Изменения плотности в поперечной волне не происходит.

§ 2. Акустические волны

Скорость звука, как скорость распространения малых возмущений относительно среды, входит в уравнение движения сжимаемой среды. Квадрат скорости звука стоит в виде множителя перед

вторыми производными по пространственной координате. Соотношения (2.193), (2.194) между $c_{\text{прод}}$, $c_{\text{поп}}$ и c показывают, что в упругой среде, где $\mu < 0.5$,

$$c_{\text{прод}} > c_{\text{поп}} > c. \quad (3.14)$$

Проанализируем свойства волновых уравнений (3.13) и (3.6). Отметим, что форма этих уравнений не зависит от свойств среды. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать решение уравнения (3.6), поскольку оно одновременно является и решением каждого из уравнений (3.13), при условии, что вместо c берется либо $c_{\text{прод}}$, либо $c_{\text{поп}}$.

Перейдем к новым переменным

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct. \quad (3.15)$$

В новой системе координат преобразованное уравнение (3.6) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (3.16)$$

Непосредственное интегрирование уравнения (3.16) дает его решение

$$\delta(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \quad (3.17)$$

где f_1 — функция только переменного ξ , f_2 — только переменного η . Функции f_1 и f_2 являются произвольными, их можно определить из начальных условий

$$\delta|_{t=0} = g_1(x), \quad \frac{\partial \delta}{\partial t}|_{t=0} = g_2(x). \quad (3.18)$$

Из (3.17) и (3.18) следует, что

$$\begin{aligned} \delta(x, 0) &= f_1(x) + f_2(x) = g_1(x), \\ \frac{\partial \delta(x, 0)}{\partial t} &= c \left(\frac{df_1}{d\xi} - \frac{df_2}{d\eta} \right) = g_2(x). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Интегрируя второе равенство, получаем

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g_2(\alpha) d\alpha + k, \quad (3.20)$$

где x_0 и k — постоянные. Из первого равенства (3.19) и из (3.20) вытекает, что

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2} g_1(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g_2(\alpha) d\alpha + \frac{k}{2}, \\ f_2(x) &= \frac{1}{2} g_1(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g_2(\alpha) d\alpha - \frac{k}{2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Из (3.17) и (3.21) следует общее решение в виде

$$\delta(x, t) = \frac{1}{2} g_1(x - ct) + \frac{1}{2} g_1(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g_2(\alpha) d\alpha.$$

Рассмотрим случай $g_2(x) = 0$. Предыдущее уравнение при этом упрощается:

$$\delta(x, t) = 0.5(g_1(x - ct) + g_1(x + ct)). \quad (3.22)$$

Малые возмущения скорости δU , давления δP и плотности $\delta \rho$ в акустической волне связаны уравнениями

$$\delta U = \pm \frac{c\delta\rho}{\rho}, \quad \delta U = \pm \frac{\delta P}{\rho c}, \quad \delta P = c^2\delta\rho.$$

Предположим, что функция $\delta(x, t)$ равна возмущению плотности $\delta\rho$, умноженному на c/ρ_0 . Подстановка (3.22) в эти уравнения дает

$$\begin{aligned} \delta\rho &= 0.5\rho_0(g_1(x - ct) + g_1(x + ct))/c, \\ \delta P &= 0.5\rho_0 c(g_1(x - ct) + g_1(x + ct)), \\ \delta U &= 0.5(g_1(x - ct) - g_1(x + ct)). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Из этих уравнений следует, что при $t=0$ $\delta U = 0.5(g_1(x, 0) - g_1(x, 0)) = 0$. Выразим функцию g_1 через $\delta\rho$ и δU :

$$\begin{aligned} g_1(x - ct) &= \frac{c}{\rho_0} \delta\rho(x, t) + \delta U(x, t), \\ g_1(x + ct) &= \frac{c}{\rho_0} \delta\rho(x, t) - \delta U(x, t). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Пусть в начальный момент времени задано произвольное распределение плотности: $\delta\rho_0(x, 0)$, а $\delta U_0(x, 0) = 0$. В этом случае из (3.24) вытекает, что

$$g_1(x) = \frac{c}{\rho_0} \delta\rho_0(x).$$

После перехода к новым аргументам функции $g_1(x - ct)$ и $g_1(x + ct)$ принимают вид

$$g_1(x - ct) = \frac{c}{\rho_0} \delta\rho_0(x - ct), \quad g_1(x + ct) = \frac{c}{\rho_0} \delta\rho_0(x + ct).$$

Подставляя эти функции в формулы (3.23), получаем решение волнового уравнения

$$\begin{aligned} \delta\rho &= 0.5(\delta\rho_0(x - ct) + \delta\rho_0(x + ct)), \\ \delta P &= 0.5c^2(\delta\rho_0(x - ct) + \delta\rho_0(x + ct)), \\ \delta U &= 0.5 \frac{c^2}{\rho_0} (\delta\rho_0(x - ct) - \delta\rho_0(x + ct)). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Картина возникающего движения показана на рис. 3.1.

Если в начальный момент $t=0$ задаются профили плотности $\delta\rho_0(x, 0)$ и скорости $\delta U_0(x, 0)$, то распространение импульса воз-

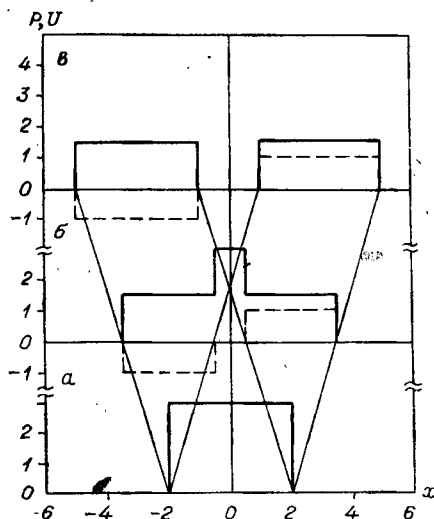


Рис. 3.2. Области зависимости решения ABC и влияния начальных данных $ABCD$.

Линии с положительным наклоном — α -характеристики, с отрицательным — β -характеристики.

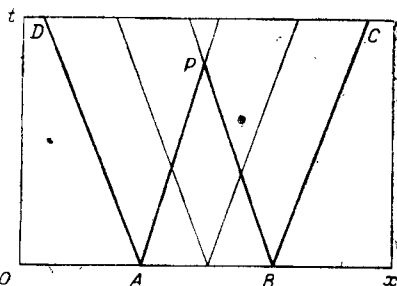


Рис. 3.1. Зависимости $\delta\rho(x)$ (сплошные линии) и $\delta U(x)$ (штриховые) на три момента времени: $t = 0$ (а), 1 (б), 2 (в). Начальные данные: $\delta\rho_0 = 3$, $\delta U_0 = 0$, $-2 < x < 2$; $\delta\rho_0 = 0$, $\delta U_0 = 0$, $x < -2$ и $x > 2$.

мущений определяется формулами (3.23) и (3.24). В важном частном случае, когда $\delta U_0 = c\delta\rho_0/\rho_0$, оказывается, что $g_1(x + ct) = 0$, т. е. будет существовать только одна волна, распространяющаяся в положительном направлении оси x . Решение имеет вид

$$\begin{aligned} \delta\rho &= \delta\rho_0(x - ct), \\ \delta U &= \delta U_0(x - ct), \\ \delta P &= c^2\delta\rho_0(x - ct). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Найдем на оси x область, от которой зависит течение в произвольной точке P плоскости x, t . Характеристики, проходящие через точку P , пересекают ось x в точках A и B (см. рис. 3.2). Состояние среды в точке P полностью определяется заданием начальных условий на отрезке AB и не зависит от исходного состояния среды вне его. Отрезок AB называется областью зависимости решения в точке $P(x, t)$. Из рис. 3.2 также видно, что влияние начального состояния среды на отрезке AB на течение в последующие моменты времени ограничивается характеристиками AD слева и BC справа. Область, заключенная между осью x и указанными характеристиками, называется областью влияния начальных возмущений, заданных на отрезке AB оси x . При определении областей зависимости и влияния предполагалось, что характеристики одного семейства не пересекаются друг с другом, что справедливо для непрерывного течения.

§ 3. Простая волна

Пусть среда движется с некоторой скоростью U . Движение будем считать плоским и изэнтропическим. Состояние среды описывается функциями $U(x, t)$, $P(x, t)$, $\rho(x, t)$. В начальный момент t_0

зададим малое возмущение в точке x_0 . В лабораторной системе координат возникающие акустические волны будут иметь скорость распространения:

$U + c$ — волна, бегущая вниз по течению или вправо.

$U - c$ — волна, бегущая против течения или влево.

В плоскости x, t пути или траектории распространения волн описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= U(x, t) + c(x, t), \\ \frac{dx}{dt} &= U(x, t) - c(x, t). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Первое из уравнений (3.27) описывает траекторию волны, бегущей вправо, второе — волны, бегущей влево. Скорость распространения возмущений, как следует из (3.27), будет переменной, и пути их распространения будут искривляться в плоскости x, t . В плоском изэнтропическом течении существуют два семейства характеристик: α -характеристики, определяемые первым уравнением, и β -характеристики, определяемые вторым уравнением системы (3.27). Таким образом, через каждую точку в плоскости x, t можно провести α - и β -характеристики.

При адиабатическом течении энтропия различных частиц различна и возможны возмущения энтропии. Поскольку $dS/dt = 0$, возмущения энтропии связаны с частицей и перемещаются вместе с ней, т. е. пути распространения возмущений энтропии описываются уравнением $dx/dt = U$. Пути распространения возмущений энтропии носят название C -характеристик. В адиабатическом течении, следовательно, через каждую точку в плоскости x, t проходят три характеристики: α, β, C .

Преобразуем далее уравнения неустановившегося движения сплошной сжимаемой среды таким образом, чтобы они содержали производные от параметров течения вдоль характеристик. Выпишем для этого исходную систему уравнений адиабатического одномерного движения сжимаемой жидкости

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial U}{\partial x} &= 0, \\ \rho \frac{\partial U}{\partial t} + \rho U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + U \frac{\partial S}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

В системе (3.28) число уравнений равно числу характеристик. Запишем уравнение состояния в форме $P = P(\rho, S)$. Первые два члена в правой части уравнения непрерывности могут быть преобразованы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} \right). \quad (3.29)$$

Используя (3.29), в первом из уравнений (3.28), приходим к уравнению

$$\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (3.30)$$

Умножим (3.30) на произвольный множитель λ и сложим со вторым уравнением (3.28). В результате имеем

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} + (\rho U + \lambda \rho c^2) \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \frac{\partial P}{\partial t} + (1 + \lambda U) \frac{\partial P}{\partial x} = 0. \quad (3.31)$$

Потребуем, чтобы коэффициенты при производных по t и по x были пропорциональны. Решение уравнения пропорциональности коэффициентов дает $\lambda = \pm 1/c$. При подстановке этих значений в (3.31) получим

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U + c) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho c} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + (U + c) \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0, \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U - c) \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho c} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + (U - c) \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0. \quad (3.33)$$

Уравнение (3.32) содержит полные производные вдоль α -характеристик, а уравнение (3.33) — вдоль β -характеристик. Уравнения (3.32) и (3.33) можно трактовать следующим образом:

по направлению $dx/dt = U + c$ выполняется соотношение

$$dU + \frac{dP}{\rho c} = 0; \quad (3.34)$$

по направлению $dx/dt = U - c$ — соотношение

$$dU - \frac{dP}{\rho c} = 0. \quad (3.35)$$

Уравнение адиабатичности можно рассматривать как уравнение вдоль C -характеристик, означающее, что по направлению траектории частиц $dx/dt = U$ сохраняется энтропия $dS = 0$. Отметим, что член $dP/\rho c$ в адиабатическом течении не есть полный дифференциал, так как скорость звука зависит не только от давления, но и от энтропии. Из формул (3.34) и (3.35) следует, что вдоль характеристик переносятся определенные комбинации величин, характеризующих непрерывное течение сжимаемой среды.

В изэнтропическом потоке сжимаемой среды, когда энтропия постоянна в пространстве и времени, скорость звука и давление зависят только от плотности. В силу изэнтропичности течения дифференциальные уравнения (3.34), (3.35) будут представлять полные дифференциалы величин

$$\begin{aligned} I_\alpha &= U + \int \frac{dP}{\rho c} = U + \int \frac{c}{\rho} d\rho, \\ I_\beta &= U - \int \frac{dP}{\rho c} = U - \int \frac{c}{\rho} d\rho. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Величины I_α и I_β называются инвариантами Римана. Рассмотрим

инварианты Римана в случае простейшего уравнения состояния плотного вещества (2.148), которое запишем в виде

$$P = \frac{\rho_{\text{ок}} c_{\text{ок}}^2}{m} \left(f(S) \left(\frac{\rho}{\rho_{\text{ок}}} \right)^m - 1 \right). \quad (3.37)$$

Будем считать, что $f(S) = \text{const}$. Если предположить, что вещество находится под давлением P_0 и имеет плотность ρ_0 , то (3.37) можно переписать:

$$P = \frac{\rho_{\text{ок}} c_{\text{ок}}^2}{m} \left(\left(1 + \frac{m P_0}{\rho_{\text{ок}} c_{\text{ок}}^2} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^m - 1 \right). \quad (3.38)$$

Дифференцирование P по ρ дает выражение

$$c^2 = \frac{m P_0 + \rho_{\text{ок}} c_{\text{ок}}^2}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{m-1},$$

из которого вытекает, что при $P = P_0$, $\rho = \rho_0$

$$c_0^2 = \frac{m P_0 + \rho_{\text{ок}} c_{\text{ок}}^2}{\rho_0}.$$

Следовательно,

$$c^2 = c_0^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{m-1}. \quad (3.39)$$

Выразив отсюда ρ через c и подставив в (3.36), получим после интегрирования

$$I_\alpha = U + \frac{2}{m-1} c, \quad I_\beta = U - \frac{2}{m-1} c. \quad (3.40)$$

Инварианты Римана постоянны вдоль соответствующих характеристик. В общем случае вдоль каждой характеристики одного семейства значения инварианта имеют свое значение. Инварианты Римана однозначно связаны с U и c , и их можно рассматривать как новые функции, описывающие течение. Для рассмотренного случая из формул (3.39) следует

$$U = 0,5(I_\alpha + I_\beta), \quad c = 0,25(m-1)(I_\alpha - I_\beta). \quad (3.41)$$

Соответственно уравнения характеристик будут

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{m+1}{4} I_\alpha + \frac{3-m}{4} I_\beta, \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{3-m}{4} I_\alpha + \frac{m+1}{4} I_\beta. \end{aligned} \quad (3.42)$$

В частном случае при $m=3$ оба семейства характеристик в плоскости x, t , как вытекает из (3.42), будут представлять собой прямые линии.

В § 2 было показано, что малые возмущения, созданные в начальном состоянии среды, распространяются вправо и влево со ско-

ростью звука. Это означает, что в волне, идущей, например, вправо, β -инвариант постоянен. В волне же, распространяющейся влево, постоянен α -инвариант. Иными словами, если в начальном состоянии среды создать не произвольное возмущение, а такое, в котором один из инвариантов будет постоянным, то волна будет распространяться лишь в одном направлении. Кроме того, из (3.42) следует, что в этом случае характеристики противоположного семейства прямолнейны. Движение сплошной среды, в котором одно из семейств α -, β -характеристик состоит из прямых линий, называется бегущей или простой волной. Поскольку инвариант, постоянный во всем течении, задается начальным распределением $U(x, 0)$ и $c(x, 0)$, то для существования течения типа простой волны необходимо, чтобы оно граничило с областью покоя или постоянного течения.

Вернемся к течению типа простой волны в общем случае, не делая допущения о малости возмущений. Предположим, что волна распространяется вправо. Для такой волны I_β -инвариант постоянен. Уравнения α -характеристик $dx/dt = F_\alpha(I_\alpha, I_\beta)$ представляют собой прямые линии. Интегрируя уравнение для α -характеристик, получаем

$$x = F_\alpha(I_\alpha, I_\beta)t + \varphi(I_\alpha). \quad (3.43)$$

Функция $F_\alpha = \text{const}$, так как $I_\alpha = \text{const}$ вдоль α -характеристики, а $I_\beta = \text{const}$ во всем течении. Постоянная интегрирования $\varphi(I_\alpha)$ определяется из начальных и граничных условий. Уравнение (3.43) эквивалентно уравнению

$$x = (U \pm c(U))t + \varphi(U), \quad (3.44)$$

которое получается из уравнения α -характеристики: $dx/dt = U + c(U)$. Из формулы (3.44) видно, что решение представляет собой бегущую со скоростью $U + c(U)$ в лабораторной системе координат волну. Используя результаты предыдущего параграфа, решение может быть записано следующим образом:

$$U = f(x - (U + c(U))t), \quad c = g(x - (U + c(U))t). \quad (3.45)$$

Аналогичным образом может быть построено решение для волны, бегущей влево. Для нее $I_\alpha = \text{const}$ во всем течении и β -характеристики прямые линии. Решение для такой волны имеет вид

$$\begin{aligned} x &= (U - c(U))t + \varphi_1(U), \\ U &= f_1(x + (c(U) - U)t), \\ c &= g_1(x + (c(U) - U)t). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Вид функций f , f_1 , g , g_1 , $\varphi(U)$, $c(U)$ определяется начальными и граничными условиями.

§ 4. Волны сжатия и расширения

Выражения (3.42), (3.45) и (3.46) показывают, что для бегущих волн различные значения термодинамических величин переносятся вдоль характеристик с разными скоростями. Это определяется

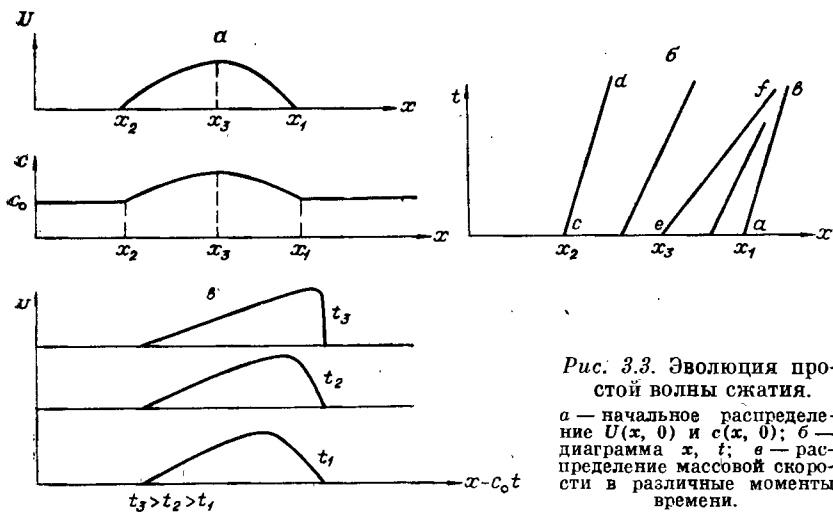


Рис. 3.3. Эволюция простой волны сжатия.

a — начальное распределение $U(x, 0)$ и $c(x, 0)$; b — диаграмма x, t ; e — распределение массовой скорости в различные моменты времени.

нелинейностью уравнений движения и приводит с течением времени к искажению начальных профилей $U(x, 0)$ и $c(x, 0)$. В акустических волнах, являющихся решением линеаризованных уравнений механики сплошной среды, начальные профили $U(x, 0)$, $c(x, 0)$ распространяются вдоль характеристик без искажений.

Рассмотрим качественно эволюцию плоской волны, распространяющейся вправо и описываемой уравнениями (3.44), (3.45). Зададим начальные профили $U(x, 0)$ и $c(x, 0)$ так, как указано на рис. 3.3, a . Картина возникающего течения в плоскости x, t приведена на рис. 3.3, b . Характеристики ab и cd параллельны друг другу, их уравнения есть $dx/dt = c_0$. Характеристика ef имеет больший наклон или большую скорость в лабораторной системе координат по сравнению со всеми другими характеристиками, в том числе с характеристиками ab и cd . Таким образом, с течением времени характеристика ef будет приближаться к характеристике ab и отдаляться от характеристики cd . Ширина волнового пакета не меняется с течением времени, так как точки a и b распространяются с одинаковой скоростью, равной скорости звука. Однако внутри волнового пакета происходит существенное перераспределение U и c : значения максимумов не меняются, но их относительное положение претерпевает значительное изменение. С течением времени профили скорости искажаются все сильнее и сильнее с нарастанием крутизны фронта волны (см. рис. 3.3). Если продолжить решение в область больших t таких, что произойдет пересечение характеристик одного семейства (в рассматриваемом случае α -характеристик), то решение получается неоднозначным. Для ликвидации неоднозначности решения необходимо допустить образование сильных разрывов, т. е. ударной волны. Таким образом, рассмотренное решение типа простой волны имеет смысл в течение ограниченного отрезка времени до образования сильного разрыва. Аналогичным образом

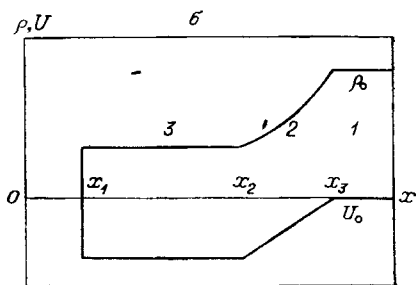
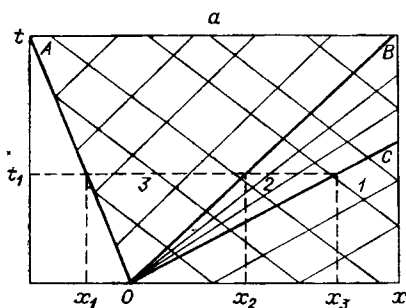


Рис. 3.4. Течение в простой центрированной волне разрежения.
 а — диаграмма x, t течения при $n = 3$; б — распределение плотности и скорости частиц по координате в момент t_1 .

изменяются давление и плотность. Значения скорости, давления и плотности уменьшаются в волне в сторону распространения волны. Такие течения называются простыми волнами сжатия.

Существует, однако, и другой тип простой волны, также описываемой уравнениями (3.44) — (3.46), в которой давление, плотность и скорость звука возрастают в направлении распространения волны, а увеличение массовой скорости направлено в обратную сторону. О такой простой волне говорят как о простой волне разрежения или расширения. Наибольший прикладной интерес представляет специальный вид простой волны разрежения, когда все характеристики одного из семейств выходят из одной точки, т. е. функция $\varphi(U)$ в уравнении (3.44) или $\varphi_1(U)$ в первом уравнении системы (3.46) равна нулю. Такая волна называется простой центрированной волной разрежения. На практике указанный тип волны реализуется при выходе ударной волны на свободную поверхность вещества.

Представим, что свободная граница сжатой до давления P_0 неподвижной среды начинает двигаться с постоянной скоростью $U_{гp}$ влево. Возникающее течение будет представлять собой простую центрированную волну разрежения (рис. 3.4). Область 1 есть область покоя, область 3 — область постоянного течения, поскольку в ней оба инварианта Римана постоянны. В области 2 течение обладает свойствами простой центрированной волны разрежения. В этой области в силу равенства нулю $\varphi(U)$ уравнение α -характеристик имеет вид

$$\frac{x}{t} = U + c. \quad (3.47)$$

Постоянство I_B -инварианта во всем течении приводит к уравнению

$$U - \frac{2}{m-1}c = -\frac{2}{m-1}c_0. \quad (3.48)$$

Из (3.47) и (3.48) вытекает, что в области 2 U и c зависят от x и

t следующим образом:

$$U = \frac{2}{m+1} \left(\frac{x}{t} - c_0 \right), \quad c = \frac{m-1}{m+1} \frac{x}{t} + \frac{2}{m+1} c_0. \quad (3.49)$$

Зависимости $P(x, t)$ и $\rho(x, t)$ в области простой центрированной волны разрежения получаются из (3.37), (3.39), (3.49):

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{m-1}{m+1} \frac{x}{c_0 t} + \frac{2}{m+1} \right)^{\frac{2}{m-1}},$$

$$P = \frac{\rho_{0K} c_{0K}^2}{m} \left(\left(1 + \frac{mP_0}{\rho_{0K} c_{0K}^2} \right) \left(\frac{m-1}{m+1} \frac{x}{c_0 t} + \frac{2}{m+1} \right)^{\frac{2m}{m-1}} - 1 \right). \quad (3.50)$$

В области \mathcal{Z} скорость $U = U_{\text{гр}}$ и в силу (3.48)

$$c = c_{\text{гр}} = c_0 + \frac{m-1}{2} U_{\text{гр}}. \quad (3.51)$$

Из (3.38), (3.39) и (3.51) следует, что в области \mathcal{Z}

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{m-1}{2} \frac{U_{\text{гр}}}{c_0} \right)^{\frac{2}{m-1}},$$

$$P = \frac{\rho_{0K} c_{0K}^2}{m} \left(\left(1 + \frac{mP_0}{\rho_{0K} c_{0K}^2} \right) \left(1 + \frac{m-1}{2} \frac{U_{\text{гр}}}{c_0} \right)^{\frac{2m}{m-1}} - 1 \right). \quad (3.52)$$

Скорость разлета вещества в вакуум получается из (3.52) при $P=0$ в виде

$$U_{\text{гр}} = \frac{2c_0}{m-1} \left(\left(1 + \frac{mP_0}{\rho_{0K} c_{0K}^2} \right)^{\frac{1-m}{2m}} - 1 \right). \quad (3.53)$$

Профили плотности и массовой скорости показаны на рис. 3.4, б. Более подробно теория волн сжатия и разрежения излагается в [1-5].

§ 5. Отражение волны разрежения от жесткой стенки

Рассмотрим плоский слой шириной h , в котором находится покоящееся вещество плотностью ρ_1 при давлении P_1 . С левой стороны при $x=0$ слой ограничен жесткой стенкой, на поверхности которой $U=0$. С правой стороны, при $x=h$, в момент $t=0$ скачком убирается перегородка, сдерживавшая разлет вещества, после чего правая граница слоя движется в течение некоторого времени с постоянной скоростью при давлении на границе $P=0$. Решение этой задачи в несколько иной постановке приведено в [6].

Пусть свойства вещества определяются уравнением состояния (3.37). Тогда в соответствии с § 4 в точке $x=h$, $t=0$ возникнет

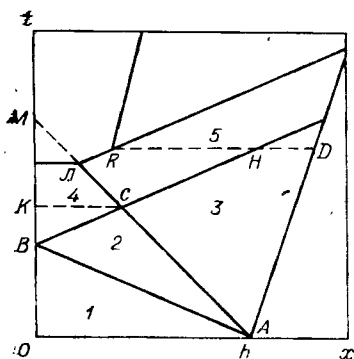


Рис. 3.5. Волна разрежения и область разрушения в переменных x, t при отражении волны разрежения от жесткой стенки.

центрированная волна разрежения (область 2 на рис. 3.5), в которой решение имеет вид

$$U_2 = \frac{2}{m+1} \left(\frac{x-h}{t} + c_1 \right). \quad (3.54)$$

$$c_2 = \frac{2}{m+1} c_1 - \frac{m-1}{m+1} \left(\frac{x-h}{t} \right).$$

В области 1 $P = P_1$, $\rho = \rho_1$, $c = c_1$, $U = U_1 = 0$. В области 3 $P = P_3 = 0$, $U = U_3 = U_{гр}$. Из (3.38) следует, что при $P = 0$

$$\rho_0 = \rho_1 \left(\frac{mP_1 + \rho_{0K} c_{0K}^2}{\rho_{0K} c_{0K}^2} \right)^{-\frac{1}{m}}. \quad (3.55)$$

Примем во внимание, что

$$c^2 = \frac{mP + \rho_{0K} c_{0K}^2}{\rho}, \quad (3.56)$$

и запишем (3.55) в виде

$$\rho_0 = \rho_1 \left(\frac{\rho_{0K} c_{0K}^2}{\rho_1 c_1^2} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (3.57)$$

Подставив (3.57) в (3.39), получим

$$c_0 = c_1 \left(\frac{\rho_{0K} c_{0K}^2}{\rho_1 c_1^2} \right)^{\frac{m-1}{2m}}. \quad (3.58)$$

Поскольку в области 3 $P = 0$, то и $\rho_3 = \rho_0$, $c_3 = c_0$. Значение скорости в области 3, в том числе и на свободной границе AD , определяется из условия постоянства инварианта I_α вдоль α -характеристик, выходящих из точек области 1 и входящих в область 3:

$$U_3 = \frac{2c_1}{m-1} \left(1 - \left(\frac{\rho_{0K} c_{0K}^2}{\rho_1 c_1^2} \right)^{\frac{m-1}{2m}} \right). \quad (3.59)$$

Уравнения свободной границы AD и слабого разрыва AC имеют вид

$$x = h + U_3 t, \quad (3.60)$$

$$x = h + (U_3 - c_3) t. \quad (3.61)$$

Ширина области 3 растет с течением времени по закону, который

следует из (3.60), (3.61)

$$\Delta x_3 = c_3 t. \quad (3.62)$$

Уравнение траектории слабого разрыва AB имеет вид

$$x = h - c_1 t. \quad (3.63)$$

Ширина волны разрежения, т. е. области 2, растет с течением времени по закону

$$\Delta x_2 = (U_3 - c_3 + c_1) t. \quad (3.64)$$

Из (3.63) определим время прихода слабого разрыва AB в точку B

$$t_B = h/c_1. \quad (3.65)$$

Рассмотрим решение в области 4. Поскольку на оси t скорость $U = 0$, эта ось может считаться линией симметрии. Значит, левее точки O в области $x < 0$ можно построить зеркально-симметричное решение. Таким образом, в область 4 придут α -характеристики, выходящие из точки $x = -h, t = 0$, и β -характеристики, выходящие из точки $x = h, t = 0$. Определим вначале уравнение характеристики BC . Для этого подставим значения U_2 и c_2 из (3.54) в уравнение α -характеристики

$$\frac{dx}{dt} = U + c.$$

В результате получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого имеет вид

$$x = h + \frac{2c_0}{m-1} t - \frac{m+1}{m-1} h \left(\frac{c_1 t}{h} \right)^{\frac{3-m}{m+1}}. \quad (3.66)$$

Далее будем рассматривать лишь случай, когда $m = 3$, так как только в этом случае характеристика BC и, значит, все α - и β -характеристики в области 4 прямолинейны, что существенно упрощает дальнейшее решение задачи. Из уравнений α - и β -характеристик в области 4

$$\frac{x+h}{t} = U + c, \quad \frac{x-h}{t} = U - c \quad (3.67)$$

следует

$$U_4 = \frac{x}{t}, \quad c_4 = \frac{h}{t}. \quad (3.68)$$

Таким образом, в области 4 линии уровня c , а значит и P , и ρ , не зависят от x . Определим координаты точки C . Для этого используем уравнения характеристик AC и BC

$$x - h = (U_3 - c_3) t, \quad x + h = c_1 t. \quad (3.69)$$

Из (3.69) следует

$$t_c = \frac{h}{c_1} \left(\frac{\rho_1 c_1^2}{\rho_{0K} c_{0K}^2} \right)^{1/3}, \quad (3.70)$$

$$x_c = h \left(\left(\frac{\rho_1 c_1^2}{\rho_{0K} c_{0K}^2} \right)^{1/3} - 1 \right). \quad (3.71)$$

Определим далее момент времени t , в который давление станет равно нулю одновременно во всей области 4. Для этого приравняем c_0 и c_4 в (3.58) и (3.68). В результате получим $t_{40} = t_c$. Таким образом, в момент времени $t = t_c$ давление во всем веществе станет равным нулю. При $t > t_c$ давление в областях 4 и 5 становится отрицательным, т. е. вещество подвергается растягивающим усилиям.

В настоящее время существуют различные модели разрушения материала. Здесь мы воспользуемся самой простой, в соответствии с которой разрушение вещества происходит в том месте и в тот момент, когда давление достигает значения динамической прочности. Разрушение проявляется в том, что давление скачком меняется от значения $P = -\sigma$ до значения $P = 0$.

Рассмотрим макрочастицу вещества с параметрами $P = -\sigma$, $\rho = \rho_\sigma$, $c = c_\sigma$. Внутренняя энергия в этой частичке определяется из уравнения состояния (3.37), записанного в виде

$$P = (m - 1) \rho E + c_{0K}^2 (\rho - \rho_{0K}). \quad (3.72)$$

Подставив в (3.72) $P = -\sigma$ и $\rho = \rho_\sigma$, получим

$$E_\sigma = \frac{c_{0K}^2 (\rho_{0K} - \rho_\sigma) - \sigma}{(m - 1) \rho_\sigma}. \quad (3.73)$$

Поскольку с момента отрыва рассматриваемой частицы от соседних частиц вещества давление на ее поверхностях равно нулю, внешняя среда не производит работы над рассматриваемой частицей и ее полная энергия и количество движения должны сохраниться. Это значит, что внутренняя энергия частицы после разрушения должна быть равна внутренней энергии частицы до разрушения, а плотность вещества в области разрушения определится из (3.72), (3.73) при $P = 0$:

$$\rho = \frac{\rho_\sigma}{1 - \sigma / \rho_{0K} c_{0K}^2}. \quad (3.74)$$

При разрушении в веществе образуются поры, удельный объем которых

$$\Theta = \frac{1}{\rho_\sigma} - \frac{1}{\rho_P}.$$

Подставив сюда значения ρ_σ и ρ_P , получим для удельного объема пор в момент разрушения выражение

$$\Theta = \sigma / (\rho_\sigma \rho_{0K} c_{0K}^2). \quad (3.75)$$

Вернемся теперь к решению в области 4. Определим наименьшее давление, которое может быть достигнуто в области 4 при отсутствии разрушения. Из (3.68) следует, что C_4 уменьшается с увеличением t . Значит, в области 4 наименьшим будет давление P_M в точке M , поскольку в этой точке достигается наибольшее в области 4 время. В точке M

$$c_M = c_3 - U_3, \quad t_M = h/(c_3 - U_3). \quad (3.76)$$

Давление в этой точке находится из (3.56), (3.76), (3.58), (3.59)

$$P_M = \frac{\rho_{0K} c_{0K}^2}{3} \left(\left(2 - \left(1 + \frac{3P_1}{\rho_{0K} c_{0K}^2} \right)^{1/3} \right)^3 - 1 \right). \quad (3.77)$$

Динамической прочности $P = -\sigma$ соответствуют плотность ρ_σ и скорость звука c_σ , определяемые из (3.38), (3.39)

$$\rho_\sigma = \rho_1 \left(1 - \frac{3\sigma}{\rho_{0K} c_{0K}^2} \right)^{1/3} \left(\frac{\rho_{0K} c_{0K}^2}{\rho_1 c_1^2} \right)^{1/3}. \quad (3.78)$$

$$c_\sigma = c_1 \left(1 - \frac{3\sigma}{\rho_{0K} c_{0K}^2} \right)^{1/3} \left(\frac{\rho_{0K} c_{0K}^2}{\rho_1 c_1^2} \right)^{1/3}. \quad (3.79)$$

Таким образом, при $P_M + \sigma > 0$ разрушения вещества в области 4 не происходит.

Остановимся вначале на более простом случае, когда вещество приклеено к стенке и прочность клея не меньше прочности вещества. В этом случае разрушение наступит одновременно во всех точках области 4 в момент времени

$$t_N = h/c_\sigma \quad (3.80)$$

при условии $P_M + \sigma = 0$. В разрушенном веществе будет $P = 0$, $\rho = \rho_P$, $E = E_\sigma$ и $c = 0$ вследствие нарушения сплошности вещества ($\Theta \neq 0$). Поскольку в момент t_N на границе области 4 возникает разрыв в давлении, то от точки L вправо пойдет слабая ударная волна, состоящая за фронтом которой в первый момент времени определяется давлением $P = 0$. Координата x_L точки L находится из (3.61)

$$x_L = h \left(1 - \left(1 - \frac{3\sigma}{\rho_{0K} c_{0K}^2} \right)^{-1/3} \right) \left(2 - \left(\frac{\rho_1 c_1^2}{\rho_{0K} c_{0K}^2} \right)^{1/3} \right). \quad (3.81)$$

Чтобы вычислить количество движения в отскочившем от стенки слое вещества, рассмотрим решение в области 5. Зависимости $U_5(x, t)$ и $c_5(x, t)$ следуют из уравнений α -характеристик и I_8 -инварианта в этой области

$$U_5 + c_5 = (x + h)/t, \quad U_5 - c_5 = U_3 - c_3. \quad (3.82)$$

Решение системы (3.82) имеет вид

$$\begin{aligned} U_5 &= 0.5(U_3 - c_3 + (x + h)/t), \\ c_5 &= 0.5(c_3 - U_3 + (x + h)/t). \end{aligned} \quad (3.83)$$

В момент разрушения в точке L $c_5 = c_\sigma$. Определим линию в переменных x, t , на которой происходит разрушение вещества. Полагая $c_5 = c_\sigma$ в (3.83), получим уравнение линии разрушения

$$x = (2c_\sigma - c_3 + U_3)t - h. \quad (3.84)$$

Скорость вещества на линии разрушения получается из (3.83) и (3.84)

$$U_\sigma = U_3 + c_\sigma - c_3. \quad (3.85)$$

На линии разрушения в каждый момент времени возникает сильный разрыв, перед которым $P = -\sigma$, $\rho = \rho_\sigma$, $c = c_\sigma$, $U = U_\sigma$, а за которым $P = 0$. Скорость такого сильного разрыва определяется системой законов сохранения на сильном разрыве вместе с уравнением состояния (3.38)

$$D = U_\sigma + \sqrt{c_\sigma^2 + 2\sigma/\rho_\sigma}. \quad (3.86)$$

Скорость распространения линии разрушения в переменных x, t получается после дифференцирования (3.84)

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_\sigma = 2c_\sigma - c_3 + U_3. \quad (3.87)$$

В случае, когда $D - (dx/dt)_\sigma > 0$, разрушения вещества на линии (3.84) в области 5 не происходит. Если $D - (dx/dt)_\sigma < 0$, то вдоль линии (3.84) происходит разрушение вещества, которое прекращается в точке, где выполняется условие

$$D = \left(\frac{dx}{dt}\right)_\sigma. \quad (3.88)$$

Предположим, что разрушение вещества в области 5 прекратилось в точке R в момент t_R . Координата этой точки находится из (3.84)

$$x_R = (2c_\sigma + U_3 - c_3)t_R - h. \quad (3.89)$$

Количество движения и масса разрушенного вещества определяются формулами

$$K = \int_{x_R}^{x_H} \rho_5 U_5 dx + \int_{x_H}^{x_D} \rho_3 U_3 dx, \quad (3.90)$$

$$M = \int_{x_R}^{x_H} \rho_5 dx + \int_{x_H}^{x_D} \rho_3 dx. \quad (3.91)$$

При $t \geq t_R$ давление на границах неразрушенного вещества остается равным нулю, следовательно, сохраняются его энергия и количество движения. Средняя скорость отскочившего от стенки слоя сплошного вещества определяется из (3.90) и (3.91) $U_{cp} = K/M$. При этом в отскочившем слое будут бегать слабые волны нагрузки и разгрузки, под действием которых свободные поверхности этого слоя будут совершать сложное колебательное движение.

Рассмотрим качественно случай, когда вещество не приклеено к стенке. Очевидно, здесь в момент t_0 вещество начнет отходить от стенки. Поскольку в области 4 давление продолжает падать, а на свободной поверхности $P = 0$, в вещество слева начнет из точки K распространяться волна сжатия, повышающая непрерывно давление от $P = P_4$ до нуля. Вдоль крайней правой характеристики этой волны сжатия

$$U + c = c_0, \quad (3.92)$$

а ее уравнение имеет вид

$$x = c_0(t - t_K). \quad (3.93)$$

В момент t_0 , когда давление в области 4 равно $-\sigma$, характеристика (3.93) будет находиться в точке

$$x_* = c_0(t'_N - t_K). \quad (3.94)$$

Разрушения не произойдет, если при $t = t'_N$ будет $x_* > x_L$, поскольку за характеристикой (3.93) следует волна сжатия. Если $x_* \leq x_L$, то на участке $x_* \leq x \leq x_L$ в области 4 произойдет разрушение вещества. Масса, количество движения и средняя скорость отскочившего от стенки неразрушенного вещества определяются точно так же, как и в случае, когда вещество приклеено к стенке.

Глава 4

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ И ВОЛНЫ РАЗРЕЖЕНИЯ

§ 1. Основные соотношения на ударном разрыве

В гл. 3 при выводе системы дифференциальных уравнений (3.28) предполагалось, что термодинамические и кинематические величины, характеризующие течение вещества, непрерывны вместе со своими первыми производными. Рассмотрим теперь течения, когда в распределении термодинамических и кинематических величин возникают разрывы. Разрывы величин, характеризующих течение, могут быть сильными, контактными или произвольными. Разрыв, на поверхности которого все величины изменяются скачком и который перемещается по веществу с некоторой скоростью, называется сильным или ударным. В предельном случае, когда эта скорость равна нулю, сильный разрыв превращается в контактный. Иными словами, контактный разрыв перемещается в пространстве вместе с веществом, т. е. со скоростью вещества. На контактном разрыве часть величин, характеризующих течение среды, разрывна, а часть непрерывна. Разрывы первых производных величин, характеризующих течение вещества, называются слабыми. На сильных, слабых и контактных разрывах выполняются законы сохранения массы, количества движения и энергии. Разрывы, на которых законы сохранения не выполняются, называются произвольными.

Рассмотрим, следуя [1, 2], уравнения, связывающие термодинамические и кинематические характеристики среды на сильном разрыве. Перейдем к системе координат, движущейся вместе с разрывом. В выбранной системе координат разрыв покоится, а вещество протекает через поверхность разрыва, скачком изменяя свои характеристики. Индексом «0» обозначим величины, втекающие в разрыв, индексом «1» — вытекающие из него.

Разложим вектор скорости на две компоненты — нормальную к поверхности разрыва и касательную к ней. За единицу времени разрыв пересекут частицы вещества, отстоящие от его поверхности на расстояние U_{n0} . Таким образом, масса вещества, которое за единицу времени пересекло поверхность разрыва, будет

$$m = \rho_0 U'_{n0} = \rho_1 U'_{n1}. \quad (4.1)$$

Здесь индексом n обозначена компонента скорости вдоль нормали к поверхности разрыва, а штрих означает, что это скорость вещества относительно разрыва. Закон сохранения количества движения запишем для идеальной среды

$$\bar{K} = \rho_0 U'_{n0} \vec{U}'_0 + P_0 \bar{n} = \rho_1 U'_{n1} \vec{U}'_1 + P_1 \bar{n}.$$

Подставим в это уравнение выражение для вектора скорости

$$\vec{U}' = U'_n \vec{n} + U'_\tau \vec{\tau},$$

где \vec{n} и $\vec{\tau}$ — единичные векторы нормали и касательной, и запишем полученное уравнение следующим образом:

$$(\rho_0 (U'_{n0})^2 + P_0 - \rho_1 (U'_{n1})^2 - P_1) \vec{n} + (\rho_0 U'_{n0} U'_{\tau 0} - \rho_1 U'_{n1} U'_{\tau 1}) \vec{\tau} = 0.$$

Поскольку векторы \vec{n} и $\vec{\tau}$ независимы, это векторное уравнение можно записать в виде двух скалярных уравнений:

$$\rho_0 (U'_{n0})^2 + P_0 - \rho_1 (U'_{n1})^2 - P_1 = 0, \quad (4.2)$$

$$\rho_0 U'_{n0} U'_{\tau 0} - \rho_1 U'_{n1} U'_{\tau 1} = 0. \quad (4.3)$$

Преобразуем (4.3), используя (4.1):

$$\rho_0 U'_{n0} (U'_{\tau 0} - U'_{\tau 1}) = 0. \quad (4.4)$$

Если масса вещества, протекающего через поверхность сильного разрыва, не равна нулю, (4.4) переходит в условие непрерывности касательной к поверхности разрыва составляющей скорости:

$$U'_{\tau 0} = U'_{\tau 1}. \quad (4.5)$$

Для массы вещества m , прошедшего через поверхность разрыва за единицу времени, закон сохранения энергии идеальной среды с учетом (4.1) и (4.5) имеет вид

$$\rho_0 U'_{n0} (H_1 - H_0 + 0.5 (U'_{n1})^2 - 0.5 (U'_{n0})^2) = 0. \quad (4.6)$$

Сильный разрыв, на поверхности которого выполняются уравнения (4.1), (4.2), (4.5), (4.6), называется ударной волной, а поверхность такого разрыва — фронтом ударной волны.

Рассмотрим теперь предельный случай сильного разрыва, когда скорость U'_n на его поверхности непрерывна, т. е.

$$U'_{n0} = U'_{n1}. \quad (4.7)$$

С учетом (4.7) уравнения (4.1) и (4.6) можно упростить и записать в форме

$$\begin{aligned} (\rho_1 - \rho_0)U'_{n0} &= 0, \\ (H_1 - H_0)\rho_0 U'_{n0} &= 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Допустим, что $U'_{n0} \neq 0$. Тогда из (4.8) следует, что $\rho_1 = \rho_0$ и $H_1 = H_0$, т. е. разрыв вырождается в непрерывное течение. В случае, когда

$$U'_{n0} = 0, \quad (4.9)$$

из (4.2) следует, что

$$P_1 = P_0. \quad (4.10)$$

Из (4.4) и (4.8) видно, что при $U'_{n0} = U'_{n1} = 0$ величины ρ , H , U'_t могут быть разрывны:

$$\rho_1 \neq \rho_0, \quad H_1 \neq H_0, \quad U'_{t1} \neq U'_{t0}.$$

Условие (4.9) означает, что скорость разрыва относительно вещества равна нулю, и, следовательно, этот разрыв является контактным. На контактном разрыве, таким образом, кроме (4.9) выполняется еще и условие непрерывности давления (4.10). Как правило, на контактном разрыве $\rho_1 \neq \rho_0$ и $H_1 \neq H_0$, а касательная компонента вектора скорости может быть как непрерывной, так и разрывной. Если на контактном разрыве условие (4.5) не выполнено, то разрыв называется тангенциальным. Из сказанного следует, что уравнения на фронте ударной волны содержат разрыв только нормальной к поверхности разрыва компоненты вектора скорости. Поэтому везде в дальнейшем для простоты индекс n у скорости будем опускать.

Перейдем от системы координат, движущейся вместе с сильным разрывом, в неподвижную (лабораторную) систему координат. Пусть скорость фронта ударной волны в этой системе координат равна D , скорость среды перед фронтом U_0 , а за фронтом U_1 . Тогда, по определению,

$$U'_1 = U_1 - D, \quad U'_0 = U_0 - D.$$

С учетом этих соотношений запишем систему уравнений (4.1), (4.2) и (4.6) в виде

$$\begin{aligned} \rho_1(D - U_1) &= \rho_0(D - U_0), \\ P_1 + \rho_1(D - U_1)^2 &= P_0 + \rho_0(D - U_0)^2, \\ \rho_1(D - U_1)(H_1 + 0,5(D - U_1)^2) &= \rho_0(D - U_0)(H_0 + 0,5(D - U_0)^2). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Уравнения (4.11) связывают между собой параметры состояния вещества по обе стороны ударного разрыва и образуют систему трех алгебраических уравнений относительно пяти неизвестных величин: D , U_1 , P_1 , ρ_1 , H_1 . Предполагается, что величины P_0 , ρ_0 , H_0 , U_0 , характеризующие течение перед разрывом, известны. К уравнениям (4.11) добавляется еще уравнение состояния, связывающее три термодинамические функции:

$$F(P, \rho, H) = 0. \quad (4.12)$$

Таким образом, чтобы найти значения всех величин за фронтом ударной волны, нужно одну из них задать. Тогда система уравнений (4.11), (4.12) становится определенной. Для простейших уравнений состояния система (4.11), (4.12) допускает аналитические решения, для сложных уравнений состояния решение, как правило, находится численно. В общем случае каждая из величин за фронтом ударной волны явно или неявно выражается через известные величины. Таким образом, из (4.11), (4.12) получаются зависимости, которые называют ударными адиабатами.

Из системы уравнений (4.11) после небольших преобразований выводятся удобные для практических целей соотношения. Выразим с помощью первого уравнения (4.11) скорость ударной волны D через плотность ρ_1 и скорость вещества

$$D = \frac{\rho_1 U_1 - \rho_0 U_0}{\rho_1 - \rho_0}. \quad (4.13)$$

Исключив с помощью уравнения (4.13) D во втором уравнении (4.11), получим

$$P_1 - P_0 - \frac{\rho_0 \rho_1}{\rho_1 - \rho_0} (U_1 - U_0)^2 = 0. \quad (4.14)$$

Подставляя в третье уравнение системы (4.11) первые два уравнения из той же системы, находим связь между термодинамическими величинами по обе стороны ударного разрыва или фронта ударной волны:

$$H_1 - H_0 = 0.5(P_1 - P_0)(V_0 + V_1). \quad (4.15)$$

Заменив удельную энтальпию H ее выражением через удельную внутреннюю энергию, давление и удельный объем $H = E + PV$, получим зависимость между приращением внутренней энергии, давлением P_1 и удельным объемом V_1 на фронте ударной волны при заданных значениях P_0 , E_0 и V_0 :

$$E_1 - E_0 = 0.5(P_1 + P_0)(V_0 - V_1). \quad (4.16)$$

Ударные адиабаты, выражаемые формулами (4.15) или (4.16) вместе с уравнением состояния в виде $P = P(V, H)$ или $P = P(V, E)$, называют адиабатами Гюгонио. После исключения внутренней энергии E из уравнения (4.16) и уравнения состояния получается зависимость вида $P = P(V, P_0, V_0)$. Ударная адиабата существенно отличается от адиабаты Пуассона, вдоль которой энтропия S остается

постоянной. Вдоль адиабаты Гюгонио энтропия возрастает с увеличением плотности, что вызвано диссипацией внутренней энергии, т. е. уменьшением свободной энергии вещества. При этом следует подчеркнуть, что для описания диссипации энергии уравнениями (4.11) не требуется знаний о таких свойствах вещества, как вязкость или теплопроводность. Эти уравнения являются лишь выражением общих законов сохранения массы, импульса и энергии. Механизм диссипации энергии не связан с законами сохранения, но он определяет ширину фронта ударной волны и градиенты термодинамических величин в этом слое. Учет вязкости и теплопроводности приводит к малой, хотя и конечной, ширине переходного слоя, в котором все термодинамические величины претерпевают изменение от начального своего состояния до конечного термодинамически равновесного состояния. Связь между этими состояниями дается уравнениями (4.11). В прикладных исследованиях, не связанных специально с изучением структуры фронта ударной волны, шириной фронта ударной волны пренебрегают, т. е. считают ее бесконечно малой. Теорию ударных волн, основанную на этом допущении, принято называть гидродинамической.

На практике типичной является ситуация, когда ударная волна распространяется по неподвижной среде, т. е. $U_0 = 0$. В этом случае уравнения (4.11) принимают вид

$$\begin{aligned} \rho_1(D - U_1) &= \rho_0 D, \\ P_1 &= P_0 + \rho_0 D U_1, \\ E_1 - E_0 + 0.5 U_1^2 + P_1 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

В экспериментах часто измеряются скорость ударной волны D и скорость вещества за фронтом U_1 . В этом случае законы сохранения (4.17) позволяют без знания уравнения состояния определить остальные термодинамические характеристики вещества за фронтом ударной волны по формулам

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_0 \frac{D}{D - U_1}, \\ P_1 &= P_0 + \rho_0 D U_1, \\ E_1 &= E_0 + 0.5 U_1^2 + \frac{P_0 U_1}{\rho_0 D}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

§ 2. Некоторые закономерности сжатия и течения в ударных волнах

Рассмотрим, следуя [1, 3], ряд закономерностей процесса сжатия сплошной среды ударной волной и возникающего при этом течения, пользуясь только полученными в предыдущем параграфе соотношениями в предположении, что ударная адиабата обращена выпуклостью вниз, т. е. $d^2P/dV^2 > 0$. О веществе, обладающем такой ударной адиабатой, говорят, что оно имеет нормальные свойства

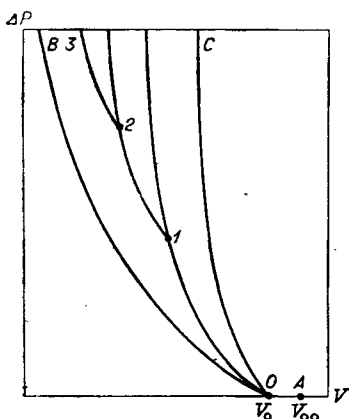


Рис. 4.1. Относительное положение адиабаты Пуассона (OB), ударной адиабаты сплошного вещества (01), ударной адиабаты двукратного сжатия (12), ударной адиабаты трехкратного сжатия (23) и ударной адиабаты пористого вещества AOC с начальной плотностью $\rho_{00} = 1/V_{00}$.

ва. Приращение внутренней энергии единицы массы вещества при его сжатии ударной волной определяется уравнением (4.16). Согласно (4.18) кинетическая энергия единицы массы покоящегося вещества ($U_0 = 0$) представляется уравнением

$$E_k = 0.5U_1^2 = 0.5(P_1 - P_0)(V_0 - V_1). \quad (4.19)$$

Для сильных ударных волн таких, что $P_1 \gg P_0$, можно пренебречь величиной P_0 по сравнению с P_1 и величиной E_0 по сравнению с E_1 . Следовательно,

$$E_1 = 0.5P_1(V_0 - V_1), \quad E_k = 0.5P_1(V_0 - V_1),$$

т. е. внутренняя энергия и кинетическая энергия практически равны между собой.

Как указывалось ранее, в плоскости P, V ударная адиабата $P = P(V, P_0, V_0)$ зависит от двух параметров — давления и удельного объема перед фронтом ударной волны. Вследствие этого нельзя прийти к одному и тому же состоянию в плоскости P, V при сжатии вещества единственной ударной волной и несколькими ударными волнами. Взаимное положение адиабаты Пуассона и ударной адиабаты одно- и многократного сжатия показано на рис. 4.1. Плотность сжатого вещества ρ , которая реализуется при двукратном сжатии, превышает плотность вещества при однократном сжатии до того же самого давления. Это объясняется тем, что при однократном сжатии повышение энтропии больше чем при двукратном сжатии до равного конечного давления. Проводя последовательное сжатие большим числом ударных волн малой амплитуды, можно получить достаточно близкое приближение к адиабате Пуассона. Отметим, что, разбивая адиабатический процесс на сколько угодно количество этапов, мы приходим к одной и той же плотности, если задать равное конечное давление.

Пусть покоящееся первоначально вещество в процессе однократного сжатия ударной волной переходит из начального состояния P_0, V_0 в состояние P_1, V_1 на ударной адиабате (см. рис. 4.1). Скорость распространения ударной волны в переменных P, V пропорциональна тангенсу угла наклона волнового луча 01 и определяется уравнением

$$D = V_0 \sqrt{\frac{P_1 - P_0}{V_0 - V_1}}. \quad (4.20)$$

Скорость звука в веществе перед фронтом ударной волны равна $c_a^2 = -V_0^2 \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S$, т. е. пропорциональна тангенсу угла наклона касательной к адиабате Пуассона в точке θ . В этой точке адиабаты Пуассона и Гюгонио имеют общую касательную, т. е. квадрат скорости звука есть также значение производной $(\partial P / \partial p)_S$ адиабаты Гюгонио в точке θ . Наклон волнового луча при $P > P_0$ всегда больше наклона касательной к адиабате Гюгонио в точке θ . Следовательно, скорость ударной волны D превосходит скорость звука в несжатом веществе, т. е. $D > c_0$, и относительно состояния перед фронтом ударная волна распространяется со сверхзвуковой скоростью. Скорость ударной волны относительно состояния на фронте ударной волны пропорциональна тангенсу угла наклона волнового луча θI и определяется зависимостью

$$D - U_1 = V_1 \sqrt{\frac{P_1 - P_0}{V_0 - V_1}} \quad (4.21)$$

Изэнтропическая скорость звука в ударно сжатом состоянии (точка I на рис. 4.1)

$$c_1^2 = -V_1^2 \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S$$

пропорциональна тангенсу угла наклона касательной к изэнтропе, проведенной из точки P_1, V_1 . Как показывают результаты расчетов по различным уравнениям состояния и прямого эксперимента, для веществ с нормальными свойствами тангенс угла наклона касательной к изэнтропе в точке P_1, V_1 больше тангенса угла наклона волнового луча θI . Следовательно, выполняется неравенство

$$D - U_1 < c_1, \quad (4.22)$$

или

$$U_1 + c_1 > D.$$

Таким образом, относительно состояния за фронтом ударная волна распространяется в дозвуковом режиме. Неравенство (4.22) играет важную роль в теории ударных волн и широко применяется в практике исследований свойств твердых тел с помощью стационарных ударных волн. Это неравенство показывает, что при ограниченных геометрических размерах экспериментальных устройств и наличии свободных границ, на которых давление равно нормальному, время существования стационарных ударных волн ограничено. Действительно, поскольку голова волны разрежения в ударно сжатом веществе в лабораторной системе координат распространяется со скоростью $U_1 + c_1$, превышающей скорость ударной волны, то с течением времени волна разрежения догонит фронт ударной волны и стационарная ударная волна перестанет существовать.

Пусть по среде распространяются друг за другом две ударные волны. Для первой $D_1 > c_0$, но $D_1 < U_1 + c_1$. В лабораторной системе координат скорость второй ударной волны, очевидно, $D_2 >$

$> U_1 + c_1$. Следовательно, $D_2 > D_1$ и с течением времени фронт второй ударной волны догонит фронт первой ударной волны. В результате их взаимодействия возникнут новые разрывы.

Будем рассматривать ударные волны, для которых все величины как термодинамические, так и кинематические испытывают малые скачки. Такие волны будем называть слабыми.

Вычислим изменение энтропии в слабых ударных волнах, используя уравнение ударной адиабаты в форме (4.15). Разложим для этой цели уравнение (4.15) в ряд по степеням малых разностей $P_1 - P_0$ и $S_1 - S_0$ в окрестности точки с состоянием P_0, S_0

$$\begin{aligned} H_1 = H_0 + \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_P (S_1 - S_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial S^2}\right)_P (S_1 - S_0)^2 + \\ + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 H}{\partial S^3}\right)_P (S_1 - S_0)^3 + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_S (P_1 - P_0) + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial P^2}\right)_S (P_1 - P_0)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 H}{\partial P^3}\right)_S (P_1 - P_0)^3 + \dots \quad (4.23) \end{aligned}$$

Поскольку мы ищем малое изменение энтропии, в разложении по степеням $S_1 - S_0$ достаточно удержать лишь первый член. Имея в виду термодинамические соотношения

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_P = T, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_S = V, \\ \left(\frac{\partial^2 H}{\partial P^2}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S, \quad \left(\frac{\partial^3 H}{\partial P^3}\right)_S = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}\right)_S, \end{aligned}$$

перепишем (4.23) в форме

$$\begin{aligned} H_1 = H_0 + T_0 (S_1 - S_0) + V_0 (P_1 - P_0) + \\ + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S (P_1 - P_0)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}\right)_S (P_1 - P_0)^3 + \dots \quad (4.24) \end{aligned}$$

Удельный объем V_1 в правой части уравнения (4.24) разложим по степеням $P_1 - P_0$

$$V_1 = V_0 + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S (P_1 - P_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}\right)_S (P_1 - P_0)^2 + \dots \quad (4.25)$$

Подставляя (4.24) и (4.25) в (4.15), после упрощения получаем

$$S_1 - S_0 = \frac{1}{12T_0} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}\right)_S (P_1 - P_0)^3 + \dots \quad (4.26)$$

Таким образом, скачок энтропии в ударной волне малой интенсивности есть величина третьего порядка малости относительно скачка давления. Согласно второму началу термодинамики,

$$S_1 - S_0 > 0,$$

т. е. правая часть уравнения (4.26) должна быть положительной. Для веществ с нормальными термодинамическими свойствами (адиабатическая сжимаемость уменьшается с давлением) $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}\right)_S > 0$,

следовательно, могут существовать только ударные волны сжатия $P_1 > P_0$ и невозможны ударные волны разрежения $P_1 < P_0$. Если свойства вещества таковы, что $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}\right)_S < 0$, то возможны ударные волны разрежения и невозможны ударные волны сжатия. Заметим, что неравенство $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}\right)_S > 0$ не является термодинамическим соотношением и не может быть получено из законов термодинамики.

Для адиабаты Пуассона $S = \text{const}$. При сравнении с формулой (4.26) видно, что в начальном состоянии P_0, V_0 в плоскости P, V имеет место касание адиабаты Пуассона и ударной адиабаты второго порядка, т. е. совпадают не только первые, но и вторые производные.

Считая скачки давления и удельного объема малыми, выразим разность $P_1 - P_0$ из (4.25):

$$P_1 - P_0 = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S (V_1 - V_0) + \dots$$

Подставив в (4.20), получим

$$D = V_0 \sqrt{-\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S}$$

Величина, стоящая в правой части этого уравнения, есть не что иное как скорость звука в невозмущенной среде. Таким образом, в первом приближении скорость распространения слабой ударной волны равна скорости звука в невозмущенной среде.

Сделаем второе приближение. Как отмечалось, с точностью до третьего члена разложения изэнтропа и ударная адиабата совпадают, т. е. во втором приближении слабая ударная волна остается простой волной сжатия, для которой энтропия вообще постоянна. Не проводя доказательства, которое дано, например, в [3], выпишем выражение для скорости слабой ударной волны во втором приближении:

$$D = 0.5(U_0 \pm c_0 + U_1 \pm c_1). \quad (4.27)$$

Знак «плюс» в (4.27) соответствует волне, распространяющейся вправо, знак «минус» — волне, распространяющейся влево.

Скорость слабой ударной волны по (4.27) определяется полусуммой скоростей распространения возмущений у основания $U_0 \pm c_0$ и у вершины $U_1 \pm c_1$ ударной волны. В частном случае, когда ударная волна распространяется по неподвижной среде ($U_0 = 0$),

$$D = 0.5(U_1 \pm (c_1 + c_0)).$$

§ 3. Сжатие твердых тел ударными волнами

Будем предполагать, что механические свойства твердых тел носят изотропный характер, т. е. девиаторные составляющие тензоров напряжений и деформаций равны нулю, и фазовые превращения отсутствуют. Изменение плотности, следовательно, является результатом вестороннего сжатия вещества, и его упругие свойства характеризуются одной величиной — сжимаемостью.

В указанных предположениях получим аналитические выражения для ударных адиабат, пользуясь различными формами записи уравнения состояния твердых тел. Для не слишком слабых ударных волн можно пренебречь начальным давлением P_0 перед фронтом ударной волны и начальной энергией E_0 невозмущенного вещества. Последнее означает, что не принимается во внимание начальная температура T_0 и не делается различия между удельным объемом V_0 при нормальной температуре и удельным объемом вещества $V_{ок}$ при температуре абсолютного нуля.

В общем случае для построения ударной адиабаты необходимо решить систему трех алгебраических уравнений: уравнение ударной адиабаты (4.16), термическое уравнение состояния, калорическое уравнение состояния. Для простых форм этих уравнений состояния может быть получено аналитическое выражение для ударной адиабаты.

Пусть уравнение состояния задано в форме Ми — Грюнайзена (2.88). Выразив из (2.40) и (2.86) внутреннюю энергию как функцию полного давления и «холодного» давления и подставив выражение для E в уравнение ударной адиабаты, получаем

$$E_x(V_1) + \frac{V_1}{\Gamma} (P_1 - P_x(V_1)) = 0.5P_1(V_0 - V_1), \quad (4.28)$$

где V_1 — удельный объем вещества, сжатого ударной волной амплитудой P_1 . Разрешим уравнение (4.28) относительно P_1

$$P_1 = \frac{\frac{2P_x(V_1)}{\Gamma} - \frac{2E_x(V_1)}{V_1}}{\frac{\Gamma + 2}{\Gamma} - \frac{V_0}{V_1}}. \quad (4.29)$$

Введением величины $h = 1 + \frac{2}{\Gamma}$ уравнение (4.29) преобразуется как

$$P_1 = \frac{(h - 1)P_x(V_1) - \frac{2E_x(V_1)}{V_1}}{h - \frac{V_0}{V_1}}. \quad (4.30)$$

Уравнение (4.30) представляет собой уравнение ударной адиабаты. Заметим, что в принципе, если термодинамические функции $P(V, T)$ и $E(V, T)$ известны, можно найти уравнение ударной адиабаты $P_1(V_1, V_0)$ в явной форме. Однако практически это сделать

можно лишь в том случае, если известны зависимости холодной энергии и холодного давления от удельного объема. Наиболее простые зависимости $P_x(V)$ и $E_x(V)$, получаемые из (2.59), (2.60) при $U_0 = 0$, при подстановке в уравнение (4.30) дают уравнение ударной адиабаты в виде

$$P_1 = \frac{\rho_0 c_0^2 \left(\left(h - \frac{m+1}{m-1} \right) \sigma_1^m + \frac{2m}{m-1} \sigma_1 - (h+1) \right)}{m(h - \sigma_1)}. \quad (4.31)$$

Здесь по традиции относительное сжатие на ударной волне обозначено как $\sigma_1 = \rho_1/\rho_0$, в то время как для холодного давления и изэнтропы принято обозначение $\delta_1 = \rho_1/\rho_0$. Величина h в уравнении (4.31) может быть функцией удельного объема (или относительного сжатия), температуры или внутренней энергии. Из уравнения (4.31) следует, что в пределе при $\sigma_1 \rightarrow h$ давление P_1 на фронте ударной волны стремится к бесконечности, т. е. величина h представляет собой предельное сжатие конденсированного вещества в ударной волне. В то же время при $\sigma_1 \rightarrow h$ потенциальная составляющая давления P_x остается сугубо конечной величиной. Таким образом, при больших давлениях на ударной адиабате основную роль играют тепловое давление и тепловая энергия. Выпишем для дальнейшего анализа термическое и калорическое уравнения состояния

$$P = \frac{\rho_0 c_0^2}{n} (\delta^n - 1) + \frac{2}{h-1} \rho C_V T, \quad (4.32)$$

$$E = \frac{c_0^2}{n} \left(\frac{\delta^{n-1} - 1}{n-1} + \frac{1}{\delta} - 1 \right) + C_V T. \quad (4.33)$$

Из соотношений (4.32) и (4.33) следует, что уравнения состояния, задаваемые в форме Ми — Грюнайзена, будут полностью определены, если известны параметры c_0 , n , h . Как правило, величина c_0 принимается равной или близкой значению объемной скорости звука при нормальных условиях, а значения n и h выбираются такими, чтобы наилучшим образом описывать экспериментальные данные по ударно-волновому сжатию и изотермическому всестороннему сжатию в статических условиях. Для корректного выбора значения h широко привлекаются экспериментальные результаты исследования ударно-волновой сжимаемости веществ с начальной плотностью ρ_{00} , меньшей плотности ρ_0 сплошного вещества [4]. Для таких веществ ударная адиабата, имея в виду соотношение $E_1 = 0.5P_1(V_{00} - V_1)$, записывается в форме

$$P_1 = \frac{\rho_0 c_0^2 \left(\left(h - \frac{n+1}{n-1} \right) \sigma_1^n + \frac{2n}{n-1} \sigma_1 - (h+1) \right)}{n(h - k\sigma_1)}, \quad (4.34)$$

где $k = \rho_0/\rho_{00}$ — коэффициент пористости, ρ_{00} — начальная плотность пористого вещества и $\sigma_1 = \rho_1/\rho_0$.

Таблица 4.1

Металл	ρ_0 , г/см ³	c_0 , км/с	n	h
Al	2.71	5.80	3.2	5.00
Ti	4.51	4.80	3.0	3.94
Fe	7.85	5.20	3.0	2.35
Pb	11.34	2.32	4.0	4.00
Mo	10.20	5.20	3.5	2.30

Для пористых материалов, как следует из формулы (4.34), предельное сжатие на фронте ударной волны

$$\sigma_{\Pi} = \frac{h}{k}, \text{ т. е. в } k \text{ раз мень-$$

ше, чем для сплошного вещества. Часто в области умеренных давлений принимают $h = \text{const}$.

Значения c_0 , n и h для ряда металлов, подобранные по экспериментальным результатам исследования ударно-волновой сжимаемости сплошных и пористых металлов, приведены в табл. 4.1. В литературе встречаются и другие значения c_0 , n , h , с которыми экспериментальные данные описываются также удовлетворительно. В частности, значения c_0 , n и h могут быть различными для разных областей применимости уравнений состояния. С указанными в табл. 4.1 значениями c_0 , n , h экспериментальные данные описываются формулой (4.34) до давлений $P = 150-200$ ГПа. Уравнения состояния (4.32) и (4.33) обладают простой аналитической формой и широко используются при решении прикладных задач динамики сплошной среды, когда реализующиеся давления не слишком велики, а степень расширения сравнительно мала.

Относительное положение кривой упругого сжатия $P_x(V)$ и ударных адиабат сплошного и пористого веществ показано на рис. 4.1. При заданном $V_1 < V_0$ ударная адиабата однократного сжатия сплошного вещества расположена выше кривой $P_x(V)$, а ударная адиабата пористого вещества, как следует из уравнений (4.31) и (4.34), — выше ударной адиабаты сплошного вещества. Следовательно, при сжатии ударной волной до одного и того же удельного объема V_1 пористому веществу сообщается большая тепловая энергия, и в нем развиваются большие тепловые давления по сравнению со сплошным материалом.

Удобно представлять ударные адиабаты в виде аналитических зависимостей скорости ударной волны D от массовой скорости U . В области умеренных давлений (до нескольких сотен гигапаскалей) хорошее приближение к эксперименту дает линейная функция

$$D = c_0 + \lambda U. \quad (4.35)$$

Добавление квадратичного члена в (4.35) позволяет расширить область удовлетворительного описания экспериментальных

Таблица 4.2

Металл	c_0 , км/с	λ	β , с/км	P_{max} , ГПа
Mg	4.540	1.238	0	176
Al	5.333	1.356	0	207
Mo	5.100	1.206	0	1020
Pb	1.981	1.603	-0.0378	967
W	4.015	1.252	0	540
Ta	3.431	1.159	-0.0248	1097
Ta	3.429	1.198	0	223
Cu	3.899	1.520	-0.0071	976
Cu	3.915	1.495	0	413
Ni	4.575	1.517	0	441
Fe	3.664	1.790	-0.0337	1400

данных. В табл. 4.2 приведены взятые из [5—20] значения c_0 , λ , β — параметров уравнения

$$D = c_0 + \lambda U + \beta U^2. \quad (4.36)$$

Подстановкой (4.35) в (4.17) легко найти уравнение ударной адиабаты, в котором давление есть функция V_1 , V_0 , c_0 и коэффициента λ

$$P_1 = \frac{c_0^2 \left(\frac{V_0}{V_1} - 1 \right)}{(\lambda - 1)^2 V_1 \left(\frac{\lambda}{\lambda - 1} - \frac{V_0}{V_1} \right)^2}. \quad (4.37)$$

Зная параметры уравнения состояния, легко вычислить все термодинамические величины за фронтом ударной волны с амплитудой P_1 . Температура сжатого ударной волной сплошного вещества может быть выражена формулой (4.32) через P_1 и σ_1 , которые, в свою очередь, определяются через кинематические параметры D и U с помощью соотношений (4.17) и (4.18). После преобразований получаем

$$T_1 = \frac{(h-1)(D-U_1)}{2DC_V} \left(DU_1 - \frac{c_0^2}{n} \left(\left(\frac{D}{D-U_1} \right)^n - 1 \right) \right), \quad (4.38)$$

где h может быть задано функцией σ_1 . Использование формул (4.33), (4.16) и (4.19) позволяет найти для температуры ударно сжатого сплошного вещества выражение, не содержащее параметра h :

$$T_1 = \frac{0.5U_1^2 - E_x}{C_V}, \quad (4.39)$$

где E_x дается формулой (2.60) при $n=0$, в которой $\delta_1 = \sigma_1 = \frac{D}{D-U_1}$. Формулами (4.38) и (4.39) для оценки температур за фронтом ударной волны можно пользоваться только в области применимости уравнений (4.32) и (4.33).

Аналогичным образом можно получить формулы для расчета температуры за фронтом ударной волны в материале, имеющем пористость k . Выражение (4.38) преобразуется в

$$T_1 = \frac{(h-1)(D-U_1)}{2DC_V} \left(DU_1 - \frac{kc_0^2}{n} \left((\sigma_1)^n - 1 \right) \right), \quad (4.40)$$

где $\sigma_1 = \frac{D}{k(D-U_1)}$, D и U_1 — скорость ударной волны и массовая скорость в пористом веществе. Для пористого вещества вид соотношения (4.39) остается неизменным, но в формуле (4.39) следует положить $\delta_1 = \sigma_1 = \frac{D}{k(D-U_1)}$.

При сжатии вещества ударной волной из начального состояния V_0, T_0 до состояния V_1, T_1 приращение энтропии

$$S_1 - S_0 = \int_{T_0}^{T_1} C_V \frac{dT}{T} + \int_{V_0}^{V_1} \Gamma(V) C_V \frac{dV}{V}. \quad (4.41)$$

Считая Γ и C_V постоянными, из (4.41) находим

$$S_1 - S_0 = C_V \ln \frac{T_1}{T_0} \left(\frac{V_1}{V_0} \right)^\Gamma. \quad (4.42)$$

Приращение энтропии, определяемое уравнением (4.42), может быть выражено через D и U_1 с помощью поочередных подстановок T_1 из (4.38), (4.39), (4.40) в (4.42).

Определим далее изэнтропическую скорость звука в веществе, сжатом ударной волной до состояния P_1, V_1 . Исходная система требуемых для этого уравнений включает в себя уравнение энтропии и соотношения для термического и калорического уравнений состояния

$$\begin{aligned} dE &= -PdV, \quad dE = dE_x + C_V dT, \\ P &= P_x + \Gamma C_V T/V, \quad dE_x = -P_x dV. \end{aligned}$$

Исключая в этой системе уравнений E, P_x и E_x , получаем дифференциальное уравнение, связывающее температуру и плотность при изэнтропическом процессе:

$$\frac{dT}{T} = \Gamma \frac{d\delta}{\delta}.$$

Решение этого уравнения при начальных условиях $T = T_1$ при $\delta_1 = \sigma_1$ и $\Gamma = \text{const}$ дает

$$T = T_1 \left(\frac{\delta}{\sigma_1} \right)^\Gamma.$$

Подставляя эту зависимость $T(\delta)$ в термическое уравнение состояния (4.32), получаем искомое уравнение энтропии:

$$P = P_x(\delta) + \Gamma \rho_0 C_V \delta T_1 \left(\frac{\delta}{\sigma_1} \right)^\Gamma. \quad (4.43)$$

Дифференцируя (4.43) по ρ и полагая $\delta_1 = \sigma_1$, находим изэнтропическую скорость звука c в ударно сжатом состоянии

$$c = \sqrt{c_1^2 \sigma_1^{n-1} + \Gamma(\Gamma + 1) C_V T_1}. \quad (4.44)$$

Из (4.44) следует, что изэнтропическая скорость звука в веществе, сжатом ударной волной, возрастает за счет как сжатия (первый член в выражении под корнем квадратным), так и роста температуры (второй член в том же выражении). В частном случае ударных волн малой и умеренной амплитуды P_1 , когда $c_0^2 \sigma_1^{n-1} \gg \Gamma(\Gamma + 1) C_V T_1$, изэнтропическая скорость звука растет со сжатием как

$$c = c_0(\sigma_1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Напротив, для мощных ударных волн таких, что выполняется неравенство $c_0 \sigma_1^{n-1} \ll \Gamma(\Gamma + 1) C_V T_1$, изэнтропическая скорость звука пропорциональна корню квадратному из удельной тепловой энергии: $c_1 = \sqrt{\Gamma(\Gamma + 1) C_V T_1}$.

Подстановкой в (4.44) уравнений для T_1 по (4.38) и (4.39) и σ_1 по (4.18) скорость звука выражается через кинематические параметры ударной волны D и U_1 . Для уравнения состояния сплошной среды с электронными составляющими (2.118) температура на ударной волне

$$T = \frac{1}{B} \left(A + \sqrt{A^2 + 2B \left(E_x - \frac{P_x(\sigma_1 - 1)}{2\rho_0\sigma_1} \right)} \right), \quad (4.45)$$

где $A = C_V(0.5(\sigma_1 - 1)\Gamma - 1)$,

$$B = \beta_0 \sigma_1^{-\gamma_{эл}} (1 - 0.5(\sigma_1 - 1)\gamma_{эл}).$$

При известной зависимости $P_x(\delta)$ и заданных значениях $\Gamma(\sigma_1)$, β_0 , C_V , $\gamma_{эл}$ ударная адиабата в плоскости P , V находится путем вычисления температуры по (4.45) с последующей подстановкой ее значения в уравнение состояния. В общем случае при известных уравнениях состояния термодинамические и кинематические параметры волны определяются путем численного решения уравнений на ударном разрыве и уравнения изэнтропы. При последовательном сжатии вещества ударными волнами с амплитудами относительно несжатого вещества ($P_0 = 0$) P_1, P_2, \dots, P_n выражение для ударной адиабаты с номером n находится путем решения системы уравнений, состоящей из термического и калорического уравнений состояния и соотношения

$$E_n = 0.5P_1(V_0 - V_1) + 0.5(P_2 + P_1)(V_1 - V_2) + \dots \\ \dots + 0.5(P_n + P_{n-1})(V_{n-1} - V_n). \quad (4.46)$$

Для двукратного сжатия вторая ударная адиабата вещества с уравнениями состояния (4.32), (4.33) при $\Gamma = \text{const}$ имеет вид

$$P_2 = \frac{(h-1)P_x - \frac{2E_x}{V_2} + P_1 \left(\frac{V_0}{V_2} - 1 \right)}{h - \frac{V_1}{V_2}}, \quad (4.47)$$

где V_1 вычисляется для давления P_1 по формуле (4.31), а P_x и E_x — в точке со значением удельного объема V_2 .

До сих пор мы рассматривали ударные волны в среде, не сопротивляющейся сдвиговой деформации. Свойства этой среды описываются шаровыми компонентами тензоров напряжений и деформаций.

Для сжимаемой прочной среды на основе законов сохранения массы, импульса и энергии на фронте плоской ударной волны, распространяющейся в направлении оси x , получаем соотношения, связывающие параметры перед и за поверхностью разрыва в раз-

личных областях ударной адиабаты. Для упругой области деформирования при $\sigma_{x1} \leq \sigma_{HE}$, где σ_{HE} — динамический предел упругости, эти соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_1(D - U_1) &= \rho_0 D, \quad \sigma_{x1} = \rho_0 D U_1, \\ E_1 - E_0 &= 0.5 \sigma_{x1} (V_0 - V_1). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Уравнения (4.48) справедливы также при $\sigma_{пл} \geq \sigma_x \geq \sigma_A$, т. е. для тех точек ударной адиабаты, которые лежат в области пластических или упругопластических деформаций ниже точки плавления, но выше точки A — точки пересечения с лучом, проходящим через точки ρ_0 , σ_{x0} и ρ_{HE} , σ_{xHE} . При $\sigma_x \geq \sigma_{пл}$ соотношения на ударной волне описываются формулами (4.16), (4.17).

В области пластических или упругопластических деформаций при $\sigma_{xHE} \leq \sigma_x \leq \sigma_{xA}$ уравнения на пластической волне, распространяющейся за упругим предвестником, имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_1(D - U_1) &= \rho_{HE}(D - U_{HE}), \\ \sigma_{x1} - \sigma_{HE} &= \rho_{HE}(D - U_{HE})(U_1 - U_{HE}), \\ E_1 - E_{HE} &= 0.5(\sigma_{x1} + \sigma_{HE})(V_{HE} - V_1). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Разрешая уравнения (4.48) и (4.49) относительно нормального напряжения σ_x , получаем соответственно выражения для ударной адиабаты упругопластической среды

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2E_1}{V_0 - V_1} && \text{при } \sigma_{x1} \geq \sigma_A, \\ \sigma_x &= \frac{2E_1 - \sigma_{HE}(V_0 - V_1)}{V_{HE} - V_1} && \text{при } \sigma_{x1} < \sigma_A. \end{aligned} \quad (4.50)$$

В напряжении σ_x выделим шаровую часть, а в энергии E_1 — упругую энергию сдвиговой деформации

$$\sigma_x = P + \frac{2}{3} Y_d, \quad E_1 = E(V_1, T_1) + Y_d / 6 \rho_1 G_1.$$

Поскольку энергия пластических деформаций полностью диссипирует и переходит в тепловую энергию, то $E(V_1, T_1)$ вместе с удельным объемом определяет давление $P(V, E)$.

Подставляя два последних уравнения в два предыдущие, устанавливаем связь между σ_x , удельным объемом V_1 , внутренней энергией $E(V_1, T_1)$ и прочностными свойствами упругопластической среды:

$$\sigma_x = \frac{2E(V_1, T_1) - \sigma_{HE}(V_0 - V_1) + \frac{Y_d^2}{3\rho_1 G_1}}{V_{HE} - V_1}. \quad (4.51)$$

$$\sigma_x = \frac{2E(V_1, T_1) + \frac{Y_d^2}{3\rho_1 G_1}}{V_0 - V_1}. \quad (4.52)$$

Уравнения (4.51) и (4.52) совместно с выражением для σ_x используются для отыскания кривой вестороннего сжатия и построения уравнения состояния при известных из экспериментов функциях Y_d и G .

§ 4. Изэнтропическое расширение ударно сжатых металлов

Поведение вещества, подвергнутого импульсной нагрузке, определяется совокупностью процессов ударного сжатия и изэнтропического расширения. Будем рассматривать металл в гидродинамическом приближении и считать, что состояние за фронтом ударной волны и при последующем расширении термодинамически равновесно, а источники энергии отсутствуют. В указанных предположениях процесс расширения является изэнтропическим.

Исходная система уравнений, описывающая изменение термодинамических величин вдоль изэнтропы, включает в себя уравнение изэнтропы $dE = -PdV$, термическое $P = P(V, T)$ и калорическое $E = E(V, T)$ уравнения состояния. Используя уравнения состояния, из уравнения изэнтропы находим связь между текущими значениями температуры и плотности вдоль изэнтропы. Замена температуры в уравнении состояния дает, в свою очередь, уравнение изэнтропы. Для уравнения состояния типа Ми — Грюнайзена с постоянными значениями Γ и C_v выражения для температуры (или удельной тепловой энергии) и скорости звука вдоль изэнтропы получены в предыдущем параграфе. Пусть в ударно сжатом состоянии вещество характеризуется давлением P_1 , тепловым давлением P_{1r} и относительным сжатием σ_1 .

Перепишем уравнение изэнтропы, проходящей через эту точку ($\delta_1 = \sigma_1$), в виде

$$P = P_x(\delta) + P_{1r} \left(\frac{\delta}{\sigma_1} \right)^{\Gamma+1}. \quad (4.53)$$

Приращение массовой скорости ΔU при изэнтропической разгрузке из начального состояния P_1, σ_1 до давления P будет

$$\Delta U = \pm \int_{P_1}^P \sqrt{-dP dV},$$

где функция $P(V)$ берется вдоль изэнтропы по формуле (4.53). Следовательно, полная скорость частиц предварительно сжатого ударной волной вещества

$$U = U_1 + \Delta U, \quad (4.54)$$

где U_1 — массовая скорость вещества за фронтом ударной волны. Знак «плюс» в формуле (4.54) отвечает случаю, когда направления распространения ударной волны и головы волны расширения противоположны, а знак «минус» — одинаковому направлению распространения волн. Первый случай реализуется, например, при

выходе ударной волны на границу двух сред (среда, на которую падает волна, более мягкая по сравнению со средой, по которой волна распространяется), второй соответствует догону ударной волны волной разрежения.

Рассмотрим далее течение, возникающее при выходе ударной волны на свободную поверхность, граничащую с вакуумом, т. е. положим $P = 0$. Волна разгрузки распространяется назад по веществу. Голова волны разгрузки имеет относительно вещества скорость распространения, равную скорости звука c_1 в сжатом веществе, или скорость $U_1 - c_1$ в лабораторной системе координат. В волне разрежения скорость частиц направлена в сторону, обратную направлению распространения головы волны разрежения. Поэтому расширяющееся вещество приобретает дополнительную к величине U_1 скорость в направлении движения волны. Скорость движения расширившегося вещества

$$W = \sqrt{(P_1 - P_0)(V_0 - V_1)} + \int_{P_1}^0 \sqrt{-dPdv}.$$

Пусть по твердому телу распространяется не слишком сильная ударная волна такая, что

$$\rho_1 - \rho_0 \ll \rho_0, \quad D = 0.5(U_1 + c_1 + c_0), \\ U_1 \ll c_0.$$

Такая волна с точностью до третьего порядка малости не отличается от акустической. Давление на ее фронте $P_1 \approx \rho_0 c_0 U_1$. Волна разгрузки также не будет отличаться от акустической, и скорость ее распространения $s \approx c_0$. Амплитуда волны разгрузки равна P_1 , а вещество приобретает дополнительную скорость, связанную с изменением давления соотношением $\Delta U = \frac{P_1}{\rho_0 c_0}$.

Таким образом, дополнительная скорость, сообщаемая веществу при расширении в вакуум, равна массовой скорости в ударной волне: $\Delta U = U_1$. Следовательно, при выходе слабой ударной волны на свободную поверхность (граница с вакуумом) скорость движения свободной поверхности равна удвоенной скорости вещества за фронтом ударной волны:

$$W = U_1 + \Delta U = 2U_1. \quad (4.55)$$

Соотношение (4.55) называется законом удвоения, который означает, что при разгрузке вещество приходит в первоначальное термодинамическое состояние перед фронтом ударной волны. С увеличением амплитуды ударной волны наблюдается отклонение от закона удвоения: $U > 2U_1$, что является следствием возрастания энтропии вещества при сжатии ударными волнами. Скорость свободной границы при расширении отличается от скорости по правилу

удвоения на величину

$$W - 2U_1 = \int_{P_1}^P \sqrt{-PdV} - \sqrt{(P_1 - P_0)(V_0 - V_1)}.$$

Для рассматриваемой модели вещества в гидродинамическом приближении величина $W - 2U_1$ всегда положительна, т. е. $W - 2U_1 > 0$. Для слабых ударных волн $W - 2U_1 \approx 0$ и $W \approx 2U_1$.

В состоянии расширения до нулевого давления вещество оказывается нагретым и расширенным по сравнению с исходным состоянием перед фронтом ударной волны.

Плотность δ_k в разгруженном состоянии вычисляется из соотношения, следующего из (4.53):

$$P_x(\delta_k) + P_{1r} \left(\frac{\delta_k}{\delta_1} \right)^{\Gamma+1} = 0.$$

Температура T_k в разгруженном состоянии связана с температурой ударного сжатия T_1 выражением

$$T_k = T_1 \left(\frac{\delta_k}{\delta_1} \right)^{\Gamma}.$$

Изменение внутренней энергии после разгрузки в вакуум будет

$$E_k - E_0 = 0.5(P_1 + P_0)(V_0 - V_1) - \int_{V_1}^{V_k} PdV = C_P(T_k - T_0). \quad (4.56)$$

Для слабых ударных волн $T_k = T_0$, $V_k = V_0$ и $E_k = E_0$. Для уравнения состояния с учетом тепловых электронных составляющих изменение термодинамических величин вдоль изэнтропы находится путем численного решения системы уравнений, включающей уравнение изэнтропы, термическое и калорическое уравнение состояния. Основные свойства вещества при его сжатии ударной волной и в волне расширения представлены в табл. 4.3.

Информация об изэнтропическом расширении ударно сжатых до состояния P_1 , U_1 металлов включает в себя экспериментально выявленные положения изэнтроп расширения в плоскости P , U и результаты измерения скорости движения свободной границы при расширении в воздух. Пусть стационарная ударная волна, распространяющаяся вправо по исследуемому веществу, падает на границу раздела с преградой. Положение изэнтропы расширения плоскости P , U выявляется путем измерения волновой скорости в материале преграды. При известном уравнении состояния материала преграды, которое удобно выразить в виде соотношения $D(U)$, по измеренной волновой скорости вычисляются давление P_1 и массовая скорость U_1 . В силу непрерывности P и U на контактном разрыве эти значения лежат на изэнтропе расширения исследуемого

Свойство	Реакция вещества на воздействие	
	ударной волны	волны разрежения
Тип разрыва	Сильный	Два слабых разрыва
Характер изменения величин	Изменяются скачком	Изменяются непрерывно
Скорость разрыва	$U_0 + c_0 \leq D \leq U_1 + c_1$	$D = U_0 + c_0$
Давление, плотность, внутренняя энергия, температура	Возрастают. Количественное изменение определяется силой разрыва	Убывают
Энтропия	Возрастает	Остается без изменения
Удельный объем	Убывает	Возрастает

вещества. Применяя преграды с последовательно понижающейся «жесткостью», можно определить положение изэнтропы расширения начиная от начального состояния на ударной волне до расширения в воздух. В табл. 4.4 приведены значения давления P и массовой скорости U для изэнтроп расширения сплошной меди из трех (1—3) начальных состояний $P_1 = 219.2, 159.9$ и 102 ГПа. Эти же данные нанесены на рис. 4.2. Сплошные линии — изэнтропы, штриховая — ударная адиабата, рассчитанные по уравнению состояния меди с учетом электронных тепловых составляющих с параметрами из работы [7].

Фиксация положения изэнтропы расширения в плоскости P, U позволяет без обращения к уравнению состояния определить удельный объем и другие термодинамические величины вдоль изэнтропы. Из уравнений вдоль характеристики $dP \pm \frac{c}{V} dU = 0$, $dP + \frac{c^2}{V^2} dV = 0$ и уравнения изэнтропы $dE + PdV = 0$ находим выражения для удельного объема и внутренней энергии из начально-

Таблица 4.4

Изэнтропа						Изэнтропа					
1		2		3		1		2		3	
$P, \text{ ГПа}$	$U, \text{ км/с}$	$P, \text{ ГПа}$	$U, \text{ км/с}$	$P, \text{ ГПа}$	$U, \text{ км/с}$	$P, \text{ ГПа}$	$U, \text{ км/с}$	$P, \text{ ГПа}$	$U, \text{ км/с}$	$P, \text{ ГПа}$	$U, \text{ км/с}$
219.2	2.95	159.9	2.39	102.0	1.75	58.6	5.07	38.1	3.91	24.3	2.95
208.6	3.03	149.6	2.43	99.4	1.84	44.4	4.83	33.2	4.07	20.5	3.04
115.2	3.97	85.2	3.24	55.5	2.39	30.5	5.26	21.1	4.31	0.018	3.58
80.0	4.53	55.9	3.59	35.5	2.63	13.0	5.73	8.9	4.73	—	—
89.4	4.45	65.6	3.73	37.3	2.67	0.051	6.21	0.04	5.02	—	—

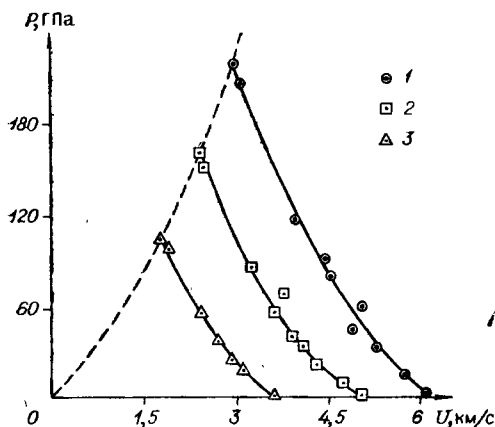


Рис. 4.2. Ударная адиабата и изэнтропы расширения сплошной меди после ее сжатия ударной волной.

1—3 — экспериментальные данные из [9].

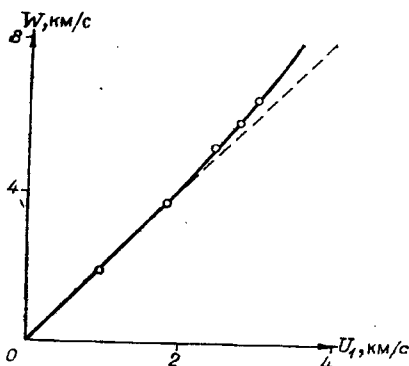


Рис. 4.3. Зависимость скорости движения свободной границы от массовой скорости за фронтом ударной волны для меди. Кружками обозначены экспериментальные данные из [10].

го состояния P_1, V_1, E_1 на ударной адиабате до давления P на изэнтропе:

$$V = V_1 - \int_{P_1}^P \left(\frac{dU}{dP} \right)^2 dP, \quad (4.57)$$

$$E = E_1 + \int_{P_1}^P P \left(\frac{dU}{dP} \right)^2 dP. \quad (4.58)$$

Для расчетов целесообразно аппроксимировать совокупность экспериментальных данных функцией $U = \bar{U}(P)$ или $P = P(U)$. Пусть изменение давления в волне расширения связано с приращением массовой скорости соотношением

$$P - P_1 = -a(U - U_1) + b(U - U_1)^2. \quad (4.59)$$

Подставляя (4.59) в (4.57) и (4.58) и проводя интегрирование, получаем [8]

$$V = V_1 + \frac{1}{4b} \ln \left(\frac{a^2}{a^2 + 4b(P - P_1)} \right), \quad (4.60)$$

$$E = E_1 + \frac{P - P_1}{4b} + \frac{a^2 - 4bP_1}{16b^2} \ln \left(\frac{a^2}{a^2 + 4b(P - P_1)} \right). \quad (4.61)$$

Результаты измерений скорости движения свободной границы ударно сжатых металлов при расширении в воздух приведены в табл. 4.5. Зависимость W от массовой скорости U_1 на фронте ударной волны для сплошной меди (рис 4.3) представляет собой плавную возрастающую функцию, постепенно отходящую от ли-

Металл	Состояние на ударной волне		Состояние при разгрузке в воздух			Металл	Состояние на ударной волне		Состояние при разгрузке в воздух		
	P, ГПа	U, км/с	P, МПа	U, км/с	Δ, км/с		P, ГПа	U, км/с	P, МПа	U, км/с	Δ, км/с
Al [10]	44	2.02	21.6	4.06	0.02	Cu [10]	45.0	0.95	5.0	1.88	-0,02
	58	2.47	33.0	5.02	0.08		66.0	1.27	8.5	2.50	-0,04
	60	2.52	35.5	5.20	0.16		102.0	1.75	17.0	3.58	0.08
	67	2.72	41.0	5.62	0.18		161.0	2.40	34.0	5.02	0.22
	89	3.33	63.0	6.98	0.32		194.0	2.72	44.0	5.73	0.29
	105	3.72	84.0	8.08	0.64		219.0	2.95	51.0	6.21	0.31
	142	4.55	139.0	10.33	1.23		Pb [11]	42.0	1.03	7.5	2.22
200	5.87	234.0	13.40	2.06	60.0	1.33		11.8	2.86	0.20	
Mg [10]	32.0	2.46	31.0	4.85	-0,07	99.0		1.81	21.2	3.84	0.22
	49.0	3.27	60.0	6.77	0.23	131.0	2.19	32.5	4.78	0.40	
	64.0	3.90	87.0	8.20	0.40						
	66.0	3.99	90.0	8.36	0.38						
	76.0	4.40	115.0	9.45	0.65						
	87.0	4.78	137.0	10.28	0.72						

нии $W = 2U_1$ в сторону больших W . При достаточно высоких давлениях для всех металлов, находящихся после расширения в твердой или жидкой фазе, наблюдается значительное отклонение от закона удвоения, которое тем больше, чем выше амплитуда ударной волны (см. табл. 4.5). Напротив, при умеренных давлениях для Al и Cu скорость свободной границы близка к удвоенному значению массовой скорости U_1 . Отклонение от закона удвоения при высоких давлениях связано со значительным необратимым нагревом вещества на фронте ударной волны: чем выше приращение энтропии, тем больше отклонение от закона удвоения, и чем выше P_1 , тем до большего удельного объема расширяется ударно сжатое вещество (см. рис. 4.2). Зависимость плотности меди и алюминия при расширении в воздух от амплитуды ударной волны иллюстрируется данными табл. 4.6. Значения конечной плотности расширения ρ_k вычислены по уравнению состояния Cu и Al с учетом электронных составляющих с параметрами, приведенными в работе [7]. Зависимость $P_x(\delta)$ для области $\delta < 1$ строилась так, как описано в гл. 2. Плотность вещества при расширении в воздух быстро падает с ростом давления на фронте ударной волны.

Таблица 4.6

Металл	Давление на ударной волне, ГПа	$\delta_k = \rho_k / \rho_0$
Cu	39.7	0.99
	102.0	0.96
	160.0	0.92
	182.0	0.90
	218.0	0.87
Al	29.0	0.99
	59.0	0.96
	87.0	0.92
	120.0	0.87
	183.0	0.87

Скорость звука $c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S}$ — важная характеристика ударно сжатого вещества — определяет

Fe [12]		Cu [12]		Pb [12]		Al [12, 14, 15]	
<i>P</i> , ГПа	<i>c</i> , км/с	<i>P</i> , ГПа	<i>c</i> , км/с	<i>P</i> , ГПа	<i>c</i> , км/с	<i>P</i> , ГПа	<i>c</i> , км/с
41.5	6.12	52.4	5.95	38.5	6.56	31.3	7.51
54.2	6.70	69.2	6.32	46.4	3.85	41.2	8.13
122.3	7.85	104.6	6.71	65.6	4.24	68.0	8.70
168.0	8.49	135.2	7.13	78.0	4.29	97.5	9.76
284.9	9.53	169.2	7.78	100.8	4.62	108.0	9.47
347.8	9.98	311.7	8.93	146.7	5.16	160.0	11.23
—	—	379.6	9.48	279.5	5.92	195.5	11.74

наклон изэнтропы расширения в исходном состоянии и используется в случае, если одновременно известна упругая скорость звука для вычисления упругих характеристик материала и т. д. Результаты измерений объемной скорости звука в ряде металлов, сжатых ударными волнами, сведены в табл. 4.7.

Объемная скорость звука в отсутствие фазовых переходов монотонно растет с повышением амплитуды ударной волны. В исследованном диапазоне давлений значение *c* в ударно сжатых металлах значительно превышает скорость звука при нормальных условиях: для Pb при $P_1 = 385$ ГПа более чем в 3 раза, для Al при $P_1 = 195.5$ ГПа более чем в 2 раза, для Cu при $P_1 = 379.6$ ГПа более чем в 2 раза. При указанных значениях P_1 заметный вклад в скорость звука вносит тепловое движение атомов.

§ 5. Детонационная волна

До сих пор мы рассматривали распространение ударных волн в инертных средах, когда приращение внутренней энергии вещества, описываемого адиабатой Гюгонио, обусловлено только сжатием. Вместе с тем в природе протекают процессы, при которых в условиях сжатия и повышенной температуры среды происходят химические превращения с выделением энергии. Одним из таких процессов является детонация взрывчатых веществ. Подробные рассмотрения и анализ гидродинамической теории детонации проведены, например, в [17, 18]. Мы изложим далее только те аспекты этой теории, которые имеют отношение к воздействию детонационной волны на преграду.

Химическое превращение вещества при детонации сопровождается сильным увеличением давления, значительным повышением плотности продуктов взрыва по сравнению с исходной плотностью ВВ и движением среды. Таким образом, детонация представляет собой совокупность химического и газодинамического процессов. При этом законы движения определяют многие стороны процесса детонации. В общем случае для полного анализа режима детонации необходимо решить совместную систему уравнений движения и химической кинетики.

Многие основные и практически важные представления о свойствах процесса детонации могут быть получены путем анализа системы уравнений, выражающих законы сохранения массы, импульса и энергии, без обращения к уравнениям химической кинетики. Теория процесса детонации, основанная на законах сохранения, обычно называется гидродинамической теорией детонационной волны. В рамках этой теории предполагается, что фронт детонационной волны представляет собой сильную ударную волну, которая сжимает взрывчатое вещество и нагревает его до высокой температуры. При таких условиях химическая реакция протекает очень быстро, выделяя энергию в некоторой зоне за фронтом волны. За этой зоной находятся продукты взрыва, которые расширяются. Можно говорить о процессе сверхзвукового распространения химического превращения по веществу. Экспериментальные данные показывают, что детонационная волна при достаточных поперечных размерах образца может распространяться в отличие от ударной волны на сколь угодно большое расстояние с постоянной скоростью. Таким образом, детонационный процесс является стационарным и для неизменного состава ВВ существует только один определенный режим стационарной детонации.

Не обращаясь к структуре детонационного фронта, будем считать, что химическое превращение происходит за пренебрежимо малый промежуток времени в узкой зоне, примыкающей к фронту волны. Используя законы сохранения в алгебраической форме, определим соотношения, связывающие кинематические и термодинамические величины перед и в конце этой зоны, называемой состоянием Жуге. Состояние перед фронтом волны считаем невозмущенным. Очевидно, что первые два закона — сохранение массы и импульса — будут точно такими же, как для ударной волны. Если количество энергии, выделяемой единицей массы ВВ в зоне химических реакций, равно Q , то уравнение ударной адиабаты, являющееся следствием законов сохранения массы, импульса и энергии, приобретает вид

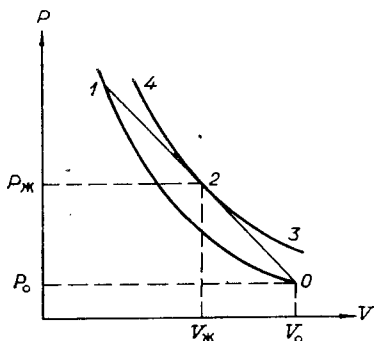
$$E_{ж} - E_0 = 0.5(P_{ж} + P_0)(V_0 - V_{ж}) + Q. \quad (4.62)$$

Присоединяя к уравнениям сохранения уравнение состояния и условие Чепмена — Жуге, получаем систему пяти алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \rho_{ж}(D - U_{ж}) &= \rho_0 D, \\ P_{ж} + \rho_{ж}(D - U_{ж})^2 &= P_0 + \rho_0 D^2, \\ E_{ж} - E_0 &= 0.5(P_{ж} + P_0)(V_0 - V_{ж}) + Q, \\ E &= E(P, V), \quad U_{ж} + c_{ж} = D, \end{aligned} \quad (4.63)$$

где индекс «ж» указывает на состояние в точке Жуге, D — скорость детонационной волны. Система уравнений (4.63) является полной для феноменологического описания процесса нормальной детонации. Последнее из уравнений этой системы представляет собой аналитическую формулировку гипотезы Чепмена — Жуге, которая

Рис. 4.4. Относительное положение ударной адиабаты взрывчатого вещества 01 и адиабаты полного выделения энергии химического превращения 324 .



гласит, что движение продуктов взрыва в точке Жуге является звуковым относительно состояния за фронтом детонационной волны, чем и объясняется уже упоминавшийся факт постоянства скорости детонационной волны. Уравнение для удельной внутренней энергии предполагает, что продукты химической реакции (продукты взрыва) находятся в состоянии термодинамического равновесия. Третье уравнение системы (4.63) совместно с уравнением состояния описывает адиабату в плоскости P, V , отвечающую полному выделению энергии химического превращения.

Проиллюстрируем основные представления гидродинамической теории в P, V -плоскости (рис. 4.4). Ударная волна, распространяющаяся по ВВ как по инертному материалу, сжимает его до состояния 1 на ударной адиабате 01 «холодного» ВВ, которая обладает всеми свойствами ударной адиабаты сплошной среды. Вследствие высокого давления и температуры в точке 1 начинается химическая реакция. Выделение энергии вызывает расширение продуктов химического превращения. Состояния, которые реализуются в процессе протекания химических реакций, непрерывным образом изменяются вдоль прямой Михельсона 021 , уравнение которой —

$$D^2 = V_0^2 \frac{P - P_0}{V_0 - V}.$$

Поскольку реакция протекает необратимо, вдоль прямой Михельсона в направлении от точки 1 к точке 2 энтропия продуктов взрыва (ПВ) возрастает, достигая своего максимума в точке 2 . В точке 2 , где прямая Михельсона касается адиабаты полного выделения энергии химических превращений 324 , реакции завершаются. Точка касания прямой Михельсона и адиабаты полного выделения энергии есть точка Жуге. Она обладает примечательным свойством: скорость распространения детонационной волны, отвечающей состоянию в этой точке, имеет наименьшее из возможных значений. Такая детонационная волна называется нормальной.

Процесс разлета ПВ может быть описан уравнениями движения в дифференциальной форме типа системы уравнений (3.1), (3.2). Возможность применения системы уравнений (3.1), (3.2), включающей условие изэнтропичности движения, обуславливается

тем фактом, что всюду за точкой Жуге процесс адиабатический, а в точке Жуге для любого момента времени энтропия постоянна. Наши дальнейшие анализы основаны на гидродинамической теории детонационной волны с пренебрежением зоны химической реакции. Таким образом, мы будем рассматривать только состояния в точке Жуге и последующий изэнтропический разлет (или сжатие) продуктов взрыва. Поскольку в точке Жуге все величины постоянны, граничащая с точкой Жуге область расширения будет представлять собой простую волну расширения.

Прежде чем перейти к изучению течения за фронтом детонационной волны, найдем основные соотношения на фронте волны, пользуясь законами сохранения массы, импульса, условием Чепмена — Жуге и изэнтропией расширения продуктов взрыва, задаваемой в виде политропы $P = A\rho^n$, где A — функция энтропии. Для изэнтропического процесса $A = \text{const}$ при любом ρ . Скорость звука в точке Жуге

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S = \frac{nP}{\rho}. \quad (4.64)$$

Из (4.64), первого и второго уравнений (4.63), а также из первого и пятого уравнений (4.63) следует

$$c_{ж}^2 = \frac{n\rho_0 D^2}{\rho_{ж}} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{ж}} \right), \quad c_{ж} = \frac{\rho_0}{\rho_{ж}} D.$$

Исключив $c_{ж}$ из этих уравнений, получим

$$\frac{\rho_{ж}}{\rho_0} = \frac{n+1}{n}. \quad (4.65)$$

С помощью этого уравнения $U_{ж}$ и $c_{ж}$ выражаются через D

$$c_{ж} = \frac{n}{n+1} D, \quad U_{ж} = \frac{1}{n+1} D. \quad (4.66)$$

Давление в точке Жуге также выразим через D

$$P_{ж} = \rho_0 D U_{ж} = \frac{1}{n+1} \rho_0 D^2. \quad (4.67)$$

При решении прикладных задач часто принимается $n = 3$, что связано со значительным упрощением процедуры математического решения задач, в частности, методом характеристик. В этом случае

$$U_{ж} = 0.25D, \quad c_{ж} = 0.75D, \quad P_{ж} = 0.25\rho_0 D^2.$$

Пусть инициирование полубесконечного слоя ВВ происходит в плоскости $x = 0$ в момент времени $t = 0$. Слева от плоскости $x = 0$ находится вакуум. Для этого случая возможно точное решение системы дифференциальных уравнений методом характеристик, определяющее течение в простой волне разрежения:

$$U = \frac{2}{n+1} \left(\frac{x}{t} - \frac{D}{2} \right),$$

$$c = \frac{n-1}{n+1} \frac{x}{t} + \frac{D}{n+1},$$

$$\frac{\rho}{\rho_{ж}} = \left(\frac{n-1}{n+1} \left(\frac{x}{t} + \frac{D}{n+1} \right) \frac{1}{c_{ж}} \right)^{\frac{2}{n-1}} \quad (4.68)$$

$$\frac{P}{P_{ж}} = \left(\frac{n-1}{n+1} \left(\frac{x}{t} + \frac{D}{n+1} \right) \frac{1}{c_{ж}} \right)^{\frac{2n}{n-1}}$$

При нахождении плотности ρ и давления P в волне расширения принималось во внимание, что

$$\frac{\rho}{\rho_{ж}} = \left(\frac{c}{c_{ж}} \right)^{\frac{2}{n-1}}, \quad \frac{P}{P_{ж}} = \left(\frac{c}{c_{ж}} \right)^{\frac{2n}{n-1}} \quad (4.69)$$

Из формул (4.68) видно, что массовая скорость, скорость звука, плотность и давление являются функцией автомодельной переменной x/t . Таким образом, течение носит автомодельный характер, т. е. волна будет как бы растягиваться подобно самой себе: при равных значениях автомодельной переменной x/t все величины, определяющие течение, имеют неизменное значение.

В частном случае, когда $n=3$, система (4.68) преобразуется к виду:

$$U = 0.5 \frac{x}{t} - 0.25D, \quad c = 0.5 \frac{x}{t} + 0.25D,$$

$$\rho = \rho_{ж} \frac{0.5 \frac{x}{t} + 0.25D}{c_{ж}}, \quad P = P_{ж} \left(\frac{0.5 \frac{x}{t} + 0.25D}{c_{ж}} \right)^3.$$

Пусть плоская нормальная детонационная волна падает на преграду, по нормали к ее поверхности. В качестве преграды может выступать различная среда — начиная от твердого тела и кончая газом. Для определения результата распада произвольного разрыва на границе раздела ВВ — преграда необходимо знать зависимость между давлением и массовой скоростью ВВ — так называемую кривую торможения продуктов взрыва. Массовая скорость продуктов детонации, расширяющихся изэнтропически из состояния Жуге, для детонационной волны, распространяющейся вправо, и волны разрежения, бегущей влево, будет

$$U = U_{ж} + \int_{P_{ж}}^P \sqrt{-dP} dV.$$

Используя связь между P и V вдоль изэнтропы в виде $P = AV^{-n}$ и проводя упрощения, находим

$$U = U_{ж} + \frac{2}{n-1} (c_{ж} - c). \quad (4.70)$$

Из (4.70) следует

$$c = c_{ж} + \frac{n-1}{2} (U_{ж} - U). \quad (4.71)$$

Окончательное уравнение кривой торможения продуктов детонации получается из (4.66), (4.69) и (4.71) в виде

$$\frac{P}{P_{ж}} = \left(\frac{3n-1}{2n} - \frac{n^2-1}{2n} \frac{U}{D} \right). \quad (4.72)$$

При расширении в вакуум ($P=0$) максимальная скорость разлета ПВ

$$U_{\max} = \frac{3n-1}{n^2-1} D. \quad (4.73)$$

Из формулы (4.73) следует, что скорость разлета ПВ в вакуум зависит от показателя политропы n . Если $n=3$, то $U_{\max}=D$, при $n>3$ $U_{\max}<D$ и при $n<3$ $U_{\max}>D$. Следовательно, скорость истечения ПВ в вакуум может превышать скорость детонации, если $n<3$. В связи с этим заметим, что при расширении ПВ конденсированных ВВ эффективный показатель политропы, вообще говоря, уменьшается [17], что отвечает ослаблению сил взаимодействия атомов и молекул в ПВ с уменьшением плотности ПВ. Следовательно, скорость разлета реальных ПВ в вакуум превосходит скорость детонации. Уравнение (4.72) получено для изэнтропического процесса. При торможении детонационной волны на достаточно жесткой преграде в ПВ отражается ударная волна ($P>P_{ж}$), и, строго говоря, для определения параметров течения необходимо рассчитывать ударную адиабату ПВ. Однако амплитуда ударной волны и изменения плотности в ней невелики, что позволяет с хорошей степенью приближения считать ударную волну волной сжатия (см. § 2). Поэтому формула (4.72) может быть распространена на случай торможения детонационной волны на жестких преградах ($U < U_{ж}$).

Для постоянного значения показателя политропы n давление при торможении на абсолютно жесткой стенке $P = P_{ж} \left(\frac{3n-1}{2n} \right)^{\frac{2n}{n-1}}$, т. е. возрастает в 2.37 раза по сравнению с давлением в точке Жу-ге при $n=3$.

§ 6. Произвольный разрыв. Взаимодействие волн

Произвольный разрыв возникает в момент взаимодействия сильного разрыва с сильным или контактном разрывом или при соударении двух тел, разделенных предварительно вакуумным зазором. Произвольные разрывы неустойчивы, время их жизни равно нулю. В результате распада произвольного разрыва в его окрестности возникает новое течение, содержащее волны разрежения, области постоянного течения и ударные волны. Для веществ с нормальными термодинамическими свойствами в результате распада произвольного разрыва могут возникнуть следующие конфигурации волн:

- 1) ударные волны в обе стороны от поверхности разрыва;

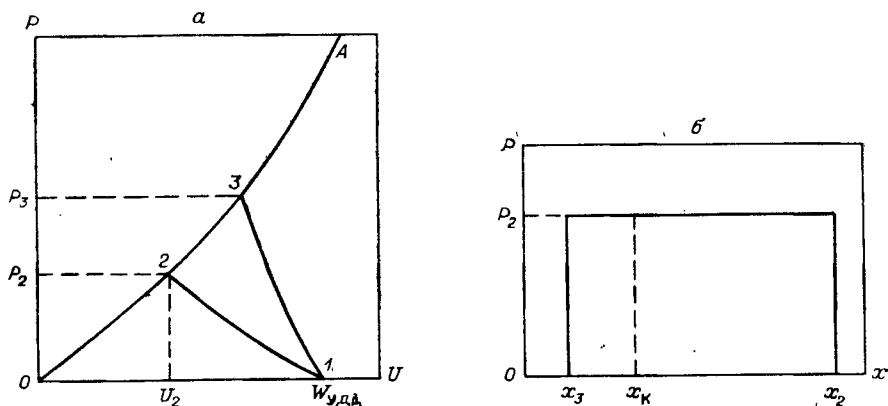


Рис. 4.5. Соударения толстого ударника с толстой мишенью.

a — P, U -диаграмма; b — профиль давления в момент t_1 . $x_K = U_2 t_1$ — положение контактной границы; $x_2 = D_M t_1$ — положение ударной волны в мишени; $x_3 = (D_{уд} - W_{уд}) t_1$ — положение ударной волны в ударнике.

2) ударная волна — в одну сторону от поверхности разрыва и волна разрежения — в противоположную сторону;

3) волны разрежения в обе стороны от поверхности разрыва.

Между волнами образуется два постоянных течения, разделенных контактным разрывом, на котором давление и массовая скорость непрерывны, а плотность, температура, энтропия и другие термодинамические величины, как правило, разрывны. Каждое из взаимодействующих веществ характеризуется зависимостью $P(U)$, которая является ударной адиабатой для давлений, превосходящих начальное, и изэнтропой — для меньших давлений. Абсолютное значение $\left| \frac{dP}{dU} \right|$ есть жесткость вещества, причем $\frac{dP}{dU} > 0$ для вещества, лежащего справа от произвольного разрыва, и $\frac{dP}{dU} < 0$ — для вещества слева. Значения P и U на контактом разрыве находятся как решение системы двух уравнений — зависимостей $P(U)$ для взаимодействующих веществ.

Рассмотрим несколько характерных типов распада произвольного разрыва. Начнем со случая, когда пластина со скоростью $W_{уд}$ ударяет по неподвижной мишени. В момент удара на поверхности контакта возникает произвольный разрыв. Значения $P_0' = 0$, ρ_0 , $U_0 = 0$ и $P_1 = 0$, ρ_1 , $U_1 = W_{уд}$ характеризуют начальные состояния в мишени и ударнике (точки 0 и 1 на рис. 4.5, a). После распада разрыва в ударнике и мишени распространяются ударные волны. Ударные адиабаты пересекаются в точке 2 (см. рис. 4.5, a). Давление P_2 и скорость U_2 характеризуют состояние на контактом разрыве. При заданной жесткости мишени и скорости ударника амплитуда ударной волны тем выше, чем выше жесткость ударника (см. кривую 13). При заданной жесткости вещества ударника давление на фронте ударной волны увеличивается с ростом $W_{уд}$ и

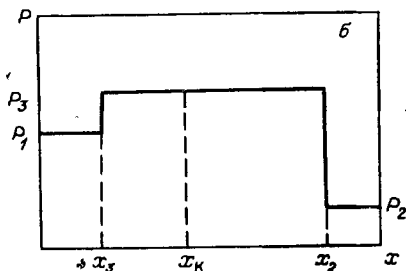
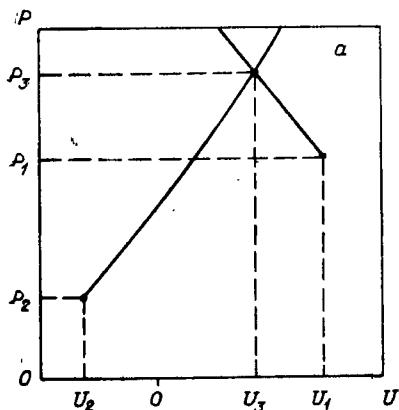


Рис. 4.6. Взаимодействие двух встречных ударных волн.

a — P, U -диаграмма; *б* — профиль давления в момент $t_1, x_K = U_K t_1$ — положение контактной границы; $x_2 = (D_2 - U_2)t_1$ — положение ударной волны с $D_2 - U_2 > 0$; $x_3 = (D_3 - U_3)t_1$ — положение ударной волны с $D_3 - U_3 < 0$.

жесткости материала мишени. Профиль давления на момент времени t_1 показан на рис. 4.5, б.

Рассмотрим далее случай столкновения по нормали двух ударных волн с параметрами P_1, ρ_1, U_1 и P_2, ρ_2, U_2 . При этом в плоскости взаимодействия возникает произвольный разрыв. В результате его распада образуются две ударные волны (рис. 4.6). Система нелинейных уравнений для определения значений P_3, U_3 (см. рис. 4.6, а) на контактном разрыве имеет вид

$$P_3 - P_1 + \rho_1(D_{13}(U_3) - U_1)(U_3 - U_1) = 0,$$

$$P_3 - P_2 - \rho_2(D_{23}(U_3) - U_2)(U_3 - U_2) = 0,$$

где D_{13} и D_{23} — скорости распространения вторичных ударных волн.

Контактный разрыв движется со скоростью U_3 . Область, заключенная между фронтами ударных волн $x_2 - x_3$, представляет собой область постоянного течения, разделенную контактными разрывом. Профиль давления на момент времени t_1 показан на рис. 4.6, б.

Обратимся теперь к случаю выхода ударной волны на границу раздела двух сред. В момент выхода возникает произвольный разрыв. Характер течения после его распада определяется взаимным расположением ударных адиабат и изэнтроп, показанных на рис. 4.7. В зависимо-

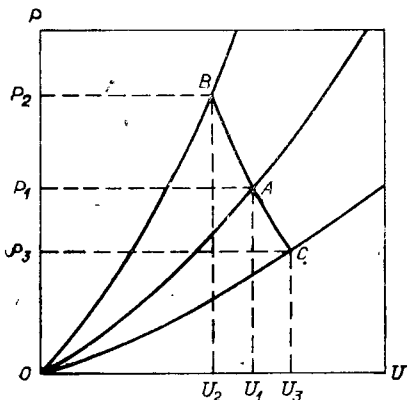


Рис. 4.7. Взаимное расположение ударных адиабат и изэнтроп при распаде произвольного разрыва.

сти от соотношения жесткостей веществ возникают два типа течений. В первом выход ударной волны на границу раздела с более жестким веществом (кривая OB) сопровождается образованием двух ударных волн. Отраженная ударная волна несет избыток давления $P_2 - P_1$. Прошедшая через границу ударная волна амплитудой P_2 распространяется по второму веществу. Контактный разрыв движется со скоростью U_2 . Линия AB есть ударная адиабата второго сжатия первого вещества.

Во втором случае, когда ударная волна выходит на границу из жесткого в более мягкое вещество (кривая OC), в жесткое вещество распространяется центрированная волна разрежения амплитудой $P_1 - P_3$, в мягкое вещество — ударная волна амплитудой P_3 . Контактный разрыв движется со скоростью U_3 . Кривая AC есть изэнтропа разрежения жесткого вещества. Зависимость $P(U)$ в волне разрежения находится по соотношениям, приведенным в § 4.

§ 7. Ударные волны разрежения

Ранее мы рассматривали течения в средах, уравнения состояния которых удовлетворяют условию $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S > 0$. При аномальном ходе изэнтроп и ударных адиабат, когда имеются участки, на которых $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S < 0$, теоретически возможно возникновение скачков разрежения (см. § 2). Режим с образованием скачков разрежения в железе, имеющем фазовый переход при давлении 12.8 ГПа [5], изучался в [49], где получено экспериментальное доказательство существования ударной волны разрежения. По данным этой работы в ходе экспериментов при подрыве заряда ВВ на поверхности стальных образцов обнаружены необычные явления при откольном разрушении: очень чистая поверхность откола и его своеобразная форма в виде сердечника. Такие отколы происходят в верхней части плоского образца вблизи поверхности, граничащей с ВВ, и по своей форме и чистоте откольной поверхности существенно отличаются от известных типов откола. Обычно при плавной непрерывной разгрузке зона растягивающих напряжений, вызывающих откольное разрушение, вытянута, а поверхность откола весьма шероховатая, что связано с микронеоднородностью материала в зоне откола. Рассмотренные особенности откольного разрушения зафиксированы на стали Ст. 3 и на более прочных сталях марок 40Х и 30ХГСА. В опытах в аналогичной постановке, выполненных на меди, латуни, алюминии, подобных аномалий в откольных явлениях не обнаружено. Факт образования отколов с гладкой поверхностью указывает на то, что при разрушении растягивающие напряжения имели место в очень узкой зоне. Поскольку такие отколы выявлены только в железе и стали, ударная адиабата которых имеет аномальный излом в точке фазового перехода, их возникновение можно связать с существованием ударных волн разрежения. Отмечен-

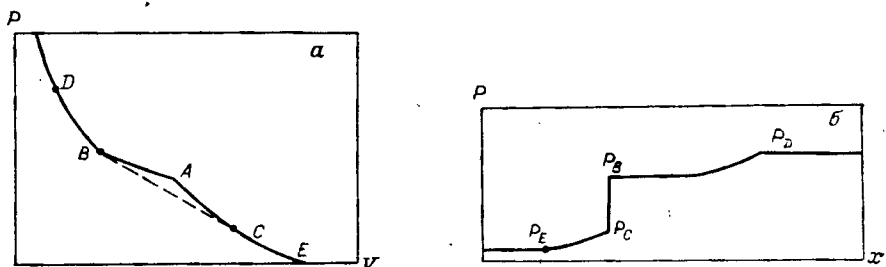


Рис. 4.8. Образование ударной волны разрежения.

а — P, V -диаграмма среды, испытывающей фазовый переход; б — распределение давления в волне разрежения.

ные особенности откольных явлений авторы работы [19] объясняют взаимодействием встречных ударных волн разрежения. Анализ структуры волны разрежения в среде, испытывающей фазовое превращение, выполнен в работах [2, 19].

Рассмотрим, следуя [2], механизм образования скачка разрежения. Пусть в P, V -плоскости ударная адиабата имеет вид, показанный на рис. 4.8, а. Будем полагать, что адиабата термодинамически равновесна (т. е. фазовые превращения происходят достаточно быстро), а тепловыми давлением и энергией вследствие малых давлений можно пренебречь (т. е. ударная адиабата практически совпадает с изэнтропой). Адиабата на рис. 4.8, а имеет два излома: в точке А — начало и точке В — завершение фазового превращения.

Пусть в момент времени $t = 0$ в веществе, сжатом до состояния D, создается область разрежения, в которой давление и удельный объем плавно меняются до своих значений в точке E, и все состояния вещества лежат на изэнтропе. Для вещества с нормальной адиабатой при $t > 0$ течение остается непрерывным. Иная ситуация возникает, если адиабата обладает аномальными свойствами (см. рис. 4.8, а). Используя особенности адиабаты, проследим за эволюцией начального профиля давления.

Для простой волны, распространяющейся вправо, α -характеристики

$$\frac{dx}{dt} = U + c$$

представляют собой прямые линии. Скорость вещества непрерывна в точках А и В ввиду постоянства противоположного инварианта Римана. В силу сделанных допущений скорость звука определяется наклоном касательных в точках адиабаты. Следовательно, в точке В одновременно существуют две скорости звука: c_{B+0} для $P \geq P_B$ и c_{B-0} для $P \leq P_B$, причем $c_{B+0} > c_{B-0}$ (см. рис. 4.8, а). Таким образом, из точки В выходят две α -характеристики с различным наклоном в x, t -плоскости, несущие одинаковые давления. Область между этими характеристиками, следовательно, есть область постоянного давления P_B (см. рис. 4.8, б).

Напротив, в точке излома A $c_{A-0} > c_{A+0}$, т. е. большее давление распространяется с меньшей скоростью. По этой причине характеристики, выходящие из точек, находящихся в правой и левой окрестностях точки A , будут пересекаться, что приводит к образованию разрыва, амплитуда которого $\Delta P = |P_C - P_B|$ растет с течением времени. Рост ΔP продолжается до тех пор, пока луч BC , соединяющий состояния вещества по обе стороны разрыва, лежит ниже адиабаты DAE . Этот процесс завершается в тот момент когда луч, проведенный из точки B , коснется адиабаты на участке AE . Скорость звука в точке касания C равна скорости разрыва. Скорости распространения разрыва по веществу перед разрывом (точка B) и за разрывом (точка C) определяются уравнениями

$$(P_B - P_C) V_B^2 = (V_C - V_B)(D - U_B)^2,$$

$$(P_B - P_C) V_C^2 = (V_C - V_B)(D - U_C)^2.$$

В точке C величина $D - U_C$ равна местной скорости звука c_C . В этой точке, следовательно, прямая BC касается адиабаты первой фазы. В точке B величина $D - U_B$ удовлетворяет условиям $c_{B-0} < D - U_B < c_{B+0}$.

§ 8. Гидродинамическое затухание ударной волны

Как указывалось в § 2, скорость распространения волны разрежения, движущейся вслед за ударной волной, превосходит скорость последней. Следствием этого является затухание ударной волны. В общем случае система уравнений, описывающих этот процесс, решается численными методами. Однако, сделав ряд упрощающих предположений, можно получить достаточно точное для практических целей приближенное решение в аналитической форме. В качестве примера рассмотрим задачу о затухании одномерной плоской ударной волны, возникающей при соударении пластин из однородного материала [21].

Пусть тонкая пластина-ударник, свободная от напряжений и имеющая скорость полета $W_{уд}$, тормозится на толстой неподвижной мишени-преграде. Возникающее течение показано на P , U - и x , t -диаграммах рис. 4.9. При соударении в плоскости контакта $x = x_0$ мгновенно возникает область высоких давлений, и в обе стороны от этой плоскости распространяются ударные волны. Ударная волна, выходящая на свободную поверхность ударника, отражается в виде простой центрированной волны разрежения. Голова волны разрежения распространяется со скоростью $U_1 + c_1$ и догоняет фронт ударной волны в точке x_3 , t_3 . Область, заключенная между фронтом ударной волны и головой волны разрежения, представляет собой область постоянного течения с параметрами P_1 , U_1 , ρ_1 , c_1 , T_1 . Выше характеристики $x - x_1 = (U_1 + c_1)(t - t_1)$ лежит область нестационарного течения, ограниченная сверху крайней характеристикой

$$x - x_1 = c_0(t - t_1). \quad (4.74)$$

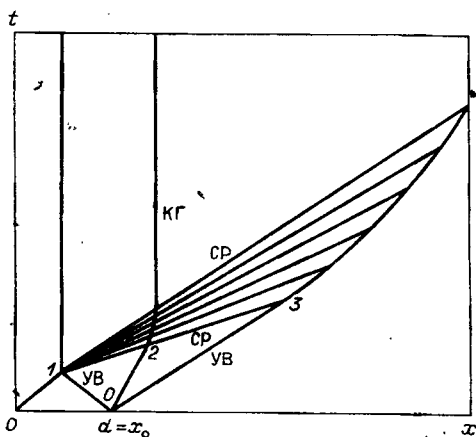


Рис. 4.9. Схематическое изображение в плоскости x, t траекторий разрывов в ударнике и преграде после соударения.

УВ — ударные волны; КГ — контактная граница. Точки: 0 — соударения; 1 — выхода отраженной ударной волны на тыльную границу ударника; 2 — взаимодействия CP с КГ; 3 — взаимодействия CP с УВ.

Выше; этой характеристике находится невозмущенная область, параметры которой для используемого в дальнейшем уравнения состояния совпадают с параметрами невозмущенного вещества перед фронтом ударной волны. В x, t -плоскости траектория ударной волны для $x > x_3$ представляет собой кривую, обращенную выпуклостью вниз.

Будем считать, что материалы ударника и мишени являются идеальными жидкостями с уравнением состояния

$$P = \frac{\rho_0 c_0^2}{n} \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right).$$

Применение такого уравнения состояния существенно облегчает исследования поведения вещества при ударном нагружении и последующей разгрузке. Однако если давление зависит только от плотности, то единственная изэнтропа является одновременно и ударной адиабатой, вдоль которой не выполняется закон сохранения энергии

$$0.5 (P(V) + P_0)(V - V_0) \neq \int_{V_0}^V P(V) dV.$$

Вследствие этого полученные результаты справедливы лишь при $\rho \approx \rho_0$.

Поскольку ударник и пластина состоят из одного и того же материала, после соударения скорость контактной границы U_1 должна быть равна $0.5W_{уд}$. Для определения скорости ударной волны D_1 , распространяющейся в пластине после соударения, используем условия на разрыве

$$\rho(D - U) = \rho_0 D, \quad P = \rho_0 D U \quad (4.75)$$

и уравнение состояния. Исключив в этих уравнениях ρ и P , получим уравнение для определения D

$$\left(\frac{D}{D - U} \right)^n - \frac{n D U}{c_0^2} - 1 = 0.$$

Полагая в этом уравнении $U = 0.5W_{\text{уд}}$, найдем D_1 , после чего из (4.75) определим P_1 и ρ_1 . Значение C_1 вычислим из уравнения

$$c_1 = c_0 \left(\frac{D_1}{D_1 - 0.5W_{\text{уд}}} \right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Координаты точек 1, 2 и 3 (см. рис. 4.9) определяются уравнениями

$$\begin{aligned} t_1 &= d/D_1, & x_1 &= W_{\text{уд}}t_1, \\ t_2 &= d \left(\frac{1}{D_1} + \frac{\rho_0}{\rho_1 c_1} \right), & x_2 &= 0.5W_{\text{уд}}t_2, \\ t_3 &= \frac{c_1 t_2}{0.5W_{\text{уд}} + c_1 - D_1}, & x_3 &= d + D_1 t_3, \end{aligned}$$

где d — толщина ударника.

В центрированной волне разрежения с вершиной в точке 1 α -характеристики представляют собой прямые линии $x - x_1 = (U + c)(t - t_1)$. Будем считать, что во всем течении β -инвариант постоянен:

$$U - \frac{2}{n-1}c = \frac{2}{n-1}c_0.$$

Введем обозначение

$$\sigma = \frac{U + c - c_0}{c_0}$$

и запишем уравнения в центрированной волне разрежения в виде

$$\frac{x - x_1}{t - t_1} = U + c = c_0(\sigma + 1),$$

$$U = \frac{2}{n+1}\sigma c_0, \quad (4.76)$$

$$c = \frac{c_0}{n+1}((\sigma + 1)(n - 1) + 2).$$

Имея в виду, что $D = dx/dt$, продифференцируем первое из уравнений (4.76) вдоль траектории ударной волны, рассматривая σ как независимую переменную. В результате получим

$$(D(\sigma) - c_0(\sigma + 1)) \frac{dt}{d\sigma} - c_0(t - t_1) = 0. \quad (4.77)$$

Уравнение (4.77) может быть проинтегрировано, если задана функция $D(\sigma)$, т. е. скорость ударной волны как функция σ . Попробуем ее определить. Из уравнения состояния следует, что $c^2 = (nP + \rho_0 c_0^2)/\rho$. Присоединяя к этому выражению уравнения (4.75) и исключая из системы уравнений давление P и плотность ρ , получаем связь между скоростью звука c , волновой и массовой скоростями:

$$c^2 = (D - U) \left(nU + \frac{c_0^2}{D} \right). \quad (4.78)$$

Из (4.76) и (4.78) следует уравнение, которому должна удовлетворять $D(\sigma)$

$$D^2 - \frac{1}{2n} DC_0(\sigma(n+1) + 2(n-1)) - \frac{c_0^2}{n} = 0. \quad (4.79)$$

Решением уравнения (4.79) служит выражение

$$D = c_0 \frac{n+1}{2n} \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{n-1}{n+1} \pm \left(\frac{\sigma^2}{4} + \frac{\sigma(n-1)}{n+1} + 1 \right)^{0,5} \right). \quad (4.80)$$

Разложение правой части уравнения (4.80) в ряд и удержание членов до второго порядка по σ даст соотношение

$$D(\sigma) = c_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma^2}{n(n+1)} + \dots \right). \quad (4.81)$$

Если принять во внимание только первых два члена в правой части уравнения (4.81), то можно получить известное выражение для скорости слабой ударной волны:

$$D = c_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2} \right) = \frac{U + c + c_0}{2}, \quad (4.82)$$

эквивалентное уравнению (4.27) для неподвижной среды. Используя (4.82), запишем (4.77) в виде

$$\frac{\sigma}{2} \frac{dt}{d\sigma} + t - t_1 = 0. \quad (4.83)$$

Уравнение (4.83) имеет простое решение:

$$t(\sigma) - t_1 = (t_3 - t_1) \left(\frac{\sigma_0}{\sigma} \right)^2. \quad (4.84)$$

Функция $x(\sigma)$ находится путем подстановки (4.84) в первое уравнение системы (4.76)

$$x(\sigma) - x_1 = (t_3 - t_1) c_0 (\sigma + 1) \left(\frac{\sigma_0}{\sigma} \right)^2. \quad (4.85)$$

Постоянная величина σ_0 определяется из значения σ на голове волны разрежения

$$\sigma_0 = \frac{U_1 + c_1 - c_0}{c_0} = \frac{x_3 - x_1}{(t_3 - t_1) c_0} - 1. \quad (4.86)$$

Уравнения (4.84) и (4.85) описывают траекторию нестационарной ударной волны.

Удержим далее в выражении (4.81) квадратичный член по σ и подставим соотношение для $D(\sigma)$ в уравнение (4.77). Дифференциальное уравнение (4.77) приобретет вид

$$\left(\frac{\sigma^2}{4(n+1)} - \frac{\sigma}{2} \right) \frac{dt}{d\sigma} - t + t_1 = 0. \quad (4.87)$$

Решение этого уравнения дает более высокую, чем уравнение (4.84),

степень приближения:

$$t(\sigma) - t_1 = (t_3 - t_1) \left(\frac{(\sigma - 2(n+1))\sigma_0}{(\sigma_0 - 2(n+1))\sigma} \right)^2. \quad (4.88)$$

Соответственно

$$x(\sigma) - x_1 = c_0(\sigma + 1)(t_3 - t_1) \left(\frac{(\sigma - 2(n+1))\sigma_0}{(\sigma_0 - 2(n+1))\sigma} \right)^2. \quad (4.89)$$

Уравнения (4.88) и (4.89) определяют траекторию ударной волны как функцию σ .

Параметры на фронте ударной волны P , ρ , U , c вычисляются по второму и третьему уравнениям системы (4.76) и уравнению состояния, а скорость ударной волны — по уравнению (4.81).

Одновременно могут быть рассчитаны распределения P , ρ , U , c за фронтом ударной волны как функции расстояния от фронта в фиксированный момент времени t . Из первых двух уравнений системы (4.76), имея в виду, что

$$\sigma = \frac{x - x_1}{c_0(t - t_1)} - 1, \quad (4.90)$$

получаем

$$U(x, t) = \frac{2c_0}{n+1} \left(\frac{x - x_1}{c_0(t - t_1)} - 1 \right). \quad (4.91)$$

Аналогично из первого и третьего уравнения системы (4.76) и уравнения (4.90) вытекает

$$c(x, t) = \frac{c_0}{n+1} \left(2 + \frac{n-1}{c_0} \left(\frac{x - x_1}{t - t_1} \right) \right). \quad (4.92)$$

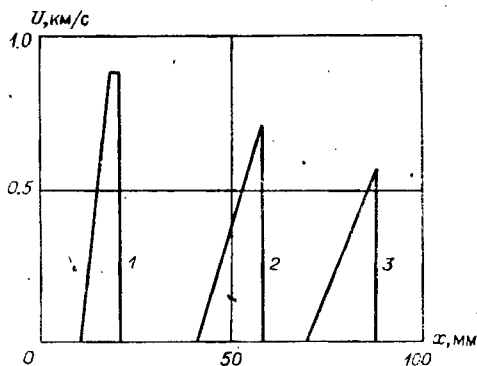
Как видно из уравнений (4.91) и (4.92), массовая скорость и скорость звука за фронтом нестационарной ударной волны изменяются линейно с координатой в фиксированный момент времени t . На крайней характеристике (4.74) (см. рис. 4.9), граничащей с областью покоя, из (4.91) и (4.92) следует $U=0$, $c=c_0$. Плотность и давление связаны со скоростью звука соотношениями

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{c}{c_0} \right)^{\frac{2}{n-1}},$$

$$P = \frac{\rho_0 c_0^2}{n} \left(\left(\frac{c}{c_0} \right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1 \right).$$

Рис. 4.10. Затухание ударной волны.

Профили скорости: 1 — для $t = 3$ мкс, 2 — 9, 3 — 15 мкс.



Подстановка в эти выражения уравнения (4.92) определяет распределение (профиль) давления и плотность за фронтом нестационарной ударной волны. Система уравнений (4.88) — (4.92) полностью описывает затухание ударной волны.

На рис. 4.10 представлены результаты расчета [21] соударения пластин из алюминиевого сплава 2024 со следующими исходными данными: $\rho_0 = 2.785 \text{ г/см}^3$, $c_0 = 5.38 \text{ км/с}$, $n = 4.266$, $d = 3.175 \text{ мм}$, $W_{уд} = 1.63 \text{ км/с}$.

Глава 5

ОТКОЛЬНОЕ РАЗРУШЕНИЕ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

§ 1. Способы образования растягивающих напряжений

Способность сопротивляться разрушению под действием кратковременных интенсивных растягивающих напряжений является одной из важнейших характеристик материалов. Результат приложения импульсной силовой нагрузки к образцу исследуемого материала в общем случае заключается в возбуждении в нем нестационарных ударных волн сжатия или волн разрежения. Необходимым условием получения растягивающих напряжений при волновых процессах в твердых телах есть взаимодействие двух встречных волн разрежения. Такая ситуация чаще всего имеет место тогда, когда нестационарная затухающая ударная волна падает на границу раздела с материалом, имеющим меньшую жесткость (меньший динамический импеданс) по сравнению с материалом, по которому распространяется волна.

Для образования в результате взаимодействия встречных волн разрежения растягивающих напряжений (отрицательных делений в гидродинамическом приближении) амплитуды волн должны иметь достаточную величину. Так, если по плоскому образцу, сжатому плоской стационарной ударной волной до напряжения $\sigma_{сж}$, распространяются навстречу друг другу две волны разрежения равной амплитуды, то, как следует из решения задачи о распаде произвольного разрыва в акустическом приближении, образование растягивающих напряжений в материале возможно в том случае, если амплитуда каждой из волн превышает величину $0.5\sigma_{сж}$. При соответствующих параметрах (амплитуде, длительности и т. д.) растягивающих напряжений может произойти отрыв слоя, толщина которого определяется как свойствами испытываемого материала, так и характеристиками импульса растяжения. Такой специфический вид разрушения получил название откольного разрушения, или откола. Изучение явления откола остается, по-видимому, единственной пока возможностью исследования закономерностей разрушения материалов в микро- и субмикросекундном диапазонах времени действия растягивающих напряжений.

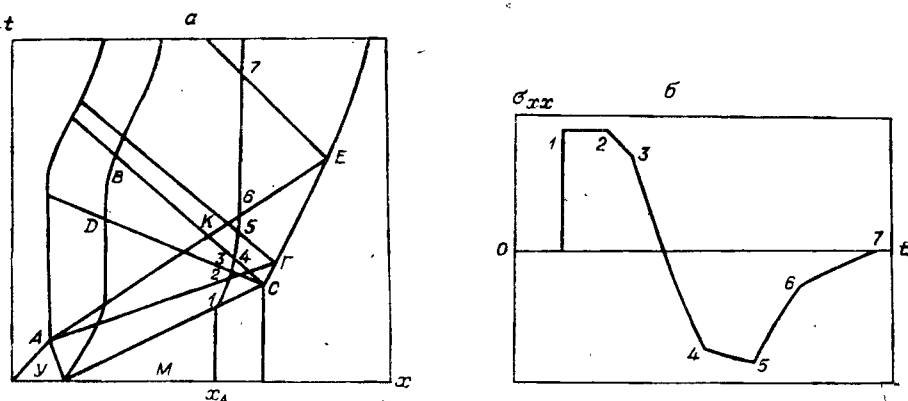


Рис. 5.1. Схема образования растягивающих напряжений при соударении пластин.

a — x , t -диаграмма; *б* — история напряжения.

Рассмотрим процесс образования растягивающих напряжений в типичных схемах постановки эксперимента: удар свободно летящей пластины (ударника) по неподвижной пластине (мишени) и падение плоской нормальной детонационной волны на преграду из исследуемого материала. Поперечные размеры объектов будем считать бесконечными.

Траектории сильных и слабых разрывов, возникающих при соударении ударника У с мишенью М, и траектории некоторых лагранжевых частиц изображены на рис. 5.1, *a*. В точках А и С — точках выхода ударных волн на свободные поверхности ударника и мишени — образуются центрированные волны разрежения ГАЕ и DCB, распространяющиеся навстречу друг другу. В области их взаимодействия напряжения становятся растягивающими. В любой фиксированный момент времени наибольшее растягивающее напряжение достигается на слабом разрыве СКВ, а максимальное растягивающее напряжение — в точке К пересечения слабых разрывов ВС и АЕ. Зависимость напряжения от времени в некотором сечении x_A характерна для процесса соударения. Откольное разрушение происходит в том сечении мишени, где ранее всего выполняются критерии разрушения. Для грубых оценок часто используется акустическое приближение. В этом приближении, если материалы ударника и мишени одинаковы, импульс растяжения имеет прямоугольную форму с амплитудой $\sigma_p = 0.5\rho_0 c_0 |W_{уд}|$ и длительностью $t_0 = 2\Delta_y/c_0$. Толщина откольного слоя равна толщине ударника.

Растягивающие напряжения в мишени образуются также при нормальном падении на ее поверхность детонационной волны (рис. 5.2, *a*, где ОА — траектория ударной волны, САВ — центрированная волна разрежения). Поскольку давление на контактной границе мишени ОСВ со временем уменьшается, ударная волна ОА является затухающей. Наибольшие растягивающие напряжения

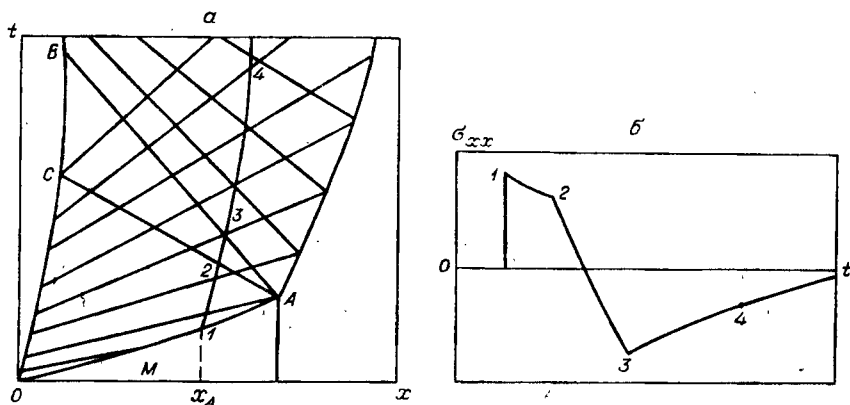


Рис. 5.2. Образование растягивающих напряжений при нормальном падении плоской детонационной волны. Усл. обозн. *a*, *b* те же, что и на рис. 5.1.

достигаются на характеристике *AB*, причем с течением времени они увеличиваются.

Зависимость растягивающего напряжения от времени в некотором сечении x_A (см. рис. 5.2, *b*) типична для рассматриваемого процесса. Откольное разрушение происходит в том сечении, где ранее всего выполняются критерии разрушения. Величина максимальной амплитуды растягивающих усилий для конкретных типов ВВ и материала преграды зависит от отношения их толщин: $\alpha = l_M/l_{ВВ}$. При малых α из-за малости градиента напряжений по толщине преграды растягивающие напряжения малы. Вследствие этого относительно тонкие преграды не претерпевают откольного разрушения, что согласуется с хорошо известным фактом безоткольного ускорения с помощью взрыва ВВ тонких пластин. При больших α растягивающие напряжения также малы из-за слабого затухания ударной волны по длине преграды. Таким образом, наибольшего значения максимальные растягивающие напряжения достигают при некотором определенном значении $\alpha = \alpha_0$.

Возникновение первого откола сопровождается образованием новой свободной поверхности. Если амплитуда падающей на нее нестационарной ударной волны достаточно велика, то по описанной схеме может произойти второй откол и т. д., т. е. преграда претерпевает многократное откольное разрушение.

§ 2. Критерии откольного разрушения металлов

Законченной теории откольного разрушения металлов при действии кратковременных растягивающих напряжений пока не существует. Результаты экспериментальных исследований демонстрируют сложный характер откольного разрушения. Анализ и обобщение экспериментальных фактов [1—14] совместно с теоретиче-

скими представлениями о механизме разрушения позволили выявить многие детали этого физического явления, в том числе на микроуровне, получить практически важные сведения для предсказания возможности образования откольного разрушения при воздействии на объект импульсных силовых нагрузок. Обширными экспериментальными исследованиями показано, что прочность металлов на динамический отрыв — откол зависит от формы и длительности импульса растягивающих напряжений, от напряженно-деформированного состояния среды и физических факторов (температуры, исходной микроструктуры и т. д.). Таким образом, откольная прочность представляет собой функцию многих переменных и параметров, что усложняет ее количественное описание. Для объяснения и описания наблюдаемых фактов откольного разрушения исследователями предложены различные критериальные соотношения аналитического вида.

Критерий откольного разрушения, простейший по содержанию, основан на представлениях, полученных экспериментально при статическом нагружении материалов, когда в течение некоторого времени на диаграмме σ, ϵ наблюдается область почти постоянного значения σ , которое принимается в качестве критерия разрушения, или предела прочности вещества. При динамических нагрузках по аналогии со статическими за критерий разрушения можно принять некоторое, другое значение σ [7], иазываемое динамическим пределом прочности.

Последующее экспериментальное изучение процесса откольного разрушения показало, однако, что этот критерий не отражает в полной мере явления откола и, в частности, завышает критические значения растягивающих напряжений σ_{xx}^p , при которых нарушается сплошность материала. Тем не менее ввиду его простоты и удобства использования он широко применяется в инженерной практике для прогноза полного откольного разрушения нагружаемых объектов.

Более полного и детального описания процесса откольного разрушения можно достичь, если рассматривать его как событие, протекающее во времени. На необходимость этого наглядно указывает факт нарушения закона геометрического подобия: при подобном увеличении всех параметров экспериментальной системы и соответственно времени действия растягивающих напряжений величины разрушающих критических напряжений оказываются меньшими по сравнению с исходной системой [15]. Невыполнение закона подобия имеет место как при соударении пластин [16], так и при нагружении мишени продуктами взрыва конденсированного ВВ [17].

Критерий максимальных растягивающих напряжений основан на предположении, что макроскопическое разрушение наступает там, где достигаются максимальные растягивающие напряжения, равные или превосходящие некоторую критическую величину $\sigma_{отк}$. Но в отличие от классической статической теории величина $\sigma_{отк}$ считается зависящей от временной характеристики нагружения. Следовательно, возможность или, наоборот, невозможность откольного разрушения

определяется двумя переменными: амплитудой растягивающего напряжения и одной из временных характеристик нагружения.

Для импульса растяжения прямоугольной формы, свойственного случаю соударения пластин с невысокими скоростями, существенным является выбор в качестве временного параметра значения длительности импульса растяжения t_0 .

В плоскости σ_{xx} , t_0 совокупность реализующихся состояний может быть разделена некоторой кривой $\sigma_{отк}(t_0)$, разделяющей их на две области: область состояний, включая саму кривую, при которых происходит откольное разрушение, и область состояний, лежащих ниже кривой, где полное откольное разрушение не реализуется (рис. 5.3). Кривая $\sigma_{отк}(t_0)$ может быть условно названа кривой откольного разрушения, а соответствующие значения t_0 — временем откольного разрушения. Физический смысл зависимости $\sigma_{отк}(t_0)$ очевиден: если мгновенно приложить растягивающее напряжение постоянной амплитуды σ_1 , то полное откольное разрушение произойдет, если время действия этого напряжения будет равным или превысит необходимое для разрушения при заданной величине σ_1 время t_1 . Для разрушения материала в полном соответствии с опытными данными необходимо приложить тем больше растягивающие напряжения, чем меньше время их действия (см. рис. 5.3).

Откольное разрушение имеет место в сечении, в котором ранее, чем во всех других, достигается значение $\sigma_{отк}$ и соответствующее ему t_0 . Эмпирически полученные зависимости $\sigma_{отк}(t_0)$ представляются приближенными соотношениями вида

$$t_0 = K_1 e^{-\alpha \sigma_{отк}}, \quad t_0 = m \sigma_{отк}^{-n}, \quad (5.1)$$

где K_1 , α , m , n — постоянные величины, определяемые из условий наилучшего описания экспериментальных данных.

В случае, когда импульс растягивающих напряжений имеет треугольную форму по координате x , условия нагружения в заданном сечении образца принято характеризовать амплитудой растягивающих напряжений и градиентом напряжений [17] либо амплитудой растягивающих напряжений и производной напряжения по времени [15]. Для Cu, Al, Ni, Pb наблюдается сильная зависимость $\sigma_{отк}$ от $d\sigma_{xx}/dx$, т. е. от условий растяжения: чем выше величина $d\sigma_{xx}/dx$, тем большее по амплитуде растягивающее напряжение следует приложить, чтобы произошло полное откольное разрушение (рис. 5.4). Откольное разрушение имеет место в сечении образца, где ранее, чем во всех других сечениях, реализуются критические условия разрушения $\sigma_{отк}$ и $d\sigma_{xx}/dx$, связь между которыми устанавливается по результатам расчета поля напряжений и их сопоставления с опытными данными по толщине первого откольного слоя.

Критерий максимальных деформаций растяжения предполагает, что для каждого конкретного материала максимальная деформация зарождения откола зависит от временных характеристик деформирования. Рис. 5.5, иллюстрирующий эту зависимость, показывает, что с уменьшением характерного времени действия растягивающего

Рис. 5.3. Зависимость времени откольного разрушения от амплитуды растягивающих напряжений.

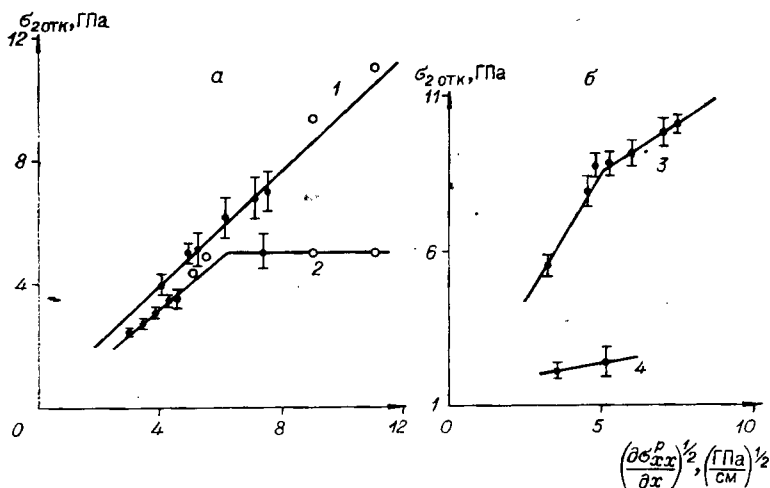
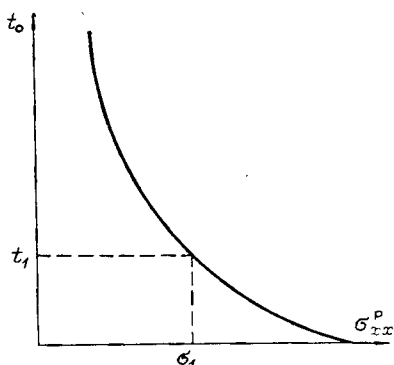


Рис. 5.4. Изменение критического напряжения разрушения в зависимости от градиента напряжений для Cu (1), Al (2), Ni (3), Pb (4). Экспериментальные точки взяты из [17].

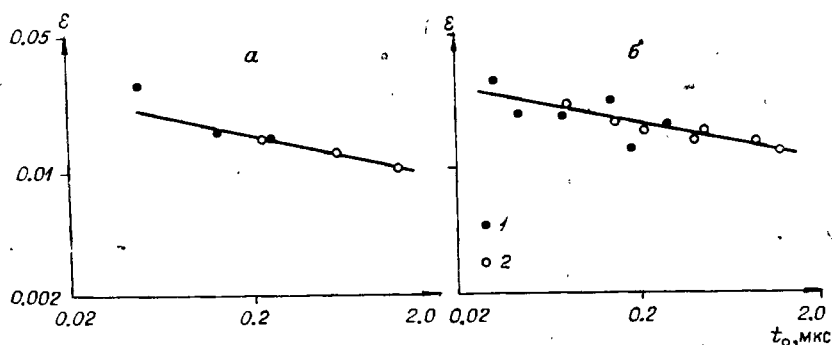


Рис. 5.5. Зависимость деформации зарождения откольного разрушения от длительности импульса растяжения [18] для алюминия 6061-Т6 (а) и меди (б). 1 — облучение электронным пучком; 2 — соударение пластин.

напряжения линейные деформации растяжения, отвечающие откольному разрушению, возрастают [18]. Как и для описанных критериев, откольное разрушение возникает в сечении, в котором ранее, чем в других, выполняются критические условия. С применением критерия максимальных линейных деформаций в [18] единообразно описано откольное разрушение меди и алюминиевого сплава 6061-T6 для столь различных методов нагружения, как соударение пластины и быстрый разогрев электронным пучком. Отметим, что при равной характерной длительности импульса разгрузки значения откольной прочности при быстром разогреве электронным пучком для этих материалов значительно меньше по сравнению со случаем соударения пластин, что является следствием различия зависимостей напряжение — деформация материала для рассматриваемых режимов нагружения. Однако для α -титана критерий максимальных линейных деформаций растяжения не описывает результатов, полученных при электронном разогреве и соударении пластин, что объясняется [18] температурными эффектами в экспериментах с электронным разогревом.

Энергетический критерий разрушения основывается на предположении о том, что при откольном разрушении работа по отрыву материала совершается за счет упругой энергии в импульсе растяжения. Откол будет иметь место, если количество упругой энергии оказывается достаточным для протекания такого процесса.

В акустическом приближении, полагая, что процесс деформирования носит упругий характер, для растягивающего импульса произвольной формы это условие имеет вид [19, 20]:

$$\int_0^{l_0} \frac{\sigma_p^2 dx}{\rho c_{\text{прод}}^2} = \lambda = \text{const}, \quad (5.2)$$

где σ_p — напряжение растяжения, l_0 — длина волны разрежения, λ — удельная на единицу поверхности работа отрыва материала. В [19] показано, что наиболее ослабленное сечение есть плоскость, с хорошей точностью совпадающая с фронтом волны растяжения. Это означает, что величину l_0 в (5.2) можно заменить толщиной откольного слоя $\delta_{\text{отк}}$.

По [19] для треугольного импульса растяжения

$$\lambda = \sigma_p^2 \delta_{\text{отк}} / (3 \rho c_{\text{прод}}^2), \quad (5.3)$$

и для прямоугольного импульса растяжения

$$\lambda = \sigma_p^2 \delta_{\text{отк}} / (\rho c_{\text{прод}}^2). \quad (5.4)$$

Значения λ , вычисленные для треугольного импульса растяжения по экспериментальным данным о толщине первого откольного слоя, составляют [19, 20]: 20 кДж/м² (Al), 30 кДж/м² (Cu), 60 кДж/м² (Ni) и 90 кДж/м² (мягкая сталь). Связь между λ , начальной скоростью свободной границы W_0 и средней скоростью отколовшегося

слоя $W_{отк}$ получена в [21] в виде

$$\lambda = \frac{1}{6} (W_0 - W_{отк})^2 \rho \delta_{отк}. \quad (5.5)$$

Вычисленные по формуле (5.5) по экспериментальным данным для различных марок сталей из [19] значения λ равны 90 кДж/м² для отожженной стали 45, 70 кДж/м² для отожженной стали 40Х и 130 кДж/м² для закаленной стали 40Х.

Энергетический критерий в отличие от рассмотренных определяется одним параметром λ — удельной упругой энергией откольного разрушения — и является постоянной величиной для данного материала. Координаты образования откола, т. е. толщина откольного слоя, определяются сечением, где ранее всего выполняется условие (5.2).

Описанные критерии откольного разрушения, эмпирические по своей сути, не раскрывают физической природы механизма откольного разрушения. Тем не менее в практических целях при прогнозировании возможности откольного разрушения импульсными нагрузками, не сильно отличающимися по форме от тех, для которых критерии получены, их применение вполне оправдано и приемлемо. Например, в [17] сообщалось об экспериментально подтвержденном предсказании 11-кратного откольного разрушения. По данным [16], толщина откольного слоя при соударении пластин из меди удовлетворительно описывается энергетическим критерием.

Интеграл повреждений. В основе критерия разрушения лежит соотношение Тулера — Батчера [9, 18, 22], иногда называемое интегралом повреждений:

$$K = \int_{t_0}^t (\sigma_p(t) - \sigma_0)^n dt, \quad (5.6)$$

где n и σ_0 — постоянные параметры, подбираемые из условия наилучшего описания экспериментальных данных. Интегрирование по времени начинается в момент t_0 , когда $\sigma = \sigma_0$. При выполнении в некотором сечении условия $K = K_c$, где K_c — постоянная материала, происходит разрушение.

В [9] определены значения параметров уравнения (5.6). Так, для меди $n = 2$, $\sigma_0 = 0.75$ ГПа, $K_c = 0.19$ (ГПа)²/мкс. Кроме того, для адекватного описания откольного разрушения при соударении пластин из этого материала при толщине ударника 1.5—4.0 мм, толщине мишени 4—9 мм, скорости соударения 80—300 м/с и начальной температуре мишени от 20 до 425 °С требуется наложить дополнительное условие: максимально допустимое напряжение растяжения σ_p не превышает 3.1 ГПа.

Кинетические критерии разрушения. В отличие от изложенных пороговых критериев разрушения, предполагающих процесс разрушения мгновенным при выполнении некоторых критических условий, кинетические критерии постулируют временное развитие процесса и построены на определенных предположениях о механизме разрушения.

Известен кинетический подход к проблеме прочности твердых тел [23], в котором долговечность тела t связана с величиной растягивающего напряжения σ , и температурой T соотношением

$$t = t_k \exp\left(\frac{U_0 - \gamma\sigma_p}{kT}\right), \quad (5.7)$$

где t_k — период колебаний атомов в решетке, U_0 — энергия сублимации, γ — структурно-чувствительный коэффициент, k — постоянная Больцмана. Многочисленными исследованиями показано, что формула (5.7) может быть с успехом применена для описания разрушения материалов различного класса (металлы, полимеры) в диапазоне значений $t = 10^7 - 10^{-3}$ с. Однако попытки распространить ее на область долговечности ($10^{-5} - 10^{-8}$ с), свойственную экспериментам с ударными волнами, показали [24], что для описания «динамической» ветви временной зависимости прочности необходимо значительно изменить параметры t_k , U_0 и γ . По данным [25], различие динамической и «статической» ветвей временной зависимости прочности связано с различными механизмами необратимой деформации, приводящей к разрушению материалов: термоактивируемое подбарьерное скольжение дислокаций на статической ветви сменяется атермическим надбарьерным на динамической ветви. В силу этого на статической ветви оказывается существенной зависимость долговечности от приложенного напряжения растяжения и температуры в соответствии с (5.7), а на динамической ветви разрушение будет атермическим.

Кинетический характер процесса разрушения предполагает, что в сечении будущего откольного разрушения растягивающие напряжения действуют в течение конечного интервала времени. В [25] предположен критерий долговечности металлов в микросекундном диапазоне, учитывающий особенности механизма пластического деформирования на динамической ветви разрушения:

$$t = t_1 \exp(\sigma_1/\sigma), \quad (5.8)$$

где t_1 и σ_1 — постоянные. При значениях $t_1 = 0.355 \cdot 10^{-6}$ с и $\sigma_1 = 0.3$ ГПа для Al, $t_1 = 0.416 \cdot 10^{-6}$ с и $\sigma_1 = 0.3$ ГПа для Cu, $t_1 = 0.8 \cdot 10^{-7}$ с и $\sigma_1 = 5.4$ ГПа для Fe формула (5.8) описывает экспериментальные зависимости прочности этих металлов от времени в микросекундном диапазоне.

В работе [26] показывается, что область применения кинетического критерия (5.7) в обычной его формулировке ограничена, и в диапазоне малых долговечностей она должна быть существенно дополнена.

В настоящее время при описании откольных явлений часто используется представление об откольном разрушении как многостадийном процессе [26—30]. Однако вопрос о количестве стадий, их характеристиках, условиях перехода от одной стадии к другой остается открытым.

В [28] процесс откольного разрушения разграничивается на докритическую и закритическую стадии, где докритическая стадия

представляет собой аналог стадии накопления зародышевых неоднородностей. Введение функционального соотношения между локальными и средними напряжениями при ударно-волновом нагружении позволили на основе уравнения (5.7) описать зависимость прочности от времени докритической стадии и распространить принципы кинетической теории прочности на процесс откольного разрушения. Общее выражение для статической и динамической ветвей имеет вид [27]

$$g\left(\frac{\sigma_*}{\sigma_T}\right) - 1 - \frac{RT}{U_0} \ln \left(g\left(\frac{\sigma_*}{\sigma_T}\right) \left(\frac{U_0 \tau_0}{RT\tau} \right) \left(1 + \frac{\tau}{\Theta_0} \frac{\partial \ln g}{\partial t} \right) \right) = 0, \quad (5.9)$$

где σ_T — термическая прочность, σ_* — напряжение в момент окончания термоактивационной стадии разрушения, Θ_0 — подгоночный параметр, g — коэффициент перенапряжений, равный отношению среднего уровня локальных напряжений к прикладываемому напряжению.

В случае сверхскоростных напряжений локальные напряжения близки к средним и можно ожидать реализации безактивационного разрушения с приближением откольной прочности к теоретической прочности.

Другой подход к описанию откольных явлений основан на применении связанных моделей роста повреждений и деформируемости металлов [30—36]. При этом стадии разрушения не разделяются, а разрушение описывается как непрерывный процесс роста и накопления повреждений с помощью некоторой единой меры поврежденности и эволюционного уравнения. Задача распространения волн напряжений в разрушающемся твердом теле в общем виде описывается системой — дифференциальных уравнений в частных производных, уравнением состояния среды и уравнениями, учитывающими образование и развитие дефектов. В полной постановке задача может быть решена только численными методами. Подробно построение и особенности уравнений, определяющих поведение среды в этих условиях, описаны в процитированных источниках. Обзор работ по численному моделированию разрушения приведен в [37].

Результаты численного моделирования, а также экспериментально наблюдаемые факты указывают на ряд закономерностей процесса откольного разрушения. Отметим прежде всего, что модели, построенные на концепции накопления повреждений, независимо от соотношений, описывающих законы зарождения дефектов и их развития, и уравнений, определяющих поведение материала с учетом релаксации напряжений и изменения механических свойств вследствие образования и роста дефектов, дают качественно одинаковые результаты.

Для волн растяжения с амплитудой до ≈ 5 ГПа (для стали) определяющими факторами разрушения являются образование, рост и накопление микроповреждений [34]. Напротив, при больших уровнях растягивающих напряжений, когда микроповреждения локализируются в очень узкой зоне и реализуется практически гладкий

откол, для описания откольного разрушения применима более простая модель мгновенного откола [31—32]. Результаты модельных расчетов показывают, что с уменьшением амплитуды импульса откол можно реализовать лишь при соответствующем увеличении времени его действия, а с увеличением толщины ударника, т. е. с возрастанием времени действия импульса, амплитуда импульса напряжения, необходимая для получения одинакового уровня повреждений, уменьшается. Появление большого количества дефектов приводит к релаксации напряжений, что проявляется в том, что амплитуда волны растяжения оказывается меньше амплитуды волны расширения, рассчитанной в предположении отсутствия дефектов.

Растягивающие напряжения σ_p в плоскости откола с увеличением скорости соударения пластин возрастают медленнее, чем величина импульса сжимающих напряжений $\sigma_{сж}$ [33]: для меди при скорости удара 80 м/с $\sigma_p^{\max} = 1.1$ и $\sigma_{сж}^{\max} = 1.4$ ГПа, при скорости удара 380 м/с $\sigma_p^{\max} = 3.7$ и $\sigma_{сж}^{\max} = 6.5$ ГПа.

В последнее время развивается дилатонная модель кинетической теории прочности [38—40]. По этой модели прочность на разрыв и длительность испытания t связаны соотношением

$$\sigma = \frac{\varepsilon_{кр} E}{\kappa} \left(1 - \frac{\alpha k T}{\varepsilon_{кр} C_a} \ln \frac{t}{t_0} \right), \quad (5.10)$$

где k — постоянная Больцмана, T — температура, $\varepsilon_{кр}$ — критическая деформация атомной связи, E — модуль Юнга, C_a — атомная теплоемкость, α — коэффициент линейного расширения, t_0 — период колебания атомов, κ — коэффициент перегрузки. В соотношении (5.10) основным является вопрос определения количественной связи коэффициента κ с реальной дефектной структурой напряженного тела. В работе [40] эта связь установлена на основе статистической теории прочности и получено удовлетворительное согласие с экспериментальными данными для ряда металлов.

§ 3. Методы определения откольной прочности

Величина откольной прочности не может быть измерена прямым путем. Для ее определения экспериментально регистрируются явления, которые представляют собой следствие нарушения макроскопической сплошности материала с отделением откольного слоя, либо интенсивного развития и размножения очагов поврежденности на микроуровне.

Накоплена значительная информация об откольном разрушении металлов. Применяемые методы выявления величины откольной прочности можно подразделить на две группы: смешанные расчетно-экспериментальные и основанные на измерениях скорости движения свободной границы [2—4, 13, 41—44].

Расчетно-экспериментальным методом ввиду простоты постановки эксперимента в условиях одномерной деформации получена большая часть опытных данных.

Во многих работах (см., например, [45—64]) экспериментально определялась толщина откольного слоя (макроскопическое разрушение) как при подрыве конденсированного ВВ, находящегося в контакте с исследуемым образцом, так и при торможении плоского ударника [45]. Толщина откольного слоя выявлялась либо непосредственно импульсным рентгенографированием [59], либо анализом сохраненных образцов [45, 64]. При известных условиях нагружения путем расчета полной системы уравнений движения определялась зависимость напряжений от времени в плоскости откола. Максимальное расчетное значение растягивающих напряжений в плоскости откола принималось за величину откольной прочности. Тем самым постулировалась мгновенность процесса разрушения по достижении некоторой критической величины растягивающего напряжения. Этот метод достаточно груб и позволяет получить лишь приближенную оценку сопротивления материала к действию растягивающих напряжений.

В [12, 65, 66] рассмотренный подход использован для случая нагружения образца детонационной волной в режиме тангенциального падения. Применение образцов в виде клина из-за затухания в них ударной волны позволяет получить в одном опыте отличающиеся условия действия растягивающих усилий (амплитуда, длительность) в различных сечениях образца, т. е. повысить информативность одного эксперимента.

Использование комбинированных (двухслойных) ударников или образцов при условии, что на тыльной поверхности ударника или образца размещается более «мягкий» по сравнению с материалом ударника или образца слой, дает возможность ограничить амплитуду одной из встречных волн расширения и, следовательно, уменьшить величину максимальных растягивающих напряжений в исследуемом материале. Вариацией скорости ударника и материала «мягкого» слоя достигается в широких пределах изменение амплитуды растягивающих усилий [10, 11]. Рассмотренная экспериментальная схема с регистрацией факта разрушения с помощью импульсного рентгенографирования использована в [11].

Видоизменением описанного подхода является вариация скоростью ударника при наличии свободных поверхностей с тыльной стороны ударника и образца. Последовательное повышение скорости ударника в сравнительно узком диапазоне позволяет создавать в образце различные уровни растягивающих напряжений, пропорциональные скорости ударника, практически не изменяя при фиксированной геометрии ударника и образца временных параметров нагрузки. Преобразованием системы, например геометрическим моделированием при неизменной скорости ударника, изменяются временные характеристики импульса растягивающих напряжений. Последующий металлофизический анализ сохраненных после нагружения образцов дает возможность выявить уровень поврежденности материала при заданных условиях нагружения, которое рассчитывается указанным способом.

Таким образом, оказывается возможным сопоставить степень поврежденности — от зарождения микротрещин до образования магистральных трещин и полного разрушения с отлетом откольного слоя — с параметрами действующих импульсов растягивающих напряжений и выявить особенности откольного разрушения.

Поскольку большая часть представленных в главе экспериментальных данных по откольному разрушению получена этим способом, остановимся на нем более подробно. Процесс образования откола начинается с зарождения микротрещин и заканчивается появлением магистральной трещины — полным отделением отколовшегося слоя от образца. Опытные данные свидетельствуют о том, что для образования магистральной трещины необходимо повысить скорость ударника по сравнению со скоростью, для которой наблюдается зарождение микротрещин, при неизменной длительности импульса растяжения. Тем самым для получения магистральной трещины амплитуда растягивающих напряжений, если отвлечься от релаксационных процессов, оказывается большей амплитуды, отвечающей образованию микротрещин. Поэтому откольную прочность материалов при конкретных температурно-временных условиях нагружения целесообразно условно охарактеризовать двумя критическими уровнями максимальной амплитуды растягивающих напряжений:

— уровнем напряжения $\sigma_{1отк}$, соответствующим зарождению микроповреждений;

— уровнем напряжений $\sigma_{2отк}$, соответствующим полному макроскопическому разрушению.

Величина $\sigma_{1отк}$ может быть принята за характеристику физической прочности материала к действию импульсных растягивающих напряжений. Повышение напряжений над уровнем $\sigma_{1отк}$ до уровня $\sigma_{2отк}$ может характеризовать способность материала сохраняться без макроразрушения при ударно-волновом нагружении. Вместе с тем еще раз следует подчеркнуть, что в зоне откольного разрушения ввиду релаксации напряжения, связанной с нарушением сплошности материала (рост и развитие микротрещин, пор и т. д.), истинное напряжение не превышает значения $\sigma_{1отк}$, а величина $\sigma_{2отк}$ условная.

Рассматриваемый способ является одним из наиболее простых методов выявления временной и температурной зависимостей откольной прочности $\sigma_{отк}$ в диапазоне времени нагружения $(0.1-1.0) \cdot 10^{-6}$ с.

Остановимся кратко на особенностях постановки экспериментов. Импульсное механическое нагружение образцов осуществлялось путем удара алюминиевыми пластинами различной толщины, ускоряемыми до необходимой скорости продуктами взрыва при тангенциальном падении детонационной волны на поверхность алюминиевой пластины. Иницирование слоя ВВ производилось с помощью генератора плоской волны. Для предотвращения откольных явлений в пластине-ударнике между пластиной и слоем ВВ размещался тонкий слой технического сукна. Между пластиной-ударником и образцом находился воздух. В опытах с повышенной начальной

температурой образцов предварительный их нагрев осуществлялся лучистой энергией ленточного нихромового нагревателя. Температура образца контролировалась хромель-капельевой термопарой. Поперечные размеры и длина пластины-ударника выбирались такими, чтобы нагружение образца было достаточно одновременным по всей поверхности образца и исключалась возможность затекания продуктов взрыва в пространство между образцом и ударником. Образцы изготовлялись в виде дисков, толщина которых выбиралась из условия

$$2 < \frac{h_{\text{обр}}}{h_{\text{уд}}} \cdot \frac{c_{\text{уд}}}{c_{\text{обр}}} < 3,$$

где $h_{\text{обр}}$ и $h_{\text{уд}}$ — толщина образца и ударника, $c_{\text{уд}}$, $c_{\text{обр}}$ — скорости звука в материале ударника и образца. Диаметр образцов выбирался равным $(6-7) \cdot h_{\text{обр}}$. Для металлографической дефектоскопии из сохранных образцов использовалась центральная зона диаметром $\approx 5h_{\text{обр}}$. Металлографический анализ контрольных образцов и подвергнутых испытанию выполнялся с увеличением до 1000 раз. При этом определялись следующие параметры: степень поврежденности, характер разрушения, структурные изменения. Ценную информацию дает также изучение распределения наблюдаемых дефектов (пор, микротрещин) по толщине образца в зависимости от условий нагружения и начальной температуры.

Для выявления микроструктурных изменений в материалах, подвергнутых нагружению ударными волнами, в последнее время стали применяться другие методы исследований. Так, в [67] для изучения микроструктуры меди после ударного нагружения проводились рентгенографические анализы деформационной структуры, в ходе которых определялись параметры структуры, микроискажения решетки и плотность дислокаций.

Растягивающие напряжения в каждый момент времени при известных скоростях пластины-ударника находились расчетным методом с использованием уравнений состояния материалов ударника и образцов, построенных с учетом результатов исследования их ударно-волновой сжимаемости.

Следует заметить, что при большой концентрации очагов разрушения в плоскости откола, когда нарушается сплошность материала, или при полном отделении откольного слоя расчетные значения критических напряжений разрушения для конкретных условий эксперимента в силу указанных причин оказываются завышенными. Лучшим приближением являются расчетные оценки величины откольной прочности, выполненные для случая, когда в намечающейся плоскости откола микроразрушения только еще начинают развиваться, т. е. материал в среднем не теряет своей сплошности, а его напряженное состояние еще достаточно близко к напряженному состоянию в сплошной среде.

Различные расчетных значений $\sigma_{1\text{отк}}$, $\alpha_{2\text{отк}}$ критических напряжений разрушения для различных степеней поврежденности железа и стали Ст. 3 наглядно иллюстрируется, например, на рис. 5.6.

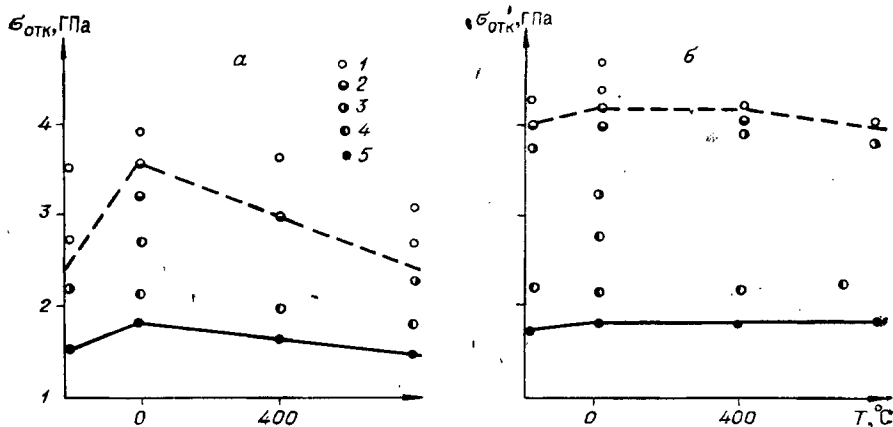


Рис. 5.6. Влияние температуры на откольное разрушение армо-железа (а) и стали Ст.3 (б) при $t_0 = 1.3 \cdot 10^{-6}$ с.

Сплошная ($\sigma_1 \text{ отк}(T)$) и штриховая ($\sigma_2 \text{ отк}(T)$) линии — уровни нагружения, соответствующие микро- и макроскопическому разрушению.

1 — полное откольное разрушение (наличие магистральной откольной трещины); 2 — частичное макроскопическое разрушение (наличие небольших откольных трещин в сечении); 3 — интенсивное микроразрушение (наличие в зоне откола значительного числа изолированных либо слившихся микроповреждений); 4 — слабое микроразрушение (наличие в зоне откола небольшого количества изолированных микроповреждений); 5 — сохранение микрокопической целостности (отсутствие в сечении наблюдаемых при увеличении в 1000 крат микроповреждений).

Для многих прикладных задач важно дать прогноз возможности полного откольного разрушения, что оправдывает введение $\sigma_{1 \text{ отк}}$.

Вторая группа методов определения откольной прочности основана на измерениях скорости движения свободной границы образцов. Определим связь между величиной откольной прочности и скоростью движения свободной границы. Пусть нестационарная ударная волна выходит на свободную поверхность в момент времени t_0 . Свободная граница приобретает мгновенную скорость движения W_0 и далее движется с замедлением, описываемым уравнением

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \quad (5.11)$$

Обозначим толщину откола Δx , а время образования откола t_k . В момент t_k на свободной границе $\sigma_{xx} = 0$, а в точке разрушения $\sigma_{xx} = \sigma_{\text{отк}}$. Расчеты показывают, что на небольших расстояниях от свободной границы зависимость σ_{xx} от x близка к линейной. Значит, с удовлетворительной точностью можно предположить

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \frac{\sigma_{\text{отк}}}{\Delta x} = \text{const.} \quad (5.12)$$

Из (5.11), (5.12) следует, что к моменту t_k скорость свободной границы

$$W_k = W_0 - \frac{\sigma_{\text{отк}}}{\rho \Delta x} (t_k - t_0). \quad (5.13)$$

Значение Δx связано с $t_k - t_0$ уравнением

$$\Delta x = c(t_k - t_0). \quad (5.14)$$

Из (5.13), (5.14) следует

$$\sigma_{отк} = \rho c (W_0 - W_k). \quad (5.15)$$

Для ударной волны слабой интенсивности $\rho \approx \rho_0$, $c \approx c_0$. Поэтому (5.15) переписывается так:

$$\sigma_{отк} = \rho_0 c_0 (W_0 - W_k). \quad (5.16)$$

После образования откола возникает слабая ударная волна, которая через время

$$t_B - t_k = \Delta x / c_0 \quad (5.17)$$

выйдет на свободную границу. В момент t_B скорость границы возрастет скачком до W_B . Это изменение скорости свободной границы в промежуток времени $t_B - t_0$ регистрируется экспериментально, С учетом всего сказанного (5.16) принимает вид

$$\rho_{отк} = 0.5 \rho_0 c_0 (W_0 - W_B). \quad (5.18)$$

Среди экспериментальных методов исследования откольной прочности метод емкостного датчика непрерывной регистрации скорости считается одним из наиболее представительных. Регистрация «истории» мгновенной скорости свободной поверхности несет информацию о кинетике процесса образования откола. Значения откольной прочности обычно вычисляются по формуле (5.18) (использование (5.16) дает близкие оценки). Впервые результаты таких измерений опубликованы в [4]. Экспериментальная [4] зависимость $W(t)$ (рис. 5.7) указывает на систему трех волн сжатия в стали при ударном нагружении выше точки фазового перехода: упругая волна и следующие за ней две пластические волны. Штриховой линией показана теоретическая зависимость $W(t)$, полученная в предположении мгновенности откольного разрушения, когда скорость свободной границы образца после разрушения возрастает скачком. На экспериментальной зависимости $W(t)$ увеличение скорости происходит плавно и она не достигает величины W_0 . Различие объясняется тем, что процесс разрушения происходит за конечный промежуток времени. За это время часть импульса напряжения растяжения успевает распространиться через еще не потерявшую полностью сплошность зону откольного разрушения в образец, что приводит к уменьшению роста скорости откольного слоя. Оцененное по опытным дан-

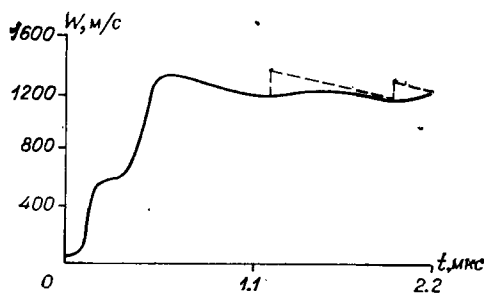


Рис. 5.7. Скорость движения свободной поверхности образца из стали Ст.3 [4].

ным в [4] время разрушения (долговечность) составило для стали Ст.3 $0.5 \cdot 10^{-6}$ с при нагружении образца толщиной 2.0 см плоской детонационной волной, распространяющейся по заряду длиной 4.0 см.

Для непрерывной записи скорости свободной поверхности применяются метод лазерной интерферометрии [68], а также аксиально-симметричные магнитные датчики [69]. Приблизительно величину откольной прочности можно определить с помощью метода «готового откола» [11], суть которого заключается в том, что измеряются средняя скорость W_r движения тонкой фольги из того же материала, что и образец, и средняя скорость $W_{отк}$ движения обычного откольного слоя. Скорость движения «готового откола», если его толщина мала, практически равна скорости W_0 в (5.18). Средняя скорость обычного откола мало отличается от величины W_k в формуле (5.16). Таким образом,

$$\sigma_{отк} = \rho_0 c_0 (W_r - W_{отк}). \quad (5.19)$$

Базы измерения обычно составляют несколько миллиметров, измерения выполняются электроконтактными или оптическими методами, «готовый откол» предварительно плотно прижимается к образцу.

В работах [70, 71] откольная прочность меди и стали определена посредством регистрации зависимости напряжения от времени на границе раздела металл — мягкое вещество (плексиглас). Непрерывная регистрация напряжений дает информацию о процессе откольного разрушения. Сущность этого метода близка к методу непрерывной регистрации скорости движения свободной поверхности.

§ 4. Результаты экспериментальных исследований

Полученные экспериментально в 50-е годы первые оценки откольной прочности материалов (в основном металлов) показали, что разрушение при ударно-волновом нагружении происходит при значительно более высоких растягивающих напряжениях, чем при статическом нагружении. Долгое время считалось, что откольная прочность — некоторая константа данного материала, и при этом безоговорочно принималось, что разрушение происходит мгновенно по достижении значения откольной прочности. При сопоставлении данных (в то время не очень многочисленных), полученных различными авторами, отмечался значительный разброс значений откольной прочности одинаковых материалов при различных условиях ударно-волнового нагружения. Анализ экспериментов убедительно показал, что $\sigma_{отк}$ не является постоянной для данного материала, а зависит от условий проведения экспериментов: толщины заряда ВВ, образца, размеров и скорости ударника. Бучером, Баркером и др. [9] впервые изменение откольной прочности было связано с историей напряженного состояния материала. В этой работе и позднее в [11] сделан вывод о том, что критерий разрушения при

отколе должен включать интервал времени, в течение которого в материале существуют импульсные растягивающие напряжения. Начиная с упомянутых работ большинство исследований откольных явлений связано с выяснением временных зависимостей $\sigma_{отк}$. Эта зависимость выражалась через градиент давления в области действия отрицательных напряжений $d\sigma_{xx}/dt$, скорость деформирования $\dot{\epsilon} = \partial U/\partial x$, характерная величина которого $\dot{\epsilon} \geq 10^5 \text{ с}^{-1}$ (U — массовая скорость), или непосредственно через величину интервала времени действия растягивающих напряжений t_0 . Очевидно, чем резче спад напряжения в области взаимодействия волн разрежения, тем выше скорость деформирования и градиент напряжения. Первые эксперименты показали весьма сильную зависимость для металлов $\sigma_{отк}$ от $\dot{\epsilon}$ [8], dP/dt [17] и времени t_0 [9—11].

Приведем основные экспериментальные результаты, полученные при исследовании температурной и временной зависимостей откольной прочности различных материалов.

Железо и стали. Железо и стали различных марок достаточно широко экспериментально исследованы. В качестве типичных представителей этих материалов рассмотрим армко-железо, низкоуглеродистую сталь Ст.3, легированную сталь 40X и сталь 12X18H10T. Откольная прочность стали Ст.3, определенная в [4] методом емкостного датчика измерения скорости в опытах при нагружении цилиндрических образцов плоской детонационной волной, составила 1.66 ГПа (амплитуда ударной волны в стали ~ 16 ГПа, характерное время нагружения $\sim 10^{-6}$ с). Там же показано достаточно слабое уменьшение $\sigma_{отк}$ при предварительном нагреве образцов до $\sim 450^\circ\text{C}$. Наиболее полные данные о прочностных характеристиках железа и различных сталей представлены в [43, 44, 70—74]. Для армко-железа, стали Ст.3 и высоколегированной стали 12X18H10T в широком температурном диапазоне ($-196 \dots 800^\circ\text{C}$) получены критические уровни нагружения, соответствующие зарождению откольных микроповреждений. При нормальной температуре испытаний выявлено влияние масштаба системы (т. е. времени действия растягивающих напряжений) на прочность. Масштаб системы при этом изменялся подобно в ~ 4 раза, характерные времена нагружения составляли ~ 1.3 и ~ 0.3 мкс соответственно для большого и малого образцов. Влияние температуры на откольную прочность железа и сталей двух марок можно проследить по рис. 5.6 и 5.8: конкретным условиям нагружения соответствует при заданном значении t_0 различная степень откольного повреждения образцов, условно подразделенная на ряд градаций. Критические уровни нагружения $\sigma_{1отк}$ и $\sigma_{2отк}$, соответствующие микро- и макроскопическому разрушению, показаны на рисунках сплошными и штриховыми линиями соответственно. Для железа и сталей выявлено заметное влияние времени нагружения на откольную прочность (рис. 5.9).

Кратко остановимся на металлографически наблюдаемой структуре материалов (рис. 5.10—5.12), поскольку она оказывает непосредственное влияние на характер развития откольного разруше-

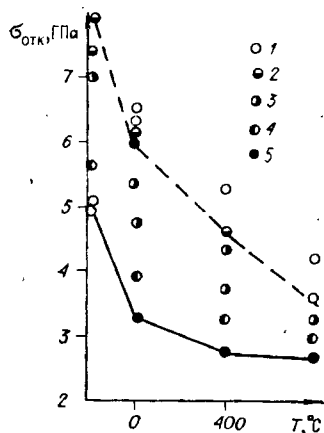


Рис. 5.8. Влияние температуры на откольное разрушение стали 12X18H10T. Время действия растягивающих напряжений $t_0 = 1.3 \cdot 10^{-6}$ с. Усл. обозн. 1—5 те же, что и на рис. 5.6.

ния. Основной структурной составляющей низкоуглеродистой стали Ст.3 являются зерна феррита (см. рис. 5.10) средним размером около 50 мкм. Зерна перлита располагаются полосами вдоль направления технологической прокатки прутка. Средний размер аустенитного зерна образцов из стали 12X18H10T составляет ~ 30 мкм. В структуре этой стали наблюдается большое количество карбидных включений, скопления которых вытянуты вдоль направления прокатки. Средний размер зерна образцов из армо-железа составлял ~ 100 мкм.

Характеры разрушения железа и малоуглеродистой стали в основном подобны. При -196°C микротрещины скола образуются практически в любом месте структуры. При 0°C зарождение трещин происходит только на наблюдаемых дефектах структуры: включениях, границах зерен, двойниках. Развитие разрушения при указанных температурах связано с образованием полостей в зонах интенсивного растрескивания и их слияния в небольшие микротрещины. При температуре 400°C зарождение разрушения в железе происходит на выделениях цементита, в стали Ст.3 — на сульфидных включениях. Растущие повреждения имеют форму вязких микротрещин. При температуре 800°C (см. рис. 5.11, а) трещины в железе зарождаются на выделениях и включениях в феррите, в стали Ст.3 — в основном на сульфидных включениях. Процесс разрушения становится более вязким, т. е. сопровождается значительными местными пластическими деформациями. В железе начинают образовываться микроразрушения в виде сферических пор. Для стали 12X18H10T при всех температурах испытания повреждения в виде пор концентрируются на карбидных включениях путем отделения матрицы материала от включения. При температуре -196°C наблюдается (см. рис. 5.11, б) образование мартенсита во всем объеме образца. При 0°C мартенситное превращение происходит лишь

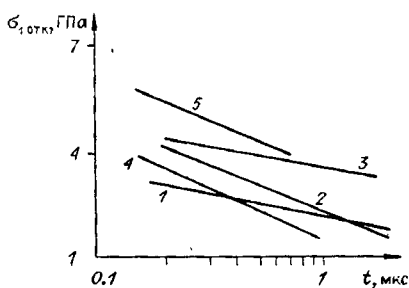


Рис. 5.9. Зависимость откольной прочности металлов от времени нагружения при нормальной начальной температуре образца.

1 — армо-железо [77], 2 — сталь Ст.3 [77], 3 — сталь 12X18H10T [77], 4 — армо-железо [47], 5 — сталь 08 [48].

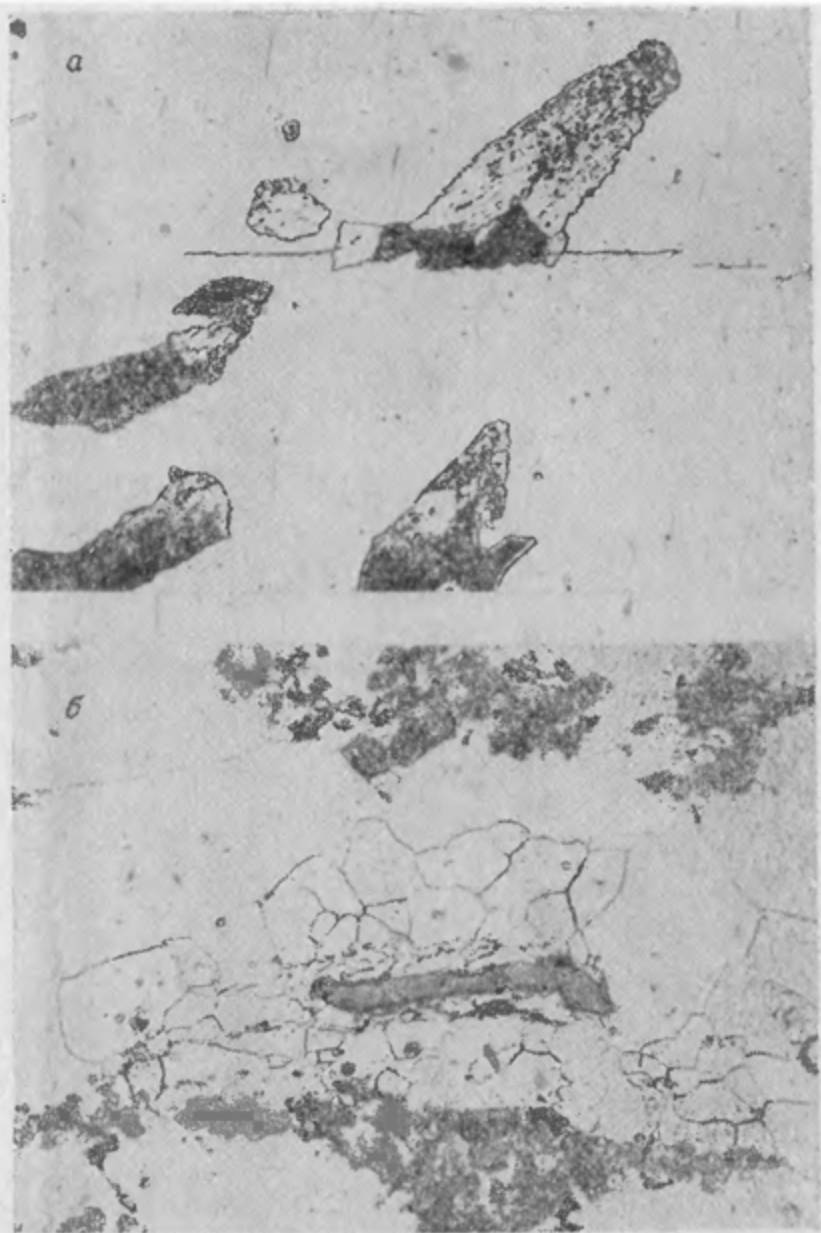


Рис. 5.10. Микроструктура стали Ст.3 после нагружения ударной волной и последующей разгрузки.
 Начальная температура образца и напряжение на ударной волне: а — $T = 0^\circ\text{C}$, $\sigma_{xx} = 4$ ГПа; б — 800°C , $\sigma_{xx} = 3.6$ ГПа. Увеличение: а — $800\times$; б — $500\times$.

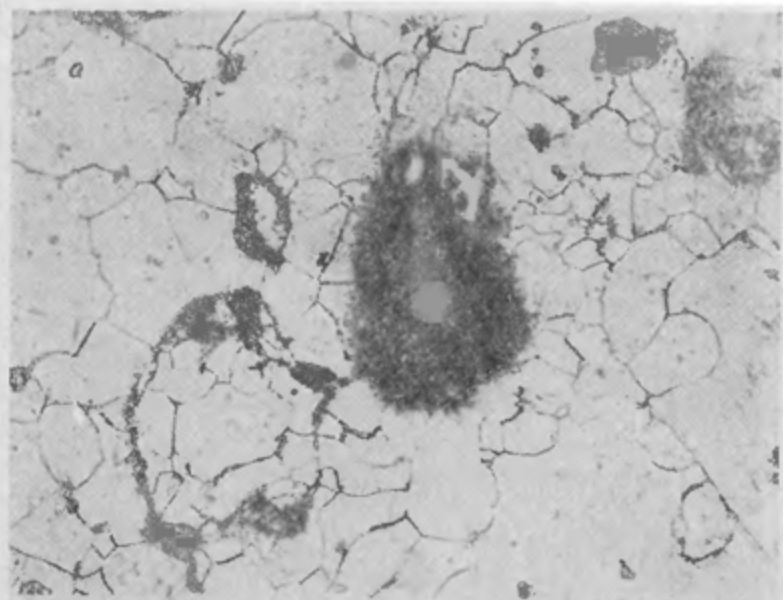


Рис. 5.11. Микроструктура армо-железа после нагружения ударной волной с $\sigma_{\text{шк}} = 2.8$ ГПа и начальной температурой $T = 800$ (а) и -196 °С (б). Увеличение $500\times$.



Рис. 5.12. Микроструктура стали 12X18N10T после нагружения ударной волной и последующей разгрузки. Время действия растягивающих напряжений $t_0 = 1.3 \cdot 10^{-6}$ с. Увеличение $500\times$.
 Начальная температура образца и напряжение на ударной волне: а — $T = 0^\circ\text{C}$, $\sigma_{xx} = 4$ ГПа; б — $T = -196$ С, $\sigma_{xx} = 6.9$ ГПа.

вблизи зоны удара и в зоне откольного разрушения. Результаты исследования поверхностей разрушения с помощью сканирующего электронного микроскопа наглядно демонстрируют переход от хрупкого разрушения в стали Ст.3 при -196°C (кристаллическое строение поверхности излома) к вязкому при повышенных температурах (волокнистое строение поверхности). Для стали 12X18H10T поверхность разрушения имеет волокнистое строение даже при температуре -196°C .

Установлено, что для железа и стали Ст.3 изменение температуры в широком диапазоне практически не влияет на прочность*. Прочность обоих материалов при характерном времени нагружения $\sim 1 \cdot 10^{-6}$ с характеризуется значением $\sigma_{10\text{тк}} \approx 1.7-1.8$ ГПа. Для уровней нагружения, соответствующих макроскопическому откольному разрушению, имеется существенное различие, обусловленное особенностями структуры. Так, при повышенных температурах направление развития макроразрушений меняется от параллельной плоскости откола к почти перпендикулярному (в направлении прокатки). Это, по-видимому, объясняется тем, что полосы, содержащие зерна твердого и хрупкого перлита, являются более серьезным препятствием для развития вязкого разрушения при повышенных температурах, чем хрупкого при пониженных температурах. Для стали 12X18H10T (см. рис. 5.12) начальная стадия микроразрушения также существенно связана с направлением прокатки для всех температур испытания, так как разрушение распространяется вдоль вытянутых в направлении прокатки карбидных включений. Прочность этой стали сильно зависит от температуры в области низких температур испытания. Разрушение зарождается на карбонитридных включениях. В структуре наблюдаются мартенситные превращения, способствующие упрочнению материала.

Если обратиться вновь к рис. 5.9, то видно, что уменьшение масштаба системы в 4 раза, т. е. уменьшение времени нагружения от $1.3 \cdot 10^{-6}$ до $0.3 \cdot 10^{-6}$ с, привело к значительному увеличению прочности образцов из железа и стали Ст.3 и к менее значительному для стали 12X18H10T.

Влияние предварительной термообработки на откольную прочность можно продемонстрировать на примере сталей таких марок, как 40X, 30XГСА, 20XНЗА [46, 75—77]. В [75] образцы стали 40X были подвергнуты следующей термообработке: 1) отжигу при температуре $830-850^{\circ}\text{C}$ с охлаждением на воздухе до твердости HRC = 20; 2) закалке с $840-860^{\circ}\text{C}$ с охлаждением в масле и последующим отпуском при $500-550^{\circ}\text{C}$ с охлаждением в масле до твердости HRC = 30—35°C; 3) аналогичной закалке с последующим отпуском при $150-170^{\circ}\text{C}$ до твердости HRC = 50—55. Представленные результаты испытаний (рис. 5.13) говорят о существенном влиянии термообработки на прочность и характер разрушения стали 40X при ударно-волновом нагружении. Это влияние является след-

* Под прочностью здесь и далее для краткости понимается критический уровень разрушающих напряжений $\sigma_{10\text{тк}}$.

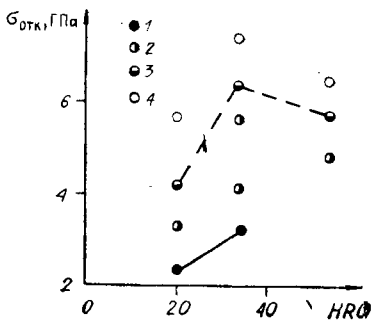


Рис. 5.13. Влияние предварительной термообработки на степень откольного повреждения стали 40X при $t_0 = 1.3 \cdot 10^{-6}$ с.

1 — отсутствие повреждений в сечении образца; 2 — начальная стадия макрповреждений в сечении образца; 3 — начальная стадия макроразрушения, наблюдаемая визуально, после полирования и травления; 4 — полное макроскопическое разрушение образца. Сплошная линия — σ_1 отк (T) штриховая — σ_2 отк (T).

ствием образования определенной структуры материала при каждом виде термообработки. В работе [75], в частности, показано, что оптимальным режимом термообработки конструктивных элементов из стали 40X, предназначенных для работы в условиях ударно-волнового нагружения, является режим закалки с отпуском при 500—550 °С, так как при нем хорошо одновременно сочетаются свойства прочности и пластичности стали.

Авторы работы [76] исследовали влияние термообработки на прочность и характер разрушения сталей 30XГСА и 20ХНЗА при ударно-волновом нагружении. Образцы подвергались двум видам термообработки: отжигу и закалке. Для стали 30XГСА при характерном времени нагружения $\sim 1.3 \cdot 10^{-6}$ с откольная прочность $\sigma_{отк}$ в отожженном состоянии 2.7—3.0, а в термоупрочненном 3.6—3.9 ГПа. Отметим, что в условиях стандартных статических испытаний на одноосное растяжение предел прочности стали после такого вида упрочняющей термообработки равен 1.1 ГПа при относительном удлинении 10%. Откольная прочность стали 20ХНЗА составляет в отожженном состоянии 2.7—3.0, а в термоупрочненном 3.6—3.9 ГПа. В условиях статических испытаний предел прочности этой стали после такой упрочняющей термообработки равен 0.95 ГПа при относительном удлинении 12%. По данным [78], с повышением твердости стали 30XГСА с HRC = 21—23 до 35—36 откольная прочность увеличивается в ~ 1.4 раза как в направлении, параллельном технологической прокатке, так и в направлении, ей перпендикулярном, что хорошо согласуется с результатами работы [76].

Интенсивное ударное нагружение образцов из железа и углеродистой стали приводит к образованию уникальных отколов с очень гладкой поверхностью, получивших название гладких, или зеркальных отколов (рис. 5.14). Это явление, описанное в работах [5, 6, 49—51], стало первым экспериментальным доказательством существования «ударных волн разрежения в веществах, для адиабат Пуассона которых в координатах давление — объем (P, V) характерен выпуклый вверх участок, т. е. с отрицательной второй про-

изводной: $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S < 0$. Адиабата ударного сжатия железа и сплавов на основе α -железа имеет излом в точке фазового перехода

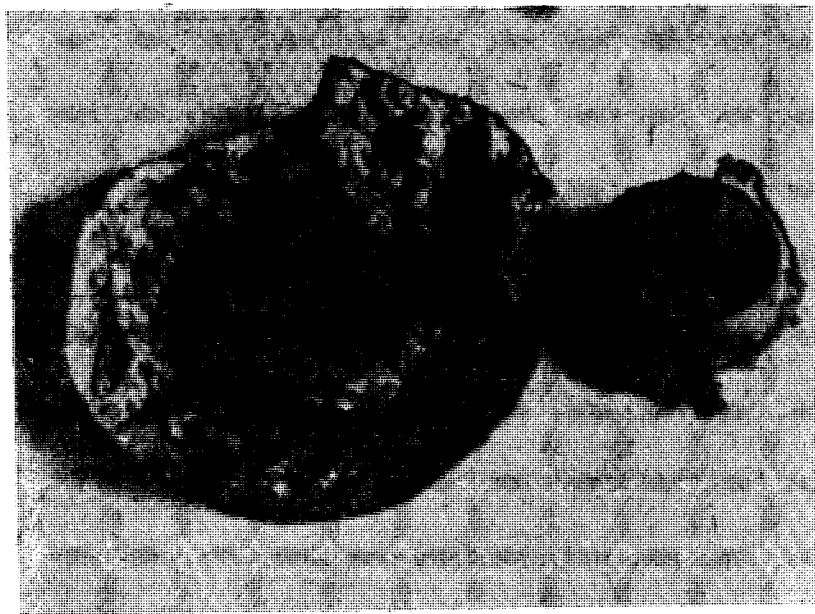


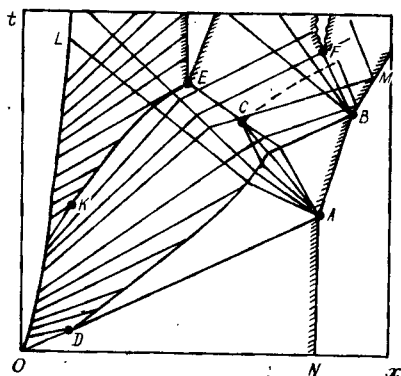
Рис. 5.14. «Гладкий» откол в образце из стали Ст.3 после взрывного нагружения и разгрузки [6].

$\alpha \rightarrow \epsilon$ при давлении ~ 13 ГПа. Аналогичный излом присущ адиабате Пуассона при обратном ($\epsilon \rightarrow \alpha$) фазовом переходе. Этот излом является частным предельным случаем участка адиабаты с отрицательной второй производной, и к нему применим весь анализ образования ударных волн разрежения.

В [52] описаны «гладкие» отколы при нагружении толстостенных стальных труб цилиндрической ударной волной. Такие отколы имеют место при взаимодействии ударных волн разрежения, одна из которых образуется при отражении ударной волны сжатия от свободной поверхности, другая распространяется за фронтом волны сжатия. В координатах x, t на схеме течения (рис. 5.15) OL — траектория движения нагружаемой поверхности образца, NM — траектория движения свободной поверхности, DA — первая ударная волна, DB — вторая ударная волна, KE и CE — ударные волны разрежения. В точке F возникает обычный откол в волнах разрежения, в точке E взаимодействия двух ударных волн разрежения возникает «гладкий» откол.

Подобные откольные явления обнаружены и в других материалах, имеющих адиабату Пуассона типа железа. В обычных (без аномального участка адиабаты) веществах в волнах разрежения давление уменьшается плавно, поэтому при взаимодействии волн разрежения в достаточно широкой области реализуются отрицательные давления, достаточные для зарождения, развития и слияния трещин, приводящих к разрушению — отколу. Замечено, что чем

Рис. 5.15. Волновая картина течения в стальном образце с образованием обычного и «гладкого» отколов при отражении от свободной поверхности системы двух пластических волн сжатия, образовавшихся при фазовом переходе.



уже область отрицательных давлений, т. е. чем уже фронт простых волн разрежения, тем меньшую шероховатость имеет поверхность откола. Это наглядно демонстрирует любой тыльный откол в образце, образующийся при взаимодействии волны разрежения, идущей за ударной волной, с волной, отраженной от свободной поверхности; в области, захваченной боковой разгрузкой, где ширина фронта волны разрежения значительно меньше, откольная поверхность более гладкая. Следовательно, факт образования отколов с очень гладкой поверхностью указывает на то, что при разрушении отрицательные давления существовали в очень узкой зоне. Это однозначно свидетельствует о причинной связи их образования с взаимодействием ударных волн разрежения в железе и стали. Так как характерное время нагружения в области взаимодействия ударных волн разрежения очень мало (определяется шириной фронта волны),

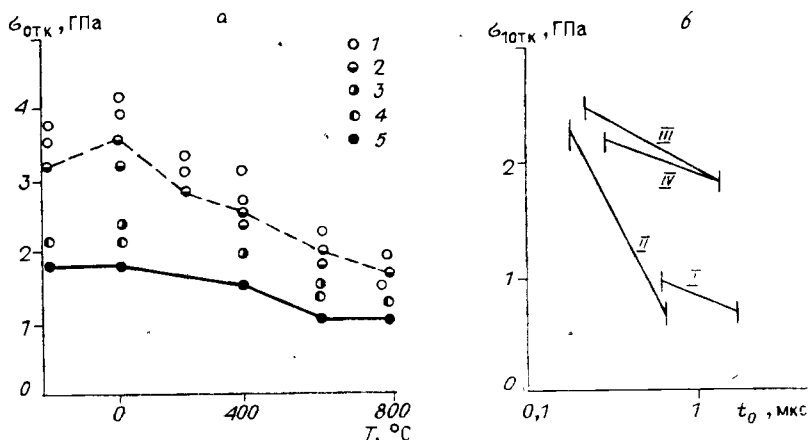
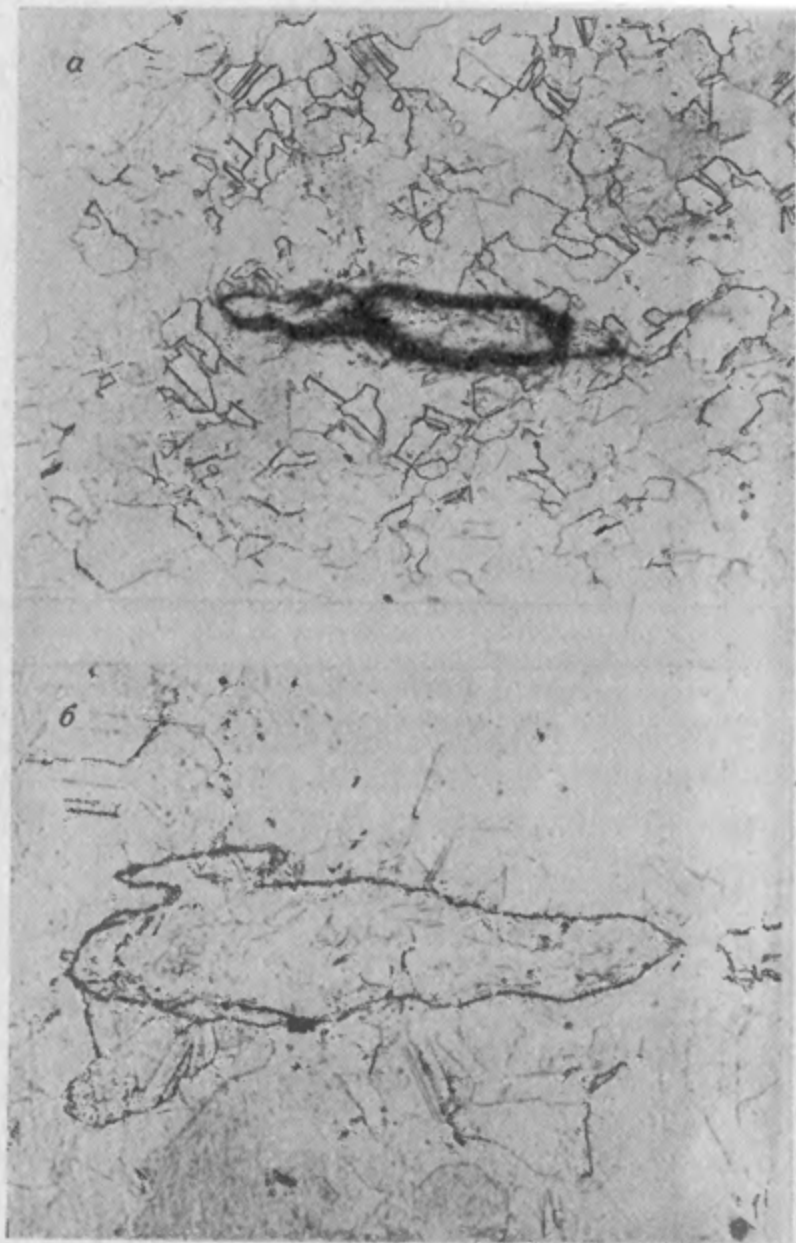


Рис. 5.16. Зависимость напряжения разрушения от начальной температуры (а) и времени действия разрушающегося напряжения (б) для различных образцов меди.

I — медь холоднокатанная (99,99%), твердость НРС = 68 [54]; II — медь ОФНС, отжиг [54]; III — медь ОФНС средней твердости [54]; IV — медь М1 в состоянии поставки [55]. 1 — полное откольное разрушение; 2 — частичное микроскопическое разрушение; 3 — интенсивное микроразрушение; 4 — слабое микроразрушение; 5 — макроскопическая целостность.



следует ожидать, что прочность железа и стали значительно превышает значения откольной прочности (см. рис. 5.9). Расчетный анализ [79] всех экспериментальных данных о «гладких» отколах в железе и стали показал, что при их разрушении в области взаимодействия ударных волн разрежения материал способен выдержать



Рис. 5.17. Зарождение откольного разрушения в меди М1 при длительности импульса $t_0 = 1.3 \cdot 10^{-6}$ с.
 $a - T = 0^\circ\text{C}$, $\sigma_{\text{сх}} = 3.9$ ГПа; $\sigma - T = 600^\circ\text{C}$, $\sigma_{\text{сх}} = 1.9$ ГПа; $b - T = -196^\circ\text{C}$, $\sigma_{\text{сх}} = 3.8$ ГПа.
 Увеличение: $a - 200\times$, $b, в - 500\times$.

весьма значительные, порядка $10-15$ ГПа, растягивающие напряжения, близкие к теоретической прочности. Оцененное по результатам численного моделирования время разрушения составляет $\tau < 10^{-8}$ с.

Медь. В работе [4] методом «готового откола» получены значения прочности образцов из отожженной меди М1 при взрывном нагружении плоской детонационной волной. Откольная прочность составила ~ 3.5 ГПа. Тогда же в работах [7, 11] показано значительное (в 2–3 раза) увеличение прочности при уменьшении характерного времени нагружения. В работах [54, 55, 80, 81] изложены результаты более позднего исследования поведения медных образцов при ударно-волновом нагружении. Результаты опытов представлены на рис. 5.16. Зависимость $\sigma_{\text{отк}}(T)$ (см. рис. 5.16, a) получена при $t_0 = 1.3$ мкс. Сплошная и штриховая линии — критические уровни нагружения $\sigma_{1\text{отк}}$ и $\sigma_{2\text{отк}}$, соответствующие микро- и макроскопическому разрушению. Значение $\sigma_{1\text{отк}}$ возрастает при уменьшении времени нагружения t_0 (см. рис. 5.16, b).

Типичные фотографии микроструктуры образцов в зоне разрушения представлены на рис. 5.17. Во всем исследуемом диапазоне температур характер откольного разрушения меди вязкий. Микро-разрушение начинается на структурных неоднородностях — включениях, границах зерен, двойниках и др. При температурах от 0 (см. рис. 5.17, a) до 600°C (рис. 5.17, $в$) зарождение откола начинается в чечевицеобразных зонах интенсивной пластической дефор-

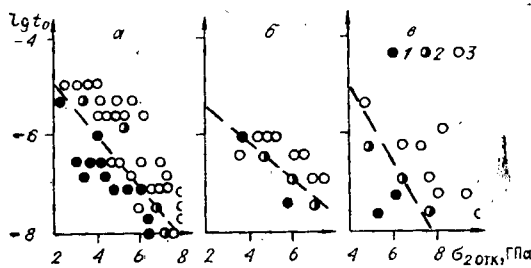


Рис. 5.18. Экспериментальные зависимости $\sigma_{20\%}(t_0)$, характеризующие долговечность металлов в субмикросекундном диапазоне нагружения [59] для Cu (а), Ni (б), Ti (в). 1 — отсутствие разрушения; 2 — наличие отдельных макротрещин; 3 — макроскопическое разрушение.

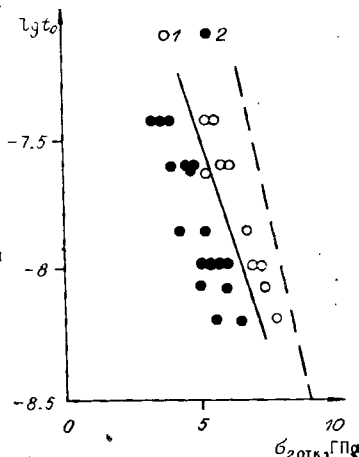


Рис. 5.19. Временная зависимость откольной прочности меди в режиме быстрого разогрева (сплошная линия) [61] и при ударно-волновом нагружении [57] (штриховая).

1 — наличие макротрещин; 2 — отсутствие разрушения.

мадии. При низких температурах ($T = -196^\circ\text{C}$, рис. 5.17, в) откол возникает в виде хрупких трещин по границам зерен. Сопоставление полученных результатов с данными статических испытаний [56] показывает, что высокая степень динамичности нагружения не приводит к заметному изменению характера разрушения меди.

В работах [57—59] представлены результаты экспериментальных исследований явления откола в меди и других металлах при нормальной температуре в субмикросекундном интервале времени нагружения — до 10^{-8} с. Ударники из медной фольги толщиной до 0.017 см разгонялись скользящей детонацией слоя ВВ. Толщина образцов \sim в 3 раза превышала толщину ударников. Для исключения влияния воздуха опыты проводились в вакуумной камере. Определялся критический уровень нагружения, соответствующий макроскопическому разрушению, т. е. $\sigma_{20\%}$ (рис. 5.18). Обращает на себя внимание тот факт, что экстраполяция зависимости $\sigma_{20\%}(t_0)$ к $t_0 = 10^{-12}$ с (т. е. к характерному времени нагружения, при котором по кинетической теории прочности должна реализовываться теоретическая прочность $\sigma_T = (1.6 \div 1/10)E$) дает значение, близкое к теоретической прочности. На микрофотографиях структуры отмечаются достаточно гладкая поверхность откола и отсутствие макротрещин вблизи нее.

Каждому значению зависимости $\sigma_{20\%}$ (рис. 5.19) отвечает критическое значение концентрации тепловой энергии $E_{кр}$, выше которого происходит откольное разрушение. Для меди $E_{кр} \approx 250$ кДж/кг при $t_0 = 3.4 \cdot 10^{-8}$ с и 350 кДж/кг при $t_0 = 10^{-8}$ с. Представленные на рис. 5.19 зависимости показывают некоторое различие между критическими уровнями напряжения $\sigma_{20\%}$ при ударно-волновом нагружении (штриховая линия) и в режиме быстрого объемного

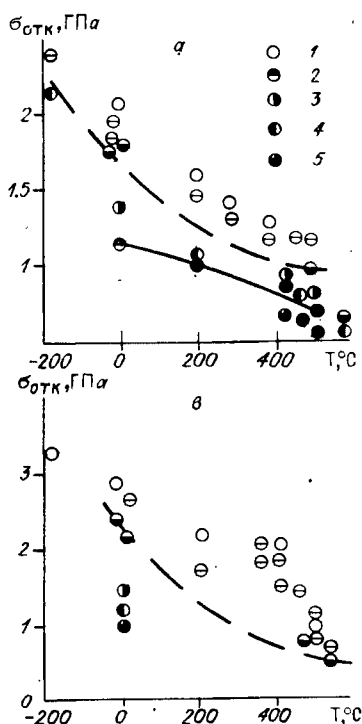


Рис. 5.20. Влияние температуры на откольную прочность алюминиевых сплавов при длительности импульса $t_0 = 1.3 \cdot 10^{-6}$ с.

а — сплав АД1; б — сплав Д16; в — сплав АМг6. 1 — полное откольное разрушение; 2 — частичное откольное разрушение — наличие отдельных макротрещин; 3 — интенсивное микроразрушение (значительное число микротрещин); 4 — единичные микротрещины; 5 — отсутствие микротрещин (увеличение $1000\times$).

разогрева (сплошная), которое можно объяснить особенностями процессов деформирования металла при этих видах нагружения. В случае ударно-волнового нагружения ударный фронт порождает дефекты структуры (дислокации), что увеличивает скорость образования термофлуктуационных разрывов межатомных связей за счет локального характера диссипации энергии при высокоскоростном деформировании металла [60]. Учет локального характера диссипации энергии существен при ударном нагружении. Данное обстоятельство должно сближать зависимости $\sigma_{0TK} = f(\lg t_0)$ в субмикросекундном диапазоне в режиме быстрого объемного разогрева и при соударении пластин.

Алюминий и его сплавы. Широкое использование алюминиевых сплавов в современной технике обусловило проведение многочисленных исследований их прочностных свойств при ударных нагрузках [4, 8, 9, 22, 48, 62—64, 82, 83]. Некоторые результаты этих экспериментов приведены на рис. 5.20, где показаны зависимости от температуры критических уровней нагружения σ_{0TK} (сплошная линия) и σ_{20TK} (штриховая).

Отметим некоторые особенности, связанные с характером откольного разрушения каждого из представленных материалов. На рис. 5.21, а видно, что для алюминия АД1 при $T=0^\circ\text{C}$ и $\sigma_{xx}=1.4$ ГПа в зоне откола поры по форме близки к сферическим, характерный размер ~ 20 мкм. При $T=500^\circ\text{C}$ и $\sigma_{xx}=0.8$ ГПа

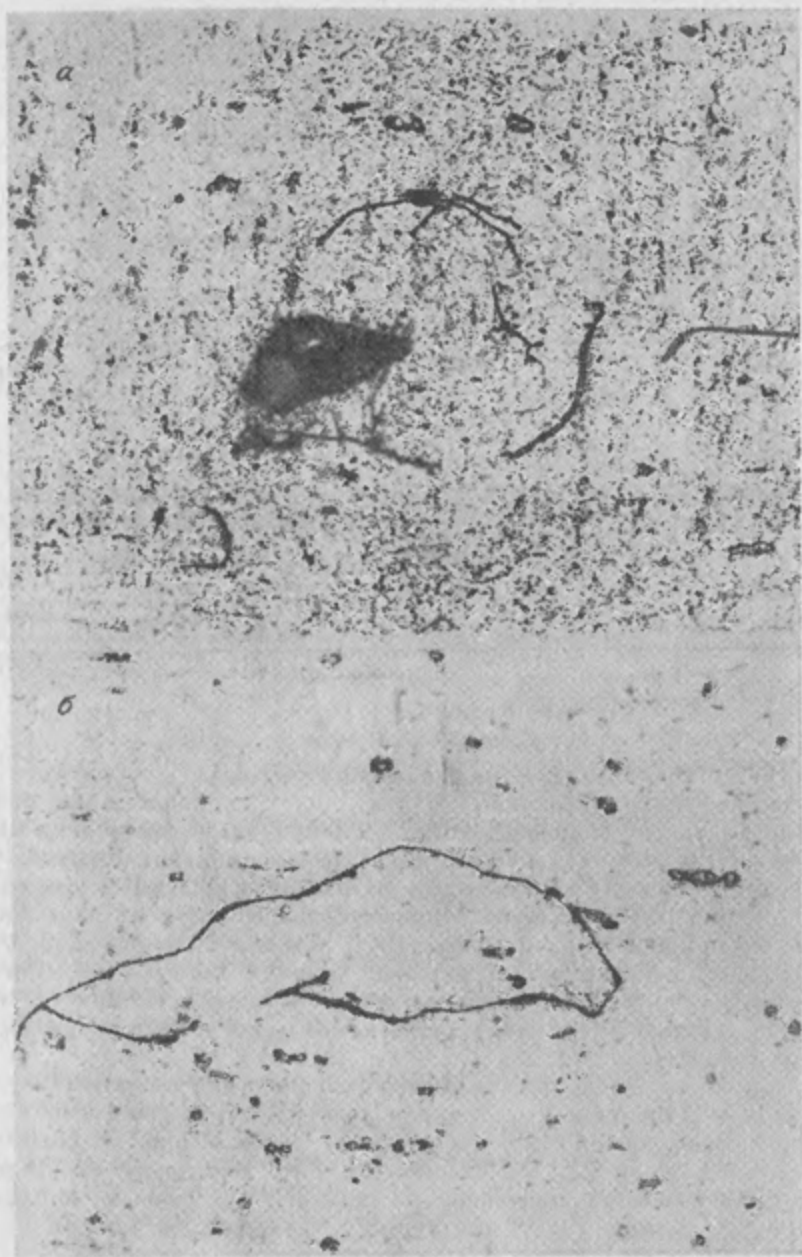


Рис. 5.21. Микроструктура алюминиевого сплава АД1 после нагружения ударной волной и последующей разгрузки. Увеличение 300 \times .
а — $T = 0^\circ\text{C}$, $\sigma_{xx} = 1.4$ ГПа; б — $T = 500^\circ\text{C}$, $\sigma_{xx} = 0.8$ ГПа.

характер разрушения более сложный (см. рис. 5.21, б). Разрушению, как правило, предшествует локальная пластическая деформация материала в небольших чечевицеобразных зонах, вытянутых в направлении прокатки. Дальнейшая стадия процесса разрушения состоит в образовании полостей, их росте и слиянии в небольшие микротрещины. Нагрев существенно не изменяет характера откольного разрушения алюминия.

Для сплава Д16 необходимо отметить такую особенность: при $T = 500^\circ\text{C}$ и $\sigma_{\text{сж}} = 1.3$ ГПа образец после нагружения раскалывается на несколько частей. Аналогичная ситуация наблюдается при $T = -196^\circ\text{C}$, $\sigma_{\text{сж}} = 3.6$ ГПа и при $T = 550^\circ\text{C}$, $\sigma_{\text{сж}} = 0.5$ ГПа. Это указывает на то, что во всем исследованном температурном диапазоне проявляется ослабление материала по направлению прокатки, что и служит причиной хрупкого в макроскопическом смысле разрушения дисковых образцов от изгибающих нагрузок инерционного характера. Такой вывод подтверждается результатами исследования микроструктуры образцов. Следует отметить также, что при повышенных температурах начинается плавление включений, их растворение и распределение по границам вновь образующихся при рекристаллизации зерен. Разрушение материала происходит по этим границам.

Из сопоставления известных в литературе данных для алюминия и его сплавов следует, что критический уровень нагружения $\sigma_{1\text{отк}}$, соответствующий зарождению микроразрушений на уровне 1 мкм и более, для всех исследованных материалов лежит на уровне 1.0–1.2 ГПа, т. е. при характерном времени нагружения $1.3\text{--}1.5 \cdot 10^{-6}$ с значение прочности $\sigma_{1\text{отк}} = 1.0\text{--}1.2$ ГПа типично для большинства алюминиевых сплавов. Небольшие различия значений $\sigma_{1\text{отк}}$ связаны, по-видимому, в большей степени с технологией изготовления и термообработкой, чем с химическим составом сплавов. Точно так же различие критических уровней нагружения, соответствующих макроскопическому расслоению для алюминия ($\sigma_{2\text{отк}} \approx 1.7$ ГПа) и сплавов Д16 и АМг6 ($\sigma_{2\text{отк}} = 2.5$ ГПа), по-видимому, объясняется технологическими причинами. Откольная прочность алюминия и его сплавов вблизи температуры плавления ($\sim 600^\circ\text{C}$) составляет заметную величину — порядка нескольких десятых гигапаскалей.

Сплавы титана. Экспериментальным исследованиям прочности титана при ударно-волновом нагружении посвящены работы [58, 59, 80, 84]. В [80] образцы в виде дисков толщиной 10 мм вырезались из прутка титанового сплава ВТ14 в состоянии поставки. Испытания проводились при температуре $-196 \dots 800^\circ\text{C}$, характерное время нагружения t_0 составляло $\sim 1.3 \cdot 10^{-6}$ с. На рис. 5.22 представлены зависимости $\sigma_{1\text{отк}}(t_0)$ (сплошная) и $\sigma_{2\text{отк}}(T)$ (штриховая линия).

Динамическая прочность сплава ВТ14 при нормальной температуре испытания более чем втрое превосходит его статическую прочность [45]. Высокое значение откольной прочности титанового сплава ВТ6 зарегистрировано методом емкостного датчика в [85]. При ударе алюминиевой пластиной толщиной 2 мм по образцу

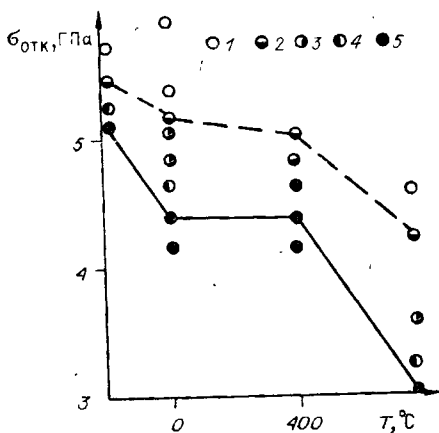


Рис. 5.22. Температурная зависимость откольной прочности титанового сплава ВТ14.

1 — полное разрушение; 2 — частичное разрушение; 3 — интенсивное микроразрушение; 4 — слабое микроразрушение; 5 — отсутствие микроразрушений (увеличение $1000\times$).

из ВТ6 толщиной 9.8—11.7 мм значения $\sigma_{отк} \approx 3.6\text{—}3.9$ ГПа. В случае нормальной начальной температуры в ВТ6 отмечаются хрупкий характер откольного разрушения и слабая зависимость сопротивления отрыву от скорости деформирования.

На рис. 5.23 приведены фотографии микроструктуры сплава ВТ14 после нагружения. При температуре $-196\dots 0^\circ\text{C}$ (рис. 5.23, а) микротрещины размером порядка 100 мкм зарождаются вдоль выделенной α -фазы на границах зерен. Разрушение носит хрупкий характер. При 400°C и выше (см. рис. 5.23, б) разрушение становится вязким. Возникающие поры вырастают в полости произвольной формы. Наблюдение за ростом пор при металлографическом исследовании образцов после нагружения ударными волнами с возрастающей от опыта к опыту амплитудой σ_{xx} дает возможность оценить микроскопическую вязкость μ материала при повышенных температурах. По данным [86],

$$\mu = \frac{Pt_0}{4 \ln(R/R_0)},$$

где R_0 и R — начальное и конечное значение радиусов поры, t_0 — характерное время нагружения. Вычисленная вязкость ~ 200 Па·с соответствует скорости деформации $\dot{\epsilon} \approx 4 \cdot 10^6$ с $^{-1}$.

На рис. 5.18 в координатах $(\sigma_{отк}, \lg t_0)$ представлены результаты серии экспериментов [60, 61], в которых исследовалось макроскопическое разрушение образцов из сплава ВТ14 в диапазоне t_0 от 10^{-5} до 10^{-8} с. Как и для меди, экстраполяция полученной зависимости к $t_0 \approx 10^{-12}$ с (период колебаний атомов) дает величину, близкую к теоретической прочности.

По данным [84], для опытов при нормальной температуре проведена статистическая обработка результатов металлографических наблюдений степени развития микроповреждения в диапазоне напряжений $\sigma_{лотк} - \sigma_{отк}$. Подсчитано количество микродефектов в зоне разрушения. За критерий степени повреждаемости выбрана суммарная длина микротрещин $\sum l_i$ в каждом исследуемом сечении образца. Анализ зависимости $\sum l_i$ от величины растягивающих напряжений в сечении, отстоящем на 6 мм от нагружаемой поверхности (рис. 5.24), показывает, что до напряжения ~ 4.5 ГПа практически не происходит увеличения $\sum l_i$, а при дальнейшем

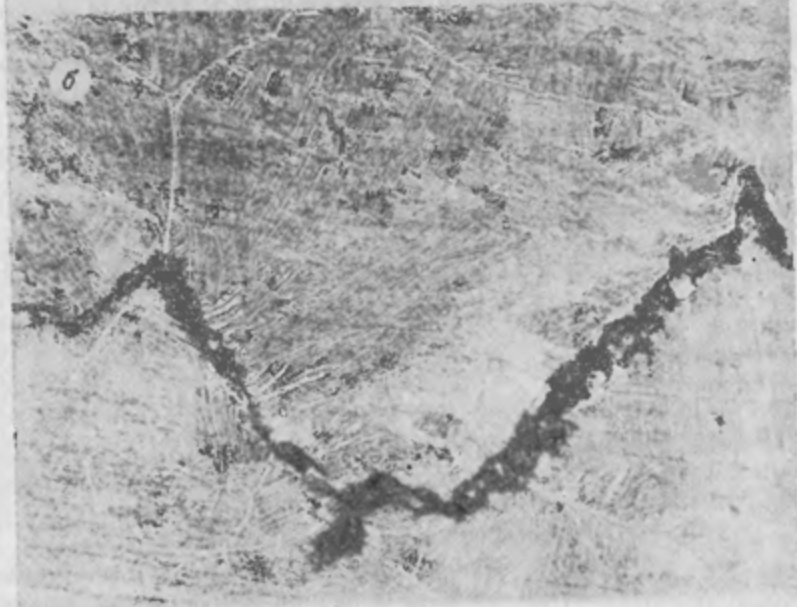
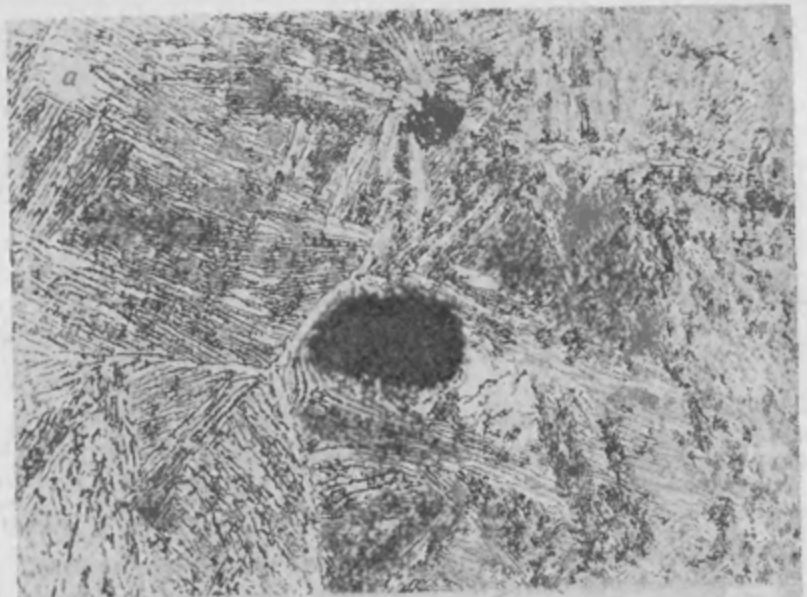


Рис. 5.23. Микроструктура титанового сплава ВТ14 после нагружения ударной волной и последующей разгрузки. Увеличение $500\times$.

a — $T = -196^\circ\text{C}$, $\sigma_{xx} = 5,3 \text{ ГПа}$, $t_0 = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ с}$. Разрушение в виде хрупких трещин по границам зерен (по выделениям α -фазы). *б* — $T = 800^\circ\text{C}$, $\sigma_{xx} = 3,2 \text{ ГПа}$, $t_0 = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ с}$; разрушение в виде пор и полостей.

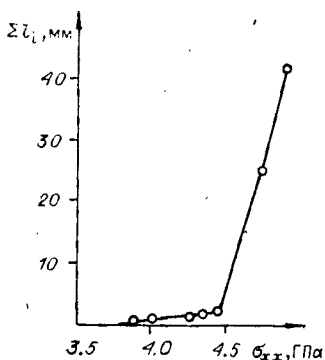


Рис. 5.24. Зависимость степени разрушения образца из титанового сплава ВТ14 при отколе от величины растягивающих напряжений ($t_0 = 1.3 \cdot 10^{-6}$ с).

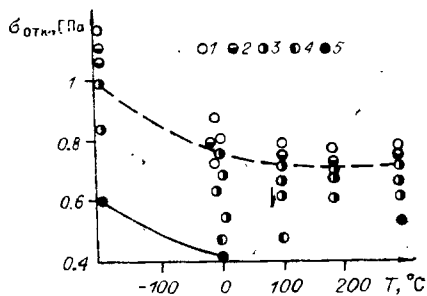


Рис. 5.25. Температурная зависимость откольной прочности свинца при длительности импульса $t_0 = 1.3 \cdot 10^{-6}$ с.

1 — полное откольное разрушение; 2 — частичное откольное разрушение; 3 — интенсивное микроурушение; 4 — слабое микроурушение; 5 — отсутствие разрушения (увеличение $1000\times$). Сплошная линия — $\sigma_{отк}(T)$, штриховая — $\sigma_{отк}^1(T)$.

увеличении напряжений суммарная длина микротрещин резко возрастает. Кроме того, развитие и слияние микротрещин происходит, по-видимому, в соответствии с положениями линейной механики разрушения, согласно которой существующая в хрупком материале трещина начинает быстро распространяться при достижении некоторого критического напряжения у устья трещины, определяющего величину критического коэффициента интенсивности напряжения. (В случае развития вязкого разрушения, происходящего за счет роста пор, положения линейной механики разрушения, очевидно, неприменимы.)

Свинец. Исследованиями [8, 17, 65, 72, 86] откольного разрушения свинца показано существенное (более чем на порядок) превышение динамической прочности свинца при отколе по сравнению с прочностью при статическом нагружении. Это хорошо согласуется с отмеченной в [8] тенденцией к увеличению отношения прочности при отколе к статической прочности при повышении пластичности материала. По данным [86], зависимости критических уровней нагружения $\sigma_{1отк}$ и $\sigma_{2отк}$ от температуры для свинца С2 заметно отличаются друг от друга (рис. 5.25).

Металлографическое изучение структуры испытанных образцов показало, что начальная стадия откольного разрушения свинца во всем температурном диапазоне связана с зарождением и ростом пор, форма которых близка к сферической. Зарождение пор (рис. 5.26) происходит, как правило, в местах возможной концентрации микронапряжений таких, как границы зерен и двойников, но наблюдается и внутри зерен, по-видимому, в местах расположения дефектов структуры, не выявляемых посредством оптической микроскопии. Минимальный и максимальный размеры пор при всех температурах испытания равны примерно 1 и 100 мкм соответственно. При более высоких уровнях нагружения происходит главным образом увеличение количества пор на единицу площади и основным

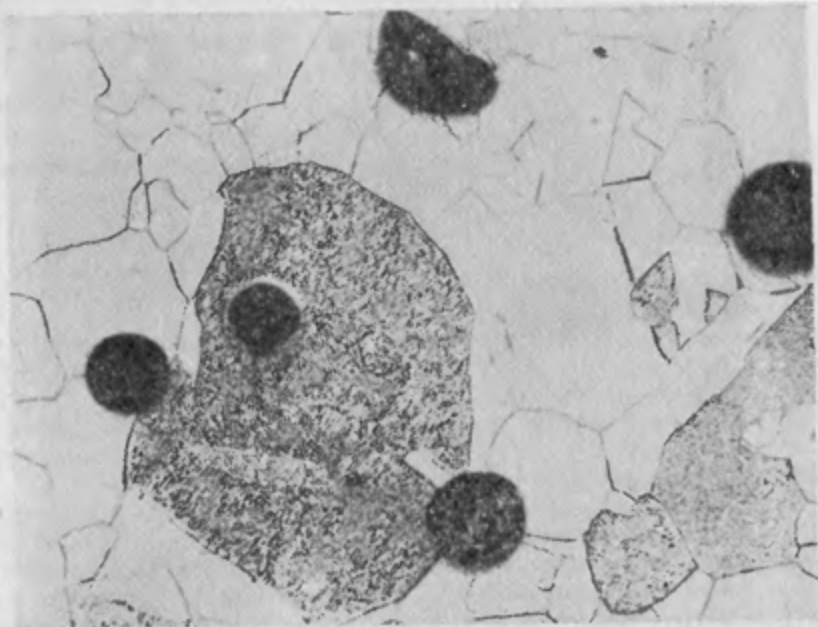


Рис. 5.26. Зарождение откольного разрушения в свинце в виде сферических пор при длительности импульса $t_0 = 1.3 \cdot 10^{-6}$ с, температуре $T = 0^\circ\text{C}$ и напряжении в ударной волне $\sigma_{xx} = 0.6$ ГПа. Увеличение $200\times$.

процессом, ответственным за разрушение, становится коалесценция. При всех температурах испытаний большинство откольных повреждений сосредоточено в зоне шириной около 1 мм. В работах [8, 17, 65] показано, что величина разрушающих напряжений в свинце имеет тенденцию к увеличению при уменьшении характерного времени нагружения. Воспользовавшись предложенным в [87] аналитическим методом расчета роста пузырька в вязкой жидкости под действием кратковременного импульса отрицательного давления, можно оценить значение динамической вязкости свинца по данным изучения роста пор при различных уровнях нагружения. По результатам расчетов [86] с использованием данных металлографического исследования микроструктуры свинца микроскопическая динамическая вязкость свинца составила $\mu \approx 30$ Па·с. При этом скорость деформации $\dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^6$ с $^{-1}$.

Никель. Экспериментальные данные об откольной прочности никеля приведены в работах [46, 58, 59, 74, 80]. Зависимости величин критических уровней напряжений $\sigma_{1отк}$ (сплошная линия на рис. 5.27) и $\sigma_{2отк}$ (штриховая) от температуры, полученные в [81], не отличаются от аналогичных зависимостей для других металлов (ср. рис. 5.27 и 5.6). Характерные фотографии микроструктуры в зоне откола представлены на рис. 5.28. Из данных металлографического анализа следует, что характер разрушения образцов вязкий, обусловленный возникновением, ростом и слиянием полостей, обра-

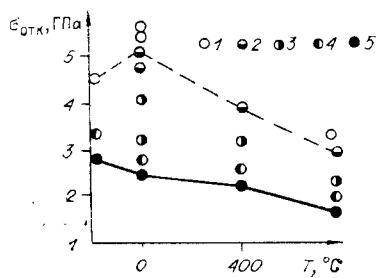


Рис. 5.27. Влияние температуры на откольное разрушение никеля при $t_{0\#} = 1.3 \cdot 10^{-6}$ с. Усл. обозн. те же, что и на рис. 5.6.

зующихся на структурных неоднородностях. Прочность никеля, соответствующая уровню зарождения откольных повреждений, проявляет довольно слабую зависимость от температуры (см. рис. 5.27). Так же, как для меди и титана, экстраполяция этой зависимости $\sigma_{2\text{отк}}$ (см. рис. 5.18, б) к $t_0 \approx 10^{-12}$ с дает значение растягивающего напряжения для никеля, близкое к теоретической прочности.

Полимеры. Результаты исследования откольного разрушения некоторых полимеров приведены в работах [62, 88—95]. Наиболее изученным из них является плексиглас. Представим данные экспериментального исследования его поведения при интенсивном импульсном нагружении [92, 93]. Выявленные закономерности в разной мере присущи другим полимерным материалам. Характерное время нагружения $\sim 1.3 \cdot 10^{-6}$ с, температурный интервал: $-196 \dots 250^\circ\text{C}$. Результаты испытаний образцов из плексигласа (марки ТОСП) и фторопласта приведены на рис. 5.29. Существенным отличием от поведения металлов и сплавов является повышение откольной прочности плексигласа при температуре $\sim 110^\circ\text{C}$, т. е. вблизи температуры плавления. Такая зависимость прочности отмечена также для ряда других полимерных материалов. При нормальной температуре в образцах из плексигласа после импульсного нагружения напряжением 0.17 и 0.20 ГПа относительная площадь поврежденного материала S составляла ~ 2 и 60 % соответственно; а при нагружении давлением 0.27 ГПа происходит полное отслаивание откольного слоя. С повышением температуры испытания до 110°C увеличивается критическое значение напряжения: при 0.23 ГПа S составляет 5 %, а при 0.26 ГПа происходит отслоение около 70 % сечения образца. Таким образом, нагрев исследованных в указанных работах полимерных материалов до температур, превышающих температуры их эксплуатации в статических условиях, не снижает прочности полимеров при действии интенсивных механических нагрузок малой длительности. Фактически во всех изученных полимерах повреждения представляют собой дискообразные трещины. Измеряя радиус трещины r и зная характерное время нагружения t_0 , можно оценить среднюю скорость трещины $U = r/t_0$. Для плексигласа при нормальной температуре $U \approx 330$ м/с, при повышении температуры скорость распространения трещин уменьшается.

Жидкости. Известно, что при высокоскоростном нагружении жидкости проявляют свойство хрупко разрушаться, т. е. ведут

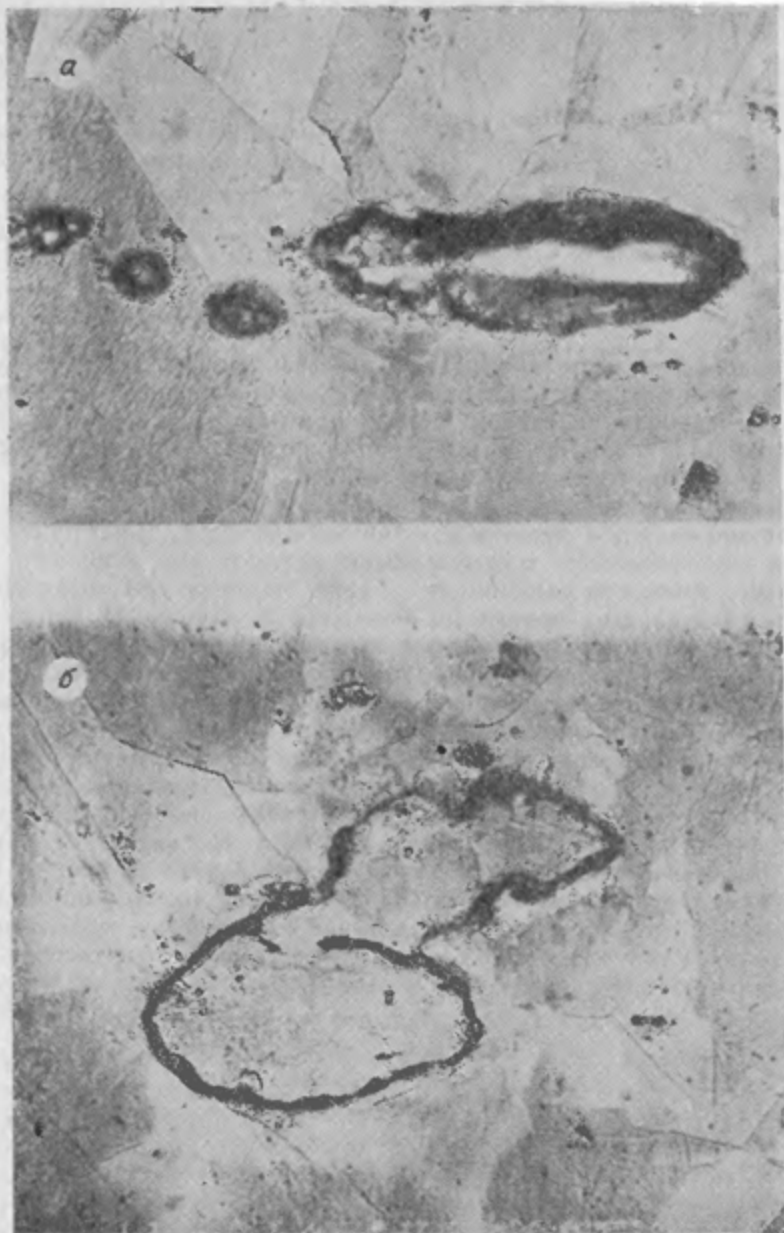


Рис. 5.28. Микроструктура никеля после нагружения ударной волной и последующей разгрузки при $t_0 = 1.3 \cdot 10^{-6}$ с. Увеличение $500\times$.
 Напряжение в волне и начальная температура: а — $\sigma_{xx} = 5.2$ ГПа, $T = 0^\circ\text{C}$; б — $\sigma_{xx} = 3.3$ ГПа, $T = 800^\circ\text{C}$.

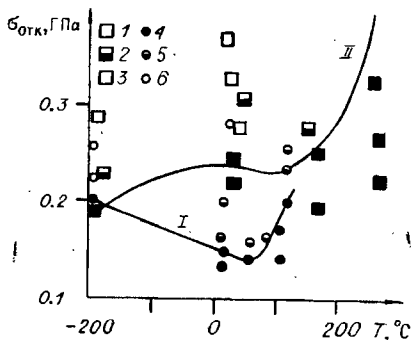


Рис. 5.29. Зависимость откольной прочности $\sigma_{откл}$ (сплошная линия) от температуры для плексигласа (I, 1—3) и фторопласта (II, 4—6).

I, 4 — отсутствие визуально наблюдаемого разрушения; 2, 5 — частичное откольное разрушение; 3, 6 — полное откольное разрушение.

себя подобно твердым телам [1]. В ряде работ определена величина откольной прочности жидкостей при ударно-волновом нагружении при комнатной температуре: в воде и этиловом спирте. [96, 97], глицерине [97—99], ртути [100]. Влияние температуры на откольную прочность глицерина исследовалось в [101]. Показано, что прочность изученных жидкостей при ударно-волновом нагружении достаточно велика — десятки и сотни мегапаскалей. По порядку величин это согласуется с отмеченными результатами измерения откольной прочности алюминия вблизи температуры плавления. Экспериментальные данные о зависимости откольной прочности глицерина от температуры аппроксимированы двумя кривыми, которые, по мнению авторов [101], отвечают двум механизмам разрушения: в области температур, меньших 260 К, разрушение имеет хрупкий характер, откольная прочность не зависит от температуры и составляет величину ~ 260 МПа; в области температур, больших 260 К, разрушение вязкое, сопровождается образованием и ростом пузырьков, откольная прочность быстро уменьшается с ростом температуры и при 320 К составляет 40 МПа. По характеру разрушения в этой области температур глицерин похож на свинец. Полученные в результате анализа [102] температурные зависимости откольной прочности глицерина показали, что энергия, необходимая для разрушения жидкостей при ударно-волновом нагружении, на 1—2 порядка, меньше, чем для металлов.

Глава 6

СДВИГОВАЯ ПРОЧНОСТЬ УДАРНО СЖАТЫХ МЕТАЛЛОВ

§ 1. Деформирование металлов в ударных волнах и волнах разгрузки

Наличие у металлов прочностных свойств существенно влияет на их поведение в динамических процессах. Вещество ведет себя упруго при высокоскоростном деформировании в ударных волнах до тех пор, пока разность главных напряжений не превосходит ди-

намического предела текучести. С дальнейшим повышением амплитуды ударной волны в материале вначале развиваются пластические деформации, а затем он плавится. У свинца плавление наступает при напряжении $\sigma_{xx} \approx 30-40$ ГПа, у алюминия при 120—150 ГПа, у меди при 250 ГПа, у железа при 300 ГПа. Если σ_{xx} выше напряжения плавления на ударной волне, вещество становится жидкостью с существенно иными прочностными свойствами.

При макроскопическом рассмотрении вещество, по которому распространяется плоская ударная волна, претерпевает одномерную деформацию ϵ_{xx} в направлении распространения волны, совпадающем с направлением нормали к поверхности ударного разрыва. В плоскости волнового фронта деформации ϵ_{yy} , ϵ_{zz} равны нулю. Такой же характер деформации при макроскопическом подходе имеет место при расширении ударно сжатого материала в одномерных волнах разгрузки. Совместим ось x с направлением нормали к фронту ударной волны, которая, в свою очередь, совпадает с одним из главных направлений тензоров напряжений и деформаций. Соответственно два других главных направления лежат в плоскости фронта. Для одномерной деформации в ударной волне, следовательно, имеем

$$\epsilon_1 \neq 0, \epsilon_2 = 0, \epsilon_3 = 0. \quad (6.1)$$

Из уравнений (1.27), (2.199) и (6.1), полагая, что среднее напряжение и давление положительны при сжатии твердого материала, получаем связь между главными напряжениями, давлением и динамическим пределом текучести Y_d в виде

$$\sigma_1 = P + \frac{2}{3} Y_d, \quad (6.2)$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = P - \frac{1}{3} Y_d. \quad (6.3)$$

Из (6.2) и (6.3) следует, что при ударно-волновом нагружении главное нормальное напряжение σ_1 превышает среднее напряжение на величину $\frac{2}{3} Y_d$, а главные напряжения σ_2 и σ_3 в плоскости фронта ударной волны меньше среднего напряжения на величину $\frac{1}{3} Y_d$. В связи с этим отметим, что в экспериментальных исследованиях ударно-волновой сжимаемости определяется нормальная составляющая напряжения σ_1 , но не давление P . Различие между σ_1 и P сохраняется до состояния плавления на ударной волне и становится малым, когда вещество плавится.

Максимальные касательные (сдвиговые) напряжения τ в однородном веществе действуют в плоскостях, расположенных под углом 45° к плоскости фронта ударной волны:

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \pm \frac{Y_d}{2}. \quad (6.4)$$

В упругих областях сжатия и расширения связь между компонентами напряжения и деформации определяется обобщенным

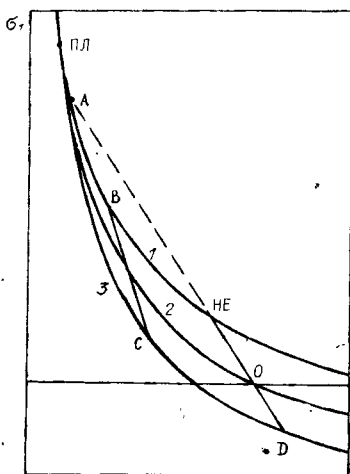


Рис. 6.2. Деформирование упругопластической среды в плоскости главных напряжений σ_1, σ_2 .

Рис. 6.1. Сжатие и разгрузка упругопластической среды в переменных σ_1, V . 1 — линия пластической нагрузки; 2 — кривая всестороннего сжатия; 3 — линия пластической разгрузки.

законом Гука (2.181). Из выражений (2.181) и (6.1) вытекает связь между главными напряжениями:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_1, \quad (6.5)$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{1-2\mu}{1-\mu} \sigma_1. \quad (6.6)$$

Обратимся к идеализированной схеме поведения упругопластических материалов в процессах ударного сжатия и последующего расширения [1, 2] (рис. 6.1). Рассмотрим процесс ударного сжатия среды, находящейся в состоянии $P=0, \sigma_i=0, V=V_0$. При малых напряжениях $\sigma_1 < \sigma_{HE}$ деформации вещества происходят упруго вдоль отрезка ONE на рис. 6.1. С увеличением напряжения выше значения σ_{HE} происходит пластическое деформирование вещества вплоть до точки плавления ПЛ. При $\sigma_1 = P \geq \sigma_{ПЛ}$ металл ведет себя как жидкость. Величина σ_{HE} , называемая динамическим пределом упругости Гюгони, связана с Y_d соотношением, следующим из (6.6):

$$\sigma_{HE} = \frac{1-\mu}{1-2\mu} Y_d. \quad (6.7)$$

В области напряжений $\sigma_{HE} < \sigma_1 < \sigma_{ПЛ}$ на ударной адиабате (см. рис. 6.1) при фиксированном удельном объеме разница между главными напряжениями и давлением определяется уравнениями (6.2) и (6.3), где Y_d является функцией состояния вещества в ударно сжатом состоянии. Наличие сдвиговой прочности существенно влияет на процессы как ударного сжатия, так и расширения ударно сжатого тела. Твердые тела, находящиеся в сжатом состоянии в области пластического течения, при изменении направления

деформирования разгружаются упруго (отрезок BC на рис. 6.1). В стадии упругого расширения, если пренебречь эффектом Баушингера, разность главных напряжений $\sigma_1 - \sigma_2$, равная первоначально Y_d , меняет свой знак на обратный и становится равной $-Y_d$. Из соотношений (6.2), (6.3) и (6.6) следует, что амплитуда упругой волны разгрузки $\Delta\sigma_{\text{упр}} = \sigma_1(B) - \sigma_1(C)$ связана с динамическим пределом текучести Y_d следующей зависимостью:

$$Y_d(B) - Y_d(C) = \frac{1 - 2\mu}{1 - \mu} (\sigma_1(B) - \sigma_1(C)). \quad (6.8)$$

Часто предполагают, что состояния $\sigma_1(B)$ и $\sigma_1(C)$ удалены от состояния среднего напряжения на одну и ту же величину по напряжению, и считают [3], что динамический предел текучести Y_d в состоянии за фронтом ударной волны приблизительно равен половине суммы динамических пределов текучести в точках B и C , т. е.

$$Y_d \approx \frac{1}{2} (Y_d(B) + Y_d(C)). \quad (6.9)$$

Из (6.8) и (6.9) находим часто используемую зависимость:

$$\Delta\sigma_{\text{упр}} = \frac{2(1 - \mu)}{1 - 2\mu} Y_d. \quad (6.10)$$

Упругая разгрузка, которая началась в точке B (см. рис. 6.1), заканчивается в точке C . При дальнейшем увеличении V разгрузка происходит пластически вдоль траектории CD .

Сложный вид ударной адиабаты нагрузки приводит к сложной волновой картине. При $\sigma_1 \leq \sigma_{\text{НЕ}}$ в веществе распространяется упругая ударная волна. При $\sigma_1 \geq \sigma_A$ в веществе распространяется пластическая ударная волна. Если $\sigma_{\text{НЕ}} < \sigma_1 < \sigma_A$, то ударная волна расщепляется на упругую ударную волну с напряжением на фронте $\sigma_1 = \sigma_{\text{НЕ}}$ и на пластическую ударную волну, на фронте которой напряжение скачком меняется от $\sigma_1 = \sigma_{\text{НЕ}}$ до $\sigma_{\text{НЕ}} < \sigma_1 < \sigma_A$. Точка A определяется как точка пересечения ударной адиабаты с лучом ONE .

Следуя [3], проанализируем описанные процессы в плоскости σ_1, σ_2 . Исключив P в (6.2), (6.3), получим

$$\sigma_1 = \sigma_2 + Y_d.$$

На рис. 6.2 биссектриса $ОПЛ$ соответствует гидростатическому напряженному состоянию с $Y_d = 0$. В точке $ПЛ$ наступает плавление и $\sigma_1 = \sigma_2 = P$. Кривые $ОВПЛ$ и $ОСПЛ$ представляют собой предельные поверхности текучести. Обычно считают [3], что при напряжениях однократного ударного сжатия, превышающих упругий предел Гюгонио $\sigma_{\text{НЕ}}$, состояния среды лежат на верхней предельной поверхности пластического течения. Поведение ударно сжатой среды относительно дальнейшего направления деформации различно. Если последующая деформация совпадает с направлением предшествующей деформации, как это имеет место при последовательном сжатии вещества двумя ударными волнами, первоначальное состоя-

ние удаляется в сторону больших σ_1 и σ_2 по верхней кривой предельной поверхности текучести вправо и вверх от точки B (см. рис. 6.2). Если последующая деформация имеет знак, противоположный предшествующей деформации, как это имеет место при расширении ударно сжатого материала, то первоначальное состояние B упруго разгружается до состояния C на нижней предельной поверхности пластического течения (см. рис. 6.2). Последующее обратное пластическое течение при разгрузке происходит по нижней кривой влево и вниз от точки C .

Результаты теоретических исследований, свидетельствующие о сложном характере реологического поведения материалов при высокоскоростном деформировании, полностью подтверждаются экспериментально. Особенности ударно-волнового нагружения металлов заключаются не только в высокой скорости деформирования и возможных структурных изменениях, но и в повышении температуры, которое особенно заметно при высоких напряжениях σ_1 . Оценки приращения температуры в ударных волнах по уравнениям состояния (см. гл. 2) дают следующие приращения температуры: при $\sigma_1 = 50$ ГПа $\Delta T = 400^\circ\text{C}$ для Fe, 300°C для Cu и 770°C для Al; при $\sigma_1 = 100$ ГПа $\Delta T = 1.5 \cdot 10^3^\circ\text{C}$ для Fe, $1.3 \cdot 10^3^\circ\text{C}$ для Cu и $3 \cdot 10^3^\circ\text{C}$ для Al. Зависимость прочности металлов от скорости деформирования проявляется различным образом. Механические характеристики меди (отжиг) остаются неизменными при растяжении со скоростью $\dot{\epsilon} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ (статические испытания) и высокоскоростной деформации со скоростью $\dot{\epsilon} = (5 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^3) \text{ с}^{-1}$ [4]. Незначительное повышение условного предела текучести $Y_{0.2}$ зарегистрировано в той же работе при таких же условиях испытаний для АМгб (отжиг) при растяжении и для АМгб в состоянии поставки при сжатии. В то же время для твердой меди в пластической области отмечается повышение предела текучести примерно на 40 % при сравнении результатов высокоскоростной деформации сжатия ($\dot{\epsilon} = 3 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$) и статического сжатия [4].

Согласно [5], эффекты скорости деформирования играют заметную роль в области сравнительно низких напряжений — до нескольких гигапаскалей. В области напряжений $\sigma_1 \geq 10$ ГПа и $\dot{\epsilon} \geq 10^5 \text{ с}^{-1}$ эти эффекты становятся незначительными и ими можно пренебречь при построении определяющих уравнений. Быстрое уменьшение эффектов скорости деформации с повышением амплитуды напряжений σ_1 в [5] связывается с ростом температуры ударно сжатого материала. По аналогии с жидкостью, где эффекты, обусловленные вязкостью, экспоненциально падают с повышением температуры, можно ожидать подобной сильной температурной зависимости эффектов деформации также для ударно сжатых металлов.

Изменение прочностных свойств меди и свинца вдоль ударной адиабаты объясняется в [6] зависимостью динамического предела текучести от давления и температуры. В [4] считается, что помимо

давления и температуры на прочность оказывает влияние скорость деформации.

Как отмечалось в гл. 2, в упругопластической области свойства металлов характеризуются пределом текучести Y_d , модулем Юнга E , модулем объемного сжатия K , модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона μ . Последние четыре характеристики взаимосвязаны, так что достаточно задать из четверки величин E , K , G и μ любые две. Ни одна из них непосредственно в ударно-волновых экспериментах не измеряется. Из соотношений (2.187) — (2.193) вытекает, что каждая из этих характеристик выражается через упругую продольную c_L и объемную c_B скорости звука:

$$K = \rho c_B^2, \mu = \frac{3 - \left(\frac{c_L}{c_B}\right)^2}{3 + \left(\frac{c_L}{c_B}\right)^2},$$

$$E = \rho c_L^2 \frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{(1-\mu)}, G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (6.11)$$

Для таких металлов, как алюминий, медь, железо, упругая и объемная скорости звука измерены в широком диапазоне напряжений σ_1 , что позволяет проследить ход зависимостей E , K , G и μ вдоль ударной адиабаты. Модуль всестороннего сжатия K и коэффициент Пуассона μ в области твердого состояния монотонно растут с повышением амплитуды ударной волны, а модуль сдвига G вначале возрастает с ростом σ_1 , а затем начиная с некоторого значения σ_1^* резко уменьшается с дальнейшим ростом σ_1 , обращаясь в нуль при $\sigma_1 = \sigma_{пл}$ [3]. В этом состоянии коэффициент Пуассона $\mu = 0.5$.

§ 2. Модели

пластического деформирования металлов в ударных волнах

Для описания сопротивления металлов пластической деформации при высокоскоростном деформировании в ударных волнах и волнах расширения разработан ряд моделей, в которых тензоры напряжений, деформаций и скоростей деформации расщепляются на шаровую и девиаторную составляющие. Способы описания шаровой составляющей, или построение гидродинамического уравнения состояния описаны в гл. 2. Различные определяющие уравнения отличаются друг от друга формой представления девиатора напряжений и используемыми при этом представлениями о механизме пластической деформации.

По этому признаку разработанные модели могут быть разбиты на две группы. К первой относятся модели, в которых предполагается, что девиаторная составляющая напряжения не зависит от скорости деформаций. Простейшим представителем этой группы мо-

делей служит модель идеального упругопластического тела, согласно которой в состоянии выше предела текучести сдвиговое напряжение остается постоянным. В плоскости σ_1, V при напряжениях, равных или превосходящих упругий предел Гюгонио $\sigma_{не}$, ударная адиабата упругопластической среды по этой модели расположена параллельно кривой $P(V)$ и отстоит от нее на постоянную положительную величину, равную $\frac{2}{3} Y_d$.

Более адекватное соответствие с экспериментальными результатами достигается введением в упомянутую модель зависимости предела текучести от значения пластической деформации либо от среднего напряжения. Часто при этом используется линейная связь между Y_d и указанными переменными. Область применимости этой модели весьма ограничена, поскольку она учитывает лишь один из возможных факторов, влияющих на процесс пластического деформирования.

Более полная модель определяющего уравнения, применимая при высоких скоростях деформации в ударных волнах, предложена в [5]. Определяющее соотношение для динамического предела текучести в этой работе представляется функцией приведенной пластической деформации ε_p , давления P , приращения температуры ΔT и относительного сжатия δ в виде

$$Y_d = Y_0 f_1(\bar{\varepsilon}_p) (1 + f_2(P) + f_3(\Delta T)). \quad (6.12)$$

Функция $f_1(\bar{\varepsilon}_p)$ учитывает упрочнение за счет работы пластического деформирования и имеет ограничение по своей величине $Y_0 f_1(\bar{\varepsilon}_p) \leq Y_{\max}$, где Y_0 относится к упругому пределу Гюгонио, а значение Y_{\max} отвечает максимальной величине, наблюдаемой экспериментально при нормальных условиях ($P = 10^{-4}$ ГПа, $T = 300$ К), например, при ударе по нити. По данным [5], $Y_{\max} = 0.68$ ГПа для алюминия, 0.48 ГПа для магния, 0.64 ГПа для меди и 4.0 ГПа для вольфрама.

Аналитические выражения для отдельных функций f_i в уравнении (6.12) имеют вид

$$f_1(\bar{\varepsilon}_p) = (1 + \beta(\bar{\varepsilon}_p - \bar{\varepsilon}_{p0}))^n, \quad (6.13)$$

где β и n — параметры упрочнения,

$$f_2(P) = \frac{\left(\frac{\partial Y}{\partial P}\right)_T}{Y_0} \cdot \frac{P}{\delta^{1/3}}, \quad (6.14)$$

$$f_3(\Delta T) = \frac{\left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_P}{Y_0} \Delta T. \quad (6.15)$$

Начальная эквивалентная пластическая деформация $\bar{\varepsilon}_{p0}$ при нормальных условиях обычно равна нулю.

Зависимость модуля сдвига G от давления и температуры описывается соотношением

$$G = G_0 \left(1 + \frac{\left(\frac{\partial G}{\partial P} \right)_T}{G_0} \frac{P}{\delta^{1/3}} + \frac{\left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_P}{G_0} \Delta T \right). \quad (6.16)$$

В выражениях (6.15) и (6.16) производные предела текучести и модуля сдвига по температуре отрицательны, т. е. с ростом T при других постоянных параметрах значения Y и G уменьшаются. Следует заметить, что в [5] параметры определяющих соотношений для Y и G подобраны для описания экспериментальных данных в низкой области напряжений, что дает лишь приближенное значение этих величин при переходе к высоким напряжениям. Как отмечается в [5], при высоких напряжениях влияние P и T оказывается много сильнее упрочнения пластического деформирования.

Рассмотренные модели упругопластической среды предполагают, что при ударном сжатии состояние материала характеризуется максимально возможным касательным напряжением и лежит на верхней предельной поверхности текучести.

Следовательно, местная скорость слабых ударных волн, распространяющихся по ударно сжатой среде, должна быть равна объемной скорости c_v звука в сжатом материале. Однако экспериментальные результаты показывают, что в меди, дюралюминии, техническом алюминии АД1 [7] и алюминии 6061-T6 [8] скорость слабых ударных волн вторичного сжатия соответствует упругой скорости звука в ударно сжатом материале. Не исключено [7], что во фронте ударной волны имеет место бездислокационный сверхкритический сдвиг, а в волнах разгрузки и вторичного сжатия деформирование происходит по дислокационному механизму и может сопровождаться упрочнением.

Рассматриваемое явление в рамках упругопластической модели по-иному трактуется в [8]. Предполагается, что реакция образца на однократное ударно-волновое нагружение может быть смоделирована ансамблем большого числа N одномерных упругопластических материальных элементов, для каждого из которых сдвиговое напряжение имеет свое значение. Таким образом, после того как в материале при первичном сжатии достигается равновесное состояние, в нем устанавливается распределение сдвиговых напряжений. Их максимальная величина не превышает предельного значения τ_{\max} . Поскольку в состоянии первичного ударного сжатия не для всех материальных «элементов» сдвиговое напряжение $\tau = \tau_{\max}$ и для каждого элемента τ имеет свое значение, в волне разгрузки будут наблюдаться различные уровни продольных напряжений. Вследствие этого в волне разрежения не появляется резкого перехода из упругой области в пластическую область деформации.

При повторном нагружении материальные элементы будут деформироваться упруго до $\tau = \tau_{\max}$, что и наблюдается в опытах. В [8] использовалась функция распределения материальных элементов по напряжению τ в виде нормированного соотношения

$$N(\tau - \tau_m) = \frac{1}{\beta (2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(\tau - \tau_m)^2}{2\beta^2}\right), \quad (6.17)$$

где β описывает ширину функции распределения, τ_m представляет собой среднее сдвиговое напряжение. В состоянии первичного сжатия величина τ_m принимается равной прикладываемому напряжению. Применение распределения (6.17) позволило вполне удовлетворительно описать экспериментальные профили массовой скорости при разгрузке и повторном сжатии алюминия 6061-T6 [8].

Описанные модели упругопластической среды, хотя и не согласуются в полной мере с экспериментальными результатами, благодаря своей простоте и наглядности широко используются в расчетах элементов конструкций при кратковременных импульсных нагрузках.

Для более полного и адекватного описания поведения металлов при ударно-волновом нагружении и разгрузке из ударно сжатого состояния широко применяются различные релаксационные модели упругопластического тела, в которых предполагается, что девиаторная составляющая напряжения зависит от скорости сдвиговой пластической деформации. Эти модели относятся ко второй группе определяющих уравнений. Для релаксационных моделей определяющие уравнения рассматривались и обсуждались в работах [9—22]. Остановимся далее на основных особенностях этих моделей.

Предположим, что только компоненты упругой деформации способствуют изменению напряжения в соответствии с законом Гука в дифференциальной форме для изотропного твердого тела

$$d\sigma_{ij} = 2Gd\epsilon_{ij}^{\text{уп}} + \lambda\delta_{ij}d\epsilon_{kk}, \quad (6.18)$$

где G и λ — параметры Ламе. Подставляя в выражение (6.18) соотношения для полной деформации $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{\text{уп}} + \epsilon_{ij}^{\text{пл}}$ и пластической деформации $\epsilon_{kk}^{\text{пл}} = 0$, получаем

$$d\sigma_{ij} - 2Gd\epsilon_{ij} - \lambda\delta_{ij}d\epsilon_{kk} = -2Gd\epsilon_{ij}^{\text{пл}}. \quad (6.19)$$

В случае одномерной деформации в плоской ударной волне, распространяющейся в направлении оси x , из уравнения (6.19) имеем

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dt} - (\lambda + 2G)\frac{d\epsilon_{xx}}{dt} = -2G\frac{d\epsilon_{xx}^{\text{пл}}}{dt}, \quad (6.20)$$

где принято во внимание, что $\epsilon_{kk} = \epsilon_{xx}$. Скорость пластической сдвиговой деформации в плоскости, расположенной под углом 45° к плоскости фронта ударной волны, дается выражением

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\epsilon_{xx}^{\text{пл}}}{dt} - \frac{d\epsilon_{yy}^{\text{пл}}}{dt} \right). \quad (6.21)$$

Из (6.21) и условия $\frac{d\varepsilon_{kk}^{пп}}{dt} = 0$ находим

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{3}{4} \cdot \frac{d\varepsilon_{xx}^{пп}}{dt}. \quad (6.22)$$

Подставляя (6.22) в (6.20), получаем определяющее соотношение:

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dt} = (\lambda + 2G) \frac{d\varepsilon_{xx}}{dt} - \frac{8}{3} G \frac{d\gamma}{dt}. \quad (6.23)$$

Уравнение (6.23) показывает, что напряжения растут за счет общей деформации и релаксируют из-за пластической деформации.

Для нахождения скорости сдвиговой пластической деформации $d\gamma/dt$ наиболее часто пользуются представлениями дислокационного механизма пластической деформации. Пластическое деформирование рассматривается как результат движения и размножения дислокаций, а упрочнение — как результат их частичного запираания вследствие увеличения их плотности. Мы не будем касаться возможных механизмов пластического деформирования, которые описываются в [9, 12].

Согласно известному соотношению Орована, пластическая деформация сдвига γ определяется плотностью дислокаций N и их средним смещением S

$$\gamma = bNS, \quad (6.24)$$

где b — вектор Бюргерса. Дифференцирование (6.24) по времени t дает выражение для скорости пластического деформирования

$$\frac{d\gamma}{dt} = b \frac{dN}{dt} S + bN_m v, \quad (6.25)$$

где $\frac{dN}{dt}$ — скорость размножения дислокаций, N_m — плотность подвижных дислокаций и $v = \frac{dS}{dt}$ — средняя скорость подвижных дислокаций.

При больших перенапряжениях, когда $\frac{dN}{dt}$ велико, пластическая деформация контролируется процессами зарождения и размножения дислокаций, а при малых напряжениях — скоростью их смещения.

При умеренно высоких напряжениях для описания пластической деформации используются разнообразные аналитические зависимости скорости движения дислокаций от касательного напряжения τ . В [9] зависимость $v(\tau)$ представляется в виде

$$v = v_{\max} \exp\left(-\frac{D}{\tau}\right), \quad (6.26)$$

где D — характеристическое напряжение торможения, v_{\max} — предельная средняя скорость подвижных дислокаций, часто принимаемая равной скорости звука сдвиговых волн. По формуле (6.26)

скорость пластической деформации при сколь угодно больших касательных напряжениях не превышает значения v_{\max} . При низких уровнях напряжения ($D \gg \tau$) эта формула, однако, неудовлетворительна [9].

Согласно [10], стационарная скорость дислокаций может быть записана так:

$$v = \frac{b}{B} (\tau - \tau_0), \quad (6.27)$$

где B — коэффициент вязкого торможения, τ_0 — константа. По (6.27) средняя скорость дислокаций растет без ограничения с повышением τ , что противоречит экспериментальным данным.

Более общая зависимость скорости подвижных дислокаций от действующего касательного напряжения предложена в [11]:

$$v = \frac{v_{\max} \delta^n}{1 + \delta^n}, \quad (6.28)$$

$$\delta = \frac{\tau - \tau_0}{T}, \quad (6.29)$$

где T и n — постоянные величины и v_{\max} — максимальная средняя скорость подвижных дислокаций. Из (6.28) и (6.29) видно, что при $\tau = \tau_0$ $v = 0$, а при больших τ скорость дислокаций стремится к своей предельной величине. Если $T \gg (\tau - \tau_0)$, то уравнение (6.28) превращается в простое выражение:

$$v = v_{\max} \left(\frac{\tau - \tau_0}{T} \right)^n. \quad (6.30)$$

Более сложная зависимость v от касательного напряжения рассматривается в [13]

$$v = \frac{v_{\max} \varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2}, \quad \varphi_1 = v_{\max} \left(\frac{\tau - \tau_0}{\tau_p} \right)^m, \quad (6.31)$$

$$\varphi_2 = 2v_{\max} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\tau - \tau_0} \right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\tau + \tau_0} \right)^2} \right)^{-1},$$

где $\alpha = Bv_{\max}/b$, v_{\max} — сдвиговая скорость звука, τ_0 — дальнедействующее напряжение, m и τ_p — константы.

Из формулы (6.25) следует, что скорость пластической деформации зависит также от количества подвижных дислокаций N_m . Величина N_m является переменной и, так же как v , представляется аналитическими эмпирическими соотношениями, на которых мы кратко остановимся.

Согласно [9], плотность подвижных дислокаций N_m описывается выражением

$$N_m = (N_0 + M_\gamma) \exp\left(-\frac{H\gamma}{\tau}\right), \quad (6.32)$$

где N_0 — начальная плотность подвижных дислокаций, M_γ — коэффициент размножения дислокаций, H — коэффициент деформацион-

ного упрочнения. Из формулы (6.32) следует, что с повышением H плотность подвижных дислокаций уменьшается, т. е. материал упрочняется. Напротив, если касательное напряжение τ растет, то плотность подвижных дислокаций N_m увеличивается.

В работе [10] рассматривается несколько иная, чем в [9], зависимость N_m , а именно:

$$N_m = N_0 \left(1 + \left(\frac{\alpha\gamma}{bN_{t_0}} \right) \right) \exp(-\alpha\gamma\Phi), \quad (6.33)$$

где α и Φ — положительные константы, N_{t_0} — общая начальная плотность дислокаций при напряжении $\sigma_{не}$.

Для описания второго члена в формуле (6.25) в работе [12] зависимость скорости подвижных дислокаций от сдвигового напряжения τ описывалась законом вязкого торможения, согласно которому $v = \tau_b/B$, но при этом использовалась зависимость B от давления в виде $B = B_0 \left(1 - \frac{P}{P_0} \right)$, так что

$$v = \frac{\tau_b}{B_0 \left(1 - \frac{P}{P_0} \right)}. \quad (6.34)$$

О выборе величины P_0 будет сказано далее. Плотность подвижных дислокаций определялась соотношением

$$N_m = \int_0^t \left(\frac{dN}{dt} + F \right) dt, \quad (6.35)$$

где функция F задавалась в виде

$$F = \begin{cases} -(N_m - N_m^*)/t^* & \text{при } N_m > N_m^*, \\ 0 & \text{при } N_m < N_m^*. \end{cases}$$

Величины N_m^* и t^* подбирались эмпирически. Объединяя формулы (6.26), (6.32) и (6.28), (6.33), получаем кинетические модели пластического деформирования

$$\frac{d\gamma}{dt} = bv_{\max} (N_0 + M\gamma) \exp\left(-\frac{D + H\gamma}{\tau}\right), \quad (6.36)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = bv_{\max} \left(\frac{\delta^n}{1 + \delta^n} \right) N_0 \left(1 + \frac{\alpha\gamma}{BN_{t_0}} \right) \exp(-\alpha\gamma\Phi). \quad (6.37)$$

Применение модели (6.36) позволило в хорошем согласии с экспериментальными данными описать волновые профили в алюминии 6061-T6 [11]. По [11] линейная связь между скоростью дислокаций v и сдвиговым напряжением τ для этого недостаточна, если скорость деформации превышает 10^4 с^{-1} . Лучший результат достигается, если в (6.30) взять $n = 2.14$. Результаты работы [11] показали также, что N_m растет линейно с γ .

Применение в расчетах кинетических моделей пластической деформации позволяет лишь частично воспроизвести экспериментальную форму импульса сжатия (см. (6.36) и (6.37)). Для улучшения согласования необходимо учитывать скорость размножения дислокаций — первый член в правой части формулы (6.25). В [12] зависимость скорости размножения полного количества дислокаций от сдвигового напряжения, давления и достигнутого уровня дислокаций выбрана в виде

$$bS \frac{dN}{dt} = K_1 \tau S \exp\left(\frac{|\tau|}{\tau_0} \left(1 - \frac{P}{P_0}\right) \sqrt{1 + K_2 bN}\right). \quad (6.38)$$

Величина P_0 оценивалась путем экстраполяции в область отрицательных давлений ударной адиабаты или изэнтропы, величины K_1 и τ_0 — по зависимости предела текучести от скорости деформирования, а константа упрочнения K_2 подбиралась эмпирически.

Введение кинетики пластических деформаций по выражениям (6.25), (6.34), (6.35) и (6.38) позволило достаточно хорошо описать экспериментальные результаты на всех стадиях распространения импульса сжатия при нагружении пластин из армо-железа и алюминия марки АД1 ударом алюминиевой пластины толщиной 0.2—0.7 см, имеющей скорость $W_{уд} = 0.4—1.5$ км/с.

Использование сложных дислокационных моделей пластического деформирования позволяет детально описать эволюцию импульса ударно-волновой нагрузки, распространяющегося по материалу. Вместе с тем наличие в моделях многочисленных констант материала и проблематичность их определения независимыми экспериментальными методами ограничивают возможность их практического использования. В соотношениях, описывающих динамику дислокаций, не учитывается возможное влияние температуры, что допускает применение моделей в сравнительно низкой области напряжений, когда разогрев материала невелик. Заметим, что обычно в расчетах влиянием температуры пренебрегают и, как следствие, не рассматривают уравнение энергии и температурные составляющие уравнений состояния [10, 12].

Феноменологическая модель релаксирующей упругопластической среды, основанная на дислокационных представлениях, приведена в [14]. Система определяющих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xx}}{dt} &= K \frac{de_{xx}}{dt} + \frac{4}{3} \frac{d\tau}{dt}, \\ \frac{d\tau}{dt} &= G \left(\frac{de_{xx}}{dt} - \frac{\exp\left(-\frac{D}{\tau - \tau_*}\right)}{t_p} \right). \end{aligned} \quad (6.39)$$

В уравнениях (6.39) t_p и D — релаксационные параметры и τ^* — критическое напряжение, подбираемые из условия наилучшего описания эксперимента.

В зависимости от значений релаксационных параметров и градиента скорости течения среды $\text{grad } U$ и уравнения (6.39) описывают идеальную упругопластическую среду, если $D \ll \tau^*$, $t_p \ll$

$\ll |\text{grad } U|^{-1}$, или нелинейно релаксирующее упругопластическое тело, если $D \sim \tau^*$, $t_p \sim |\text{grad } U|^{-1}$. Уравнение состояния, необходимое для определения $K(V, E)$, задавалось в форме

$$P = P_H(V) + \frac{\gamma_T}{V} (E - E_H(V)), \quad (6.40)$$

где функции $P_H(V)$ и $E_H(V)$ — давление и внутренняя энергия на ударной волне.

Расчеты по уравнениям (6.39) и (6.40) с релаксационными параметрами $D = 0.14$ ГПа, $\tau^* = 1.93$ ГПа, $t_p = 2.5 \cdot 10^{-7}$ с для меди и $D = 0.13$ ГПа, $\tau^* = 2.6$ ГПа, $t_p = 3.2 \cdot 10^{-7}$ с для железа удовлетворительно описали затухание ударной волны амплитудой 122 ГПа в меди и 64 ГПа в железе. Согласно полученным результатам медь и железо при напряжениях σ_{xx} за фронтом ударной волны около 100 ГПа ведут себя как вязкоупругопластические среды.

В работе [18] предложена модель единого определяющего уравнения среды, объединяющая оба рассматриваемых класса реологических уравнений. Предполагается, что плотность подвижных дислокаций задается функцией сдвига γ и максимального касательного напряжения

$$N_m = N_{0m} + \alpha\gamma + \frac{\tau_{\max} - \tau_c}{\beta}, \quad (6.41)$$

где α, β — константы среды, N_0 — плотность дислокаций в исходном материале, τ_c — пороговое напряжение. Скорость пластической деформации

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{N_m b^2 (\tau - \tau_*)}{B} = \frac{\tau - \tau_*}{\mu t_p}, \quad (6.42)$$

следует из уравнений (6.25) и (6.27), если в уравнении (6.25) в правой его части удержать только второй член. В (6.42) постоянная величина τ^* представляет собой критическое напряжение. В модели учитывается возможность процесса восстановления прочности, который описывается кинетическим уравнением остывания горячих дислокаций

$$\frac{dN_r}{dt} = \frac{dN_m}{dt} - \frac{N_r}{t_p}, \quad (6.43)$$

где N_r — число «горячих дислокаций», t_p — время тепловой релаксации. Согласно [18], за время тепловой релаксации $t_p \approx 10^{-7} - 10^{-8}$ с критическое напряжение τ^* меняется за фронтом ударной волны от первоначального значения $\tau_m^* = \frac{3}{4} S_m$ до равновесного значения $\tau^*(N_m)$ в соответствии с уравнением

$$\tau^*(N_m, N_r) = \tau_m^* + 2(\tau^*(N_m) - \tau_m^*) \left(1 + \exp \frac{N_r}{N_m + N_r} \right). \quad (6.44)$$

Система уравнений (6.41) — (6.44) определяет девиаторную состав-

ляющую напряжения — второй член в правой части уравнения (6.23).

При максимальных напряжениях τ_{\max} , меньших некоторого напряжения начала зарождения дислокаций τ_c , модель применима для описания квазистатических процессов. При напряжениях, превосходящих τ_c , она дает быстрое зарождение упругих предвестников и переход за фронтом ударной волны к упругопластическим моделям деформаций (моделям первого класса).

В работе [15] в уравнения среды включены упруговязкие члены Максвелла, описывающие процесс релаксации во времени касательных напряжений. На основе этой модели в [16] исследована структура профиля ударной волны в упруговязкой среде с нелинейной зависимостью максвелловской вязкости (величины, обратной времени релаксации t_p касательных напряжений) от параметров состояния вещества. Для одномерного движения вдоль оси x релаксационное уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + U \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\alpha + \gamma - 2\beta}{9t_p^2}, \quad (6.45)$$

где $\alpha = \ln k_1$, $\beta = \ln k_2$, $\gamma = \ln k_3$, k_1, k_2, k_3 — относительные удлинения вдоль осей x, y, z . Характерное время процесса релаксации t_p может меняться в широких пределах в зависимости от состояния среды: температуры, степени сжатия, интенсивности касательных напряжений. Структура ударных волн в основном определяется зависимостью t_p от параметров, характеризующих среду и изменяющихся в процессе нагружения. По модели упруговязкой среды ударная волна состоит из упругой волны и последующего релаксационного слоя. В [16] зависимость t_p от состояния среды принята в виде

$$t_p = t_0 \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^m \exp \left(- \frac{E_a(\tau, T)}{RT} \right), \quad (6.46)$$

где τ — интенсивность касательных напряжений, E_a — энергия активации, R — универсальная газовая постоянная, t_0 и τ_0 — константы.

Для металлов такая резкая зависимость t_p от параметров состояния среды приводит в случае сильной ударной волны к формированию на релаксационном слое участка с крутым фронтом, который можно выделить в отдельную — пластическую — волну. Получаемая расчетная структура ударной волны согласуется с экспериментальным фактом расщепления ударной волны на упругую и пластическую волны. С детальным описанием модели упруговязкой среды кроме работ [15, 16] читатель может ознакомиться в [21].

§ 3. Экспериментальные методы определения сдвиговой прочности

Разнообразные экспериментальные методы выявления сдвиговой прочности ударно сжатых металлов базируются на представлениях о характере их высокоскоростного деформирования в ударных

волнах и волнах расширения (см. § 1, 2). Изложим далее кратко принципы основных методов оценки сдвиговой прочности. Более детально с ними читатель может ознакомиться в оригинальных работах, на которые даются ссылки.

Сравнение ударной адиабаты и кривой гидростатического сжатия представляет собой простейший способ оценки сдвиговой прочности. В предположениях об изотропности упрочнения материала, а также о малости отличия гидростатической кривой изотермического сжатия от среднего напряжения P динамический предел текучести вычисляется по разности напряжений σ_{xx} на ударной адиабате упругопластического материала и давления P на изотерме его всестороннего сжатия при заданном удельном объеме V (или деформации ϵ) по формуле: $Y_d = \frac{3}{2}(\sigma_{xx} - P)$. Такой подход к нахождению Y_d ограничен сравнительно невысокими напряжениями σ_{xx} , когда температура вещества при ударном сжатии мала и можно пренебречь тепловыми составляющими.

Для сплава Al2024 в [23] рекомендуется вычислять динамический предел текучести в области напряжений $2.7 \leq \sigma_{xx} \leq 9.4$ ГПа, пользуясь соотношениями для $\sigma_{xx}(\epsilon_{xx})$ и $P(\epsilon)$ (в гигапаскалях): для нормальной составляющей напряжений в ударной волне

$$\sigma_{xx} = 0.18 + 72.06\epsilon_{xx} - 347.16\epsilon_{xx}^2;$$

для гидростатической кривой сжатия

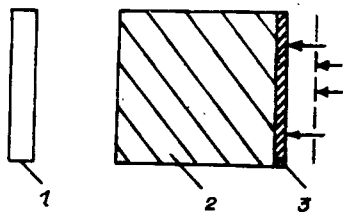
$$P = \epsilon(75.9 + 201\epsilon + 368.3\epsilon^2).$$

Этот метод оценки величины Y_d требует высокой точности выявления положения ударной адиабаты упругопластического материала и кривой всестороннего сжатия, поскольку малые изменения значения ϵ_{xx} или ϵ приводят к заметным изменениям σ_{xx} и P и, следовательно, Y_d .

Метод регистрации затухания ударной волны предполагает, что динамический предел текучести находится по результатам исследования негидродинамического затухания ударной волны, распространяющейся по образцу из упругопластического материала [3, 6, 24]. Образец нагружается ударом свободно летящей пластины желательнее из такого же материала или материала, менее жесткого, чем испытуемый (рис. 6.3). В результате соударения по материалу пластины и изучаемому веществу распространяются ударные волны. Выходящая на тыльную свободную поверхность ударника ударная волна отражается в виде централизованной волны

Рис. 6.3. Схема постановки опытов по определению затухания ударной волны.

1 — ударник; 2 — исследуемый материал; 3 — индикатор. Стрелками изображены датчики, регистрирующие скорость индикатора.



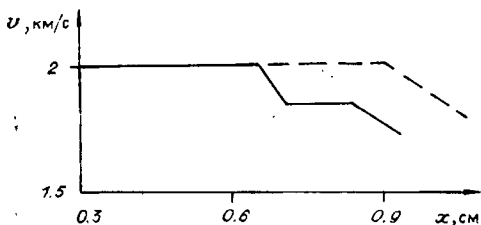


Рис. 6.4. Зависимость массовой скорости медного образца за фронтом ударной волны. Сплошная линия — эксперимент, штриховая — расчет в гидродинамическом приближении [3].

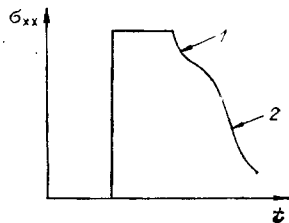
разрежения, включающей в себя упругую и пластическую волны разгрузки. Если ударник и образец изготовлены из одного материала, то волна без преломления на границе их раздела распространяется по системе. Упругая волна разгрузки догоняет фронт ударной волны в образце ранее прихода пластической волны расширения и уменьшает его амплитуду. Уменьшение амплитуды фронта ударной волны в образце зависит от амплитуды $\Delta\sigma_{упр}$ упругой волны разгрузки.

Таким образом, регистрация негидродинамического затухания ударной волны несет информацию о величине $\Delta\sigma_{упр}$, связанной с Y_d соотношением (6.10). Для регистрации параметров ударной волны на фиксированном расстоянии x_0 от поверхности соударения используется тонкий ($\Delta \approx 0.15$ мм) отлетающий индикатор. Ввиду его малой толщины предполагается, что скорость его движения, измеряемая обычно электроконтактным методом, отвечает мгновенному значению σ_{xx} фронта ударной волны в сечении x_0 . Переход от скорости полета отлетающего индикатора $W_{ин}$ к массовой скорости на фронте ударной волны в образце осуществляется с помощью специальных градуировочных опытов, в которых измеряется скорость $W_{ин}$, приобретенная при распространении по образцу стационарной ударной волны, известной амплитуды. По значениям U вычисляется далее напряжение σ_{xx} в ударной волне, используя для этого законы сохранения и $D-U$ -соотношения исследуемых материалов. Зависимости скорости вещества за фронтом ударной волны от расстояния (рис. 6.4) сильно различаются, поскольку особенности течения, возникающие в упругопластическом материале, приводят к более быстрому затуханию ударной волны по сравнению с гидродинамическим приближением. Критические напряжения сдвига находятся из сравнения экспериментальных зависимостей затухания ударной волны в образце с расчетными, полученными при различных значениях динамического предела текучести. За искомую величину принимается то значение Y_d , при котором достигается лучшее согласие с экспериментом. Затухание ударной волны можно изучать путем регистрации амплитуды ударной волны кварцевыми или манганиновыми датчиками, размещаемыми на различных расстояниях x от поверхности нагружения [17].

Метод регистрации профиля напряжений основан на непрерывной записи пьезорезистивными датчиками профиля напряжений во времени $\sigma_1(t)$ в волне разгрузки во внутреннем фиксированном сечении образца, сжатого стационарной ударной волной. Пьезоре-

Рис. 6.5. Осциллографическая запись сигнала с датчика, регистрирующего главное напряжение, для алюминия [54].

1 — упругая волна разгрузки; 2 — пластическая волна разгрузки.



зистивный датчик обычно представляет собой чувствительный элемент из манганиновой проволоки или фольги с изоляцией из полимеров. Несмотря на отличие динамической жесткости материалов датчика и исследуемого материала, предполагается, что в результате нескольких быстрых циркуляций датчик регистрирует истинное напряжение σ_{xx} в волне разгрузки. Следует, однако, заметить, что, учитывая даже возможность проявления гистерезиса манганина, строгого доказательства этого предположения не имеется. На осциллографических записях сигнала с датчика (рис. 6.5) можно различить как упругую часть волны расширения (1), так и пластическую ее часть (2). Если граница между упругой и пластической волнами выражена достаточно резко, то непосредственно определяется амплитуда упругой волны разгрузки $\Delta\sigma_{упр}$ и по формулам (6.10) или (6.9) вычисляется динамический предел текучести Y_d . В [25] для Al2024 при $\sigma_{xx} = 9.45$ ГПа получено значение $Y_d = 1$ ГПа, что весьма близко к значению $Y_d = 1.1$ ГПа, вычисленному по приведенным зависимостям $\sigma_{xx}(\epsilon_{xx})$ и $P(\epsilon)$. Чаще, однако, в металлах в волнах разрежения не регистрируется четко выраженной границы между упругой и пластической волнами, т. е. экспериментально фиксируемый профиль не имеет характерной точки излома, отвечающей «хвосту» упругой волны расширения. По этой причине динамический предел текучести Y_d ударно сжатого материала непосредственно из единичного профиля найти трудно. Для повышения надежности определения сопротивления сдвигу используется серия профилей $\epsilon_{xx}(t)$, полученных в нескольких фиксированных внутренних сечениях образца, расположенных на различных расстояниях от поверхности нагружения [7, 12]. Далее в приближении простой волны находится отклонение состояния вещества от гидростатического в волне расширения

$$\sigma_{xx}(V) - P(V) = \int \frac{a_{\Phi}^2 - c_B^2}{a_{\Phi}^2} d\sigma_{xx},$$

где a_{Φ} — определяемая по экспериментальным данным фазовая скорость распространения фиксированных уровней напряжения σ_{xx} , c_B — объемная скорость звука, полученная из уравнения состояния. Максимальное напряжение сдвига вычисляется затем из соотношения $\tau = \frac{3}{4}(\sigma_{xx} - P)$.

Метод измерения главных напряжений базируется на опытном определении их значений. Описанные методы выявления сопротивления металлов сдвигу являются косвенными и позволяют получить лишь приближенные значения динамического предела теку-

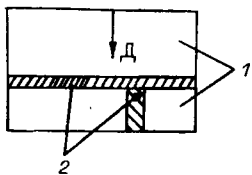


Рис. 6.6. Схема постановки опытов для определения главных напряжений σ_1 и σ_2 манганиновыми датчиками.

1 — образец исследуемого материала;
2 — датчики.

чести. Разработка экспериментальных методик измерения импульсных давлений с помощью манганиновых и диэлектрических датчиков создала возможность регистрации не только нормальных к фронту волны напряжений σ_1 , но и поперечных, лежащих в плоскости фронта ударной волны напряжений σ_2 или $\sigma_3 = \sigma_2$. Таким образом, непосредственно из опытных данных без обращения к другой независимой информации определяются динамический предел текучести в ударно сжатом металле как разность двух измеряемых главных напряжений $\sigma_1 - \sigma_2$ или $\sigma_1 - \sigma_3$. В экспериментах [26, 27] датчики малой толщины на основе манганиновой проволоки или фольги (рис. 6.6), заключенные в изолирующие материалы, вводятся в сделанные в образце разрезы перпендикулярно и параллельно фронту распространяющейся стационарной ударной волны. Геометрические размеры образца выбираются такими, чтобы исключить влияние боковой волны разрежения и отраженной от свободной поверхности волны разрежения на течение среды в месте расположения датчика за время измерения. Измерение значений σ_1 и σ_2 в одном опыте исключает погрешность, связанную с колебаниями σ_1 от опыта к опыту на одном и том же устройстве при раздельном измерении σ_1 и σ_2 (данное обстоятельство важно, поскольку разность σ_1 и σ_2 , как правило, невелика).

Основы измерения напряжения σ_1 пьезорезистивными датчиками (манганиновыми) хорошо известны и не нуждаются в пояснениях. Остановимся подробнее на вопросе измерения напряжения σ_2 . Предположим, что материал изоляции, в которую помещен датчик, ведет себя подобно жидкости. Отсюда вытекают следующие следствия: а) сдвиговые напряжения не передаются чувствительному элементу датчика; б) если слой изоляции находится в механическом равновесии с исследуемым твердым телом, то гидростатическое давление в изоляции равно напряжению σ_2 в окружающем твердом теле; в) калибровка датчика, выполненная для напряжений σ_1 , справедлива для напряжений σ_2 .

Прямым экспериментальным подтверждением корректности измерения поперечных напряжений σ_2 (или σ_3) рассматриваемым методом являются результаты, полученные в упругой области деформирования стали Ст.3 и стали 30ХГСА (табл. 6.1), а также результаты исследования зависимости σ_e для стали Ст. 3 в упругой и упругопластической областях деформирования (рис. 6.7).

В работах [27, 28] нагружение образцов осуществлялось ударными волнами, выходящими из экранов, изготовленных из стали, меди, алюминия, плексигласа, полиэтилена. Датчики напряжений [27] выполнялись из манганиновой проволоки диаметром $5 \cdot 10^{-5}$ м или манганиновой фольги толщиной $2 \cdot 10^{-5}$ м. Длина чувствительного элемента равнялась $(15-20) \cdot 10^{-3}$ м. Датчики по-

Сталь	σ_1 , ГПа	σ_2 , ГПа	μ	Сталь	σ_1 , ГПа	σ_2 , ГПа	μ
Ст. 3	1.27	0.49	0.28	30ХГСА (закалка)	1.97	0.86	0.30
	1.26	0.48	0.28		1.95	0.85	0.30
	1.28	0.48	0.27		1.80	0.75	0.29
	1.18	0.48	0.29		1.85	0.78	0.30
	1.15	0.49	0.30		1.78	0.75	0.29
				1.87	0.82	0.31	

крывались изолирующими слоями фторопласта, лавсана или слюды. Общая толщина датчиков составляла $(2-2.5) \cdot 10^{-4}$ м, сопротивление 3—5 Ом. Амплитудные значения σ_1 и σ_2 (в гигапаскалях) находились по единой калибровочной зависимости σ_i от относительного изменения сопротивления $\Delta R/R$ чувствительного элемента для обоих типов датчика

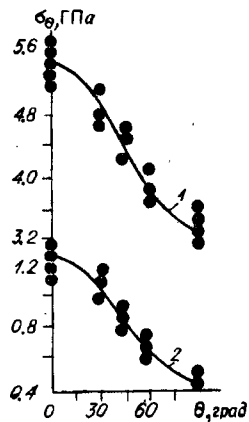
$$\sigma_i = 34.5 \frac{\Delta R}{R} + 7.5 \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^2,$$

справедливой в диапазоне напряжений $1.0 \leq \sigma_i \leq 45$ ГПа. Обработанные записи зарегистрированных с датчика сигналов (рис. 6.8) показывают выход напряжений σ_1 и σ_2 на стационарное значение. Сдвиг по времени обусловлен установкой датчиков на различном расстоянии от поверхности раздела экран-образец.

Самосогласованный метод [8, 29] предполагает, что, используя экспериментально выявленные «истории» скорости движения частиц исследуемого материала при повторной нагрузке и разгрузке из начального состояния ударно-волнового сжатия, расчетным путем восстанавливаются зависимости $\sigma_1(V)$ для повторного сжатия и разгрузки. Значения σ_v и σ_n , представляющие собой верхний и нижний пределы поверхности текучести, связанные соотношением $\sigma_v - \sigma_n = \frac{4}{3} Y_d$, получают путем экстраполяции кривых $\sigma_2(V)$

Рис. 6.7. Зависимость напряжения σ_θ в стали Ст.3 по нормали и сечениям, ориентированным под углом θ к плоскости фронта ударной волны, от угла θ .

1 — упругопластическая, 2 — упругая области; сплошная линия — расчет по формуле (6.51), кружки — экспериментальные данные из [27].



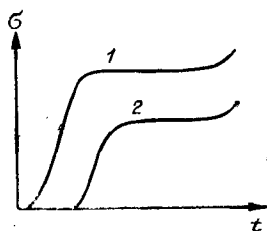


Рис. 6.8. Зависимость двух главных напряжений σ_1 (1) и σ_2 (2) от времени.

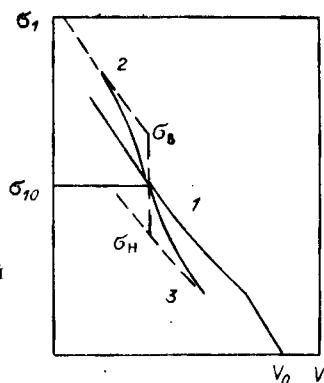


Рис. 6.9. Схема определения сдвигового напряжения самосогласованным методом.

1 — ударная адиабата; 2 — повторное сжатие; 3 — разгрузка.

повторного нагружения и разгрузки к одной изохоре, проходящей через начальное состояние σ_{10} ударно-волнового сжатия (рис. 6.9).

Кратко опишем экспериментальную процедуру, примененную в [29]. Комбинированный ударник, состоящий из двух слоев, тормозится на плоском образце псньюемого материала. По материалу передней пластины и исследуемому веществу распространяются ударные волны. Если материал задней пластины ударника более жесткий по сравнению с материалом передней пластины, то при отражении от границы раздела двух пластин по передней будет распространяться ударная волна. Падение этой волны на границу раздела ударник — исследуемое вещество возбуждает в последнем вторую ударную волну. Если, наоборот, материал задней пластины ударника мягче материала передней пластины, то в результате взаимодействия волн в исследуемом веществе вслед за ударной волной будет распространяться волна расширения.

Смещение частиц во времени регистрируется лазерным интерферометром с поверхности, противоположной поверхности соударения, через прозрачное к излучению лазера «окно», плотно прилегающее к поверхности образца. При известной зависимости продольного напряжения σ_{12} от массовой скорости U_2 материала «окна», используя дифференциальные соотношения для распада произвольного разрыва

$$dU_1 = \frac{1}{2} \left(dU_2 + \frac{d\sigma_{11}}{\rho_0 c} \right),$$

$$d\sigma_{11} = \frac{1}{2} (d\sigma_{12} + \rho_0 c dU_2),$$

где индекс 1 относится к образцу, индекс 2 — к «окну», c — скорость звука, оцениваются напряжение и скорость частиц в образце по измеренному профилю $U_2(t)$. Плотность, или удельный объем, вычисляется далее по известному соотношению $d\varepsilon_{11} = d\sigma_{11}/\rho_0 c^2$, где $\varepsilon_{11} = 1 - \rho_0/\rho$. Подробно схема вычислений кривых описана в [30].

§ 4. Особенности структуры ударной волны и волны разрежения в упругопластической среде

Рассмотрим особенности структуры и распространения плоских ударных волн и волн разрежения в нереагирующих упругопластических средах. Пусть нерелаксирующая упругопластическая среда подчиняется идеализированной схеме деформирования (см. рис. 6.1). Наличие на ударной адиабате в плоскости σ, V излома в точке σ_{HE} , в которой происходит скачкообразное изменение наклона на ударной адиабате, нарушает устойчивость ударного разрыва в состояниях, лежащих выше σ_{HE} и ограниченных сверху точкой пересечения волнового луча $\rho_0 c_L$ с ударной адиабатой (см. рис. 6.1, А). В упругой стадии деформирования ($\sigma_1 \leq \sigma_{HE}$) скорость распространения упругих волн с амплитудой $\sigma_1 \leq \sigma_{HE}$ равна упругой продольной скорости звука $c_L = \left(\frac{E(1-\mu)}{(1-2\mu)(1+\mu)\rho_0} \right)^{0.5}$. В состояниях выше упругого предела Гюгонио σ_{HE} , но ниже σ_A происходит расщепление ударного разрыва на две волны: упругую и пластическую. Впереди со скоростью, равной скорости звука c_L , распространяется упругая волна (упругий предвестник) с амплитудой $\sigma_1 = \sigma_{HE}$, а за ней — пластическая волна, несущая избыточную над σ_{HE} величину напряжения $\sigma_1 - \sigma_{HE}$. Относительно состояния перед своим фронтом пластическая волна распространяется со скоростью

$$D = V_{HE} \sqrt{\frac{\sigma_1 - \sigma_{HE}}{V_{HE} - V}}. \quad (6.47)$$

При малой разности напряжений $\sigma_1 - \sigma_{HE}$ скорость фронта пластической волны относительно состояния перед фронтом близка к скорости распространения пластических возмущений

$$c_B = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \quad (6.48)$$

при нормальных условиях. Значения упругой и объемной скоростей звука в некоторых металлах при нормальных условиях из [33] приведены в табл. 6.2.

С увеличением напряжения ударного сжатия σ_1 или разности напряжений $\sigma_1 - \sigma_{HE}$ скорость пластической волны возрастает, в то

Таблица 6.2

Металл	c_L , км/с	c_B , км/с	Металл	c_L , км/с	c_B , км/с
Mg	5.74	4.44	Mo	6.45	5.04
Ta	4.15	3.39	W	5.22	4.02
Cr	6.60	4.32	Nb	5.03	4.39

время как скорость упругой волны остается постоянной. Следовательно, при определенных значениях σ_1 (см. рис. 6.1, σ_A) скорость пластической волны сравнивается со скоростью упругой волны. Выше состояний $\sigma_1 \geq \sigma_A$ скорость пластической волны превзойдет скорость упругой волны. Значит, при $\sigma_1 \geq \sigma_A$ по веществу распространяется единственный ударный разрыв, амплитуда которого равна σ_1 , а скорость его распространения

$$D = V_0 \sqrt{\frac{\sigma_1}{V_0 - V}}. \quad (6.49)$$

Таким образом, область напряжений $\sigma_A > \sigma_1 > \sigma_{HE}$ является областью существования двухволновой конфигурации в упругопластической среде при сжатии.

Упругопластический характер поведения металлов проявляется при расширении из ударно сжатого состояния. Поскольку вплоть до состояния плавления $\sigma_{пл}$ на ударной волне свойства твердого тела отличны от свойства жидкости, в этой области напряжений σ_1 следует ожидать особенностей в его течении при разгрузке по сравнению с гидродинамическим приближением. Как описано в § 1, разгрузка в рассматриваемой области происходит в две стадии. На первой из начального состояния на ударной адиабате до выхода на нижнюю предельную поверхность пластичности металл разгружается упругим образом, а последующая стадия разгрузки — пластическая. Отношение упругой скорости звука к пластической

$$\frac{c_L}{c_B} = \sqrt{\frac{8(1-\mu)}{1+\mu}},$$

т. е. для металла в твердой фазе ($\mu < 0.5$) всегда $c_L > c_B$. «Голова» упругой волны разгрузки распространяется относительно состояния перед ней со скоростью, равной упругой скорости звука c_L . «Голова» пластической волны расширения распространяется относительно состояния перед ней со скоростью, равной объемной скорости звука c_B . Поскольку $c_L > c_B$, то упругая волна разгрузки опережает пластическую волну расширения.

Таким образом, при расширении ударно сжатой упругопластической среды, так же как и при ее ударном сжатии ($\sigma_A > \sigma_1 > \sigma_{HE}$), реализуется двухволновая конфигурация, в которой первая волна — упругая, а вторая — пластическая.

Пусть $\sigma_{пл} > \sigma_1 > \sigma_A$. Тогда луч, соединяющий точку на ударной адиабате с исходным состоянием 0, ни в одной другой точке не касается и не пересекает ударную адиабату, упругий предвестник отсутствует, а волна расширения состоит из упругой и пластической волн. В режиме ударного нагружения с $\sigma_1 > \sigma_{пл}$ ударный разрыв и волна расширения имеют одноволновую конфигурацию.

Описанные структуры ударно-волнового нагружения металлов наблюдаются в экспериментах только тогда, когда волновой луч в переменных σ_1 , V касается ударной адиабаты не более чем в одной точке и не более чем в одной точке ее пересекает. Если на ударной

адиабате есть участки, на которых

$$\frac{d^2\sigma_1}{dV^2} < 0, \quad (6.50)$$

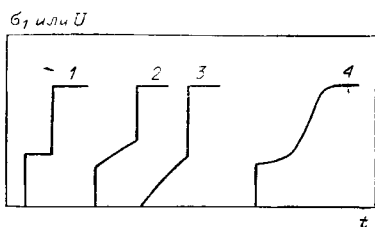
возможны разнообразные комбинации из упругого и пластического сильных разрывов и упругой и пластической волн сжатия. Волновой профиль 1 на рис. 6.10 соответствует идеальной упругопластической среде, профиль 2 обусловлен упрочнением на ранней стадии неупругой деформации. Постепенное возрастание предела текучести в упругой области приводит к образованию упругой волны сжатия (профиль 3). Дисперсия пластической волны (профиль 4) считается доказательством вязкопластического течения. Эксперименты показывают, что для железа и сталей характерны профили второго типа. Профили типа 3 характерны для металлов, не обладающих четко выраженным пределом текучести, например для меди.

Профиль волны разрежения, распространяющейся по ударно сжатому металлу, также отличается от ожидаемого по идеализированной модели упругопластического тела. Вместо скачкообразного изменения напряжения σ_1 фронта на величину $\Delta\sigma_{\text{упр}}$ и четкого разделения упругой и пластической волн расширения экспериментально регистрируемый профиль упругопластической волны расширения представляет собой сравнительно плавную кривую изменения напряжений, имеющую в ряде случаев свои особенности. В [7] манганиновым датчиком достаточно четко зафиксировано наличие упругой стадии расширения для ударно сжатых меди, дюралюминия и технического алюминия АД1. Но говорить об упругой волне конечной амплитуды можно только для дюралюминия. Как видно на рис. 6.5, на осциллограмме имеется выпуклый участок, соответствующий области перехода от упругой стадии разгрузки к пластической.

Упругопластическое поведение ударно сжатых металлов в процессе расширения приводит к примечательному явлению — так называемому эффекту негидродинамического затухания ударной волны. Значения упругой и объемной скоростей звука увеличиваются с ростом напряжения σ_1 на фронте ударной волны, и в области напряжений $\sigma_1 < \sigma_{\text{пл}}$ всегда $c_L > c_B$. Следовательно, поскольку $c_L + U > c_B + U > D$, упругая волна разгрузки догоняет фронт ударной волны и ослабляет его ранее пластической разгрузки. Таким образом, наличие упругой волны разгрузки вызывает быстрое затухание ударной волны при ее распространении по материалу по

Рис. 6.10. Структура волны нагрузки в упругопластической среде.

1 — идеальная среда; 2 — среда с деформационным пластическим упрочнением; 3 — среда с упругой дисперсией; 4 — среда с вязкопластическим течением.



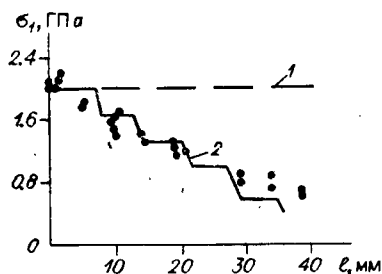


Рис. 6.11. Негидродинамическое затухание ударной волны в Al [17].

1 — результаты расчета в гидродинамическом приближении; 2 — данные расчета по релаксационной модели; точки — экспериментальные данные.

сравнению с гидродинамическим приближением, что определяет эффект негидродинамического затухания.

Эффект негидродинамического затухания по [17] показан на рис. 6.11. При соударении алюминиевого ударника толщиной 0.9 мм, имеющего скорость $U_{уд} = 0.275$ км/с, с неподвижной алюминиевой мишенью в эксперименте затухание ударной волны в мишени начинается на расстоянии $l \approx 10$ мм от поверхности соударения. Эффект негидродинамического затухания ударной волны при напряжениях $\sigma_1 = 185$ и 111 ГПа в Fe и 122 ГПа в Cu отмечен в [3], что свидетельствует о том, что даже при столь высоких напряжениях на фронте ударной волны указанные металлы сохраняют свои прочностные свойства.

Описанные в § 3, 4 особенности деформирования и структуры волн нагрузки и расширения металлов лежат в основе экспериментальных методов, разработанных для изучения реакции металлов на ударно-волновое нагружение и последующее расширение.

§ 5. Упругий предвестник и динамическая прочность

Измерение амплитуды и профиля упругой волны сжатия, а также параметров в области течения между фронтами упругой и пластической волн дает информацию о высокоскоростном деформировании упругопластической среды и его особенностях. Для этого наиболее широко используются методы емкостного датчика [31, 32] и оптического затвора [33], позволяющие осуществлять непрерывную регистрацию движения свободной поверхности. Возможна также постановка измерений с использованием манганинового и диэлектрического датчиков. Однако в этом случае точность измерений хуже. Результаты исследований указывают на сложную, до конца не изученную картину процесса деформирования металлов в одномерных ударных волнах. Многочисленными экспериментами показано, что в большинстве металлов и их сплавов в согласии с основными представлениями о характере поведения упругопластической среды при ударно-волновом нагружении образуется двухволновая конфигурация. При этом упругая волна может иметь четко выраженный фронт (ударный разрыв), как, например, у сталей, либо представлять собой течение типа простой волны сжатия

с сильной дисперсией скорости звука, как, например, у меди. Скорости звука в такой волне являются промежуточными между упругой и пластической скоростями звука. На фронте упругой волны (упругого предвестника) пластические деформации несущественны и амплитуда $\sigma_{не}$ упругого предвестника, характеризующая предел прочности при одноосной деформации в плоской волне нагрузки, связана с пределом текучести $Y_{не}$ простым соотношением: $\sigma_{не} = Y_{не} \frac{1-\mu}{1-2\mu}$. Таким образом, по измеренным значениям $\sigma_{не}$ при известных μ вычисляется динамическая прочность.

Отличительная особенность распространения упругого предвестника заключается в экспериментально зарегистрированном затухании его амплитуды с пройденным волной расстоянием l при неизменных условиях нагружения. Это явление обнаружено для стали Ст.3 [32] и стали 20 [34], алюминиевого сплава В95 [34], алюминиевого сплава Д16 [32], Та [35], А11060 [36], армо-железа [37]. Зависимость амплитуды упругой волны от расстояния в стали Ст.3, по данным [32], показана на рис. 6.12. Характер затухания для исследованных материалов один и тот же. На малых расстояниях от поверхности нагружения, осуществляемого как контактным подрывом ВВ, так и ударом пластины по изучаемому веществу, происходит интенсивное затухание амплитуды упругого предвестника. Напротив, на больших расстояниях, пройденных упругой волной, амплитуда затухает существенно медленнее. Начиная с некоторой величины l_0 , при заданной нагрузке амплитуда становится постоянной величиной. Для сплава В95 и стали 20 амплитуда напряжений $\sigma_{не}$ постоянна на расстоянии $l_0 \geq 4.0$ см при значении массовой скорости на границе соударения, характеризующей интенсивность плоской волны, от $U = 0.05$ до $U = 0.25$ км/с для стали 20 и от $U = 0.05$ до $U = 0.4$ км/с для сплава В95 [34].

Факт зависимости амплитуды $\sigma_{не}$ упругого предвестника от пройденного волной расстояния следует иметь в виду, при указании величины $\sigma_{не}$: вместе с $\sigma_{не}$ необходимо указывать величину l . В табл. 6.3 для ряда металлов из [33] и Та из [38] приведены значения амплитуд упругих волн. Значения $\sigma_{не}$ определены с точностью $\pm 10\%$. Затухание упругой волны в Та, А11060 и железе видно из данных табл. 6.4. Зависимость $\sigma_{не}$ от пройденного волной расстояния следует также принимать во внимание при исследованиях, в которых испытуемый образец подвергается нагружению ударной волной. Для

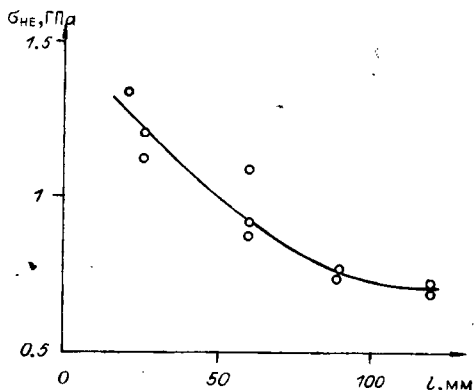


Рис. 6.12. Затухание упругого предвестника в стали Ст.3 [32].

Т а б л и ц а 6.3

Металл	l , см	σ_{HE} , ГПа
Al2024	1.2	0.54
Al6061	1.2	0.54
C ₂	0.5	1.60
Mo	0.3	1.60
Ni	1.2	1.00
Ti	1.2	1.85
W	0.5	3.20
Железо		
мелкозернистое, твердое	0.3	1.50
» мягкое	0.3	1.10
крупнозернистое, твердое	0.3	1.40
» мягкое	0.3	0.90
Pb, отожженный	1.2	0.00
Ta	1.0	1.87
Ta	0.373	2.10

реальных металлов, как указывалось, зависимость σ_1 , V при ударном нагружении отличается от соответствующей зависимости σ_1 , V идеализированного упругопластического тела. Точно так же различаются регистрируемые профили упругопластических волн. В связи с этим возникает вопрос о выборе амплитуды σ_{HE} для нахождения величины динамической прочности. В ряде работ значение σ_{HE} бралось по амплитуде фронта ударной волны, которая на малых расстояниях l является переменной. В работах [31, 32] для характеристики амплитуды упругой волны бралось напряжение упругой волны у границы с пластической областью, что, согласно [2], более обоснованно для нахождения динамической прочности металла. В связи с этим следует отметить зафиксированный в [31] экспериментальный факт: при идентич-

Т а б л и ц а 6.4

Металл	l , см	σ_{HE} , ГПа
Ta [35]	0.3	2.5
	1.0	1.3
	1.9	1.2
Al1060 [36]	0.138	1.06
	0.303	0.77
	0.465	0.64
	0.968	0.53
Армко-железо [37]	0.15	1.50
	0.25	1.20
	1.20	0.80
	2.40	0.85
	5.00	0.40

ных условиях нагружения исследуемых образцов сталей, напряжение σ_1 на фронте упругой волны падает с расстоянием, пройденным волной, тогда как напряжение σ_1 перед выходом пластической волны остается постоянным, т. е. не зависит от длины образца. Результаты определения динамической прочности ряда металлов и их сплавов представлены в табл. 6.5 (знак \perp означает, что нагружение материала происходило перпендикулярно направлению технологиче-

Металл	$\sigma_{0.2}$, ГПа	$\gamma_{д}$, ГПа	$\frac{\gamma_{д}}{\sigma_{0.2}}$	Литература
Сталь Ст. 3	0.21	0.86	4.1	[32]
» 40X (закалка)	0.82	1.66	2.0	[32]
» 40X (отжиг)	0.42	1.24	2.9	[32]
» 30XГСА (закалка)	1.45	1.88	1.3	[32]
» 30XГСА (отжиг)	0.47	1.32	2.9	[32]
Армко-железо	0.15	0.73	4.9	[32]
Алюминиевый сплав Д1 (отжиг)	0.155	0.237	1.53	[31]
» » Д16 (отжиг)	0.130	0.263	2.02	[31]
» » Д16 (закалка)	0.270	0.422	1.56	[31]
Медь (отжиг)	0.050	0.048	0.97	[31]
Латунь ЛС59-1 (отжиг)	0.125	0.200	1.60	[31]
Сталь 30XГСА				
⊥ *	0.239	0.887	3.71	[41]
⊥ **	0.820	0.980	1.20	[41]
*	0.410	0.949	2.31	[41]
**	1.430	1.070	0.75	[41]
Сталь ЭП712				
⊥	0.740	0.810	1.09	[41]
	1.110	0.805	0.73	[41]
» 12X18Н10Т	0.320	0.590	1.84	[41]
» 36НХТЮ	0.970	1.120	1.15	[41]

* HRC = 21–23.
 ** HRC = 33–36.

ской прокатки, а || — параллельно этому направлению). Значение $\gamma_{не}$ вычислено по амплитуде упругой волны на границе с пластической.

В экспериментах со взрывным нагружением сталей и железа при сравнительно небольших длинах образцов $L_{обр}$ во фронте упругой волны наблюдается пик текучести (рис. 6.13) [32]. Параметры этого пика (так называемого зуба текучести) указаны в табл. 6.6. Амплитуда его невелика, но он четко фиксируется. С повышением длины образца амплитуда упругой волны уменьшается (см. рис. 6.13) и пик текучести исчезает. Обозначения на рис. 6.13 те же, что и в табл. 6.6.

Результаты регистрации напряжений σ_1 , σ_2 в упругой области методом измерения главных напряжений для двух типов сталей

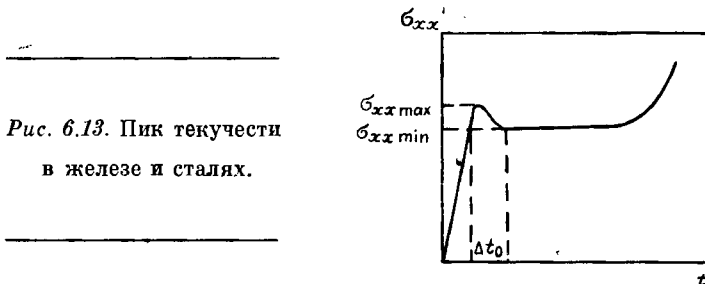


Рис. 6.13. Пик текучести
 в железе и сталях.

Сталь	$\tau_{xx} \text{ max,}$ ГПа	$\sigma_{xx} \text{ min,}$ ГПа	Δt_0 , мкс	$L_{\text{обр}}$, см
Ст. 3	1.13	1.10	0.09	2.5
	1.26	1.21	0.13	2.5
	1.35	1.33	0.08	2.0
30ХГСА (отжиг)	1.72	1.46	0.09	6.0
30ХГСА (закалка)	1.84	1.78	0.13	6.0
Армко-железо	0.99	0.89	0.14	2.5
	1.06	0.98	0.21	6.0

представлены в табл. 6.1. Вычисленные из экспериментальных данных по соотношению $\mu = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma}$ средние значения коэффициента Пуассона $\mu = 0.28$ для стали Ст.3 и $\mu = 0.30$ для стали 30ХГСА согласуются с литературными данными [39].

Зарегистрированные напряжения σ_θ по нормали к сечениям, ориентированным под углом Θ к плоскости фронта ударной волны (см. рис. 6.7), хорошо описываются известной теоретической зависимостью [40]:

$$\sigma_\theta = 0.5 [\sigma_{xx} + \sigma_{yy} \pm (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\Theta]. \quad (6.51)$$

Возвращаясь к данным табл. 6.5, обратим внимание на результаты, полученные для различных марок стали. Их динамическая прочность при $\sigma_{xx} = \sigma_{HE}$ колеблется в пределах от $Y_{HE} = 0.59$ ГПа для стали 12Х18Н10Т до 1.88 ГПа для закаленной стали 30ХГСА. Для наиболее мягких сталей динамическая прочность Y_{HE} значительно превышает условный статический предел текучести $Y_{0.2}$, что, по-видимому, обусловлено только сопротивлением надбарьерного скольжения дислокаций [41]. С ростом статической прочности отличие ее от динамической прочности монотонно уменьшается. Для высокопрочных сталей Y_{HE} близко к $Y_{0.2}$ и даже может быть менее $Y_{0.2}$, как, например, для стали 36НХТЮ и стали 30ХГСА при нагружении их в направлении, параллельном направлению технологической прокатки.

Влияние начальной температуры образца T_m на величину амплитуды упругой волны исследовалось в [42] для стали 45. Соответствующие экспериментальные данные, полученные при обработке результатов измерений методом емкостного датчика, приведены в табл. 6.7, где Y'_d — предел текучести на фронте упругой волны, Y''_d — перед фронтом пластической волны. Согласно общим физическим представлениям, прочность металлов, не претерпевающих структурных изменений, должна падать с повышением начальной температуры образца. Однако возможность структурных изменений при ударно-волновом сжатии металлов, имеющих повышенную начальную температуру, может привести к аномальным явлениям. Для стали 45 при небольших начальных температурах амплитуда

$T_m, ^\circ\text{C}$	$Y'_d, \text{ГПа}$	$Y''_d, \text{ГПа}$	$\sigma_{HE}, \text{ГПа}$	$T_m, ^\circ\text{C}$	$Y'_d, \text{ГПа}$	$Y''_d, \text{ГПа}$	$\sigma_{HE}, \text{ГПа}$
5	1.06	1.25	1.68	305	0.77	1.16	1.20
170	0.78	1.02	1.23	340	0.76	1.02	1.16
210	0.80	0.91	1.27	360	0.60	0.87	0.94
240	0.82	1.09	1.29				

упругого предвестника и напряжение σ_{xx} у границы пластической волны падают с повышением температуры. Заметное возрастание динамических величин наблюдается в области температур 240—300 °С, что согласуется со статическими зависимостями предела текучести от температуры для стали 45. В статике такое явление связывается со структурными изменениями стали вблизи температуры синеломкости. Уменьшение напряжения в упругой волне отмечалось также для алюминия Д16 (отжиг) и меди (отжиг) при начальных температурах $T = 100$ и 200 °С [31].

Экспериментальные результаты показывают сложное реологическое поведение металлов, подвергнутых ударному нагружению. Затухание амплитуды упругого предвестника при его распространении по образцу свидетельствует о протекании релаксационных процессов. Постоянство величины амплитуды упругой волны, начиная с некоторой длины образца l_0 , говорит о завершении процессов релаксации напряжений на этом отрезке пути. Затухание упругого предвестника не описывается простой упругопластической моделью деформирования. Для лучшего согласования экспериментальных данных с расчетными предпринимаются попытки применения более сложных реологических моделей, в большей степени отражающих реальные свойства материалов. Дислокационные модели описывают характер затухания упругого предвестника лишь качественно. Однако, как отмечается в большинстве работ, количественное согласие с экспериментальными данными при минимальном числе свободных констант и параметров в уравнениях для описания пластической деформации достигается только в предположении о большой скорости размножения дислокаций. При этом нормальная плотность дислокаций должна иметь значение 10^8 — 10^9 см⁻², что на 2—3 порядка превышает реальные величины в исследованных материалах [12].

При феноменологическом подходе к задаче описания затухания упругого предвестника, не принимая во внимание физические механизмы деформирования, зависимость амплитуды упругой волны от пройденного ею расстояния для постоянного значения коэффициента вязкости может быть представлена экспоненциальной функцией (см., например, [34])

$$\sigma_{HE} = \sigma_{0HE} \exp\left(-\frac{B}{2} \frac{x}{c_L t_p}\right), \quad (6.52)$$

где $B = \frac{4}{3} \frac{G-M}{K + \frac{4}{3}G}$, $G_L^2 = \frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho_0}$, M — модуль деформационного

упрочнения, σ_{0HE} — начальный уровень напряжения, соответствующий чисто упругому сжатию в плоской волне, x — путь волны, $t_p = \nu/G$ — время релаксации, $\nu = d\tau/d\varepsilon$ — коэффициент вязкости при сдвиге, c_L — скорость распространения упругого предвестника. Местная скорость затухания упругого предвестника

$$\frac{\partial \sigma_{HE}}{\partial x} = -\frac{B\sigma_{0HE}}{2t_p c_L} \exp\left(-\frac{B}{2} \frac{x}{t_p c_L}\right) = -\frac{B\sigma_{HE}}{2t_p c_L}. \quad (6.53)$$

Выражение (6.52) упрощается, если пренебречь деформационным упрочнением, т. е. положить $M=0$. В этом случае из (6.53) получаем явную связь между временем релаксации и скоростью затухания упругого предвестника:

$$t_p = \left(\frac{2}{3} \frac{G}{\rho_0 c_L^2}\right) \left| \left(\frac{\partial \ln \sigma_{HE}}{\partial x}\right) \right|. \quad (6.54)$$

Величина $\frac{\partial \ln \sigma_{HE}}{\partial x}$ оценивается из экспериментальных данных по затуханию упругого предвестника. Применение выражения (6.54) к анализу кривых затухания показывает, что время релаксации имеет минимальную величину в области, прилегающей к поверхности нагружения, т. е. на малых путях распространения волны, и быстро возрастает при распространении волны.

§ 6. Динамический предел текучести и упругие свойства металлов в ударных волнах

Медь. Результаты экспериментальных исследований [3, 6, 43] сдвиговой прочности меди сведены в табл. 6.8. Опытные данные из [27] представлены в табл. 6.9. В обследованном диапазоне напряжений $2.2 < \sigma_1 < 22$ ГПа экспериментальные данные описываются аналитической зависимостью линейного вида $\sigma_2 = (11.20 \pm 0.30) +$

Т а б л и ц а 6.8

Метод исследования	σ_{xx} , ГПа	$\Delta\sigma_{упр}$, ГПа	γ_d , ГПа
Негидродинамическое затухание [6]	34	9	—
	86	15	—
Догоняющая разгрузка [3]	122	10 ± 2	—
Регистрация профиля напряжений [43]	93	—	1.23
	140	—	0.63

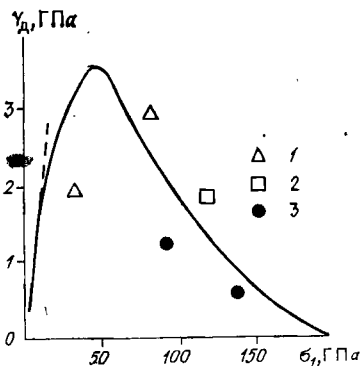
σ_1 , ГПа	σ_2 , ГПа	σ_1 , ГПа	σ_2 , ГПа	σ_1 , ГПа	σ_2 , ГПа
2.20	1.80	11.50	9.80	14.50	12.50
2.60	2.10	13.20	11.40	15.00	13.00
6.20	5.20	13.8	11.70	22.00	19.00
6.80	6.00	14.00	11.50	24.00	22.00
10.50	9.00	14.30	12.40	25.00	22.00

$\pm (0.86 \pm 0.04) (\sigma_1 - 13.00)$. На рис. 6.14 в координатах Y_d , σ_1 нанесены экспериментальные точки из работ [3, 6, 43] и зависимость $Y_d(\sigma_1)$ (штриховая линия), вычисленная по приведенной зависимости $\sigma_2(\sigma_1)$. Экспериментальные точки из работ [3, 6] скорректированы в соответствии с уточненными в настоящей работе значениями коэффициента Пуассона μ . Как видно, имеется расхождение экспериментальных результатов, которое может быть объяснено различной точностью определения значения Y_d различными экспериментальными методами и их неадекватностью. Как показано в работе [44], использованная в [3, 6] расчетная модель Морланда некорректна и может дать результаты, отличающиеся от рассчитанных. По этой причине усредненная зависимость динамического предела текучести Y_d от напряжения σ_1 на фронте ударной волны (см. рис. 6.14) носит приближенный характер. Тем не менее расположение экспериментальных точек таково, что величина Y_d имеет максимум, положение которого по оси σ_1 достигается задолго до состояния плавления на фронте ударной волны.

По данным [45], плавление меди при ударно-волновом сжатии наступает при $\sigma_1 = 250$ ГПа. Разброс опытных результатов качественно не изменяет вида зависимости $Y_d(\sigma_1)$. Зависимость $Y_d(\sigma_1)$ в качественном отношении согласуется с моделью упругопластической среды по [5]. На восходящей ветви этой зависимости при сравнительно умеренных напряжениях σ_1 определяющим фактором являются давление и работа пластического упрочнения. С ростом σ_1 начинает играть прогрессирующую роль температура (или теп-

Рис. 6.14^а Зависимость динамического предела текучести от главного напряжения σ_1 вдоль ударной адиабаты меди.

Экспериментальные данные взяты из работ: 1 — [6], 2 — [3], 3 — [43].



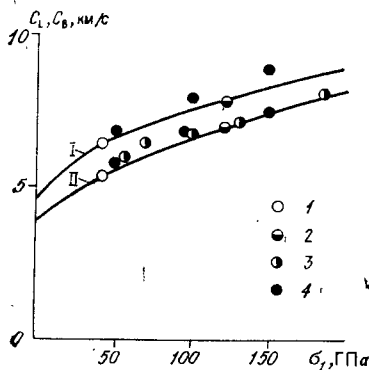


Рис. 6.15. Зависимость продольной c_L и объемной c_V скоростей звука в меди от напряжения σ_1 вдоль ударной адиабаты.

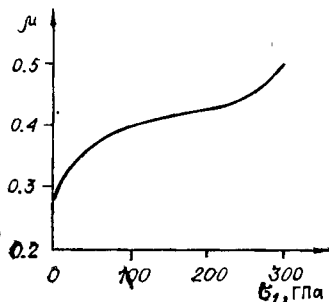
I — упругая, II — объемная скорости звука; экспериментальные данные взяты из работ: 1 — [2], 2 — [3], 3 — [28], 4 — [43].

ловая энергия), которая быстро растет вдоль ударной адиабаты. По расчетным оценкам, приращение температуры составляет $\approx 300^\circ\text{C}$ при $\sigma_1 = 50$ ГПа и $T \approx 1360^\circ\text{C}$ при $\sigma_1 = 100$ ГПа, т. е. температура растет быстрее, чем давление. Начиная с некоторого значения $\sigma_1 = \sigma_1^*$ температурная зависимость динамического предела текучести становится определяющей, что приводит к плавному уменьшению значения Y_d для $\sigma_1 > \sigma_1^*$ вплоть до нуля в состоянии плавления.

Сопоставление с данными статических испытаний [46] показывает, что на восходящей ветви $Y_d(\sigma_1)$ в ударных волнах медь упрочняется несколько сильнее. Большая сопротивляемость меди в условиях ударно-волнового сжатия естественным образом может быть объяснена высокой скоростью деформирования меди в ударных волнах. Согласно [4], условный предел текучести меди при сжатии в квазистатических условиях (скорость деформации $\dot{\epsilon} = 2 \cdot 10^{-2}$ 1/с) равен 290 МПа. Таким образом, предел текучести меди в ударных волнах примерно на порядок превышает свое значение при квазистатическом нагружении.

Результаты измерений упругой и пластической скоростей звука позволяют проследить поведение коэффициента Пуассона μ вдоль ударной адиабаты. Зависимость лагранжевой упругой c_L от массовой U скорости на фронте ударной волны, как указывалось в [47], может быть представлена линейной функцией $c_L = 4.60 + 3.30 \cdot U$, справедливой при $U \leq 2.3$ км/с. Зависимости упругой c_L и объемной c_V скоростей звука от напряжения σ_1 на фронте ударной волны (рис. 6.15) представляют собой плавные функции, сближающиеся друг с другом с повышением амплитуды ударной волны, что свидетельствует о возрастании коэффициента Пуассона вдоль ударной адиабаты. На рис. 6.16 показана зависимость коэффициента Пуассона μ от напряжения σ_1 , рассчитанная по формуле (6.11) исходя из зависимостей c_L и $c_V(\sigma_1)$. Рассчитываемая по функциям $c_L(\sigma_1)$ и $c_V(\sigma_1)$ зависимость модуля сдвига G от σ_1 вдоль ударной адиабаты, как и зависимость $Y_d(\sigma_1)$, имеет колоколообразный вид [3]. По сравнению с функцией $Y_d(\sigma_1)$ максимум функции $G(\sigma_1)$ значительно сдвинут в сторону больших σ_1 : 130–140 ГПа против

Рис. 6.16. Зависимость коэффициента Пуассона μ от напряжения σ_1 вдоль ударной адиабаты меди.



50—60 ГПа для максимального значения Y_d . Максимальное значение модуля сдвига в ударно сжатом состоянии примерно в 3 раза превышает значение G при нормальных условиях, что много меньше упрочнения меди в ударных волнах. В работе [5] считается, что $\frac{1}{Y_d} \left(\frac{dY}{dP} \right)_{T=0} \approx \frac{1}{G_0} \left(\frac{dG}{dP} \right)_{T=0}$. Полученные результаты показывают, что это предположение в достаточно широком диапазоне напряжений σ_1 приемлемо.

Алюминий и его сплавы. Сдвиговая прочность технически чистого алюминия и его сплавов исследована более обширно по сравнению с другими материалами (табл. 6.10). Опытные данные σ_1 , σ_2 (в гигапаскалях) из [27] приведены в табл. 6.11. Их совокупность описывается аналитическим соотношением линейного вида,

Таблица 6.10

Материал	Метод исследования	σ_1 , ГПа	$\Delta\sigma_{упр}$, ГПа	Y_d , ГПа	
АМг6	Негидродинамическое затухание [6]	30.0	6.0	—	
		68.0	10.0	—	
Al2024	» » [48]	9.0	—	0.8	
		16,5	—	1.2	
	» » [50]	11.0	2.5	—	
		34.0	6.5	—	
	» » [24]	31.3	—	1.4	
		Регистрация профиля напряжений [25]		2.1	1.26
	» » » [43]		8.1	1.60	—
			6.00	2.55	—
			9.45	3.40	—
			28.0	—	1.22
		40.0	—	1.62	
		55.0	—	1.90	
		70.0	—	1.45	
		70.0	—	1.88	
	80.0	—	1.50		
	88.0	—	1.64		
Al2024 (отжиг)	» » » [25]	3.05	0.85	—	
		5.60	1.60	—	
Дюралюминий	Самосогласованный метод [49]	40.0	—	1.5 ± 0.75	

Т а б л и ц а 6.11

АМг6		АД1	
σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
2.00	1.80	3.60	3.20
4.20	3.90	3.80	3.20
4.90	4.50	3.90	3.10
7.20	6.60	7.40	5.80
7.80	7.20	8.30	6.80
12.60	12.00	11.60	7.50
13.80	12.00	11.70	10.40
21.00	20.00	12.80	11.20
21.20	20.30	21.00	19.00

связывающим σ_1 и σ_2 . Для алюминия марки АД1 это уравнение имеет вид

$$\sigma_2 = (8.55 \pm 0.50) + (0.902 \pm \pm 0.09) (\sigma_1 - 10.16). \quad (6.55)$$

Оно применимо в промежутке $3.7 \leq \sigma_1 \leq 22$ ГПа. Аналогичное уравнение для сплава АМг6 в промежутке $2.0 \leq \sigma_1 \leq 21$ ГПа таково:

$$\sigma_2 = (9.92 \pm 0.12) + (0.964 \pm 0.02) (\sigma_1 - 10.52).$$

На рис. 6.17 в координатах Y_d, σ_1 нанесены опытные точки для Al2024, зависимость $Y_d(\sigma_1)$ для сплава АМг6, вычисленная по (6.55), а также зависимость $Y_d(\sigma_1)$ по [51] для алюминия АД1 и дюралюминия Д16. Значения Y_d по известным амплитудам упругой волны разгрузки $\Delta\sigma_{упр}$ из [6, 50—52] вычислены с помощью зависимостей $\mu(\sigma_1)$ (рис. 6.18). Экспериментальные точки для дюралюминия, АМг6 и Al2024 компактно расположены в плоскости Y_d, σ_1 (см. рис. 6.17). Сплошной линией проведена усредненная по экспериментальным точкам зависимость $Y_d(\sigma_1)$. Значение $\sigma_{1пл}$, согласно [53], принято равным 150 ГПа. Для перечисленных материалов экспериментальные результаты, полученные различными методами, удовлетворительно согласуются друг с другом: их разброс не больше предела погрешностей определения Y_d . Вместе с тем, как показывает сравнение приведенных зависимостей $\sigma_2(\sigma_1)$ для чистого алюминия АД1 и сплава АМг6, сопротивление сдвигу алюминия в исследованном диапазоне до $\sigma_1 = 21-22$ ГПа заметно выше, чем для сплава АМг6. Таким образом, сдвиговая прочность материала оказывается их индивидуальным свойством. В связи с этим заметим, что в работе [54] не обнаружено ощутимого раз-

Рис. 6.17. Зависимость динамического предела текучести от напряжения σ_1 вдоль ударной адиабаты алюминия и его сплавов.

Экспериментальные данные взяты из работ: 1 — [6], 2 — [48], 3 — [50], 4 — [24], 5 — [25], 6 — [43], 7 — [49].

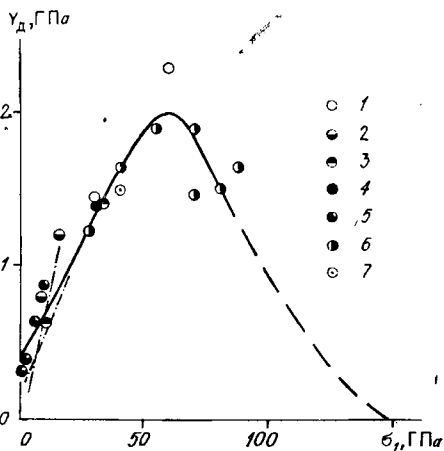
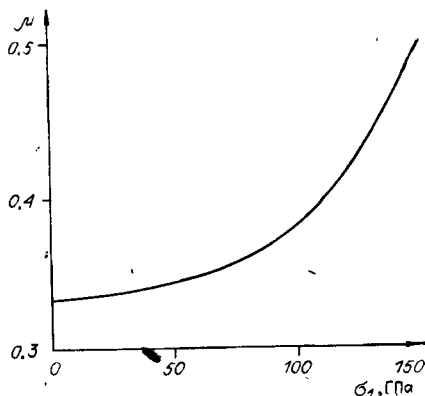


Рис. 6.18. Зависимость коэффициента Пуассона μ от напряжения вдоль ударной адиабаты алюминия и его сплавов.



личия значений Y_d для алюминия АД1 и дюралюминия до $\sigma_1 = 16$ ГПа и дается общая для этих материалов зависимость сдвигового напряжения от величины σ_1 .

Как и для меди, зависимость $Y_d(\sigma_1)$ для алюминиевых сплавов имеет колоколообразный вид. До $\sigma_1 \approx 60$ ГПа алюминиевые сплавы упрочняются, а при более высоких значениях σ_1 разупрочняются с обращением предела текучести Y_d в нуль при $\sigma_1 = \sigma_{1пл}$. Качественно поведение $Y_d(\sigma_1)$ объясняется в [5] с позиций упругопластической среды. Условный предел текучести сплава АМг6 при сжатии в квазистатических условиях ($\epsilon = 2 \cdot 10^{-2}$ 1/с) равен 205 МПа [4], что примерно на порядок ниже максимального значения динамического предела текучести этого материала в ударных волнах. Таким образом, имеет место значительное упрочнение сплава АМг6 при высокоскоростном деформировании. В работе [29] для алюминиевого сплава 6061-T6 также отмечается сильное упрочнение: в интервале напряжений $\sigma_1 = 8-40$ ГПа прочность при сдвиге возрастает примерно в 5 раз.

До значений $\sigma_1 \approx 35-40$ ГПа усредненная зависимость $Y_d(\sigma_1)$ близка к аналогичной зависимости из работы [18].

В [7] методом измерения главных напряжений для дюралюминия зарегистрировано значение $\sigma_1 - \sigma_2 = (0.1-0.05)$ ГПа при $\sigma_1 = 17$ ГПа, что значительно ниже, чем следует из рис. 6.13, и вызывает сомнение. Результаты испытаний в статических условиях [46] близки к извлеченным из ударно-волновых экспериментов на восходящей ветви $Y_d(\sigma_1)$: при равных давлениях P соответствующие значения предела текучести мало отличаются друг от друга. В работе [34] не обнаружено повышения сдвиговой прочности сплава В95 выше ее значения в точке $\sigma_{не}$ в упругопластической области до $\sigma_1 \approx 7$ ГПа. Возможно, что на результаты работы [34], согласно [55], повлияли неточности измерения импульсных напряжений диэлектрическим датчиком в случае многократного ударно-волнового нагружения, обусловленного циркуляцией волн в материале датчика.

Зависимость упругой скорости звука для Al и его сплавов от массовой скорости на фронте ударной волны может быть при $U \ll$

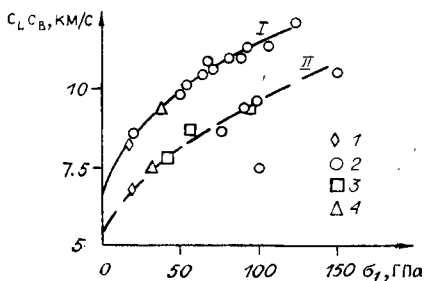


Рис. 6.19. Зависимость продольной упругой c_L (I) и объемной c_B (II) скоростей звука от напряжения вдоль ударной адиабаты алюминия.

Экспериментальные данные взяты из работ: 1 — [2], 2 — [51], 3 — [28], 4 — [24].

≈ 4.2 км/с представлена аналитическим выражением линейного вида $c_L = 6.30 + 3.20 \cdot U$. Это уравнение хорошо согласуется с предложенным в [47] для $U \leq 1.7$ км/с уравнением $c_L = 6.30 + 3.36 \cdot U$. Зависимости упругой c_L и объемной c_B скоростей звука от напряжения σ_1 на фронте ударной волны имеют плавную форму. Вычисленная по зависимостям $c_L(\sigma_1)$ и $c_B(\sigma_1)$ (рис. 6.19) функция $\mu(\sigma_1)$ вдоль ударной адиабаты нанесена на рис. 6.18. Функция $\mu(\sigma_1)$ принята единой для Al и его сплавов. Значительное количество экспериментальных точек позволяет проследить зависимость коэффициента Пуассона от напряжения σ_1 на ударной волне вплоть до начала плавления. В области напряжений до $\sigma_1 = 110-120$ ГПа $\mu(\sigma_1)$ оказывается слабовозрастающей функцией σ_1 . Выше этой области значений σ_1 коэффициент Пуассона быстро растет, достигая своего естественного значения $\mu = 0.5$ в состоянии полного плавления.

Рассчитанная по функциям $c_L(\sigma_1)$ и $c_B(\sigma_1)$ зависимость модуля сдвига G от σ_1 для Al и его сплавов также имеет колоколообразный вид со смещением максимума G в сторону больших σ_1 (100 ГПа) по сравнению с положением максимума Y_d (50—60 ГПа). Максимум модуля сдвига в ударно сжатом состоянии примерно в 4 раза превышает свое значение при нормальных условиях.

Железо и стали. Сдвиговая прочность и упругие свойства железа и сталей в ударно сжатом состоянии изучены менее подробно по сравнению с медью и алюминием и в более узкой области значений σ_1 . Методом измерения главных напряжений динамическая прочность стали Ст.3 исследована в [27, 55]. Результаты этих работ и дополнительных экспериментов приведены в табл. 6.12. Их обработка дает аналитическую связь линейного типа между главными напряжениями (в гигапаскалях):

$$\sigma_2 = (6.71 \pm 0.10) + (0.693 \pm 0.014) (\sigma_1 - 9.94)$$

в области напряжений $1.3 \leq \sigma_2 \leq 25$ ГПа. В опытах не обнаружено явных аномалий зависимости $\sigma_2(\sigma_1)$ в области напряжений вблизи фазового перехода в железе. Для стали при $\sigma_1 = 7.0$ ГПа $\sigma_2 = 4.4$ и $Y_d = 2.6$ ГПа, при $\sigma_1 = 13$ ГПа $\sigma_2 = 2.3$ и $Y_d = 3.7$ ГПа [55].

При измерении напряжения сдвига стали 45 получены значения Y_d , лежащие значительно выше предела текучести в статических условиях при равных значениях среднего напряжения в ударно-

Т а б л и ц а 6.12

σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
ГПа		ГПа		ГПа	
4.58	3.20	6.50	4.50	13.20	9.70
4.65	3.10	6.60	4.40	17.00	11.60
5.20	3.30	8.30	5.80	17.40	12.20
5.20	3.50	9.30	6.50	18.10	12.70
5.20	3.60	10.20	6.40	18.30	11.90
5.30	3.40	10.20	7.20	23.50	16.50
5.30	3.60	10.30	6.80	23.80	16.00
5.40	3.20	12.80	8.90	24.50	17.00
6.20	4.10	13.20	9.20	25.40	16.50
6.40	4.20				

волновых экспериментах и давления P . В статических условиях испытания напряженное состояние неоднородно по сечению образца, поэтому напряжение сдвига представляет собой некоторую усредненную характеристику прочности, что затрудняет сравнение.

В опытах [27, 55] с ударными волнами при измерении главных напряжений материал находился практически при постоянных, регистрируемых экспериментально значениях σ_1 и σ_2 в течение отрезка времени, близкого к $2 \cdot 10^{-6}$ с. Поэтому для объяснения расхождения результатов, полученных в статических и ударно-волновых опытах, за счет задержки релаксационных процессов, пришлось бы принять, что время релаксационных процессов превышает $2 \cdot 10^{-6}$ с, что, по-видимому, маловероятно. Возможным объяснением может служить высокая скорость деформации ($\dot{\epsilon} > 10^5$ 1/с) в ударных волнах.

В [3] для мягкой стали методом регистрации затухания ударной волны выявлены амплитуды упругой волны разгрузки $\Delta\sigma_{упр} = 8.0 \pm 2.0$ ГПа при $\sigma_1 = 111$ ГПа и $\Delta\sigma_{упр} = 21 \pm 3.5$ ГПа при $\sigma_1 = 185$ ГПа. Соответственно $Y_d = 1.1 \pm 0.4$ и 2.7 ± 0.7 ГПа. Имея в виду работу [44], о чем упоминалось при анализе результатов исследования сдвиговой прочности меди, значения Y_d из [3] могут оказаться заниженными.

Для стали 20 в [55] методом измерения главных напряжений определена сдвиговая прочность $Y_d = 0.8$ ГПа при $\sigma_1 = 1.1$ ГПа и $Y_d = 1.7$ ГПа при $\sigma_1 = 4.5$ ГПа. Приведенные в [34] данные для той же марки стали противоречат этим результатам, так как не зарегистрировано увеличения сдвиговой прочности стали 20 до напряжений $\sigma_1 > 9.0$ ГПа: при $\sigma_1 > \sigma_{нв}$ значение $Y_d = 0.67$ ГПа, что почти в 3 раза меньше величины Y_d при $\sigma_1 = 5.5$ ГПа в [55]. Возможным источником расхождения результатов определения Y_d стали 20, полученных одним и тем же методом измерения главных напряжений, по мнению [55], могут служить, как и для сплава В95, погрешности измерения импульсных напряжений диэлектрическим датчиком в случае многократного ударно-волнового нагружения.

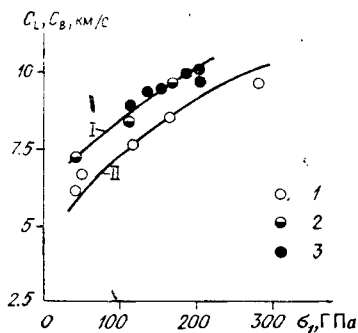


Рис. 6.20. Значения продольной упругой c_L (I) и объемной c_V (II) скоростей звука в зависимости от напряжения σ_1 вдоль ударной адиабаты железа. Экспериментальные данные взяты из работ: 1 — [28], 2 — [28], 3 — [52].

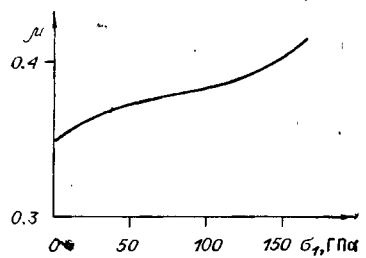


Рис. 6.21. Зависимость коэффициента Пуассона μ от напряжения σ_1 вдоль ударной адиабаты железа.

По результатам измерений упругой и объемной скоростей звука в ударно сжатом железе для $\sigma_1 > 13$ ГПа (рис. 6.20) вычислены значения коэффициента Пуассона — рис. 6.21. Плавление железа на ударной волне имеет место при $\sigma_1 \approx 300$ ГПа [56]. Для стали Ст.3, как для Si и Al, в исследованном диапазоне σ_1 наблюдается прогрессирующее с ростом σ_1 упрочнение.

Магний. В исследованной методом измерения главных напряжений области значений $2.3 \leq \sigma_1 \leq 18$ ГПа зависимость динамического предела текучести Y_d от напряжения σ_1 на фронте ударной волны представляется линейной функцией $Y_d = 0.3 + 0.124 (\sigma_1 - 2.3)$. Сравнение с данными статических испытаний [46] показывает, что в условиях ударно-волнового нагружения предел текучести заметно превышает свои статические значения при равных значениях давления. Как и для стали, это не может быть объяснено задержкой релаксационных процессов или малой скоростью их протекания.

Глава 7

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПЛОТНЫХ СРЕД

§ 1. Основные черты и свойства математических моделей

Развитие механики в течение всей ее истории сопровождалось усложнением моделей сплошных сред с целью повышения точности прогнозирования рабочих характеристик создаваемых машин, приборов, конструкций. В течение длительного периода единственным способом описания поведения вещества в статических или динамических процессах являлось построение точных или приближенных

аналитических решений уравнений физической модели. Для построения аналитических решений уравнений механики сплошной среды требуется существенно упрощать постановку задач, что приводит к увеличению погрешностей в описании реальных процессов.

Положение резко изменилось после создания электронных вычислительных машин. Бурное развитие численных методов способствовало широкому применению математического моделирования в разнообразных областях науки и техники и, конечно, в механике.

Математическим моделированием называют замену исследования какого-либо реального процесса или явления исследованием поведения его математической модели. Процесс создания математической модели должен пройти несколько этапов.

1. Построение физической модели, включающей замкнутую систему дифференциальных уравнений — законов сохранения и определяющих уравнений, описывающих свойства вещества.

2. Построение математической модели, т. е. системы уравнений, допускающих численное решение на ЭВМ, выбор и обоснование метода численного решения полученной системы уравнений. На этом этапе дается ответ на вопрос, применима ли построенная математическая модель для описания рассматриваемых физических процессов, соответствует ли она физической модели.

3. Идентификация математической модели, в процессе которой устанавливается область применимости математической модели и делаются выводы об ее точности и экономичности, т. е. эффективности.

4. Верификация построенной математической модели, т. е. проверка ее точности путем сравнения с эталонными аналитическими решениями и с измеренными экспериментально характеристиками реальных процессов.

Как правило, при переходе к математической модели принятое в механике непрерывное описание свойств среды заменяется дискретным описанием. Функции, характеризующие состояние и движение вещества, задаются на некотором конечном множестве точек. Уравнения, связывающие значения функций в различных точках среды, называются разностными уравнениями, а методы решения разностных уравнений — разностными или сеточными методами. К этим методам относится и широко применяемый для расчетов деформаций и напряжений в твердом теле метод конечных элементов.

Разностная схема является важной, составной частью математической модели. Рассмотрим, что же включается в понятие разностной схемы. Это прежде всего сетка, т. е. конечное множество точек, в которых определены характеристики среды — решение разностных уравнений. Область, в которой ищется решение, разбивается на множество малых элементов — ячеек сетки. Выделенные точки внутри ячеек или на их контурах называются узлами сетки. Если моделируемый процесс развивается во времени, то одновременно с пространственной сеткой вводится сетка по времени, образуемая малыми временными интервалами. Пространственно-временные сетки могут строиться различными способами.

Уравнения механики в дифференциальной форме содержат частные производные, которые определены на континууме точек среды. При переходе от сплошной среды к ячейкам конечной величины непрерывные функции заменяются функциями, заданными в узлах сетки. Одновременно дифференциальные уравнения заменяются разностными уравнениями, содержащими значения функций в узлах сетки. Такая замена называется аппроксимацией. Совокупность разностных уравнений, необходимых для определения всех неизвестных величин, является вторым элементом разностной схемы.

Границы области определения решения — поверхности в пространстве x, t , на которых заданы краевые условия. Границы вместе с заданными на них граничными условиями так же, как и основное решение, требуют дискретизации, т. е. введения граничной сетки и перехода к уравнениям, аппроксимирующим граничные условия. Разностные граничные условия вместе с граничной сеткой образуют третий элемент разностной схемы.

Будем представлять решение в виде вектора \vec{U} , последуем широко принятым [1—3] обозначениям $U^{n+1} = U(t^{n+1})$, $U_i = U(x_i)$. Совокупность дифференциальных уравнений есть дифференциальный оператор L , действующий на вектор \vec{U} . В свою очередь, совокупность разностных уравнений будем рассматривать как разностный оператор L_h , действующий на сеточный вектор \vec{U}_h . Разность между ними

$$L\vec{U} - L_h\vec{U}_h = \omega_h\vec{U}_h \quad (7.1)$$

будем называть погрешностью аппроксимации. Разностная схема, и в частности разностный оператор L_h , может строиться по-разному. Важно только, что выбор конкретного оператора L_h определяет погрешность аппроксимации ω_h . Поэтому ответ на вопрос, какими критериями следует руководствоваться при выборе конкретной разностной схемы, в большой степени определяется погрешностью аппроксимации ω_h . Выбор таких критериев прямо связан со свойствами разностной схемы. Основными свойствами разностных схем для уравнений механики сплошной среды являются согласованность, точность, устойчивость и эффективность.

Вообще говоря, аппроксимация — это замена одного математического объекта другим. Аппроксимация дифференциального оператора L разностным оператором L_h называется согласованной [1], если при стремлении к нулю шагов по времени и по пространству оператор ω_h стремится к нулю. Ясно, что если это условие не выполнено, то построенная математическая модель не соответствует физической. Таким образом, требование согласованности является фундаментальным. Если согласованность разностной схемы отсутствует, то исследование ее других свойств становится бессмысленным.

Поскольку уравнения, составляющие оператор L_h , отличаются от уравнений, составляющих оператор L , естественно ожидать, что численное решение U_h будет отличаться от решения U . Точность

численного решения $\Delta_h = U_h - U$ определяется двумя источниками ошибок. Первый из них прямо связан с заменой дифференциальных уравнений разностными. Второй источник ошибок, называемых ошибками округления, связан с представлением чисел в памяти ЭВМ. Поскольку выполняемые на ЭВМ арифметические операции не точны, в последних значащих цифрах обрабатываемых на ЭВМ чисел непрерывно генерируются ошибки. Чтобы ответить на вопрос, какова же точность разностной схемы, нужно, во-первых, знать, с какой скоростью стремится к нулю величина Δ_h при стремлении к нулю шагов по времени и по пространству, и, во-вторых, исследовать, как ведут себя ошибки округления. Пусть среднеквадратичная ошибка определена выражением

$$P = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\Delta U}{U} \right)_j^2, \quad (7.2)$$

где ΔU_j — абсолютная погрешность в точке j , U_j — решение в этой точке, N — произведение числа точек сетки по пространству на число шагов по времени. При $P = 0$ точность T разностной схемы абсолютна и равна единице, при $P = 1$ точность разностной схемы отсутствует, т. е. равна нулю. Можно предложить различные формулы для зависимости точности T от погрешности P . Каждая такая зависимость, качественно описывая уменьшение точности при увеличении погрешности, в количественном отношении будет выражать имеющийся опыт в каждой конкретной области математического моделирования. Для задач механики сплошной среды разностные схемы с относительной погрешностью более 10 % можно считать неточными. Если с этим согласиться, то для связи точности с погрешностью может быть использована нелинейная зависимость

$$T = \frac{1 - P}{1 + 100P}. \quad (7.3)$$

В механике сплошной среды среднеквадратичная погрешность P определяется на классах эталонных задач, для которых удается построить аналитические решения. В каждой точке j величина ΔU_j равна разности между численным и точным решением в этой точке. Такой подход требует не только построения математической модели, но и создания программы и проведения расчетов на ЭВМ. Следовательно, указанный алгоритм определения точности является апостериорным.

На стадии проектирования математической модели необходимо использовать априорные оценки точности [4], выражающие $\Delta U/U$ через некоторые функции от решения, умноженные на шаги сетки по пространству и по времени.

Исследование устойчивости разностной схемы отвечает на вопрос о поведении ошибок округления. Разностный оператор L_h называют устойчивым, если в результате его применения ошибка, допущенная в исходном решении, убывает. Обозначим ошибку округления в точке i в момент t^{n+1} через δ_i^{n+1} , а в момент t^n через δ_i^n . В результате действия оператора L_h на решение эти ошибки

оказываются связанными друг с другом уравнением

$$\delta_i^{n+1} = a_i \delta_i^n. \quad (7.4)$$

Условие устойчивости оператора L_n с учетом (7.4) запишем в виде

$$|a_i| \leq 1. \quad (7.5)$$

Условие устойчивости (7.5) учитывает поведение абсолютной ошибки округления δ . В то же время при подавляющем числе практических применений разностных схем нужно знать поведение относительной ошибки округления. Запишем результаты действия оператора L_n на решение в виде

$$U_i^{n+1} = b_i U_i^n. \quad (7.6)$$

Из (7.4) и (7.6) следует поведение относительной ошибки

$$\left(\frac{\delta}{U}\right)_i^{n+1} = \left(\frac{a}{b}\right)_i \left(\frac{\delta}{U}\right)_i^n. \quad (7.7)$$

С учетом (7.7) условие устойчивости оператора L_n можно переписать так:

$$\left|\frac{a_i}{b_i}\right| \leq 1. \quad (7.8)$$

Из (7.8) вытекает, что на растущих со временем решениях, где $|b_i| > 1$, можно допустить такой рост абсолютной ошибки, что будет выполняться условие

$$1 < |a_i| \leq |b_i|. \quad (7.9)$$

В то же время на затухающих со временем решениях, где $|b_i| < 1$, условие устойчивости принимает вид

$$|a_i| \leq |b_i| \leq 1. \quad (7.10)$$

В заключение этого параграфа рассмотрим, какое содержание вкладывается в понятие эффективности разностной схемы. Любая ЭВМ характеризуется быстродействием, от которого зависит время получения численного решения с заданной точностью. Обозначим через Δt_s разумное время работы ЭВМ на решение задачи конкретного класса. Строго это время определить трудно, так как на него влияют многие факторы. В зависимости от целей математического моделирования Δt_s может принимать значения в промежутке от нескольких минут до нескольких сотен часов. Обозначим затраты разностной схемы на решение задачи рассматриваемого класса через Δt_c . Очевидно, разностная схема с меньшим Δt_c является более эффективной по сравнению с разностной схемой, у которой Δt_c больше. Кроме того, ясно, что эффективность разностной схемы увеличивается при повышении точности численного решения. Таким образом, эффективность разностной схемы можно определять по формуле

$$\Xi = T \cdot \frac{\Delta t_s}{\Delta t_c}, \quad (7.11)$$

где

$$\Delta t_c = NM/V; \quad (7.12)$$

N — число точек по пространству, умноженное на число шагов по времени; M — число операций, необходимых для реализации оператора L_n ; V — быстродействие ЭВМ, выражаемое числом операций в единицу времени.

Свойства разностной схемы, ее достоинства и недостатки в значительной степени определяют качество математического эксперимента. Необходимость исследования свойств разностных схем на конечной сетке привела к появлению кроме рассмотренных еще ряда определений и понятий. Из свойств разностных схем для решения уравнений механики сплошной среды в последние годы наиболее активно исследуются дивергентность, консервативность [2, 3, 5] и полная консервативность [6]. В литературе получили широкое распространение попытки связать свойства разностных уравнений с их формой. Так, в [3] дивергентность безусловно отождествляется с консервативностью, а в [2] их тождественность обусловлена инвариантностью вспомогательных величин на гранях ячейки сетки относительно пространственного индекса. В [7—9] рассмотрены свойства локальной консервативности разностных схем для уравнений газовой динамики, а в [10] сформулированы условия интегральной и локальной консервативности разностных законов сохранения.

Анализ работ, посвященных изучению свойств разностных законов сохранения, указывает на незавершенность теории априорного исследования консервативности схем и противоречивость оценок. Так, например, большинство авторов для уравнения энергии считает предпочтительней дивергентную форму, а для уравнения сохранения массы — недивергентную (плотность равна массе, деленной на объем). В этих условиях конструктивные предложения, позволяющие из всех возможных разностных схем выбирать в некотором смысле наилучшие, имеют большое значение для практических работ по математическому моделированию процессов в твердых телах.

§ 2. Физическая модель волновых нагрузок в твердых телах

Чтобы максимально облегчить понимание проблем, которые возникают при конструировании разностных схем для уравнений механики сплошной среды, ограничимся рассмотрением законов сохранения массы, количества движения и энергии в одномерном случае в виде (1.131)—(1.133). Система трех уравнений (1.131)—(1.133) содержит семь искоемых функций (P , V , E , U , S_1 , S_2 , q) от двух независимых аргументов (t — время, r — эйлерова координата). Динамические процессы в твердых телах протекают за времена настолько малые, что теплопроводность не успевают повлиять на термодинамические характеристики вещества. Поэтому в урав-

нении (1.133) опустим член $\partial q/\partial r$, описывающий распространение тепла. После этого число искомых функций сократится до шести, а уравнения примут вид

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} - \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{(\alpha-1)U}{r} = 0, \quad (7.13)$$

$$\frac{1}{V} \frac{dU}{dt} + \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial S_1}{\partial r} + \frac{(\alpha-1)(S_1 - S_2)}{r}, \quad (7.14)$$

$$\frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} = S_1 V \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{(\alpha-1)S_2 UV}{r}. \quad (7.15)$$

В случае, когда $S_1 = S_2 = 0$, уравнения (7.13)–(7.15) описывают поведение идеальной среды, в которой дисторсия (изменение формы макрочастицы) всегда отсутствует. При $S_1 \neq 0$ и $S_2 \neq 0$ уравнения (7.13)–(7.15) описывают поведение твердого тела или жидкости. При этом согласно уравнениям (1.144)–(1.145) члены, стоящие в правой части уравнения (7.15), описывают скорость изменения со временем энергии формоизменения макрочастицы.

Из термодинамики известно, что среди множества термодинамических функций, характеризующих состояние вещества, две являются независимыми, а остальные выражаются через них. Поскольку в (7.13)–(7.15) содержатся три термодинамические функции, для замыкания следует добавить одно уравнение состояния

$$F(P, V, E) = 0. \quad (7.16)$$

Конкретные уравнения состояния подробно изложены в гл. 2.

Компоненты девиатора скоростей деформаций de_i/dt выражаются через производные U и V уравнениями (1.138), (1.139), которые запишем в виде

$$\frac{de_1}{dt} = \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{3V} \frac{dV}{dt}, \quad (7.17)$$

$$\frac{de_2}{dt} = \frac{(\alpha-1)(4-\alpha)}{2} \frac{U}{r} - \frac{1}{3V} \frac{dV}{dt}. \quad (7.18)$$

Следовательно, для полного замыкания системы уравнений (7.13)–(7.18) нужно добавить определяющие уравнения, связывающие S_i с e_i или с de_i/dt .

В области упругих деформаций такими уравнениями являются уравнения Гука (2.197), которые запишем следующим образом:

$$\frac{dS_1}{dt} = 2G \frac{de_1}{dt}; \quad \frac{dS_2}{dt} = 2G \frac{de_2}{dt}. \quad (7.19)$$

В области упругопластических деформаций может быть использована в соответствии с выводами § 12 гл. 2 теория Прандтля — Рейсса с уравнениями

$$\frac{dS_1}{dt} + \frac{2G}{\lambda} S_1 = 2G \frac{de_1}{dt}, \quad (7.20)$$

$$\frac{dS_2}{dt} + \frac{2G}{\lambda} S_2 = 2G \frac{de_2}{dt}, \quad (7.21)$$

где

$$\frac{2G}{\lambda} = \frac{3G}{Y^2} \sum_{i=1}^3 S_i \frac{de_i}{dt} - \frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}, \quad (7.22)$$

а Y — предел текучести. В области пластических деформаций

$$S_1 = \lambda \frac{de_1}{dt}, \quad S_2 = \lambda \frac{de_2}{dt}, \quad (7.23)$$

где

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{3}{2Y^2} \sum_{i=1}^3 S_i \frac{de_i}{dt}. \quad (7.24)$$

Напомним, что упругими называются такие деформации, которые полностью исчезают после снятия нагрузки. Область упругих деформаций определяется неравенством

$$\sum_{i=1}^3 S_i^2 \leq \frac{2}{3} Y_y^2, \quad (7.25)$$

где Y_y — предел упругости. В дальнейшем для описания упрочнения вещества будет предполагаться, что величина Y зависит от двух термодинамических функций, например от V и \mathcal{E} . В этом случае можно не выделять значений пределов упругости и пластичности. Пределом упругости можно считать начальное значение $Y(V, \mathcal{E})$

$$Y_y = Y(V_0, \mathcal{E}_0). \quad (7.26)$$

Поскольку в области упругого деформирования все характеристики вещества изменяются обратимо, уравнение производства энтропии должно иметь в этой области вид

$$T \frac{dS}{dt} = 0, \quad (7.27)$$

где S — энтропия. Запишем уравнение энергии (7.15) в более общем виде, содержащем энергию изменения формы макрочастицы

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} + P \frac{dV}{dt} = \frac{dW}{dt}, \quad (7.28)$$

где

$$\frac{dW}{dt} = V \sum_{i=1}^3 S_i \frac{de_i}{dt}. \quad (7.29)$$

В области упругих деформаций $e_i = e_{iy}$, $W = W_y$. В силу (7.27), (7.28) в этом случае внутренняя энергия \mathcal{E} может быть записана как сумма

$$\mathcal{E} = E + W_y, \quad (7.30)$$

где E — энергия всестороннего упругого сжатия, W_y — энергия упругого формоизменения. Из (7.28)–(7.30) следуют определяющие уравнения для P и S_i в области упругих деформаций

$$P = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S, e_i}, \quad S_i = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial W_y}{\partial e_i} \right)_{S, V}. \quad (7.31)$$

Пластические деформации вещества полностью необратимы. Следовательно, уравнение производства энтропии в области пластических деформаций имеет вид

$$T \frac{dS}{dt} = \frac{dW_{\Pi}}{dt} = V \sum_{i=1}^3 S_i \frac{de_{in}}{dt}. \quad (7.32)$$

Но это значит, что энергия формоизменения в области пластических деформаций полностью переходит в тепло.

Из рассматриваемых трех видов деформаций наиболее сложной является упругопластическая деформация, поскольку часть деформаций является обратимой, а часть — нет. Запишем (7.22) так:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{3}{2Y^2V} \frac{dW}{dt} \cdot \Phi. \quad (7.33)$$

Величину

$$\Phi = 1 - Y \frac{dY}{dt} / 3G \sum_{i=1}^3 S_i \frac{de_i}{dt} \quad (7.34)$$

назовем мерой пластичности упругопластического деформирования. При $\Phi \rightarrow 0$ упругопластическое деформирование превращается в упругое, так как в этом случае $\frac{1}{\lambda} \rightarrow 0$ и уравнения (7.20), (7.21) превращаются в уравнения Гука. При $\Phi \rightarrow 1$ значение λ , которое находится из (7.33), стремится к λ_{Π} , определяемому уравнением (7.24), и упругопластическое деформирование переходит в пластическое. Это следует также из (7.34), поскольку $\frac{dY}{dt} \rightarrow 0$ при $\frac{dW}{dt} \rightarrow 0$ и $\Phi \rightarrow 1$.

Из уравнений, справедливых в области упругопластического деформирования

$$\sum_{i=1}^3 S_i^2 = \frac{2}{3} Y^2, \quad S_i = 2Ge_{iy}, \quad \frac{dS_i}{dt} = 2G \frac{de_{iy}}{dt} \quad (7.35)$$

следует, что

$$Y \frac{dY}{dt} = 3G \sum_{i=1}^3 S_i \frac{de_{iy}}{dt} = \frac{3G}{V} \frac{dW_y}{dt}. \quad (7.36)$$

Из (7.34) и (7.36) получим уравнение

$$\frac{dW_y}{dt} = (1 - \Phi) \frac{dW}{dt}. \quad (7.37)$$

Подставим далее $e_i = e_{iy} + e_{in}$ в (7.29). В результате будем иметь

$$\frac{dW}{dt} = V \sum_{i=1}^3 S_i \frac{de_{iy}}{dt} + V \sum_{i=1}^3 S_i \frac{de_{in}}{dt} = \frac{dW_y}{dt} + \frac{dW_{\Pi}}{dt}. \quad (7.38)$$

Из (7.37) и (7.38) вытекает связь между скоростями изменения

пластической и полной энергии дисторсии:

$$\frac{dW_{\Pi}}{dt} = \varphi \frac{dW}{dt}. \quad (7.39)$$

Подставив (7.39) в (7.32), получим уравнение производства энтропии в области упругопластического деформирования в виде

$$T \frac{dS}{dt} = V \left(\sum_{i=1}^3 S_i \frac{de_i}{dt} - \frac{Y}{3G} \frac{dY}{dt} \right). \quad (7.40)$$

Из этого уравнения следует условие возрастания энтропии

$$F = \sum_{i=1}^3 S_i \frac{de_i}{dt} - \frac{Y}{3G} \frac{dY}{dt} > 0. \quad (7.41)$$

Это неравенство является условием принадлежности точки в пространстве рассматриваемых функций к области упругопластического деформирования. Неравенство (7.41) справедливо и в том случае, когда $\frac{dY}{dt} = 0$ и деформация превращается в пластическую. Если в (7.41) заменить неравенство равенством, то это будет соответствовать случаю, когда упругопластическое деформирование превращается в упругое. Резюмируя сказанное, выпишем окончательно условие принадлежности состояния вещества к одной из трех областей деформирования.

Область упругого деформирования определяется условиями

$$\sum_{i=1}^3 S_i^2 \leq \frac{2}{3} Y_y^2, \quad \text{или} \quad F \leq 0; \quad (7.42)$$

область пластического деформирования —

$$F > 0 \quad \text{и} \quad Y = Y_{\Pi} = \text{const}; \quad (7.43)$$

область упругопластического деформирования —

$$F > 0, \quad \frac{dY}{dt} \neq 0, \quad Y < Y_{\Pi}. \quad (7.44)$$

В большую часть приведенных выше уравнений входят полные производные по времени t , что означает дифференцирование по времени вдоль линий тока — траекторий частиц. Перейдем к лагранжевой координате M , которая сохраняется для каждой частицы при изменении t . В этом случае уравнения физической модели примут вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial (\alpha r^{\alpha-1} U)}{\partial M} = 0, \quad (7.45)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \alpha r^{\alpha-1} \frac{\partial (P - S_1)}{\partial M} - \frac{(\alpha - 1)(S_1 - S_2)V}{r} = 0, \quad (7.46)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t} - \varphi \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \quad (7.47)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \alpha S_1 \frac{\partial r^{\alpha-1} U}{\partial M} - \frac{(\alpha-1)(S_1 - S_2) UV}{r}, \quad (7.48)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} - (1 - \varphi) \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \quad (7.49)$$

$$\varphi = 1 - VY \frac{\partial Y}{\partial t} / 3G \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (7.50)$$

$$P = P(V, E), \quad (7.51)$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial t} - \frac{2\alpha}{3V} \frac{\partial r^{\alpha-1} U}{\partial M} + \frac{(\alpha-1)U}{r} = 0, \quad (7.52)$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial t} + \frac{\alpha}{3V} \frac{\partial r^{\alpha-1} U}{\partial M} - \frac{(\alpha-1)(4-\alpha)U}{2r} = 0, \quad (7.53)$$

$$A \frac{\partial S_i}{\partial t} + BS_i - C \frac{\partial e_i}{\partial t} = 0. \quad (7.54)$$

В уравнении (7.54) функции A , B , C имеют следующие значения:
— в области упругих деформаций

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 2G. \quad (7.55)$$

— в области пластических деформаций

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 2VY^2/3 \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (7.56)$$

— в области упругопластических деформаций

$$A = 1, \quad B = \frac{3G}{VY^2} \frac{\partial W}{\partial t} - \frac{1}{Y} \frac{\partial Y}{\partial t}, \quad C = 2G. \quad (7.57)$$

Положение каждой частицы в пространстве определяется ее эйлеровой координатой $r = r(t, M)$, для нахождения которой можно использовать одно из уравнений

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)_M - U = 0, \quad (7.58)$$

$$\left(\frac{\partial r^\alpha}{\partial M} \right)_t - V = 0. \quad (7.59)$$

Уравнения (7.45), (7.58) и (7.59) зависимы: одно из них следует из двух других.

Уравнения (7.45)–(7.49) допускают ряд следствий. Получим некоторые из них. Умножим (7.46) на U и сложим с (7.47) и то, что получилось, сложим с (7.49). В результате будем иметь

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial M} (\alpha r^{\alpha-1} U (P - S_1)) = 0. \quad (7.60)$$

Умножив (7.45) на $-P$ и сложив (7.47), получим еще одно следствие

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial (\alpha r^{\alpha-1} U)}{\partial M} - \varphi \frac{\partial W}{\partial t} = 0. \quad (7.61)$$

Если (7.48) подставить в (7.47), (7.49), (7.50) и (7.61), то будет еще четыре следствия основных уравнений:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t} - \varphi \left(S_1 \frac{\partial (\alpha r^{\alpha-1} U)}{\partial M} - \frac{(\alpha-1)(S_1 - S_2)UV}{r} \right) = 0, \quad (7.62)$$

$$\frac{\partial W_y}{\partial t} - (1 - \varphi) \left(S_1 \frac{\partial (\alpha r^{\alpha-1} U)}{\partial M} - \frac{(\alpha-1)(S_1 - S_2)UV}{r} \right) = 0, \quad (7.63)$$

$$\varphi = 1 - VY \frac{\partial Y}{\partial t} \Big/ 3G \left(S_1 \frac{\partial (\alpha r^{\alpha-1} U)}{\partial W} - \frac{(\alpha-1)(S_1 - S_2)UV}{r} \right), \quad (7.64)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + (P - \varphi S_1) \frac{\partial (\alpha r^{\alpha-1} U)}{\partial M} + \frac{(\alpha-1)(S_1 - S_2)UV\varphi}{r} = 0. \quad (7.65)$$

Наконец, если (7.52) и (7.53) умножить на C и сложить с (7.54), то получим еще два следствия:

$$A \frac{\partial S_1}{\partial t} + BS_1 - C \left(\frac{2}{3V} \frac{\partial (\alpha r^{\alpha-1} U)}{\partial M} - \frac{(\alpha-1)U}{r} \right) = 0, \quad (7.66)$$

$$A \frac{\partial S_2}{\partial t} + BS_2 + C \left(\frac{1}{3V} \frac{\partial (\alpha r^{\alpha-1} U)}{\partial M} + \frac{(\alpha-1)(4-\alpha)U}{2r} \right) = 0. \quad (7.67)$$

Уравнения (7.47)–(7.50) записаны в таком виде, что в области упругих деформаций, где $\varphi = 0$, процессы дилатации и дисторсии описываются независимо друг от друга. В области пластических деформаций энергия дисторсии необратимо переходит в тепловую энергию. Вернемся к рассмотрению энтропии, рост которой прямо связан с энергией дисторсии в области пластических деформаций.

Из (7.28)–(7.30) и (7.38) следует уравнение

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial t}.$$

Подставив сюда $\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial t}$ из уравнения (7.32), которое является первой формой уравнения производства энтропии, получим уравнение производства энтропии

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (7.68)$$

Таким образом, выделение из внутренней энергии \mathcal{E} энергии упругой дисторсии W_y приводит к уравнению для E , совпадающему с уравнением для идеальной среды. Это означает, что E зависит только от V и S и скорость изменения E вдоль линии тока имеет вид

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Подставив сюда известные из термодинамики уравнения

$$P = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S, \quad T = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V,$$

получим (7.68). Совпадение (7.68) с аналогичным уравнением для идеальной среды означает, что введенная ранее энергия E может

использоваться для нахождения давления P по уравнениям состояния, изложенным в гл. 2.

Из (7.47) и (7.68) следует, что при отличных от нуля дилатации и дисторсии уравнением производства энтропии вдоль линии тока будет

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = \varphi \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (7.69)$$

В случае упругих деформаций при $\varphi = 0$ энтропия оказывается постоянной вдоль линии тока. В случае пластических деформаций при $\varphi = 1$ скорость роста энтропии оказывается наибольшей. Уравнение (7.69) точно так же, как и уравнения (7.60), (7.61), является следствием из уравнения (7.47) и термодинамических уравнений.

Анализ других термодинамических функций показывает, что среди них нет функций, значения которых сохранялись бы постоянными вдоль траектории.

§ 3. Метод построения разностных уравнений

Для численного интегрирования дифференциальные уравнения заменяются разностными. Далее будут рассматриваться разностные уравнения в дифференциальной форме, которая получается следующим образом. Пусть исходное уравнение

$$\frac{df(x)}{dx} + \varphi(x) = 0$$

аппроксимировано разностным уравнением

$$\frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 - (1 - \alpha)h)}{h} + \varphi(x_0) = 0. \quad (7.70)$$

Разложим $f(x)$ в ряды Тэйлора в точке x_0 и подставим их в (7.70). В результате получим

$$\frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 - (1 - \alpha)h)}{h} + \varphi(x_0) = \frac{df}{dx} + \varphi(x_0) + \omega(x_0) = 0,$$

где $\omega(x_0) = \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} (1 - 2\alpha)h + \frac{1}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} (1 - 3\alpha + 3\alpha^2)h^2 + \dots$

Поскольку левая часть уравнения тождественно равна правой, вместо (7.70) можно рассматривать дифференциальное уравнение, которое и является дифференциальной формой разностного уравнения (7.70). Величина ω с обратным знаком есть погрешность аппроксимации исходного дифференциального уравнения разностным. Если найдется такое α , при котором члены в выражении для ω , содержащие h^k , обращаются в нуль для $k = 1, 2, 3, \dots, k$ независимо от решения, то погрешность аппроксимации есть величина $(k + 1)$ -го порядка малости относительно малого шага h . В рассматриваемом случае ω есть величина второго порядка малости, так как при $\alpha = 0.5$ множитель при h обращается в нуль, а множитель при h^2

в нуль не обращается. Вопросы исследования дифференциальных форм разностных уравнений для уравнений газовой динамики подробно рассмотрены в [11, 12].

Разностные уравнения, аппроксимирующие (7.45) — (7.69), будем по аналогии с [7—10] исследовать в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial(\alpha r^{\alpha-1}U)}{\partial M} = \omega_1, \quad (7.71)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \alpha r^{\alpha-1} \frac{\partial(P - S_1)}{\partial M} - \frac{(\alpha - 1)(S_1 - S_2)V}{r} = \omega_2, \quad (7.72)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(E + 0.5U^2 + W_y) + \frac{\partial(\alpha r^{\alpha-1}U(P - S_1))}{\partial M} = \omega_3, \quad (7.73)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} - U = \omega_4, \quad (7.74)$$

$$\frac{\partial W_y}{\partial t} - (1 - \varphi) \frac{\partial W}{\partial t} = \omega_5, \quad (7.75)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} - S_1 \frac{\partial(\alpha r^{\alpha-1}U)}{\partial M} + \frac{(\alpha - 1)(S_1 - S_2)UV}{r} = \omega_6, \quad (7.76)$$

$$A \frac{\partial S_1}{\partial t} + BS_1 - C \left(\frac{2}{3V} \frac{\partial(\alpha r^{\alpha-1}U)}{\partial M} - \frac{(\alpha - 1)U}{r} \right) = \omega_7, \quad (7.77)$$

$$A \frac{\partial S_2}{\partial t} + BS_2 + C \left(\frac{1}{3V} \frac{\partial(\alpha r^{\alpha-1}U)}{\partial M} - \frac{(\alpha - 1)(4 - \alpha)U}{2r} \right) = \omega_8. \quad (7.78)$$

Система уравнений (7.71) — (7.78) содержит восемь уравнений (три закона сохранения, уравнение линии тока, уравнения для энергии дисторсии W и упругой дисторсии W_y и два уравнения, связывающих компоненты девиатора напряжений с компонентами девиаторов деформаций и скоростей деформаций) и девять функций: P , V , E , r , U , S_1 , S_2 , W , W_y . Девятым уравнением, делающим систему определенной, является уравнением состояния $P = P(V, E)$. К уравнениям (7.71) — (7.78) добавим еще несколько следствий, полученных выше и содержащих только перечисленные функции:

$$\frac{\partial r^\alpha}{\partial M} - V = \omega_9, \quad (7.79)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t} - \varphi \frac{\partial W}{\partial t} = \omega_{10}, \quad (7.80)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial(\alpha r^{\alpha-1}U)}{\partial M} - \varphi \frac{\partial W}{\partial t} = \omega_{11}. \quad (7.81)$$

Кроме этих следствий будем рассматривать уравнение, определяющее диссипацию энергии при пластических деформациях:

$$T \frac{\partial S}{\partial t} - \varphi \frac{\partial W}{\partial t} = \omega_{12}. \quad (7.82)$$

Здесь S — энтропия, T — температура, которая находится из уравнения состояния в виде $T = T(V, E)$. Поскольку уравнение (7.82)

добавлено с целью определения скорости диссипации энергии $T \frac{\partial S}{\partial t}$, температура сама по себе интереса не представляет и выделяться в качестве отдельной искомой функции не будет.

Величины ω_i ($i = 1, 2, \dots, 13$), являющиеся погрешностями аппроксимации уравнений физической модели уравнениями (7.71) — (7.82), имеют вид

$$\omega_i = \sum_{k=0, l=0}^{\infty} A_{ikl} \tau^k h^l, \quad k + l \geq 1, \quad (7.83)$$

где A_{ikl} содержат частные производные функций, входящих в соответствующее разностное уравнение, и не зависят от τ — шага сетки по переменной t и от h — шага сетки по переменной M .

Система уравнений (7.71) — (7.82) содержит 13 уравнений и 10 искомых величин и является, таким образом, переопределенной. Для нахождения численного решения необходимо использовать лишь 10 разностных уравнений. В ряде случаев при конструировании разностной схемы предпочтение отдается не законам сохранения, а их следствиям [2, 6, 9], но при этом набор разностных уравнений должен обеспечивать определение всех искомых функций, т. е. обладать полнотой. Изложим процедуру отбора разностных уравнений для построения разностной схемы.

Перейдем от системы разностных уравнений к системе уравнений, содержащих ω_i в качестве неизвестных функций. Вначале выберем одну (любую) из входящих в разностные уравнения производных. После этого все уравнения разделятся на две группы: в первую попадут уравнения, содержащие эту производную, во вторую — не содержащие. В уравнениях первой группы исключим выбранную производную и сравним левые части полученных уравнений с левыми частями уравнений второй группы. При совпадении левых частей приравниваем правые части и получаем уравнения для ω_i . После исключения выбранной производной следствия уравнений первой группы и уравнения второй группы образуют новую систему разностных уравнений, в которой снова выбирается одна из частных производных, и вся процедура повторяется.

Проиллюстрируем процедуру построения системы уравнений относительно ω_4 на конкретном примере. Умножим (7.74) на $\alpha r^{\alpha-1}$ и продифференцируем по M

$$\frac{\partial^2 r^\alpha}{\partial M \partial t} - \frac{\partial (\alpha r^{\alpha-1} U)}{\partial M} = \frac{\partial (\alpha r^{\alpha-1} \omega_4)}{\partial M}. \quad (7.84)$$

Продифференцируем (7.79) по t и вычтем из (7.84). В результате будем иметь

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial (\alpha r^{\alpha-1} U)}{\partial M} = \bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_9, \quad (7.85)$$

где

$$\bar{\omega}_4 = \frac{\partial (\alpha r^{\alpha-1} \omega_4)}{\partial M}, \quad \bar{\omega}_9 = \frac{\partial \omega_9}{\partial t}.$$

Левая часть уравнения (7.85) совпадает с левой частью (7.71). Следовательно, первое уравнение для ω_i имеет вид

$$\omega_1 - \bar{\omega}_4 + \bar{\omega}_9 = 0. \quad (7.86)$$

Далее исключим $\frac{\partial V}{\partial t}$ из (7.71) и (7.80)

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial (\alpha r^{\alpha-1} U)}{\partial M} - \Phi \frac{\partial W}{\partial t} = \omega_{10} - P \omega_1. \quad (7.87)$$

Вычтем (7.87) из (7.81) и получим второе уравнение для

$$P \omega_1 - \omega_{10} + \omega_{11} = 0. \quad (7.88)$$

Исключим теперь $\frac{\partial U}{\partial t}$ из (7.72) и (7.73)

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial W_y}{\partial t} + P \frac{\partial (\alpha r^{\alpha-1} U)}{\partial M} - \left(S_1 \frac{\partial (\alpha r^{\alpha-1} U)}{\partial M} - \frac{(\alpha-1)(S_1 - S_2)UV}{r} \right) = \omega_3 - U \omega_2. \quad (7.89)$$

Левая часть уравнения (7.89) не совпадает ни с одной из левых частей уравнений системы, поэтому добавляем его к оставшимся уравнениям системы для дальнейшего рассмотрения.

В качестве следующего шага исключим $\frac{\partial E}{\partial t}$ из (7.81) и (7.89)

$$\frac{\partial W_y}{\partial t} + \Phi \frac{\partial W}{\partial t} - \left(S_1 \frac{\partial (\alpha r^{\alpha-1} U)}{\partial M} - \frac{(\alpha-1)(S_1 - S_2)UV}{r} \right) = \omega_3 - U \omega_2 - \omega_{11}. \quad (7.90)$$

Это уравнение также остается для рассмотрения, которое на данном этапе ограничено уравнениями (7.75), (7.76) и (7.90), содержащими производные $\frac{\partial W_y}{\partial t}$, $\frac{\partial W}{\partial t}$ и $\frac{\partial (\alpha r^{\alpha-1} U)}{\partial M}$.

Исключим $\frac{\partial W_y}{\partial t}$ из (7.75) и (7.90). Левая часть полученного уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial t} - \left(S_1 \frac{\partial (\alpha r^{\alpha-1} U)}{\partial M} - \frac{(\alpha-1)(S_1 - S_2)UV}{r} \right) = \omega_3 - U \omega_2 - \omega_5 - \omega_{11}$$

совпадает с левой частью (7.76), что приводит к последнему уравнению для

$$U \omega_2 - \omega_3 + \omega_5 + \omega_6 + \omega_{11} = 0. \quad (7.91)$$

Таким образом, для определения $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_9, \omega_{10}, \omega_{11}$ получена система уравнений

$$\omega_1 - \bar{\omega}_4 + \bar{\omega}_9 = 0,$$

$$P \omega_1 - \omega_{10} + \omega_{11} = 0, \quad (7.92)$$

$$U \omega_2 - \omega_3 + \omega_5 + \omega_6 + \omega_{11} = 0.$$

Матрица коэффициентов имеет три строки и двенадцать столбцов. Определитель, составленный из коэффициентов при ω_9, ω_{10} и ω_{11} , отличен от нуля, следовательно, ранг матрицы коэффициентов полной системы равен трем. Система уравнений (7.92) не содержит

ω_7 , ω_8 и ω_{12} , поскольку уравнения (7.77), (7.78) и (7.82) не рассматривались при построении уравнений для ω_i . Система трех уравнений (7.92) содержит девять неизвестных ω_i . Это значит, что шесть из них могут выбираться независимо, так же как и ω_7 , ω_8 и ω_{12} . Оставшиеся ω_i могут быть выражены через независимые ω_i , если ранг матрицы коэффициентов соответствующей системы уравнений будет равен рангу расширенной матрицы, т. е. трем. Например, если в качестве независимых взять ω_2 , ω_4 , ω_5 , ω_6 , ω_9 , ω_{10} , то для определения ω_1 , ω_3 и ω_{11} получается система уравнений

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_9, \\ P\omega_1 + \omega_{11} &= \omega_{10}, \\ -\omega_3 + \omega_{11} &= -U\omega_2 - \omega_5 - \omega_6.\end{aligned}$$

Определитель этой системы

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ P & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

следовательно, ранг матрицы коэффициентов равен трем, решение существует и имеет вид

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_9, \\ \omega_3 &= U\omega_2 - P\bar{\omega}_4 + \omega_5 + \omega_6 + P\bar{\omega}_9 + \omega_{10}, \\ \omega_{11} &= -P\bar{\omega}_4 + P\bar{\omega}_9 + \omega_{10}.\end{aligned}$$

Таким образом, разностные схемы, содержащие уравнения (7.72), (7.74)–(7.76), (7.79), (7.80), дают возможность найти все искомые функции.

Рассмотрим пример, когда выбор независимых разностных уравнений не позволяет найти все искомые функции. Так, если в качестве независимых ω_i взять ω_1 , ω_2 , ω_4 , ω_5 , ω_6 , ω_9 , то для определения ω_3 , ω_{10} , ω_{11} из (7.92) получаются лишь два уравнения

$$\begin{aligned}\omega_{10} - \omega_{11} &= P\omega_1, \\ \omega_3 - \omega_{11} &= U\omega_2 + \omega_5 + \omega_6.\end{aligned}$$

Определитель этой системы

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, ранг матрицы не равен трем и решения не существует. Разностные схемы такого типа являются неполными, так как не позволяют найти всех функций, составляющих решения. Так, в рассматриваемом случае среди независимых разностных уравнений нет уравнения, содержащего $\frac{\partial E}{\partial t}$.

Конструирование разностной схемы на первом этапе заключается в выборе нужного количества уравнений из системы законов сохранения, определяющих уравнений и их следствий и обосновании ее полноты. Второй этап заключается в выборе сетки и определении конкретных выражений для ω . Это относится ко всем точкам сетки, в том числе и к граничным. Следуя установившейся терминологии [6], будем называть уравнения (7.71) и (7.73) уравнениями в дивергентной форме, остальные — уравнениями в недивергентной форме, или, проще, дивергентными или недивергентными уравнениями.

В литературе описаны различные по своим свойствам методы численного интегрирования уравнений механики сплошной среды [14—20]. Как правило, свойства разностных схем проверяются теоретическим исследованием аппроксимации и устойчивости и подтверждаются сопоставлением результатов математического и физического экспериментов. Вопросы изучения консервативности, и тем более локальной консервативности, как правило, обсуждаются мало.

Изложим, следуя [9], метод исследования локальной консервативности разностных схем для уравнений механики сплошной среды. При этом предполагается, что у читателя уже есть некоторые навыки и опыт построения и применения разностных методов для математического моделирования волновых процессов в твердых телах.

§ 4. Консервативность и диссипативные свойства разностной схемы

Определение 7.1. Консервативностью называется свойство разностной схемы сохранять без изменения какую-либо функцию или комбинацию функций, входящих в уравнения (7.71)—(7.82).

Среди функций, входящих в уравнения (7.71)—(7.82), только $S = \text{const}$ вдоль линии тока в области упругой деформации. Кроме того, вдоль линии тока должна сохраняться массовая координата M . Поэтому ограничимся рассмотрением свойств разностных схем сохранять точно или приближенно M и S вдоль линии тока (M - и S -консервативность). Поскольку эти свойства проявляются на каждой линии тока, они являются локальными свойствами консервативности.

Доказывая необходимые и достаточные условия M - и S -консервативности, будем существенно использовать теорему о преобразуемости форм разностных уравнений механики сплошной среды.

Теорема 7.1. *Дивергентные разностные уравнения механики сплошной среды преобразуются с помощью других уравнений разностной схемы в уравнения недивергентной формы, и наоборот.*

Будем использовать теорему 7.1 без доказательства, которое приведено в [9].

Теорема 7.2. *Необходимое и достаточное условие M -консервативности разностной схемы имеет вид*

$$\frac{\partial \omega_g}{\partial t} = \omega_M, \quad (7.93)$$

где

$$\omega_M = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{2k}}{2^k (2k+1)!} \frac{\partial^{2(k+1)} r, \alpha}{\partial t \partial M^{2k+1}}.$$

Доказательство. Рассмотрим разностное уравнение сохранения массы в недивергентной форме:

$$\frac{\Delta r, \alpha}{h} = V, \quad (7.94)$$

где $\Delta r, \alpha = r_1^\alpha - r_{-1}^\alpha$ — объем, занимаемый в момент t_0 произвольно выбранной малой массой $h = M_1 - M_{-1}$. Разложим $r_1^\alpha = r^\alpha(t_0, M_1)$ и $r_{-1}^\alpha = r^\alpha(t_0, M_{-1})$ в ряды Тейлора в точке $(t_0, M_0 = 0.5(M_1 + M_{-1}))$ и подставим в (7.94). В результате будем иметь

$$\frac{\Delta r, \alpha}{h} - V = \frac{\partial r, \alpha}{\partial M} - V + \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

где

$$a_k = \frac{h^{2k}}{2^{2k} (2k+1)!} \cdot \frac{\partial^{2k+1} r, \alpha}{\partial M^{2k+1}}.$$

Вычтем из этого уравнения уравнение (7.79)

$$\omega_9 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 0. \quad (7.95)$$

Продифференцировав (7.95) по t , получим уравнение производства массы в виде

$$L \frac{\partial h}{\partial t} = \dot{\omega}_M - \frac{\partial \omega_9}{\partial t}, \quad L = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{h} a_k. \quad (7.96)$$

Рассмотрим вначале случай, когда $\omega_M = \partial \omega_9 / \partial t$ из-за $L = 0$. Это возможно при $r^\alpha = a_1(t) + M a_2(t) + M^2 a_3(t)$ и при любых ограничениях a_1, a_2, a_3 , ибо в таком случае $\partial \omega_9 / \partial t = 0$ и уравнение (7.96) становится точным уравнением, обладающим свойством M -консервативности ($\partial h / \partial t = 0$) без всяких условий. Далее будем считать, что $L \neq 0$.

Необходимость. Предположим, что (7.93) не имеет места, т. е. $\omega_M \neq \partial \omega_9 / \partial t$. Тогда в силу (7.96) $\partial h / \partial t \neq 0$ вдоль линии тока и масса сеточного интервала не сохраняется.

Достаточность. Пусть $\partial h / \partial t = 0$. Тогда из (7.96) следует (7.93).

Теорема доказана.

Следствие 7.1. Разностная схема, содержащая уравнение сохранения массы (7.79) в недивергентном виде, всегда M -консервативна.

Следствие 7.2. Разностная схема, содержащая уравнение сохранения массы (7.71) в дивергентном виде, M -консервативна при

условий

$$\frac{\partial}{\partial M} (\alpha r^{\alpha-1} \omega_4) - \omega_1 = \omega_M. \quad (7.97)$$

Это условие получается следующим образом. Умножим (7.74) на $\alpha r^{\alpha-1}$ и продифференцируем по M

$$\frac{\partial^2 r^\alpha}{\partial t \partial M} - \frac{\partial (\alpha r^{\alpha-1} U)}{\partial M} = \frac{\partial (\alpha r^{\alpha-1} \omega_4)}{\partial M}. \quad (7.98)$$

Продифференцируем (7.79) по t

$$\frac{\partial^2 r^\alpha}{\partial t \partial M} - \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial \omega_g}{\partial t}. \quad (7.99)$$

Вычтем (7.99) из (7.98)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha r^{\alpha-1} U)}{\partial M} = \frac{\partial (\alpha r^{\alpha-1} \omega_4)}{\partial M} - \frac{\partial \omega_g}{\partial t}. \quad (7.100)$$

Из (7.74), (7.100) и (7.93) следует условие (7.97).

Поскольку ω_M и $\partial \omega_g / \partial t$ — погрешности аппроксимации вида (7.83), уравнение производства массы (7.96) в M -неконсервативных схемах имеет вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \sum_{k=0, l=0}^{\infty} B_{Mkl} \tau^k h^k, \quad k+l \geq 1. \quad (7.101)$$

Определение 7.2. n -е дифференциальное приближение разностной схемы (д.н. n) является M -консервативным, если в уравнении производства массы (7.101) будет $B_{Mkl} = 0$ для всех $k+l \leq n$.

Теорема 7.3. *Необходимое и достаточное условие S -консервативности разностной схемы в области упругих деформаций имеет вид*

$$\omega_{12} = 0. \quad (7.102)$$

Необходимость. Предположим, что $\omega_{12} \neq 0$. Подставив ω_{12} в (7.82) при $\varphi = 0$, получим $\partial S / \partial t \neq 0$. Энтропия изменяется.

Достаточность. Пусть $\partial S / \partial t = 0$. Подставив это значение в (7.82) при $\varphi = 0$, получим (7.102).

Теорема доказана.

Чтобы оценить диссипацию энергии, определяемую погрешностями аппроксимации уравнений разностной схемы, нужно построить уравнение производства энтропии разностной схемы. С этой целью исключим из (7.68) и (7.80) $\frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t}$. В результате получим

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = \varphi \frac{\partial W}{\partial t} + \omega_{10}. \quad (7.103)$$

Сравнивая (7.103) с (7.82), будем иметь

$$\omega_{12} = \omega_{10}. \quad (7.104)$$

Уравнение производства энтропии разностной схемы зависит от того, какие ω_i выбраны в качестве независимых. Например, для рассмотренных в § 3 разностных схем с независимыми $\omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_9, \omega_{10}$ уравнение производства энтропии имеет вид (7.103), где ω_{10} содержит производные функций V и E . Другие погрешности аппроксимации на диссипацию энергии не влияют.

В качестве примера, когда погрешности аппроксимации нескольких уравнений влияют на диссипацию энергии, рассмотрим схемы, в которых независимыми ω_i являются следующие: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$. Для определения $\omega_9, \omega_{10}, \omega_{11}$ из (7.92) получим систему уравнений

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_9 &= -\omega_1 + \bar{\omega}_4, \\ -\omega_{10} + \omega_{11} &= -P\omega_1, \\ \omega_{11} &= -U\omega_2 + \omega_3 - \omega_5 - \omega_6.\end{aligned}$$

Определитель этой системы отличен от нуля, значит, решение существует и

$$\omega_{10} = P\omega_1 - U\omega_2 + \omega_3 - \omega_5 - \omega_6.$$

Следовательно, уравнение производства энтропии для рассматриваемого класса разностных схем получается после подстановки ω_{10} в (7.103) в виде

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = \varphi \frac{\partial W}{\partial t} + P\omega_1 - U\omega_2 + \omega_3 - \omega_5 - \omega_6. \quad (7.105)$$

В таких разностных схемах следует специально побеспокоиться, чтобы исключить зависимость S от U . Если этого не сделать, то разностная схема будет неинвариантной относительно преобразования Галилея и изменение энтропии будет зависеть от скорости перемещения вещества, что противоречит принципам термодинамики.

Оценка изменения энтропии вдоль линии тока с течением времени является эффективным средством локального контроля точности вычисления термодинамических величин. Поскольку все ω_i имеют вид (7.83), то из (7.103), (7.105) и аналогичных выражений для разных наборов независимых ω_i следует уравнение производства энтропии в общей форме:

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = \varphi \frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{k=0, l=0}^{\infty} B_{skl} \tau^k h^l, \quad k + l \geq 1. \quad (7.106)$$

Определение 7.3. n -е дифференциальное приближение разностной схемы является S -консервативным, если в уравнении производства энтропии (7.106) будет $B_{skl} = 0$ для всех $k + l \leq n$.

Определение 7.4. Разностная схема называется термодинамически нормальной, если скорость производства энтропии в ней не зависит от массовой скорости вещества и его ускорений. В противном случае разностная схема называется термодинамически аномальной.

Определение 7.5. n -е дифференциальное приближение разностной схемы называется термодинамически нормальным, если функции B_{skl} в (7.106), для которых $k + l \leq n$, не содержат массовой скорости вещества и его ускорений, и термодинамически аномальным, если содержат.

Очевидно, что изменение энтропии из-за погрешностей аппроксимации не должно превосходить ее изменения в характерных физических процессах. В [7—9] в качестве порогового уровня диссипации энергии предложено использовать величину ω_s , характеризующую диссипацию энергии на слабой ударной волне

$$\omega_s = -\frac{\tau^2}{12} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^3 + \dots \quad (7.107)$$

Определение 7.6. Разностная схема называется слабо диссипативной, если $|\omega_{10}| \leq |\omega_s|$, и сильно диссипативной, если $|\omega_{10}| > |\omega_s|$.

В области упругих деформаций $\varphi = 0$ и в уравнении (7.106) изменение энтропии определяется только свойствами разностной схемы. В областях пластических и упругопластических деформаций $\varphi \neq 0$ и энтропия изменяется даже при отсутствии ударных волн. В этом случае $|\omega_{10}|$ следует сравнивать со скоростью изменения энергии пластической дисторсии.

Определение 7.7. Разностная схема в области пластических или упругопластических деформаций называется слабо диссипативной, если $|\omega_{10}| \leq k \left| \varphi \frac{\partial W}{\partial t} \right|$, и сильно диссипативной, если $|\omega_{10}| > k \left| \varphi \frac{\partial W}{\partial t} \right|$.

§ 5. Анализ S -консервативности некоторых разностных схем

Рассмотрим, с какой точностью выполняется закон сохранения энтропии в разностных схемах с дивергентным и недивергентным уравнением энергии. Следуя [7—9], ограничимся уравнениями идеальной среды. С одной стороны, такое ограничение упрощает исследование и делает более ясными результаты. С другой — законы сохранения для идеальной среды являются ядром системы законов сохранения для любых физических процессов в сплошной среде, и, следовательно, их достоинства и недостатки переносятся на неидеальные среды. Кроме того, анализ S -консервативности проведен для адиабатического случая, чтобы в чистом виде выделить производство энтропии, определяемое разностной схемой. Иными словами, исследование S -консервативности ограничивается предположениями $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial W_y}{\partial t} = 0$, $S_1 = S_2 = 0$. Но это означает, что в § 4 среди ω_i должно быть $\omega_5 = \omega_6 = \omega_7 = \omega_8 = 0$.

Проанализируем вначале свойства S -консервативности разностных схем с независимыми $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Пусть искомые величины

P, V, E, U, S, T определены в точках сетки с полуцелыми индексами (отнесены к серединам сеточных интервалов). Запишем, следуя [21], разностные уравнения в общем виде

$$\begin{aligned} \frac{V_{i+0.5}^{n+1} - V_{i+0.5}^n}{\tau} - \frac{U_{i+1}^* - U_i^*}{h} &= 0, \\ \frac{U_{i+0.5}^{n+1} - U_{i+0.5}^n}{\tau} + \frac{P_{i+1}^* - P_i^*}{h} &= 0, \\ \frac{E_{i+0.5}^{n+1} - E_{i+0.5}^n}{\tau} + \frac{(U_{i+0.5}^{n+1})^2 - (U_{i+0.5}^n)^2}{2\tau} + \frac{P_{i+1}^* U_{i+1}^* - P_i^* U_i^*}{h} &= 0. \end{aligned} \quad (7.108)$$

Величины со звездочкой в этих уравнениях являются вспомогательными.

Рассмотрим двухпараметрическое семейство разностных схем (тип IIIA из [21]), в которых вспомогательные величины определяются по формулам

$$\begin{aligned} U_i^* &= 0.5((1-l_1)(U_{i+0.5}^n + U_{i-0.5}^n) + l_1(U_{i+0.5}^{n+1} + U_{i-0.5}^{n+1})), \\ P_i^* &= 0.5((1-l_2)(P_{i+0.5}^n + P_{i-0.5}^n) + l_2(P_{i+0.5}^{n+1} + P_{i-0.5}^{n+1})). \end{aligned} \quad (7.109)$$

Подставим (7.109) в (7.108), затем разложим все сеточные функции в ряды Тэйлора. В результате получим выражения для $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Для разностных схем этого типа $\omega_{12} = P\omega_1 - U\omega_2 + \omega_3$.

Подставив в это уравнение выражения для $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, а затем полученное уравнение для ω_{12} в (7.82), будем иметь уравнение производства энтропии

$$\begin{aligned} T \frac{\partial S}{\partial t} &= \tau \left((l_1 - 0.5) \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 - (l_2 - 0.5) \frac{\partial P}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \\ &- \frac{\tau^2}{12} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial t} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) + O(\tau^3, h^3). \end{aligned}$$

Таким образом, среди схем этого класса схемы с $l_1 \neq 0.5$ термодинамически аномальны и сильно диссипативны, схемы с $l_1 = 0.5, l_2 \neq 0.5$ сильно диссипативны. У единственной схемы этого семейства с $l_1 = l_2 = 0.5$ уравнение производства энтропии имеет вид

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = - \frac{\tau^2}{12} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^3 + O(\tau^3, h^2).$$

Главный член этого уравнения совпадает с (7.107), следовательно, при $l_1 = l_2 = 0.5$ схема является термодинамически нормальной и слабо диссипативной.

Рассмотрим еще одно двухпараметрическое семейство разностных схем (схемы типа IIIB из [21]), в которых вспомогательные величины определяются уравнениями

$$\begin{aligned} U_i^* &= 0.5(U_{i+0.5}^n + U_{i-0.5}^n) - \frac{\tau l_3}{h} (P_{i+0.5}^n - P_{i-0.5}^n), \\ P_i^* &= 0.5(P_{i+0.5}^n + P_{i-0.5}^n) - \frac{\tau l_4}{2h} ((a_{i+0.5}^n)^2 + (a_{i-0.5}^n)^2)(U_{i+0.5}^n - U_{i-0.5}^n). \end{aligned} \quad (7.110)$$

Подставим (7.110) в (7.108), разложим все величины в ряды Тэйлора, затем найдем ω_{12} через ω_1 , ω_2 , ω_3 и окончательно получим

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = \tau \left((l_3 - 0.5) \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 - (l_4 - 0.5) \frac{\partial P}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial t} \right) + O(\tau^2, h^2).$$

Следовательно, у всех схем этого семейства с $l_3 \neq 0.5$ первые дифференциальные приближения термодинамически аномальны, у всех схем с $l_3 = 0.5$ и $l_4 \neq 0.5$ д. п. 1 термодинамически нормальны и сильно диссипативны и лишь у единственной схемы с $l_3 = l_4 = 0.5$ д. п. 1 равно нулю и она слабо диссипативна.

В случае адиабатического течения в акустическом приближении разностная схема из [22] получается из семейства ПИБ при $l_3 = l_4 = h/2\tau a$. Таким образом, в этой схеме $l_3 = l_4 = 0.5$ лишь при соотношении шагов $\tau a/h = 1$. Аналогичным свойством обладает схема, описанная в [23], которая получается из семейства ПИБ при $l_3 = l_4 = 0.5 (h/\tau a)^2$. В двух указанных схемах при $\tau \rightarrow 0$ $l_3 = l_4 \rightarrow \infty$. Значит, при уменьшении τ диссипация энергии возрастает.

Рассмотрим теперь семейство разностных схем с недивергентным уравнением энергии (7.47) при $\varphi = 0$. Следуя [21], аппроксимируем это уравнение разностным

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{\tau} + ((1 - \beta) P^{n+1} + \beta P^n) \frac{V^{n+1} - V^n}{\tau} = 0. \quad (7.111)$$

Преобразуя (7.111) к дифференциальной форме, получим

$$\begin{aligned} \omega_{12} = \omega_{10} = \tau \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 (\beta - 0.5) + \left(\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^3 \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^3 \left(\beta^2 - \beta + \frac{1}{3} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} 2(\beta - 0.5)^2 \right) + O(\tau^3). \end{aligned}$$

Из этого уравнения и из (7.82) следует, что независимо от значения β все схемы этого семейства термодинамически нормальны, при $\beta \neq 0.5$ сильно диссипативны и лишь единственная схема семейства с $\beta = 0.5$ слабо диссипативна. Разностное уравнение энергии (7.111) впервые при $\beta = 0.5$ использовалось в [24].

Рассмотрим разностную схему с недивергентными уравнениями массы и энергии [8, 9]

$$\begin{aligned} \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \frac{P_{i+0.5}^* - P_{i-0.5}^*}{h} = 0, \\ \frac{x_i^{n+1} - x_i^n}{\tau} - U_i^* = 0, \quad \frac{x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1}}{h} - V_{i+0.5}^{n+1} = 0, \quad (7.112) \\ \frac{E_{i+0.5}^{n+1} - E_{i+0.5}^n}{\tau} + P_{i+0.5}^* \frac{U_{i+1}^* - U_i^*}{h} = 0. \end{aligned}$$

Вспомогательные величины со звездочкой определяются уравнениями

$$\begin{aligned} U_i^* = U_i^n - \frac{\tau}{2h} (P_{i+0.5}^n - P_{i-0.5}^n), \\ P_{i+0.5}^* = 0.5 (P_{i+0.5}^n + P_{i+0.5}^{n+1}). \end{aligned}$$

Как описано, получим $\omega_2, \omega_4, \omega_9, \omega_{11}$ и уравнение производства энтропии

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = - \frac{\tau^2}{12} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^3 + O(\tau^3, h^3).$$

Следовательно, разностная схема (7.112) термодинамически нормальна и слабо диссипативна.

Особый интерес представляют «полностью консервативные» разностные схемы, предложенные в [6]. Рассмотрим однопараметрическое семейство разностных схем

$$\frac{V_{i+0.5}^{n+1} - V_{i+0.5}^n}{\tau} - \frac{U_{i+1}^n + U_{i+1}^{n+1} - U_i^n - U_i^{n+1}}{2h} = 0,$$

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \frac{\sigma(P_{i+0.5}^{n+1} - P_{i-0.5}^{n+1}) + (1 - \sigma)(P_{i+0.5}^n - P_{i-0.5}^n)}{2h} = 0, \quad (7.113)$$

$$\frac{E_{i+0.5}^{n+1} - E_{i+0.5}^n}{\tau} + (\sigma P_{i+0.5}^{n+1} + (1 - \sigma) P_{i+0.5}^n) \frac{U_{i+1}^n + U_{i+1}^{n+1} - U_i^n - U_i^{n+1}}{2h} = 0.$$

Уравнение производства энтропии этого семейства разностных схем имеет вид

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = (0.5 - \sigma) \tau \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau^2}{12} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^3 + O(\tau^3, h^3).$$

Отсюда следует, что все «полностью консервативные» схемы термодинамически нормальны. Однако схемы с $\sigma \neq 0.5$ сильно диссипативны. Требование слабой диссипативности приводит к дальнейшему сужению множества схем с уравнениями (7.113). Среди этих схем слабо диссипативной является единственная разностная схема с $\sigma = 0.5$.

Проведенное рассмотрение M - и S -консервативности в § 4 и 5 позволяет утверждать, что эти свойства не связаны с дивергентной или недивергентной формой разностных уравнений. Чтобы определить диссипативные свойства разностной схемы, нужно построить для нее уравнения производства массы и энтропии. Анализ диссипативных свойств схем показывает, что среди схем с дивергентным уравнением энергии есть термодинамически аномальные. «Полностью консервативные» разностные схемы и большинство схем с недивергентным уравнением энергии термодинамически нормальны, и среди них есть как сильно, так и слабо диссипативные.

Исследование свойств M - и S -консервативности особенно важно для схем, применяемых для математического моделирования упругих и пластических деформаций, при которых энтропия либо постоянна, либо изменяется относительно слабо.

§ 6. Методы расчета ударных волн

В 1922 г. Беккер [25] показал, что наличие вязкости в уравнениях гидродинамики приводит к размыванию сильных разрывов на интервал, сравнимый с длиной пробега молекул. Этот результат

был положен Нейманом и Рихтмайером в 1950 г. [24] в основу численного метода расчета ударных волн. Для размывания разрыва ими была введена в исходные уравнения нелинейная диссипативная функция

$$q = -kVh^2 \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (7.114)$$

где k — безразмерная константа порядка 1, h — шаг сетки по пространственной координате x . После введения в уравнения псевдовязкости (7.114) ширина фронта ударной волны в газе оказывается конечной и равной

$$\Delta \xi = \pi kh \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}},$$

где $\xi = x - Dt$, D — скорость ударной волны. В зоне «размазанного» ударного фронта профиль V (и аналогично профили других величин) описывается уравнением

$$V = 0.5(V_0 + V_1) + 0.5(V_1 - V_0) \sin(\xi/\xi_0),$$

где $\xi_0 = kh \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$. Со времени появления работы [24] этот метод подвергался различным изменениям и обобщениям, изложенным в [1, 2, 4, 26]. Как видно из (7.114), уравнение для псевдовязкости содержит эмпирическую константу k , которая, вообще говоря, не инвариантна относительно уравнения состояния вещества. Это означает, что перед применением метод нуждается в калибровке.

В 1959 г. был опубликован метод С. К. Годунова [22], не содержащий эмпирических констант. Суть метода заключается в следующем. В некоторый момент времени t^n приближенное решение известно в виде сеточной функции. Если считать все сеточные функции кусочно-постоянными, то в узлах сетки возникают разрывы, которые, конечно, являются произвольными. Такие разрывы неустойчивы. Они распадаются с образованием различных конфигураций устойчивых разрывов. В процессе распада произвольного разрыва определяются скорость и давление на контактном разрыве. Это вспомогательные величины. Они используются для определения основных величин из разностных законов сохранения.

Решение задачи о распаде произвольного разрыва заключается в отыскании такой совокупности устойчивых разрывов, которая позволяет с помощью условий на них связать значения всех характеристик среды справа и слева от поверхности произвольного разрыва. В системе образовавшихся устойчивых разрывов обязательно присутствует контактный разрыв, на котором давление и скорость принимают значения P_k, U_k . Чтобы обеспечить непрерывность P и U на контактном разрыве, нужно, чтобы правое вещество претерпело изменения от состояния II с параметрами P_n, U_n до состояния JK с параметрами P_k, U_k и соответственно левое — от состояния JL с параметрами P_n, U_n до JK с P_k, U_k . В этом рассмотрении участвуют только P и U , поскольку только они непрерывны на контактном раз-

рыве. Вещество с нормальными свойствами может быть приведено в состояние P_k, U_k либо скачком (сильный разрыв), либо непрерывно (волна разрежения, ограниченная двумя слабыми разрывами). Если в пространстве термодинамических функций есть области, в которых выпуклость энтропии обращена в сторону больших давлений $\left(\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S < 0\right)$, то в таком веществе возможны скачки разрежения и волны сжатия, в которых все величины непрерывны. Итак, чтобы задача о распаде произвольного разрыва была решена правильно, необходим анализ свойств веществ, в которых образуются новые разрывы. Это делает задачу о распаде произвольного разрыва чрезвычайно сложной.

В общем случае задача о распаде произвольного разрыва решается численно. Значения P_k, U_k находятся как решение уравнения

$$F(U_k) = P_{кл}(U_k) - P_{пл}(U_k) = 0,$$

где $P_{пл}, P_{кл}$ определяются зависимостями $P(U)$ для веществ, лежащих справа и слева от контактного разрыва.

В 1960 г. был предложен метод расчета ударных волн [27], в котором для описания диссипации энергии используются уравнения на сильном разрыве. Этот метод подробно исследован в [28]. Так же, как и метод С. К. Годунова, он не содержит эмпирических констант. В то же время расчет величин на ударной адиабате является существенно более простым, чем решение задачи о распаде произвольного разрыва. Далее будет изложен метод [27] применительно к идеальному телу с нулевыми девиаторами напряжений и деформаций.

Сеточные функции P, V, E определяются в серединах пространственных интервалов, т. е. в точках $M_{i+0.5}$, в целые моменты времени t^n и обозначаются $f_{i+0.5}^n$. Координата r и скорость U определяются в узлах пространственной сетки в целые моменты времени и обозначаются f_i^n . Разностная схема принадлежит к классу разностных схем с независимыми $\omega_2, \omega_4, \omega_9, \omega_{10}$. Разностные уравнения имеют вид

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \alpha (r_i^n)^{\alpha-1} \frac{\bar{P}_{i+0.5}^n - \bar{P}_{i-0.5}^n}{h_i} = 0,$$

$$h_i = 0.5 (h_{i+0.5} + h_{i-0.5}), \quad (7.115)$$

$$\frac{r_i^{n+1} - r_i^n}{\tau} - U_i^{n+1} = 0,$$

$$\frac{(r_{i+1}^{n+1})^\alpha - (r_i^{n+1})^\alpha}{h_{i+0.5}} - V_{i+0.5}^{n+1} = 0. \quad (7.116)$$

Значения P^{n+1} и E^{n+1} вычисляются по-разному в зависимости от характера решения. Если $U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1} \geq 0$, что эквивалентно условию $\frac{\partial U}{\partial x} \geq 0$, то предполагается, что в ячейке сетки, для которой

справедливо это неравенство, течение адиабатическое и диссипации энергии нет. В этом случае P^{n+1} и E^{n+1} находятся из уравнения изэнтропы

$$E^{n+1} = E^n - \int_{V^n}^{V^{n+1}} P(V, E) dV,$$

в котором используется уравнение состояния $P = P(V, E)$. После вычисления E^{n+1} находится P^{n+1} из уравнения состояния

$$P^{n+1} = P(V^{n+1}, E^{n+1}).$$

Величина \bar{P}^{n+1} полагается равной P^{n+1} . Если в ячейке сетки имеет место неравенство $U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1} < 0$, то предполагается, что в этой ячейке в промежутке времени $\tau = t^{n+1} - t^n$ распространяется ударная волна. При этом изменение энергии сопровождается ее диссипацией. Величины $P_{i+0.5}^n$, $V_{i+0.5}^n$, $E_{i+0.5}^n$ полагаются равными величинам перед этой ударной волной P_0 , V_0 , E_0 . Разность $U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}$ полагается равной скачку массовой скорости ΔU на сильном разрыве. Эти предположения позволяют решить систему уравнений на сильном разрыве

$$\begin{aligned} (\bar{V} - V_0)W + \Delta U &= 0, \\ \bar{W}\Delta U - (\bar{P} - P_0) &= 0, \\ \bar{E} - E_0 + 0.5(\bar{P} + P_0)(\bar{V} - V_0) &= 0, \\ \bar{P} &= P(\bar{V}, \bar{E}). \end{aligned} \quad (7.117)$$

После нахождения $\bar{P}_{i+0.5}^{n+1} = \bar{P}$ из (7.117) $E_{i+0.5}^{n+1}$ находится из уравнения

$$E^{n+1} - E^n + 0.5(\bar{P}^{n+1} + \bar{P}^n)(V^{n+1} - V^n) = 0.$$

Для уравнения состояния идеального газа $P = (\gamma - 1)\rho E$ или для простейшего уравнения состояния твердого тела

$$P = (\gamma - 1)\rho E + c_{0к}^2(\rho - \rho_{0к})$$

зависимость \bar{P} от ΔU , т. е. уравнение ударной адиабаты, имеет вид

$$\bar{P} = P_0 + \frac{\gamma + 1}{4}\rho_0\Delta U^2 + \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4}\rho_0\Delta U^2\right)^2 + a_0^2\Delta U^2}. \quad (7.118)$$

Уравнение состояния проявляется только в том, как вычисляется a_0 . Для обоих уравнений состояния может использоваться уравнение

$$a_0^2 = (\gamma P_0 + \rho_{0к}c_{0к}^2)\rho_0,$$

в котором в случае идеального газа нужно положить $C_{0к} = 0$. В случае слабых ударных волн, когда справедливо неравенство $\frac{\gamma + 1}{4}\rho_0|\Delta U| \ll a_0$, ударная адиабата (7.118) может быть заменена более простым уравнением:

$$\bar{P} = P_0 + W|\Delta U|, \quad (7.119)$$

где

$$W = a_0 + \frac{\gamma+1}{4} \rho_0 |\Delta U|. \quad (7.120)$$

Погрешность при вычислении \bar{P} в алюминии ($\rho_{\text{ок}} \approx 2.7 \text{ г/см}^3$ и $c_{\text{ок}} \approx 5 \text{ км/с}$) по уравнению (7.119) по сравнению с (7.118) составляет при $\Delta U = 1 \text{ км/с}$ не более 2%. Область применимости уравнений (7.119), (7.120) обсуждается в [28, 29]. Следует отметить, что уравнение (7.120) есть не что иное, как линейное соотношение между скоростью ударной волны D и массовой скоростью U , которое широко используется для аппроксимации экспериментальных данных.

Анализ монотонности этого метода [21] показал, что мера немонотонности достигает минимума при соотношении шагов по массовой координате и времени, равном $\frac{\tau a}{h} = 0.5$.

Если в (7.119), (7.120) подставить сеточные значения функций, то получим уравнение

$$\bar{P}_{i+0.5}^{n+1} = P_{i+0.5}^n - \left(a_{i+0.5}^n - \frac{\gamma+1}{4} \rho_{i+0.5}^n (U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}) \right) (U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}). \quad (7.121)$$

В случае адиабатического сжатия вещества давление можно найти из разностного уравнения

$$P_{i+0.5}^{n+1} = P_{i+0.5}^n - (a_{i+0.5}^n)^2 \tau \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{h_{i+0.5}}, \quad (7.122)$$

которое аппроксимирует уравнение адиабаты в виде

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial U}{\partial m}. \quad (7.123)$$

Будем считать разность $\bar{P}^{n+1} - P^{n+1}$ псевдовязкостью q^{n+1} . Вычтем (7.122) из (7.121) и получим уравнение для псевдовязкости

$$q_{i+0.5}^{n+1} = \left(a_{i+0.5}^n \left(\frac{\tau a_{i+0.5}^n}{h_{i+0.5}} - 1 \right) + \frac{\gamma+1}{4} \rho_{i+0.5}^n (U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}) \right) (U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}).$$

Заменяем здесь разности производными. В результате с точностью до членов третьего порядка малости получим уравнение

$$q \approx \left(\frac{a\tau}{h} - 1 \right) a\dot{h} \frac{\partial U}{\partial m} + \frac{\gamma+1}{4} \rho h^2 \left(\frac{\partial U}{\partial m} \right)^2, \quad (7.124)$$

которое содержит линейный и квадратичный члены. Соотношение между ними зависит от значений $\frac{a\tau}{h}$ и $\frac{|\Delta U|}{a}$. При соотношении шагов τ и h , удовлетворяющем условию

$$\frac{\tau a}{h} < 1 - \frac{\gamma+1}{4} \frac{|\Delta U|}{a},$$

линейная компонента q оказывается больше квадратичной. При усилении ударной волны, т. е. при увеличении величины $\frac{|\Delta U|}{a}$, начиная с некоторого значения вклад линейной компоненты становится меньше, чем квадратичной. С уменьшением вклада линейной компоненты псевдовязкости q ширина «размазанного» фронта ударной волны уменьшается, но при этом возрастает немонотонность численного решения [21].

Идея введения в уравнения механики сплошной среды линейно-квадратичной псевдовязкости в 1955 г. была высказана Ландшоффом (см. [26]), который предложил вместо вязкости Неймана — Рихтмайера использовать вязкость в виде

$$q = c_L a \Delta x \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| + c_0^2 \rho (\Delta x)^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2,$$

где $c_0 \approx 2$, $c_L \approx 1$. Псевдовязкость Ландшоффа содержит две эмпирические константы, которые зависят от решения.

В то же время из (7.118) следует, что при $a_0 \gg \rho_0 |\Delta U|$

$$\bar{P} - P_0 = q_1 = a_0 |\Delta U|,$$

а при $a_0 \ll \rho_0 |\Delta U|$

$$\bar{P} - P_0 = q_2 = \frac{\gamma + 1}{2} \rho_0 (\Delta U)^2.$$

Линейная комбинация q_1 и q_2 , очевидно, правильно описывает поведение q в обоих асимптотических случаях. Именно это соображение дало основание Уилкинсу использовать линейно-квадратичную псевдовязкость в виде [26]

$$q = a |\Delta U| + \frac{\gamma + 1}{2} \rho (\Delta U)^2.$$

Из сравнения этого выражения с (7.124) видно, что различие между ними заключается только в линейной части псевдовязкости, причем диффузионные свойства линейной части (7.124) уменьшаются при $\frac{\tau a}{h} \rightarrow 1$, что бесспорно более предпочтительно.

§ 7. Модели разрушения плотной среды при динамических нагрузках

Разрушение твердого тела приводит к нарушению его сплошности на макроуровне, появлению в нем трещин или пор, или, как это бывает в случае хрупкого раздавливания, к резкому изменению его способности сопротивляться деформациям сдвига. Это означает, что математические модели должны содержать уравнения, описывающие поведение как сплошных, так и несплошных (пористых или трещиноватых) сред. И те и другие могут быть прочными, частично прочными или непрочными, упругими, пластичными или хрупкими. Под действием приложенных нагрузок свойства среды могут изме-

няться. Например, прочная среда может разрушиться, в сплошной среде могут появиться трещины или поры. Возможны также и противоположные процессы, такие как залечивание микродефектов, закрытие трещин, восстановление прочности и т. д. Уравнения, описывающие сплошные и несплошные среды, отличаются друг от друга.

Рассмотрим вначале сплошные среды. Уравнения, описывающие поведение сплошных сред, приведены в § 2. Здесь мы несколько конкретизируем представления о функциях Y и G . Функция Y определяет косвенно верхнюю границу упругой энергии W , дисторсии. Если твердое тело нагревать либо при постоянном давлении, либо при постоянном объеме, то на линии плавления в переменных V , E упругая энергия дисторсии должна исчезнуть. Следовательно, на линии плавления Y должна обратиться в нуль (более точно, стать несоизмеримо меньше, чем в твердом теле). Это значит, что в общем случае должно быть $Y = Y(V, E)$. Такая зависимость, кроме того, позволяет описать упрочнение вещества при повышении давления. Сопротивление сдвигу в жидкости также несоизмеримо меньше, чем в твердом теле. Следовательно, при приближении к линии плавления G должна стремиться к нулю; значит, как и Y , G должна зависеть от V и E . Из уравнений (2.188) — (2.194) следует, что при приближении к линии плавления, когда $\mu \rightarrow 0.5$, должно быть

$$E \rightarrow 0, \quad G \rightarrow 0, \quad \frac{E}{G} \rightarrow 3, \quad c_{\text{прод}} \rightarrow c, \quad c_{\text{поп}} \rightarrow c.$$

Такое поведение можно описать только зависимостью достаточно общего вида $G(V, E)$.

Одной из простейших моделей разрушения является модель мгновенного откола. В этой модели считается, что разрушение вещества происходит в тот момент, когда напряжение достигает некоторого заданного значения $\sigma_{\text{кр}}$. Условия сохранения прочности имеют вид равенств

$$\sigma_1 < \sigma_{\text{кр}}, \quad \sigma_2 < \sigma_{\text{кр}}. \quad (7.125)$$

В модели [16] при нарушении условий (7.125) в веществе возникают трещины, ортогональные напряжению, нарушившему (7.125). Если $\sigma_1 \geq \sigma_{\text{кр}}$, то возникают трещины первого направления, если $\sigma_2 \geq \sigma_{\text{кр}}$, то второго направления. При одновременном нарушении неравенств (7.125) в веществе образуются поры. Предполагается, что трещины или поры распределены в веществе равномерно. Таким образом, в зависимости от направления трещин частицы вещества в элементе среды в одномерном случае будут иметь вид пластин, цилиндров, сферических слоев или спиц. В момент разрушения частички вещества сжимаются скачком. При этом на их поверхности соответствующее напряжение скачком уменьшается от $\sigma_{\text{кр}}$ до нуля. В каждой частице возникает сильный разрыв, распространяющийся ортогонально поверхности трещин. На этом разрыве скачком изменяются термодинамические и упругие характеристики ве-

щества. В то же время из деформаций терпит разрыв только одна — нормальная к поверхности трещины. Если ограничиться рассмотрением только первого упругого скачка, предполагая последующие скачки слабыми, то в акустическом приближении термодинамические величины меняются при внезапном раскрытии трещин по формулам:

$$\Delta V = \begin{cases} \frac{\sigma_{кр}}{a_-^2 + \frac{4}{3}(\rho G)_-} & \text{для трещин первого направления,} \\ \frac{\sigma_{кр}}{a_-^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{4-\alpha}{\alpha-1}\right)(\rho G)_-} & \text{для трещин второго направления,} \end{cases} \quad (7.126)$$

$$\Delta E = 0.5\sigma_{кр}\Delta V, \quad \Delta P = P(V_+, E_+) - P_-. \quad (7.127)$$

В этих формулах величины f_- и f_+ означают величины до раскрытия и после раскрытия трещины, а $\Delta f = f_+ - f_-$.

Компоненты девиатора напряжений после раскрытия трещин также изменяются скачком. В случае трещин первого направления скачки S_1 и S_2 определяются уравнениями

$$S_{1+} = S_{1-} + \frac{4}{3}\Delta V(\rho G)_-, \quad S_{2+} = S_{2-} - \frac{2}{3}\Delta V(\rho G)_-. \quad (7.128)$$

При трещинах второго направления, которые возможны лишь при $\alpha > 1$, те же величины определяются уравнениями

$$S_{1+} = S_{1-} - \frac{2}{3}\Delta V(\rho G)_-, \quad S_{2+} = S_{2-} + \left(\frac{4-\alpha}{\alpha-1}\right)\Delta V(\rho G)_-. \quad (7.129)$$

Поскольку уравнения (7.126) — (7.129) приближенные, σ_{1+} в случае трещин первого направления и σ_{2+} в случае трещин второго направления после раскрытия трещин могут быть не равны нулю. Чтобы ликвидировать эту погрешность, S_{1+} в случае трещин первого направления определяется из уравнения $\sigma_{1+} = 0$. Уравнения же (7.128) позволяют выразить S_{2+} через S_{1+} . Таким образом, вместо (7.128) получим

$$S_{1+} = P_+, \quad S_{2+} = S_{2-} + 0.5(S_{1-} - P_+). \quad (7.130)$$

Аналогично в случае трещин второго направления вместо (7.129) будем иметь

$$S_{2+} = P_+, \quad S_{1+} = S_{1-} + \left(\frac{\alpha-1}{4-\alpha}\right)(S_{2-} - P_+). \quad (7.131)$$

При одновременном выполнении неравенств (7.125) σ_1 и σ_2 обращаются в нуль одновременно, и, следовательно, должно быть

$$S_{1+} = S_{2+} = P_+. \quad (7.132)$$

При $\alpha = 1$ и $\alpha = 3$ $S_3 = S_2$ и из уравнения (1.37) вытекает

$$S_3 = S_2 = -0.5S_1. \quad (7.133)$$

В этом случае в силу (7.132), (7.133) должно быть

$$S_{1+} = S_{2+} = P_+ = 0. \quad (7.134)$$

Величины ΔE и ΔV при этом должны быть найдены из (7.127) и (7.134).

В момент разрушения частички вещества сжимаются, а объем трещин или пор расширяется. Будем называть объем пустот в единичной массе вещества удельным объемом трещин или пор. В момент разрушения вещества удельный объем трещин или пор скачком возрастает на величину

$$\Delta \Theta = -\Delta V. \quad (7.135)$$

Перейдем теперь к описанию несплошной среды. Среди всех величин только плотность ρ измеряется в граммах на сантиметр кубический и давление P или напряжение S_i — в килоджоулях на сантиметр кубический. Умножив все эти величины на объемную концентрацию вещества $\beta = V/(V + \Theta)$, как бы «размажем» их на весь объем и сделаем непрерывными. После этого запишем для βr , βP и βS_i законы сохранения в дифференциальной форме. Закон сохранения массы примет вид

$$\frac{\partial (V/\beta)}{\partial t} - \frac{\partial \alpha r^{\alpha-1} U}{\partial M} = 0.$$

Представим его следующим образом:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} = \Phi_1, \quad (7.136)$$

$$\text{где} \quad \Phi_1 = \frac{\beta}{V} \frac{\partial \alpha r^{\alpha-1} U}{\partial M} = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{(\alpha-1)U}{r}. \quad (7.137)$$

В пористом разрушенном веществе частички предполагаются настолько малыми, что в них мгновенно устанавливаются условия механического равновесия с порами

$$\sigma_i = 0. \quad (7.138)$$

Из (7.138), (7.134) и уравнения

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\alpha^2 \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial E} \varphi \frac{\partial W}{\partial t} \quad (7.139)$$

следует, что в пористом веществе с $\beta \neq 1$ и $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$ будет

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0. \quad (7.140)$$

Поскольку

$$\frac{\partial r^\alpha}{\partial M} = V + \Theta,$$

уравнение (7.136) с учетом (7.140) можно представить как

$$\frac{\partial \ln \beta}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{(\alpha-1)U}{r}.$$

Уравнения движения и энергии для среды с $\beta \neq 1$ записываются в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \alpha r^{\alpha-1} \frac{\partial (\beta (P - S_1))}{\partial M} - \frac{(\alpha - 1) (S_1 - S_2) V}{r} = 0, \quad (7.141)$$

$$\frac{\partial (E + W_y)}{\partial t} + (P - S_1) V \frac{\partial \ln \beta}{\partial t} - (P - S_1) \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{(\alpha - 1) (S_1 - S_2) UV}{r} = 0. \quad (7.142)$$

В пористой среде выполнены условия (7.134), следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial (E + W_y)}{\partial t} = 0.$$

Рассмотрим теперь уравнения, определяющие поведение трещиноватой среды. Будем считать, что, пока в элементе среды есть трещины, напряжение, ортогональное трещинам, равно нулю, а соответствующая ему деформация вещества не совпадает с соответствующей деформацией элемента среды. Эти предположения позволяют написать уравнения, определяющие изменения величин P , V , E , W_y , Θ в элементе среды с раскрытыми трещинами. Рассмотрим такие уравнения для среды с раскрытыми трещинами второго направления. Уравнения (7.136), (7.141) и (7.142) дополняются условиями равновесия вещества с трещиной второго направления $\sigma_2 = 0$, $\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} = 0$. Представим эти уравнения в виде

$$S_2 = P, \quad \frac{\partial S_2}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (7.143)$$

Запишем уравнение (7.54) для величины βS_2

$$A \frac{\partial \beta S_2}{\partial t} + B \beta S_2 - C \frac{\partial e_2}{\partial t} = 0.$$

Продифференцировав почленно и используя (7.139) и (7.143), приходим к уравнению

$$AP \frac{\partial \beta}{\partial t} - A \beta a^2 \frac{\partial V}{\partial t} = C \frac{\partial e_2}{\partial t} - \beta BP - A \beta \Phi \frac{\partial P}{\partial E} \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (7.144)$$

Из (7.136) и (7.144) получается уравнение, содержащее $\frac{\partial V}{\partial t}$:

$$A \left(\frac{P}{V} - a^2 \right) \frac{\partial V}{\partial t} = AP \Phi_1 - BP + \frac{C}{\beta} \frac{\partial e_2}{\partial t} - A \Phi \frac{\partial P}{\partial E} \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (7.145)$$

Значение $\frac{\partial e_2}{\partial t}$ берется в соответствии с (7.53).

В случае среды с раскрытыми трещинами первого направления условия механического равновесия вещества и трещин первого направления имеют вид $\sigma_1 = 0$, $\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = 0$. Повторяя вывод и преобразование уравнений по аналогии со случаем трещин второго направ-

ления, получим уравнения для $\frac{\partial V}{\partial t}$

$$A \left(\frac{P}{V} - a^2 \right) \frac{\partial V}{\partial t} = AP\Phi_1 - BP + \frac{C}{\beta} \frac{\partial e_1}{\partial t} - A\varphi \frac{\partial P}{\partial E} \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (7.146)$$

Значение $\frac{\partial e_1}{\partial t}$ берется в соответствии с (7.52).

Объем трещин Θ определяется после нахождения V независимо от направления трещин из уравнения

$$\frac{\partial \ln(V + \Theta)}{\partial t} - \Phi_1 = 0. \quad (7.147)$$

Уравнения (7.145) и (7.146) носят общий характер и для описания конкретного типа деформирования требуют доопределения функций A, B, C .

Если деформации частиц вещества в трещиноватой среде с открытыми трещинами являются упругими, то в уравнениях (7.145), (7.146) $A = 1, B = 0, C = 2G, \varphi = 0$. Из указанных уравнений следует

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{P\Phi_1 + \frac{2G}{\beta} \frac{\partial e_j}{\partial t}}{\frac{P}{V} - a^2}. \quad (7.148)$$

Здесь и ниже $j = 1$ или 2 означает тип трещиноватой среды.

Если деформации частиц вещества являются пластическими, то в уравнениях (7.145), (7.146) $A = 0, B = 1, C = 2VY^2/\beta \frac{\partial W}{\partial t}, \varphi = 1, Y = \text{const}$. Уравнения (7.145), (7.146) в этом случае принимают вид

$$3\beta P \frac{\partial W}{\partial t} - 2VY^2 \frac{\partial e_j}{\partial t} = 0. \quad (7.149)$$

Продифференцируем (7.149) по времени и в полученном уравнении заменим $\frac{\partial P}{\partial t}$ выражением (7.139)

$$\begin{aligned} & \left(3\beta\alpha^2 \frac{\partial W}{\partial t} + 2Y^2 \frac{\partial e_j}{\partial t} \right) \frac{\partial V}{\partial t} - 3P \frac{\partial W}{\partial t} \frac{\partial \beta}{\partial t} = \\ & = 3\beta \left(\frac{\partial P}{\partial E} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 + P \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right) - 2VY^2 \frac{\partial^2 e_j}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Исключим в этом уравнении $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ с помощью (7.136). В результате будем иметь уравнение для $\frac{\partial V}{\partial t}$

$$3\beta \frac{\partial W}{\partial t} \left(a^2 \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial E} \frac{\partial W}{\partial t} + P\Phi_1 \right) - 3\beta P \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2VY^2 \frac{\partial^2 e_j}{\partial t^2} = 0. \quad (7.150)$$

Если деформаций вещества в трещиноватой среде являются упругопластическими, то $A = 1, B = \frac{3G}{Y^2} \frac{\partial W}{\partial t} - \frac{1}{Y} \frac{\partial Y}{\partial t}, C = 2G, 0 < \varphi < 1$.

Уравнения (7.145), (7.146) в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{P}{V} - a^2\right) \frac{\partial V}{\partial t} = P\Phi_1 - \frac{3GP}{VY^2} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{P}{Y} \frac{\partial Y}{\partial t} + \\ + \frac{2G}{\beta} \frac{\partial e_j}{\partial t} - \Phi \frac{\partial W}{\partial t} \frac{\partial P}{\partial E}. \end{aligned} \quad (7.151)$$

В частном случае, когда Y зависит только от P , производная $\frac{\partial Y}{\partial t}$, входящая в (7.151) и в выражение для меры пластичности Φ (7.50), заменяется выражением $\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{dY}{dP} \frac{\partial P}{\partial t}$, которое после замены $\frac{\partial P}{\partial t}$ выражением (7.139) принимает вид

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{dY}{dP} \left(-a^2 \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial E} \Phi \frac{\partial W}{\partial t} \right). \quad (7.152)$$

Подстановка этого выражения в (7.50) дает

$$\Phi = \frac{3G \frac{\partial W}{\partial t} + a^2 VY \frac{dY}{dP} \frac{\partial V}{\partial t}}{\left(3G + VY \frac{dY}{dP} \frac{\partial P}{\partial E} \right) \frac{\partial W}{\partial t}}. \quad (7.153)$$

Подставим выражения для $\frac{\partial Y}{\partial t}$ и $\Phi \frac{\partial W}{\partial t}$ в (7.151) и сгруппируем члены с $\frac{\partial V}{\partial t}$. В результате получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} \left(3G \left(\frac{P}{V} - a^2 + \frac{Pa^2}{Y} \frac{dY}{dP} \right) + PY \frac{dY}{dP} \frac{\partial P}{\partial E} \right) = \\ = \left(3G + VY \frac{dY}{dP} \frac{\partial P}{\partial E} \right) \left(P\Phi_1 + \frac{2G}{\beta} \frac{\partial e_j}{\partial t} \right) - 3G \frac{\partial W}{\partial t} \left(\frac{\partial P}{\partial E} + \frac{3GP}{VY^2} \right). \end{aligned} \quad (7.154)$$

После определения $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$ из (7.147) и

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{V\Theta}{(V+\Theta)^2} \frac{\partial \ln \frac{V}{\Theta}}{\partial t} \quad (7.155)$$

удельная внутренняя энергия вещества находится из уравнения (7.142).

Для определения компоненты тензора напряжений, направленной вдоль трещин, используется оставшееся из уравнений (7.54).

В момент, когда становится $\beta = 1$, происходит закрытие трещин, после чего прочность среды в направлении, ортогональном закрытым трещинам, восстанавливается лишь частично. Полное заживление дефектов и восстановление прочности происходит лишь после необходимого сжатия или нагревания вещества.

Модель мгновенного откола широко [30—32] применяется для математического моделирования разрушения твердого тела. Изложенная модель с анизотропией разрушения идейно близка модели,

предложенной в [32]. Чаще в расчетах используется модель мгновенного откола с изотропным характером разрушения, когда при достижении максимальным растягивающим напряжением критического значения происходит разрушение с потерей сплошности вещества и образованием пор. В [31] на основе анализа результатов многочисленных экспериментов сделан вывод, что модели мгновенного откола удовлетворительно описывают откольное разрушение вещества лишь в случае быстрого роста растягивающих напряжений в достаточно сильных волнах с напряжением не менее 8—10 ГПа. Для описания отколов и микродефектов после действия волн меньшей интенсивности необходимо применять кинетические модели разрушения. Этот вывод, безусловно, следует рассматривать как рекомендацию по упрощению расчетов откольного разрушения под действием сильных волн. В общем же случае только кинетические модели наиболее полно учитывают все особенности процесса разрушения. Конкретные критерии откольного разрушения подробно обсуждаются в гл. 5. Здесь мы остановимся на одной из самых современных кинетико-статистических моделей [32]. В этой модели время τ действия растягивающего напряжения σ от момента его возникновения до разрушения связано уравнением

$$\left(\frac{2V_d}{c^3\tau^3}\right)\left(1 - \frac{\alpha kT}{C_a \varepsilon_{кр}} \ln \frac{\tau}{\tau_0}\right)^\alpha - \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_{кр} E}\right)^\alpha = 0, \quad (7.156)$$

где k — постоянная Больцмана, T — температура, $\varepsilon_{кр}$ — критическая деформация атомной связи, E — модуль упругости, C_a — атомная теплоемкость, α — коэффициент линейного расширения, τ_0 — период тепловых колебаний атомов в кристаллической решетке, c — скорость звука, V_d — объем дилатона. Условия разрушения (7.125) при применении кинетических моделей прочности несколько усложняются. Как правило, для характеристики меры поврежденности тела вводится функция поврежденности ω , определяемая уравнением $\frac{d\omega}{dt} = \varphi(S, V, E)$. В случае рассматриваемой модели разрушения предполагается, что $\varphi = 1/\tau$, после чего это уравнение принимает вид

$$\dot{\omega} = \omega_0 + \int_{t_0}^t \frac{dt}{\tau}. \quad (7.157)$$

Здесь t_0 — момент начала действия растягивающего напряжения σ , ω_0 — значение функции поврежденности в этот момент. Накопление микроповреждений происходит непрерывно с разной скоростью, зависящей от состояния шарового тензора деформаций $P(V, E)$, температуры $T(V, E)$ и деватора $S = \sigma + P$. Рост поврежденности определяется наибольшим из напряжений σ_1 и σ_2 . Разрушение материала происходит в той точке и в тот момент, где и когда станет

$$\omega = 1. \quad (7.158)$$

Т а б л и ц а 7.1

Материал	c , км/с	E , ГПа	$\epsilon_{кр}$	αU	$\frac{C_a \cdot 10^3, \text{ ккал}}{\text{моль} \cdot \text{град}}$	$\frac{\alpha \cdot 10^3, \text{ г}}{\text{град}}$	$V_a \cdot 10^3, \text{ см}^3$
Al	5.25	68	0.21	10.2	5.84	2.36	1.66
Cu	3.96	112	0.21	10.2	6.16	1.66	1.18
Сталь	3.8	110	0.22	14.0	5.14	1.13	1.18

Функция поврежденности является скалярной. Однако в момент разрушения значения σ_1 и σ_2 могут различаться. Это различие влияет на характер разрушения. В зависимости от значений σ_1 и σ_2 в этот момент разрушение может быть трех типов:

- трещины первого направления при $\sigma_1 > \sigma_2$;
- трещины второго направления при $\sigma_2 > \sigma_1$;
- поры при $\sigma_1 = \sigma_2$.

Далее характеристики разрушенной среды рассчитываются точно так же, как и в случае разрушения по критерию мгновенного откола (7.125).

По существу, уравнение (7.157) с $\omega_0 = 0$ используется при любой кинетической модели разрушения. Добавление ω_0 расширяет область применимости этих моделей, так как позволяет описать многоцикловые нагрузки, в которых волны разгрузки с $\sigma > 0$ перемежаются состояниями с $\sigma \leq 0$.

В табл. 7.1 приведены численные значения входящих в (7.156) величин, рекомендованных в [32] для трех металлов.

§ 8. Математическая модель волновой деформации плотной среды

Математическая модель волновой деформации плотной среды представляет собой обобщение аналогичной модели [21], применяемой для уравнений гидродинамики. Как было отмечено в § 6, сеточные функции P , V , E , а с ними и W_y , S_1 и S_2 определяются в серединах интервалов пространственной сетки, а r и U — в узлах пространственно-временной сетки. Разностная схема принадлежит к классу разностных схем с независимыми $\omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}$. Разностный закон сохранения массы берется в виде (7.116), уравнение линии тока — в виде (7.115). Уравнение движения имеет вид

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} - \alpha (r_i^n)^{\alpha-1} \frac{\bar{\sigma}_{i+0.5}^n - \bar{\sigma}_{i-0.5}^n}{h_i} - f_i^n = 0, \quad (7.159)$$

$$\text{где } h_i = 0.5(h_{i+0.5} + h_{i-0.5}), \quad h_{i+0.5} = \frac{(r_{i+1}^n)^\alpha - (r_i^n)^\alpha}{V_{i+0.5}^n}, \quad (7.160)$$

$$f_i^n = \frac{(\alpha - 1) \left((V(S_1 - S_2))_{i+0.5}^n + (V(S_1 - S_2))_{i-0.5}^n \right)}{2r_i^n}. \quad (7.161)$$

Скорость изменения энергии дисторсии определяется из уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \alpha (S_1)_{i+0.5}^n \frac{(r_{i+1}^n)^{\alpha-1} U_{i+1}^{n+1} - (r_i^n)^{\alpha-1} U_i^{n+1}}{h_{i+0.5}} - \frac{(\alpha-1)(V(S_1 - S_2))_{i+0.5}^n (U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1})}{r_i^{n+1} + r_{i+1}^{n+1}}. \quad (7.162)$$

Введем обозначения

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \varphi \frac{\partial W}{\partial t}, \quad \Delta W_y = (1 - \varphi) \frac{\partial W}{\partial t} \tau. \quad (7.163)$$

В случае, когда $\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{i+0.5} = 0$, эти величины независимо от φ будут равны нулю; при $\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{i-0.5} \neq 0$ вычисляется мера пластичности φ .

Рассмотрим случай, когда Y зависит от P . Тогда справедливы уравнения (7.152) и (7.153). Значение φ находится из уравнения (7.153), в котором все величины берутся в точке $M_{i+0.5}$, t^n , а вместо производной $\frac{\partial V}{\partial t}$ следует взять разность

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{V_{i+0.5}^{n+1} - V_{i+0.5}^n}{\tau}. \quad (7.164)$$

Если $\varphi_{i+0.5} \leq 0$, то деформации в рассматриваемой точке упругие. В этом случае полагаем $\varphi_{i+0.5} = 0$. Когда $\varphi_{i+0.5} \geq 1$, деформации пластические, мера пластичности $\varphi_{i+0.5} = 1$. При $0 < \varphi_{i+0.5} < 1$ деформации будут упругопластическими. Неравенства $\varphi < 0$ или $\varphi > 1$ не имеют физического смысла, но могут появиться из-за погрешностей при вычислении φ по уравнению (7.153).

После определения φ величины $\frac{\partial Q}{\partial t}$ и ΔW_y находятся из уравнений (7.163).

Внутренняя энергия $E_{i+0.5}^{n+1}$ рассчитывается по-разному в зависимости от знака производной

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{r_{i+1}^{n+1} - r_i^{n+1}}.$$

Если $\frac{\partial U}{\partial r} \geq 0$, то

$$E_{i+0.5}^{n+1} = E_{i+0.5}^n - \int_{V^n}^{V^{n+1}} P(V, E) dV + \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_{i+0.5} \tau. \quad (7.165)$$

Если $\frac{\partial U}{\partial r} < 0$, то применяется изложенный в § 6 метод расчета ударных волн. Величина $\bar{P}_{i+0.5}^{n+1}$ определяется из системы уравнений

(7.117), после чего находится

$$E^{n+1} = E^n - 0.5(\bar{P}^n + \bar{P}^{n+1})(V^{n+1} - V^n) + \frac{\partial Q}{\partial t} \tau. \quad (7.166)$$

Нижние индексы у величин, входящих в (7.166), одинаковы. В таких случаях они будут опускаться.

После определения V^{n+1} и E^{n+1} вычисляется P^{n+1} из уравнения состояния.

Значения S_1 и S_2 в момент t^{n+1} рассчитываются следующим образом. Вначале находятся компоненты девиатора скоростей деформаций

$$\frac{\partial e_1}{\partial t} = \frac{2(V_{i+0.5}^{n+1} - V_{i+0.5}^n)}{3V_{i+0.5}^n \tau} - \frac{(\alpha - 1)(U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1})}{r_i^{n+1} + r_{i+1}^{n+1}}, \quad (7.167)$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial t} = -\frac{V_{i+0.5}^{n+1} - V_{i+0.5}^n}{3V_{i+0.5}^n \tau} - \frac{(\alpha - 1)(4 - \alpha)(U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1})}{2(r_i^{n+1} + r_{i+1}^{n+1})}. \quad (7.168)$$

Затем, если деформации упругие, решаются уравнения Гука

$$\frac{S_1^{n+1} - S_1^n}{\tau} - 2G^n \frac{\partial e_1}{\partial t} = 0, \quad (7.169)$$

$$\frac{S_2^{n+1} - S_2^n}{\tau} - 2G^n \frac{\partial e_2}{\partial t} = 0. \quad (7.170)$$

Если же деформации пластические, то S_1 и S_2 определяются из условий Мизеса

$$S_1^{n+1} = \frac{2V^{n+1}(Y^{n+1})^2}{3 \frac{\partial W}{\partial t}} \cdot \frac{\partial e_1}{\partial t}, \quad (7.171)$$

$$S_2^{n+1} = \frac{2V^{n+1}(Y^{n+1})^2}{3 \frac{\partial W}{\partial t}} \cdot \frac{\partial e_2}{\partial t}. \quad (7.172)$$

В случае упругопластического деформирования коэффициенты (7.57) уравнения (7.54) преобразуем к более простому виду. Для этого подставим (7.152) в (7.57). Воспользовавшись обозначениями (7.163), получим

$$A = 1, B = \left(\frac{3G}{VY^2} \right)^{n+1} \frac{\partial Q}{\partial t}, C = 2G^{n+1}. \quad (7.173)$$

В результате уравнения для определения S_1^{n+1} и S_2^{n+1} в области упругопластических деформаций принимают вид

$$\frac{S_1^{n+1} - S_1^n}{\tau} + BS_1^{n+1} - 2G^{n+1} \frac{\partial e_1}{\partial t} = 0, \quad (7.174)$$

$$\frac{S_2^{n+1} - S_2^n}{\tau} + BS_2^{n+1} - 2G^{n+1} \frac{\partial e_2}{\partial t} = 0. \quad (7.175)$$

В заключение находим значение упругой энергии дисторсии

$$W_y^{n+1} = W_y^n + \Delta W_y. \quad (7.176)$$

Вследствие того что величины S_i^{n+1} определяются по приближенным формулам, следует проверить, удовлетворяют ли они неравенству (7.42) в виде

$$(S_1^{n+1})^2 + (S_2^{n+1})^2 + (S_1^{n+1} + S_2^{n+1})^2 \leq \frac{2}{3} (Y^{n+1})^2. \quad (7.177)$$

Если неравенство (7.177) выполнено, то пересчета S_i^{n+1} не требуется, если нет, то новые значения S_i^{n+1} получаются после умножения старых значений S_i^{n+1} на множитель

$$R = \sqrt{\frac{2(Y^{n+1})^2}{3((S_1^{n+1})^2 + (S_2^{n+1})^2 + (S_1^{n+1} + S_2^{n+1})^2)}}. \quad (7.178)$$

Изложенная разностная схема принадлежит к одному из рассмотренных в § 3 классов разностных схем. Из (7.68) и (7.165) следует, что в случае непрерывного решения уравнение производства энтропии совпадает с (7.103). Поскольку интеграл в (7.165) может быть найден с любой наперед заданной точностью, правая часть в (7.103), определяемая ω_{10} , может быть сделана сколь угодно малой.

Рассмотрим подробнее аппроксимацию величины $\Phi \frac{\partial W}{\partial t}$. В области упругих деформаций мера пластичности Φ равна нулю. Следовательно, независимо от $\frac{\partial W}{\partial t}$ и этот член не производит энтропии. В случае пластических и упругопластических деформаций член $\Phi \frac{\partial W}{\partial t}$ определяет диссипацию энергии и, значит, физически детерминированный рост энтропии.

Уравнения (7.159) — (7.178) предназначены для нахождения величин, характеризующих поведение сплошной прочной среды. Далее будут рассмотрены разностные уравнения для идеальной пористой и двух типов трещиноватых сред.

В идеальной пористой среде частички вещества начинают взаимодействовать в момент закрытия пор. Соответственно в среде без прочности частички перестают взаимодействовать в момент открытия пор. В пористой среде с открытыми порами

$$V^{n+1} = V^n, E^{n+1} = E^n, P^{n+1} = P^n, \quad (7.179)$$

$$W_y^{n+1} = W_y^n, S_1^{n+1} = 0, S_2^{n+1} = 0. \quad (7.180)$$

Объем пор в момент t^{n+1} определяется уравнением

$$\theta_{i+0.5}^{n+1} = \frac{(r_{i+1}^{n+1})^\alpha - (r_i^{n+1})^\alpha}{h_{i+0.5}} - V_{i+0.5}^n. \quad (7.181)$$

Если $\Theta_{i+0.5}^{n+1} \geq 0$, то поры остаются открытыми в момент t^{n+1} . Если окажется, что $\Theta_{i+0.5}^{n+1} < 0$, то значит, что в некоторый момент $t^n < t^* < t^{n+1}$ поры закрылись, после чего на промежутке времени $\Delta t = t^{n+1} - t^*$ происходит сжатие вещества при закрытых порах. Величина Δt находится из (7.181) при $\Theta_{i+0.5}^{n+1} = 0$ после подстановки в это уравнение вместо r_i^{n+1} и r_{i+1}^{n+1} значений r_i^* и r_{i+1}^* , которые определяются уравнениями

$$r_i^* = r_i^n + (\tau - \Delta t) U_i^{n+1}, r_{i+1}^* = r_{i+1}^n + (\tau - \Delta t) U_{i+1}^{n+1}. \quad (7.182)$$

В этом случае все величины в момент t^{n+1} в точке $M_{i+0.5}$ вычисляются по уравнениям (7.159) — (7.178) для сплошной среды, в которых вместо τ следует взять Δt .

В случае трещиноватой среды разностные уравнения получаются после аппроксимации соответствующих дифференциальных уравнений. Разностное уравнение движения берется в виде

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} - \alpha (r_i^n)^{\alpha-1} \frac{(\bar{\sigma}_1)_{i+0.5}^n - (\bar{\sigma}_1)_{i-0.5}^n}{h_i} - f_i^n = 0, \quad (7.183)$$

где

$$h_i = 0.5 (h_{i+0.5} + h_{i-0.5}), h_{i+0.5} = \frac{(r_{i+1}^n)^\alpha - (r_i^n)^\alpha}{(V + \Theta)_{i+0.5}^n}. \quad (7.184)$$

Величину f_i^n можно оценить из уравнения (7.161). В случае трещиноватой среды первого направления $\sigma_1 = 0$, следовательно, в (7.183) либо $(\bar{\sigma})_{i+0.5}^n = 0$, либо $(\bar{\sigma}_1)_{i-0.5}^n = 0$. Эйлерова координата точки i в момент t^{n+1} определяется уравнением

$$\frac{r_i^{n+1} - r_i^n}{\tau} - U_i^{n+1} = 0. \quad (7.185)$$

Суммарный удельный объем вещества и трещин находится из уравнения

$$(V + \Theta)_{i+0.5}^{n+1} = \frac{(r_{i+1}^{n+1})^\alpha - (r_i^{n+1})^\alpha}{M_{i+0.5}}. \quad (7.186)$$

Скорость изменения энергии дисторсии можно получить из уравнения

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)_{i+0.5} = \alpha (\beta S_1)_{i+0.5}^n \frac{(r_{i+1}^{n+1})^{\alpha-1} U_{i+1}^{n+1} - (r_i^{n+1})^{\alpha-1} U_i^{n+1}}{h_{i+0.5}} - \frac{(\alpha - 1) (V (S_1 - S_2)_{i+0.5}^n (U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}))}{r_i^{n+1} + r_{i+1}^{n+1}}. \quad (7.187)$$

Это уравнение аппроксимирует уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \alpha \beta S_1 \frac{\partial (r^{\alpha-1} U)}{\partial M} - \frac{(\alpha - 1) (S_1 - S_2) U \beta (V + \Theta)}{r},$$

которое получается аналогично уравнению (7.48) для «сплошной» среды с параметрами $\beta S_1, \beta S_2, V + \Theta$. Скорость изменения удельного объема трещиноватой среды определяется в зависимости от типа трещин и характера деформирования уравнениями (7.148) или уравнением (7.151). Если деформации упругие, то $A = 1, B = 0, C = 2G, \varphi = 0$ и из указанных уравнений следует

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{P^n \Phi^{n+1} + \frac{2G}{\beta^n} \left(\frac{\partial e_j}{\partial t} \right)^{n+1}}{\frac{P^n}{V^n} - (a^n)^2}, \quad (7.188)$$

где

$$\Phi^{n+1} = \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{r_{i+1}^{n+1} - r_i^{n+1}} + \frac{(\alpha - 1)(U_{i+1}^{n+1} + U_i^{n+1})}{r_{i+1}^{n+1} + r_i^{n+1}}, \quad (7.189)$$

$$\left(\frac{\partial e_j}{\partial t} \right)^{n+1} = \begin{cases} \frac{2}{3} \Phi^{n+1} - \frac{(\alpha - 1)(U_{i+1}^{n+1} + U_i^{n+1})}{r_{i+1}^{n+1} + r_i^{n+1}} & \text{при } j = 1, \\ -\frac{1}{3} \Phi^{n+1} + \frac{(\alpha - 1)(4 - \alpha)(U_{i+1}^{n-1} + U_i^{n-1})}{2(r_{i+1}^{n+1} + r_i^{n+1})} & \text{при } j = 2. \end{cases} \quad (7.190) \quad (7.191)$$

Далее находится значение V^{n+1}

$$V^{n+1} = V^n + \tau \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (7.192)$$

Если деформации пластические, то $A = 0, B = 1, C = 2VY^2/3 \frac{\partial W}{\partial t}$ и из уравнений (7.145) и (7.146) определить скорость изменения удельного объема вещества не удастся. Алгоритм нахождения $P^{n+1}, V^{n+1}, E^{n+1}$ в этом случае более сложный, чем для упругих деформаций. Здесь, во-первых, можно использовать разностное уравнение, аппроксимирующее (7.150). Однако при этом нужно расширить число величин, характеризующих решение. В рассматриваемом случае такой величиной является $\partial e_j / \partial t$. Рассмотрим второй путь, более сложный, но не требующий введения и запоминания дополнительных величин. Аппроксимируем уравнение (7.149) разностным уравнением

$$3P_{i+0.5}^{n+1} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)_{i+0.5} - 2(K + \Theta)_{i+0.5}^{n+1} Y^2 \left(\frac{\partial e_i}{\partial t} \right)_{i+0.5}^{n+1} = 0. \quad (7.193)$$

К этому уравнению добавляется уравнение (7.165), в котором полагаем

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)_{i+0.5} = \Phi_{i+0.5} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)_{i+0.5},$$

где

$$\Phi_{i+0.5} = 1 - \frac{(V + \Theta)_{i+0.5}^{n+1} \left(Y \frac{\partial Y}{\partial t} \right)_{i+0.5}}{3 \left(G \frac{\partial W}{\partial t} \right)_{i+0.5}}.$$

Наконец, после добавления уравнения состояния

$$P_{i+0.5}^{n+1} = P(V_{i+0.5}^{n+1}, E_{i+0.5}^{n+1})$$

получается система¹ трех нелинейных уравнений относительно $(P, V, E)_{i+0.5}^{n+1}$. После нахождения $V_{i+0.5}^{n+1}$ величина $\Theta_{i+0.5}^{n+1}$ определяется тривиально, поскольку значение $(V + \Theta)_{i+0.5}^{n+1}$ известно из (7.186).

Если деформации трещиноватой среды являются упругопластическими, то уравнение (7.151) аппроксимируется уравнением

$$\begin{aligned} \left(\frac{P}{V} - a^2\right)^n \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) &= P^n \Phi^n - \frac{3G^n P^n}{V^n (Y^n)_2} \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right) + \frac{P^n}{Y^n} \frac{\partial Y}{\partial t} - \\ &- \frac{2G^n (V + \Theta)^n}{V^n} \left(\frac{\partial e_j}{\partial t}\right)^{n+1} - \Phi^n \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)^n. \end{aligned} \quad (7.194)$$

Далее рассчитывается V^{n+1} по (7.192).

После V^{n+1} в случае упругих и упругопластических деформаций определяются $E_{i+0.5}^{n+1}$ и $P_{i+0.5}^{n+1}$ с помощью уравнений (7.165) или (7.166) и уравнения состояния.

Компоненты девиатора напряжений находят по уравнениям (7.167) — (7.175).

Поскольку в уравнения (7.167), (7.168) входит V^{n+1} , которое уже определено с учетом изменения объема трещин в соответствии с условием равновесия, то компоненты девиатора скоростей деформаций также получаются с учетом изменения объема трещин. Вследствие того, что уравнения (7.169) — (7.175) приближенные, после определения S_j^{n+1} может оказаться, что условие равновесия трещин и вещества $\sigma_j = 0$ не выполнено. В таком случае значение S_j^{n+1} , номер которого совпадает с типом трещин, корректируется с помощью условия

$$(S_j)_{i+0.5}^{n+1} = P_{i+0.5}^{n+1}. \quad (7.195)$$

В заключение проверяется условие (7.177) с корректировкой того S_k^{n+1} , номер которого не равен типу трещин. Вместо (7.178) берется корректирующий множитель

$$R = \left(-S_j^{n+1} \pm \sqrt{\frac{4}{3}(Y^{n+1})^2 - 3(S_j^{n+1})^2}\right) / 2S_k^{n+1}.$$

Наконец, по уравнениям (7.163) и (7.176) определяется W_y^{n+1} .

§ 9. Разностные методы расчета больших деформаций

Лагранжевы переменные позволяют проследить деформацию каждой макрочастицы тела, что дает возможность успешно применять наследственные модели деформирования, основанные на нелинейных зависимостях интегродифференциального вида. Развитию моделей такого типа посвящены, например, монографии

[33—37]. В случае одномерных движений вещества преимущества разностных схем в лагранжевых координатах перед схемами в эйлеровых или эйлерово-лагранжевых координатах бесспорны. Если моделируются дву- или трехмерные нестационарные движения вещества, то методы в лагранжевых переменных остаются эффективными лишь в случае малых деформаций.

Применение лагранжевых координат позволяет предельно просто моделировать движение контактных границ или внешних границ деформируемого тела. Как правило, указанные границы рассчитываются по тем же формулам, что и внутренние точки тела. Однако при больших деформациях вещества сильно деформируются ячейки сетки. При этом для сохранения нужной точности необходимо уменьшить шаг интегрирования по времени либо вообще перестраивать пространственную сетку, что в основном означает нарушение лагранжевости и потерю возможности проследить историю деформирования конкретных частиц вещества.

Снижение эффективности разностных методов в лагранжевых координатах в случае больших деформаций определяется принципиальным противоречием: лагранжевость требует, чтобы частицы были близкими всегда, а при больших деформациях частицы расходятся далеко друг от друга. Данный недостаток практически устраняется в методах, допускающих смену соседних частиц. Это так называемые методы со свободным лагранжевым соседством. Один из первых методов такого типа предложен в [38]. В его основе лежит идея описания свойств вещества в «свободных точках». Дальнейшее развитие методов со свободным лагранжевым соседством пошло по пути использования сеточных ячеек Дирихле. Впервые идея использования таких ячеек для аппроксимации свойств среды на плоскости была высказана Пастом и Уламом [39] и реализована в методиках «Медуза» [40] и ДМК [41]. Эти методики являются квазилагранжевыми, поскольку соседство ячеек Дирихле в них зафиксировано. Методики со свободным лагранжевым соседством, на основе ячеек Дирихле предложены в [42, 43].

Следуя [43], кратко изложим основные положения методики «Рапид». Все физические области рассчитываемой системы тел покрываются сеткой ячеек Дирихле. Граница каждой области определяется набором граничных точек, соседство которых вдоль границы запоминается и изменяется в процессе деформирования лишь в исключительных случаях. Остальные точки, лежащие внутри физической области, могут менять своих соседей. Соседями некоторой точки объявляются точки, имеющие с данной общее ребро ячейки Дирихле, контур которой используется для получения разностных формул, аппроксимирующих пространственные производные. Таким образом, ячейки Дирихле не являются, вообще говоря, лагранжевыми, хотя с каждой точкой связывается масса определенной вещества. Разностная схема на каждом временном шаге адаптируется под решение так, чтобы обеспечить сохранение массы области.

В прямоугольной декартовой системе координат R, Z на плоскости движения среды с плоской ($\alpha = 1$) и осевой ($\alpha = 2$) симметрией определяются системой уравнений

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{\partial U_R}{\partial R} + \frac{\partial U_Z}{\partial Z} + (\alpha - 1) \frac{U_R}{R}, \quad (7.196)$$

$$\frac{1}{V} \frac{dU_R}{dt} = \frac{\partial \sigma_{RR}}{\partial R} + \frac{\partial \sigma_{RZ}}{\partial Z} + (\alpha - 1) \frac{2S_{RR} + S_{ZZ}}{R}, \quad (7.197)$$

$$\frac{1}{V} \frac{dU_Z}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ZZ}}{\partial Z} + \frac{\partial \sigma_{RZ}}{\partial R} + (\alpha - 1) \frac{S_{RZ}}{R}, \quad (7.198)$$

$$\sigma_{RR} = S_{RR} + Q_{RR} - P - q_R, \quad (7.199)$$

$$\sigma_{ZZ} = S_{ZZ} + Q_{ZZ} - P - q_Z, \quad (7.200)$$

$$\sigma_{RZ} = S_{RZ} + Q_{RZ}, \quad (7.201)$$

где q_R, q_Z — компоненты вектора искусственной вязкости, Q_{RR}, Q_{ZZ}, Q_{RZ} — компоненты деватора тензора искусственной вязкости.

Компоненты деватора тензора напряжений определяются уравнениями

$$\frac{dS_{RR}}{dt} + \lambda S_{RR} = 2\mu \frac{de_{RR}}{dt} + 2S_{RZ}\omega_{RZ}, \quad (7.202)$$

$$\frac{dS_{ZZ}}{dt} + \lambda S_{ZZ} = 2\mu \frac{de_{ZZ}}{dt} - 2S_{RZ}\omega_{RZ}, \quad (7.203)$$

$$\frac{dS_{RZ}}{dt} + \lambda S_{RZ} = 2\mu \frac{de_{RZ}}{dt} + (S_{ZZ} - S_{RR})\omega_{RZ}, \quad (7.204)$$

где $\omega_{RZ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_R}{\partial Z} - \frac{\partial U_Z}{\partial R} \right)$ — тензор вращения, а λ определяется условиями пластичности

$$F = S_{RR}^2 + S_{ZZ}^2 + S_{RZ}^2 + S_{RR}S_{ZZ} - \frac{1}{3} Y^2 = 0, \quad (7.205)$$

$$G = 3\mu \left((2S_{RR} + S_{ZZ}) \frac{de_{RR}}{dt} + (2S_{ZZ} + S_{RR}) \frac{de_{ZZ}}{dt} + 2S_{RZ} \frac{de_{RZ}}{dt} \right) - Y \frac{dY}{dt} \geq 0 \quad (7.206)$$

так, что $\lambda = 0$ при $F < 0$ или $G \leq 0$, и $\lambda = G$ при $F = 0$ и $G > 0$. Уравнение энергии записывается в недивергентном виде

$$\frac{dE}{dt} = -P \frac{dV}{dt} + \frac{dE_S}{dt} + \frac{dE_Q}{dt}, \quad (7.207)$$

где давление P зависит от удельного объема V и удельной внутренней энергии E

$$P = P(V, E), \quad (7.208)$$

а E_s и E_Q определяются уравнениями

$$\frac{1}{V} \frac{dE_S}{dt} = S_{RR} \left(\frac{\partial U_R}{\partial R} - (\alpha - 1) \frac{U_R}{R} \right) + S_{ZZ} \left(\frac{\partial U_Z}{\partial Z} - (\alpha - 1) \frac{U_Z}{R} \right) + S_{RZ} \left(\frac{\partial U_R}{\partial Z} + \frac{\partial U_Z}{\partial R} \right), \quad (7.209)$$

$$\frac{1}{V} \frac{dE_Q}{dt} = (Q_{RR} - q_R) \frac{\partial U_R}{\partial R} + (Q_{ZZ} - q_Z) \frac{\partial U_Z}{\partial Z} + Q_{RZ} \left(\frac{\partial U_R}{\partial Z} + \frac{\partial U_Z}{\partial R} \right). \quad (7.210)$$

Векторная искусственная вязкость содержит линейный и квадратичный члены

$$q_x = \begin{cases} 0 & \text{при } \frac{\partial U_x}{\partial x} \geq 0, \\ \rho \left(h \frac{\partial U_x}{\partial x} \right)^2 - 0.5ah \frac{\partial U_x}{\partial x} & \text{при } \frac{\partial U_x}{\partial x} < 0, \end{cases} \quad (7.211)$$

где ось x в локальной системе координат совпадает с направлением, вдоль которого достигается минимум $\frac{\partial U_x}{\partial x}$, а h — характерный размер по нормали к фронту волны сжатия.

Девизор тензора искусственной вязкости Q_{ij} действует при наличии деформаций сдвига

$$Q_{xy} = hW \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right), \quad (7.212)$$

где

$$W = \begin{cases} 0.5a, & \text{если } \frac{\partial U_x}{\partial x} \geq 0, \\ 0.5a - \rho h \frac{\partial U_x}{\partial x}, & \text{если } \frac{\partial U_x}{\partial x} < 0, \end{cases} \quad (7.213)$$

а x, y — пара ортогональных осей в плоскости R, Z .

Уравнения (7.196) — (7.213) аппроксимируются разностными уравнениями, которые основываются на использовании представлений пространственных производных через контурные или поверхностные интегралы, соответствующие контурам ячеек Дирихле. В правые части разностных уравнений входят вспомогательные величины давления и скорости, определяемые на ребрах ячейки Дирихле. Ось x , проходящая через точки M_1 и M_2 , ортогональна соответствующему ребру, ячейки Дирихле и пересекает его в некоторой точке O . Тогда вспомогательные значения P_0 и \bar{U}_0 определяются по формулам

$$(P + q_x)_0 = \frac{(P + q_x)_1 m_1 + (P + q_x)_2 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (7.214)$$

$$\bar{U}_0 = \frac{\bar{U}_1 m_1 + \bar{U}_2 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (7.215)$$

где $m_1 = \rho_1 |x_0 - x_1|$, $m_2 = \rho_2 |x_0 - x_2|$. Если $|x_0 - x_1| = |x_0 - x_2|$ и точка 0 — не контактная граница, то (7.214), (7.215) принимают вид

$$P_0 = \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{V_1 + V_2}, \quad (S_{xx})_0 = \frac{(S_{xx})_1 V_1 + (S_{xx})_2 V_2}{V_1 + V_2}, \quad (7.216)$$

$$(q_x)_0 = \frac{(q_x)_1 V_1 + (q_x)_2 V_2}{V_1 + V_2}. \quad (7.217)$$

С учетом (7.214), принимая во внимание, что $h = m_1 = m_2$, (7.217) можно записать в виде

$$(q_x)_0 = \frac{2\Delta U^2 - 0.5(c_1 + c_2)\Delta U}{V_1 + V_2}, \quad (7.218)$$

где

$$\Delta U = \begin{cases} 0 & \text{при } U_2 - U_1 \geq 0, \\ U_2 - U_1 & \text{при } U_2 - U_1 < 0. \end{cases} \quad (7.219)$$

Далее

$$(S_{xy})_0 = \frac{(S_{xy})_1 V_1 + (S_{xy})_2 V_2}{V_1 + V_2}, \quad (7.220)$$

$$(Q_{xy})_0 = 0.5W_0((U_y)_1 - (U_y)_2), \quad (7.221)$$

$$W_0 = \begin{cases} 0.5 \frac{c_1 + c_2}{V_1 + V_2} & \text{при } (U_x)_2 - (U_x)_1 \geq 0, \\ 0.5 \frac{c_1 + c_2}{V_1 + V_2} - \frac{2((U_x)_2 - (U_x)_1)}{V_1 + V_2} & \text{при } (U_x)_2 - (U_x)_1 < 0. \end{cases} \quad (7.222)$$

Уравнения для вспомогательных величин в точке 0 в [43] обобщены на случай, когда $m_1 \neq m_2$ или когда в этой точке находится контактная граница.

После определения вспомогательных величин на всех ребрах ячейки Дирихле, построенной вокруг точки M_0 с набором соседних точек M_k ($k = 1, 2, \dots, n$), расположенных в порядке обхода контура ячейки против часовой стрелки, компоненты вектора скорости определяются уравнениями

$$A^n \rho^n \frac{U_R^{n+1} - U_R^n}{\tau} = \sum_{k=1}^N ((\sigma_{RR})_{0k} (Z'_{k-1} - Z'_k) + (\sigma_{RZ})_{0k} (R'_k - R'_{k-1}))^n + (\alpha - 1)(2S_{RR} + S_{ZZ})_0^n \frac{1}{R_*}, \quad (7.223)$$

$$A^n \rho^n \frac{U_Z^{n+1} - U_Z^n}{\tau} = \sum_{k=1}^N ((\sigma_{ZZ})_{0k} (R'_k - R'_{k-1}) + (\sigma_{RZ})_{0k} (Z'_{k-1} - Z'_k))^n + (\alpha - 1)(S_{RZ})_0^n \frac{1}{R_*}, \quad (7.224)$$

где $Z'_0 = Z'_N$, $R'_0 = R'_N$, $R_* = \left(\frac{\Theta}{2\pi A}\right)_0^n$, A_0^n , Θ_0^n — площадь и объем

ячейки Дирихле, R'_k, Z'_k — координаты пересечения соседних ребер ячейки Дирихле.

Новые координаты находятся из уравнений

$$R^{n+1} = R^n + \tau U_R^{n+1}, \quad Z^{n+1} = Z^n + \tau U_Z^{n+1}. \quad (7.225)$$

Новые соседи точки M_0 находятся, как правило, из числа старых соседей и соседей старых соседей.

Компоненты тензора скоростей деформаций определяются уравнениями

$$A_0^{n+1} \left(\frac{\partial U_R}{\partial R} \right)_0^{n+1} = \sum_{k=1}^N (U_R)_{0k}^{n+1} (Z'_k - Z'_{k-1})^{n+1}, \quad (7.226)$$

$$A_0^{n+1} \left(\frac{\partial U_Z}{\partial Z} \right)_0^{n+1} = \sum_{k=1}^N (U_Z)_{0k}^{n+1} (R'_{k-1} - R'_k)^{n+1}, \quad (7.227)$$

$$A_0^{n+1} \left(\frac{\partial U_R}{\partial Z} + \frac{\partial U_Z}{\partial R} \right)_0^{n+1} \sum_{k=1}^N \left((U_R)_{0k}^{n+1} (R'_{k-1} - R'_k)^{n+1} + (U_Z)_{0k}^{n+1} (Z'_k - Z'_{k-1})^{n+1} \right). \quad (7.228)$$

Как отмечалось в § 4, 5, разностные схемы с разностным уравнением сохранения массы в дивергентном виде, как правило, M -неконсервативны. С целью сохранения массы каждой частицы следует применять разностный закон сохранения массы в недивергентном виде. Однако уравнение

$$\rho_0^{n+1} = \rho_0^n \frac{\Theta_0^n}{\Theta_0^{n+1}}, \quad (7.229)$$

обеспечивая M -консервативность разностной схемы, приводит к возникновению колебаний и искажений решения в случаях, когда частица стремится поменять своих соседей, например «протиснуться» между соседями. С целью предотвращения указанных эффектов, определяемых только особенностями уравнения (7.229) и не имеющих ничего общего с моделируемым физическим процессом, в [43] вместо уравнения (7.229) используется уравнение

$$\frac{\rho_0^n - \rho_0^{n+1}}{\tau} = \left(\frac{\partial U'_R}{\partial R} + \frac{\partial U'_Z}{\partial Z} + (\alpha - 1) \frac{U'_R}{R} \right)_0^{n+1} + k_1 \left(\left(\frac{\partial U'_R}{\partial Z} - \frac{\partial U'_Z}{\partial R} \right)_0^{n+1} \right)^2 + k_2 \left(\left| \frac{\partial U'_R}{\partial R} - \frac{\partial U_R}{\partial R} \right| + \left| \frac{\partial U'_Z}{\partial Z} - \frac{\partial U_Z}{\partial Z} \right| + (\alpha - 1) \left| \frac{U'_R}{R} - \frac{U_R}{R} \right| \right)_0^{n+1}. \quad (7.230)$$

На каждом шаге по времени k_1 и k_2 константы в каждой физической области подбирались так, чтобы в каждой области выполнялось интегральное уравнение сохранения массы

$$\sum_k \rho_k^{n+1} \Theta_k^{n+1} = \sum_k \rho_k^n \Theta_k^n. \quad (7.231)$$

Дополнительные значения скоростей, каждая из которых направлена вдоль нормали к ребру ячейки с номером « i », определяются уравнениями

$$U'_{0i} = U_{0i}^{n+1} + k \left(\frac{P_0^n - P_{i,n}^n}{l_{0i}^{n+1}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_0^n + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_i^n \right) \frac{l_{0i}^{n+1}}{a_{0i}^n}, \quad (7.232)$$

где l_{0i} — расстояние между точками M_0 и M_i , $k \leq 0.5$ — константа на шаге по времени τ .

Внутренняя энергия определяется в два этапа. Вначале рассчитывается промежуточное значение E_1 :

$$E_1 = E^n - P^n (V^{n+1} - V^n) + \Delta E_s + \Delta E_q.$$

Затем из уравнения состояния находится $P^1 = P(V^{n+1}, E_1)$, после чего E и P пересчитываются:

$$E^{n+1} = E^n - 0.5 (P^n + P^{n+1}) (V^{n+1} - V^n) + \Delta E_s + \Delta E_q,$$

$$P^{n+1} = P(V^{n+1}, E^{n+1}).$$

Величины ΔE_s и ΔE_q находятся из уравнений, аппроксимирующих (7.209) и (7.210).

В качестве примера в [43] рассмотрена задача из [44] о сжатии эллипсоида наружным давлением. Показано, что предложенный в [43] метод позволяет построить численное решение для таких значений времени, для которых рассчитать движение по регулярной лагранжевой методике не удастся.

Вернемся теперь к обсуждению других численных методов решения двумерных упругопластических задач. Для решения таких задач широкое распространение получили методы, в которых разностные уравнения строились на регулярной лагранжевой сетке. В [14, 15] достаточно подробно изложены два близких метода. В обзорной работе [19] отмечается, что работа Уилкинса [15] была одной из первых работ такого типа. Здесь же обсуждаются достоинства и недостатки характеристических разностных методов, методов частиц и больших частиц и методов конечных элементов.

Чаще всего в обзорных работах по методам решения двумерных упругопластических задач необоснованно, на наш взгляд, упускаются из виду методы расчета двумерных газодинамических или гидродинамических течений. Это, по-видимому, естественно, если вначале строить методы для решения задач с малыми напряжениями и деформациями, а затем обобщать их на области с большими напряжениями и деформациями. Однако возможен иной путь развития разностных методов и расширения области их применимости. Как видно из уравнений этой главы, шаровая часть тензора напряжений присутствует в уравнениях независимо от величины девиаторов напряжений и деформаций. Следовательно, разностный метод расчета двумерных газодинамических течений можно рассматривать как ядро разностных методов расчета деформаций неидеальных жидкостей и твердых тел. Именно такой подход к построению математических моделей деформируемых сплош-

ных сред наиболее последовательно изложен в [16]. На этом пути удастся использовать хорошо исследованные разностные методы для решения задач гидродинамики, добавляя в законах сохранения идеальной жидкости члены, учитывающие поведение девиаторов напряжений и деформаций, и вводя дополнительные уравнения, связывающие их друг с другом.

История развития разностных методов решений задач газовой динамики достаточно полно изложена в [45].

Глава 8

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ СОЗДАНИЯ И РЕГИСТРАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

§ 1. Методы создания ударных волн

Применение ударных волн предоставляет уникальные возможности для исследования прочностных свойств твердых тел в диапазоне напряжений до нескольких сотен гигапаскалей. Разработанные лабораторные методы создания плоских ударных волн, использующие высокоинтенсивные источники энергии (детонация взрывчатого вещества (ВВ), электровзрыв фольги, электронный пучок, лазерное излучение, сжатый газ), позволяют в широком диапазоне варьировать параметры ударной волны: от долей до нескольких микросекунд по длительности и от долей до нескольких сотен гигапаскалей по амплитуде.

Для регистрации кратковременных явлений, связанных с механическими свойствами ударно сжатого твердого тела, применяются разнообразные экспериментальные методики дискретной и непрерывной регистрации измеряемых величин.

Рассмотрим группу методов создания ударных волн, в которых быстрое выделение энергии в одном веществе преобразуется в энергию ударного сжатия другого вещества. Как правило, в таких методах плоский образец исследуемого материала (преграда) граничит с плоским слоем взрывчатого вещества, в котором с помощью специального генератора создается нормальная детонационная волна. При ее падении на границу раздела ВВ — преграда, в последней возбуждается ударная волна. Поскольку за фронтом детонационной волны в продуктах детонации (ПД) следует волна разрежения, то амплитуда ударной волны в преграде достигает максимального значения в момент распада разрыва (см. § 6 гл. 4) и затем уменьшается по мере удаления от контактной границы, т. е. ударная волна затухает. При этом изменяется форма импульса давления: импульс растягивается по координате (или по времени в заданной точке). Поскольку на практике поперечные размеры ВВ и преграды, как правило, конечны, от боковых поверхностей в ПД и в вещество преграды распространяются боковые (поперечные) волны

разрежения. Область, охваченная этими волнами разрежения, возрастает с расстоянием, пройденным ударной волной. Указанное обстоятельство следует учитывать при постановке опытов, выбирая такую геометрию, чтобы измерения проводились в неискаженной боковой разгрузкой зоне в течение требуемого времени. Для этого на практике при проведении измерений поперечные размеры образцов выбирают значительно большими по сравнению с их толщиной.

В частности, при измерении скорости распространения стационарной ударной волны по цилиндрическому образцу радиусом r_0 и толщиной h_0 измерительные датчики устанавливаются в зоне радиусом Δr , в которой боковая разгрузка не влияет на скорость ударной волны. Величина $\Delta r = r_0 - h_0 \sqrt{\left(\frac{c}{D}\right)^2 - \left(\frac{D - U_1}{D}\right)^2}$ отсчитывается от оси образца.

В основе второй группы методов лежит явление преобразования кинетической энергии одного вещества в энергию ударного сжатия другого. Варьируя скорость и толщину движущейся пластины (ударника) и выбирая ударники из разных веществ, можно исследовать параметры ударной волны в плоской преграде в широком диапазоне их изменения. Пусть толщина ударника много меньше толщины преграды, а его скорость $W_{уд}$ направлена по нормали к поверхности ударника, которая одновременно является нормалью к поверхности преграды. В результате соударения влево и вправо от поверхности раздела ударник — преграда распространяются ударные волны. Их амплитуды вычисляются путем решения задачи о распаде произвольного разрыва в момент соударения (см. § 6 гл. 4).

Распространяющаяся по ударнику отраженная ударная волна при выходе на его тыльную свободную поверхность порождает центрированную волну разрежения. Через некоторое время, зависящее от толщины ударника, его скорости и свойств материалов ударника и преграды, волна разрежения догоняет ударную волну в преграде, после чего амплитуда ударной волны в преграде начинает уменьшаться.

Пусть свободно летящий ударник толщиной l_0 , материал которого имеет нормальную плотность и температуру, тормозится на преграде из того же материала. В этом случае голова волны разрежения догонит фронт ударной волны на расстоянии L_0 от поверхности соударения, равном

$$L_0 = l_0 \left(\frac{D + c - U_1}{U_1 + c - D} \right),$$

где c — скорость звука в ударно сжатом состоянии.

В тех же предположениях длительность t_n области постоянного течения за фронтом ударной волны для «частицы» с заданной начальной координатой L_n , отсчитываемой от поверхности соударения, составляет

$$t_n = \frac{l_0(D + c - U_1) + L_n(D - U_1 - c)}{Dc}.$$

Таким образом, t_n растет с толщиной ударника l_0 и уменьшается с удалением от поверхности соударения.

К третьей группе методов создания ударных волн отнесем такие, в которых электрический взрыв плоского проводника (фольга) преобразуется в энергию ударного сжатия другого вещества. Эти методы удобны для получения нестационарных ударных волн умеренной и малой амплитуды [1, 2]. Как правило, тонкая металлическая фольга размещается на поверхности изолятора. При прохождении импульса тока (плотность тока достигает величины в 10^{11} — 10^{12} А/м²) фольга испаряется. В испаренном материале фольги развиваются давления, которые транслируются в преграду из изолятора. Характерное время выделения основной доли энергии в проводнике составляет $(0.2$ — $0.5) \cdot 10^{-6}$ с. Примерно такой же величине равно характерное время приложения давления к границе изолятора. Под действием этого давления в преграде распространяется нестационарная ударная волна. Площадь взрывающейся фольги на практике достигает ~ 30 см² [2], чего достаточно для проведения корректных измерений. В [2] при площади фольги из Си 24 см², толщине 0.004 см и плотности тока $j = 6.9 \cdot 10^{11}$ А/м² в преграде из полиметилметакрилата на расстоянии 1 мм от поверхности раздела фольга — преграда зарегистрирована волновая скорость $D = 4.5$ км/с. Этому значению D отвечает амплитуда ударной волны около 6.0 ГПа. Метод электрического взрыва фольги имеет недостатки, связанные с трудностями проведения измерений электрическими способами в условиях сильных электромагнитных помех.

В основе четвертой группы методов получения ударных волн лежит облучение поверхности преграды лазерным светом или потоком электронов. В зоне поглощения энергии излучения возникают высокие давления, амплитуда которых прямо пропорциональна концентрации поглощенной энергии и зависит от длительности импульса излучения t_0 , уменьшаясь с ее увеличением [3]. На расстояниях, превышающих толщину слоя, в котором поглощается энергия излучения, распространяющиеся волны существенно нестационарны. При облучении лазером с модулированной добротностью свободной поверхности мишени зарегистрированные амплитуды одномерных волн напряжения, как правило, не превышают 1 ГПа [4].

Путем модификации условий на облучаемой поверхности мишени можно значительно повысить амплитуду волны сжатия. При использовании прозрачного к лазерному излучению экрана, находящегося в контакте с облучаемой поверхностью и ограничивающего разлет плазмы, удается получить волны малой длительности (несколько десятых микросекунд) амплитудой несколько гигапаскалей [5, 6]. В [6] использовался моноимпульсный ОКГ на неодимовом стекле с длительностью импульса излучения $t_0 = (70$ — $100) \cdot 10^{-9}$ с. В случае наличия экрана из стекла толщиной 5—6 мм на выходе мишени толщиной 0.05 мм зависимость максимальной амплитуды σ_{max} волны сжатия от плотности падающей

энергии лазерного излучения описывается линейной зависимостью: $\sigma_{xx} = (1.06 \pm 0.05) \cdot Q$ для мишени из Cd и $\sigma_{xx} = (0.93 \pm 0.10) \cdot Q$ для мишени из Pb, где σ_{xx} выражается 10^8 Па, Q — в джоулях на сантиметр квадратный. Область применимости полученных зависимостей $\sigma_{xx}(Q)$ ограничена значением $Q \leq 30$ Дж/см².

Для Pb зависимость $\sigma_{xx}(Q)$ прослежена до значения $Q \leq 160$ Дж/см². Начиная с величины $Q \approx 40$ Дж/см² зависимость $\sigma_{xx}(Q)$ монотонно, но слабее, чем по линейному закону, растет с Q и достигает своего максимума $\sigma_{xx} \approx 5$ ГПа при $Q \approx 120$ Дж/см². Дальнейшее повышение Q ведет только к уменьшению σ_{xx} . Аналогичный эффект достижения максимума зависимости $\sigma_{xx}(Q)$ наблюдался авторами работы [4] при примерно тех же значениях Q в условиях прямого облучения алюминиевой мишени. В опытах с электронным пучком малой длительности ($t_0 = (35-150) \cdot 10^{-9}$ с) в металлах получены нестационарные волны напряжения амплитудой несколько гигапаскалей [7, 8].

Большое преимущество этих методов заключается в практически одновременном генерировании волн напряжения по всей облучаемой площади. Вместе с тем имеются технические трудности получения равномерного распределения энергии по облучаемой поверхности и проведения измерений на малых базах в условиях интенсивных электромагнитных помех. По этим причинам, а также из-за сравнительно большой стоимости рассмотренные методы используются значительно реже, чем методы с применением энергии взрыва химических взрывчатых веществ.

§ 2. Способы ускорения ударников

На практике большое распространение получил способ, в котором ударник разгоняется под действием расширяющихся продуктов взрыва химического взрывчатого вещества. При этом детонационная волна падает либо по нормали к поверхности раздела ВВ — ударник, либо тангенциально. В ряде случаев для уменьшения нагрева и исключения возможности откольных явлений ударник отделяется от заряда из ВВ воздушным зазором шириной несколько миллиметров или прокладкой такой же величины из малоэластичного материала, например из полиэтилена или оргстекла. Типичная схема [9, 10] устройства для разгона ударника при нормальном падении детонационной волны на границу раздела ВВ — ударник показана на рис. 8.1. Специальная, согласно [10], вставка из инертного материала обеспечивает иницирование основного заряда из ВВ практически одновременно по всей поверхности. Под действием продуктов взрыва (ПВ) ударник ускоряется в свинцовом сопле. Варьирование толщин основного заряда из ВВ и ударника позволяет в широких пределах изменять скорость ударника на выходе из сопла.

Разгон ударника из сжимаемого материала происходит скачкообразно. Для тонкого ударника такого, что толщина слоя ВВ $l_{ВВ}$ и толщина ударника $l_{уд}$ отвечает неравенству $l_{ВВ} \gg l_{уд}$, эффектом

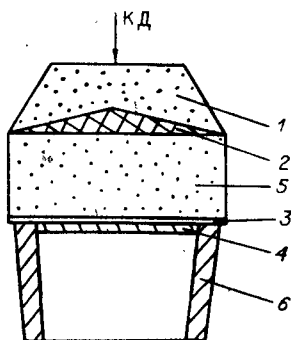


Рис. 8.1. Устройство для ускорения ударника в режиме нормального падения детонационной волны.

1 — вспомогательный заряд ВВ; 2 — вставка из инертного материала; 3 — «мягкая» прокладка; 4 — ударник; 5 — основной заряд ВВ; 6 — сопло; КД — детонатор.

сжимаемости можно пренебречь, т. е. считать материал ударника несжимаемым. Для этого случая в одномерной геометрии получено аналитическое решение задачи о разгоне ударника продуктами взрыва, подчиняющимся кубическому уравнению состояния [11]. Зависимость скорости движения ударника $W_{уд}$ от времени представим как

$$\frac{W_{уд}}{D} = \frac{1 + \eta}{\eta} - \left(1 + 2\eta \left(1 - \frac{t_0}{t}\right)\right)^{0.5} \cdot \left(\frac{1}{\eta} + \frac{t_0}{t}\right), \quad (8.1)$$

где D — скорость детонационной волны; $t_0 = l_{ВВ}/D$; $\eta = 16 m/27 M$; m, M — масса ВВ и ударника соответственно на единицу поверхности.

Для интервала времени $t \gg t_0$ уравнение (8.1) принимает вид

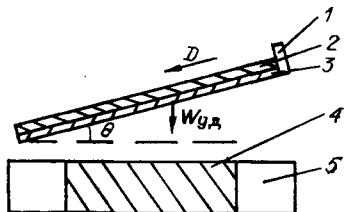
$$\frac{W_{уд}}{D} \approx \frac{1 + \eta}{\eta} - \frac{(1 + 2\eta)^{0.5}}{\eta}. \quad (8.2)$$

Значения $W_{уд}$, вычисленные по формуле (8.2), несколько завышены по сравнению с опытными данными, полученными не в идеальной одномерной геометрии. Применение формулы (8.2) тем не менее полезно на практике для предварительного выбора параметров нагружающего устройства с последующим экспериментальным измерением величины $W_{уд}$. С помощью нагружающих устройств типа, изображенного на рис. 8.1, достигнуты скорости полета ударников до нескольких километров в секунду. По [9, 10], при длине заряда 180 мм стальная пластина толщиной 1.5 мм разгоняется до скорости $W_{уд} \approx 5.6$ км/с, пролетая путь длиной 90 мм. Путем торможения высокоскоростных ударников в материале мишени достигаются давления, в несколько раз превышающие давления при непосредственном падении детонационной волны по нормали к поверхности раздела ВВ — ударник. Например, если стальной ударник, имеющий скорость $W_{уд} = 5.6$ км/с, тормозится на преграде из такого же материала, то давление в зоне стационарного течения составляет 190 ГПа, что примерно в 6 раз выше максимального давления в случае торможения продуктов взрыва тротила.

Вместе с тем при нормальном падении детонационной волны существуют трудности получения малых скоростей ударника, свя-

Рис. 8.2. Устройство для ускорения ударника детонационной волной в режиме тангенциального падения.

1 — инциатор плоской детонационной волны; 2 — слой ВВ; 3 — ударник; 4 — мишень; 5 — обойма.



занные с возможностью образования откольных явлений в теле ударника, со сложностью реализации одномерной нормальной детонационной волны при малых толщинах (несколько миллиметров) ВВ и т. д. Малые скорости ударника можно получить, если использовать метод его разгона продуктами взрыва при распространении детонационной волны вдоль поверхности раздела ударник — ВВ (рис. 8.2). В этом случае толщина ВВ может составлять несколько миллиметров. С помощью генератора детонационной волны возбуждается процесс детонации листового заряда ВВ по всей его ширине. Расширяющиеся продукты взрыва разгоняют ударник. Угол α наклона ударника выбирается таким образом, чтобы обеспечивалась одновременность удара по всей поверхности преграды. Если составляющая скорости ударника по нормали к поверхности преграды равна W_n , то угол поворота пластины $\theta = \arcsin \frac{W_n}{D}$, где D — скорость детонационной волны.

Как и в случае нормального падения детонационной волны, максимальная скорость движения разгоняемых пластин слабо зависит от сжимаемости материала. Это позволяет в первом приближении считать преграды несжимаемыми. Согласно расчету, при нормальном и тангенциальном падении детонационной волны с кубическим уравнением состояния ПВ на абсолютно жесткую стенку последней сообщается практически одинаковый удельный механический импульс [12]: $i_0 = 0.296 mD$ и $i_0 = 0.3 mD$ соответственно, где m — масса ВВ на единицу поверхности.

К моменту времени $t_0 = 3\delta_{ВВ}/D$, где $\delta_{ВВ}$ — толщина слоя ВВ, преграде сообщается более 90 % полного значения механического импульса. Опытные данные хорошо согласуются с расчетными. Для преград с $\rho_0 c_0^2 = (0.5 - 1.7) \cdot 10^3$ ГПа величина $i_0 = 0.29mD$ [12]. Таким образом, для преград, толщина которых $\delta_{пр}$ удовлетворяет условию $t_0 = 3\delta_{ВВ}/D < 2\delta_{пр}/c_0$, значение конечной скорости ударника

$$W_{уд} = \frac{i}{m_{уд}} = 0.29\alpha D, \quad (8.3)$$

где $\alpha = m/m_{уд}$, $m_{уд}$ — удельная масса ударника на единицу поверхности. Формула (8.3) применена в силу указанного выше временного неравенства для систем с малым α . В [13] предложена формула для расчета скорости движения преграды, которая для рассматриваемой геометрии (см. рис.8.2) имеет вид

$$\frac{W_{уд}^2}{\varepsilon_0} = \frac{6\alpha^2}{\alpha^2 + 5\alpha + 4}, \quad (8.4)$$

где ϵ_0 — удельная энергия ПВ, равная для кубического уравнения состояния ПВ величине $\epsilon_0 = D^2/16$. Преобразуя (8.4), получаем выражение, аналогичное формуле Гариэ:

$$W_{уд} = \frac{\alpha D \sqrt{3}}{\sqrt{8(\alpha^2 + 5\alpha + 4)}}. \quad (8.5)$$

Для малых α $W_{уд} \approx 0.36\alpha D$, что разумно согласуется с формулой (8.3). Другие эмпирические формулы для определения $W_{уд}$ предложены в работах [14, 15]. В [14] для значений $0.3 \leq \alpha \leq 3.5$ получено соотношение

$$W_{уд} = 0.65D \frac{\alpha}{\alpha + 2}. \quad (8.6)$$

В [15] рекомендуется выражение

$$W_{уд} = 1.2D \frac{(1 + 1.18\alpha)^{0.5} - 1}{(1 + 1.18\alpha)^{0.5} + 1}. \quad (8.7)$$

В области $0.3 \leq \alpha \leq 3.5$ выражения (8.6) и (8.7) дают близкие результаты. Формула (8.7) приводит при $\alpha \geq 1$ к более низким значениям $W_{уд}$ по сравнению с (8.6) и (8.5). В области $\alpha > 3.5$ значения $W_{уд}$, вычисленные по (8.4), оказываются более низкими по сравнению со значениями $W_{уд}$, рассчитанными по (8.3).

Для вычисления величины $W_{уд}$ при малых α ($\alpha < 0.3$) предпочтительно пользоваться формулами (8.3) или (8.7), при $0.3 \leq \alpha \leq 3.5$ — формулами (8.6) или (8.7) и при $\alpha > 3.5$ — формулой (8.7). Рассматриваемым способом путем изменения толщины (массы) ударника и массы ВВ можно в широких пределах варьировать основными характеристиками импульса давления (амплитуду и длительность), вводимого в преграду.

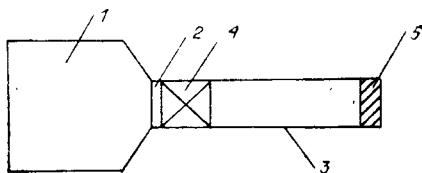
Устойчивость движения тонких пластин (толщиной ~ 0.1 мм) [14] делает способ удобным для получения ультракоротких импульсов давления.

Другим используемым в лабораторных условиях способом ускорения тонких ударников с целью создания кратковременных импульсных нагрузок является электровзрыв плоского проводника [1, 16, 17]. Вариация запасаемой энергией батареи конденсаторов (или напряжением батареи конденсаторов), толщиной ударника и фольги, их площадью позволяет в широких пределах изменить скорость ударника: от нескольких сотен метров в секунду до нескольких километров в секунду с высокой эффективностью — до 50% — преобразования энергии электровзрыва в кинетическую энергию движения ударника.

При быстром взрыве фольги характерное время выделения энергии в материале фольги составляет несколько десятых долей микросекунды) концентрация внутренней энергии в фольге превышает энергию испарения. В объеме, занимаемом фольгой, развиваются высокие давления, под действием которых ударник уско-

Рис. 8.3. Принципиальная схема баллистической ударной трубы.

1 — камера высокого давления; 2 — диафрагма; 3 — ствол; 4 — ударник; 5 — мишень.



руется. Эффективное ускорение ударника происходит на сравнительно малой базе его движения из-за быстрого падения давления в расширяющихся парах металла.

Наличие внешнего корпуса, ограничивающего разлет продуктов взрыва, существенно повышает эффективность передачи энергии ударнику по сравнению с бескорпусным вариантом.

Достаточно однородное, при разумных параметрах устройства, выделение электрической энергии по площади взрываеваемой фольги обеспечивает хорошую одновременность удара по неподвижной преграде. При скорости движения 1—2 км/с неравномерность зазора между ударником и преградой в момент удара, как правило, не превышает 0.1—0.2 мм на площади 5 × 5 см.

В практике лабораторных исследований широкое распространение получили баллистические ударные трубы (БУТ), в которых ударник плавно разгоняется потоком расширяющегося газа, находящегося первоначально при высоком давлении. Обзор конструкций БУТ и их особенностей содержится в [18]. Основными элементами конструкций БУТ, работающих на сжатом газе, являются камера высокого давления, содержащая рабочий газ (воздух, азот, гелий), диафрагма, отделяющая камеру высокого давления от ствола, ствол, ударник (рис. 8.3). Мишень, как правило, размещается в дульной части ствола. Поскольку скорость ударника заданной массы $W_{уд} \sim c_0/(\gamma - 1)$, где c_0 — скорость звука в сжатом газе, в качестве рабочего тела целесообразно выбирать газ с малой величиной γ и высокой начальной скоростью звука [18]. Для получения высоких параметров рабочего газа разработано большое количество методов (например, сжатие газа поршнем, нагрев газа энергией электрического разряда и т. д.), чем объясняется многообразие разработанных конструкций БУТ.

Для разгона ударников до скоростей 1 км/с существуют простые в обращении конструкции, в которых сжатый газ находится при нормальной температуре. Одна из таких конструкций описана в [19]. Камера высокого давления длиной 0.68 м и объемом $5 \cdot 10^{-2}$ м³ представляет собой цилиндр с переходом на круговой конус. Ствол имеет длину 10.8 м и калибр $76.2 \cdot 10^{-3}$ м. В случае наполнения камеры воздухом зарегистрирована скорость движения ударника массой 0.72 ± 0.02 кг: $W_{уд} \approx 0.3$ км/с при давлении в камере $P = 2$ МПа, $W_{уд} \approx 0.42$ км/с при $P = 4$ МПа и $W_{уд} \approx 0.5$ км/с при $P = 10$ МПа. Метательные устройства типа БУТ дают ряд преимуществ по сравнению с устройствами с применением ВВ:

— меньшие амплитуды возмущений поверхности ударника в момент его соударения с мишенью;

— плавное ускорение ударника, не сопровождающееся его разрывом;

— возможность контроля скорости движения ударника в каждом единичном опыте.

Эти преимущества делают привлекательным использование БУТ и подобных ему устройств для проведения прецизионных исследований, например структуры упругопластических волн в металлах.

§ 3. Методы измерения массовой скорости в ударной волне в виде непрерывной зависимости

В середине 50-х годов широкое применение для измерения параметров ударных волн в конденсированных средах нашли методы, основанные на измерении интервалов времени, за которые ударная волна или поверхность ударника либо преграды проходили расстояние между двумя заданными пространственными точками. При этом обычно в опытах получались табличные зависимости путь — время вида $x_i(t_i)$, дифференцирование которых давало зависимость скорости ударной волны от t . Аналогично находилась зависимость скорости свободной поверхности W от t после выхода на нее ударной волны. По $W(t)$ в акустическом приближении восстанавливалась скорость за фронтом ударной волны $U = 0.5W$, а по D и U из условий на сильном разрыве находились все остальные характеристики вещества на ударной волне.

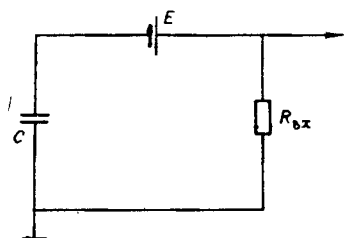
Табличные зависимости $x_i(t_i)$ восстанавливались с помощью фотохронографических или электроконтактных измерений, детально описанных в [10, 20]. С помощью электрических контактов измерены параметры упругого предвестника в железе и стали при взрывном нагружении. С помощью электроконтактной методики получены основные данные об ударной сжимаемости веществ в широкой области давлений, оценены значения прочностных характеристик материалов при ударно-волновом нагружении. Однако недостаточная информативность таких измерений не позволяет выявить многие тонкие детали волновых течений.

Подробное изучение кинетики волновых процессов, релаксационных явлений, сопровождающих ударное нагружение, стало возможным благодаря развитию в последнее время новых экспериментальных методов измерений, позволяющих получать непрерывную информацию об изменении во времени основных параметров ударных волн.

К первой группе таких методов отнесем методы непрерывного измерения скорости контактных границ, в том числе и свободных поверхностей. В [21, 22] описан емкостный метод измерения скорости свободной поверхности, позволивший исследовать тонкие детали структуры ударных волн и процессы отражения волн от свободной поверхности (рис. 8.4). Свободная поверхность исследуемого образца является одной из обкладок конденсатора. Вторая обкладка неподвижна, диэлектриком обычно является воздух.

Рис. 8.4. Схема цепи емкостного датчика скорости.

$R_{\text{вх}}$ — сопротивление нагрузки; E — источник постоянного тока; C — измерительный конденсатор (датчик).



В случае, когда одна из обкладок конденсатора движется со скоростью $v(t)$, то емкость изменяется по формуле

$$C = \alpha \left(K_0 - \int_0^t v(t) dt \right), \quad (8.8)$$

где $\alpha = \epsilon S_0 / 4\pi$, K_0 — начальное расстояние между обкладками, S_0 — площадь измерительной обкладки конденсатора, ϵ — диэлектрическая постоянная среды между обкладками конденсатора. Напряжение на входе связано со скоростью измерения емкости конденсатора уравнением

$$E - V_c = V_{\text{вх}} = ER_{\text{вх}} \left(R_{\text{вх}} + \left(\frac{dC}{dt} \right)^{-1} \right). \quad (8.9)$$

Как правило, параметры электрической цепи подбираются таким образом, чтобы время установления квазистационарного режима $\tau_{\text{RC}} = R_{\text{вх}}C$ было значительно меньше характерного времени изменения емкости конденсатора $\tau_0 = C \left(\frac{dC}{dt} \right)^{-1}$. Тогда $R_{\text{вх}} \left(\frac{dC}{dt} \right) \ll 1$ и вместо (8.9) получается приближенное уравнение

$$V_{\text{вх}} = ER_{\text{вх}} \left(\frac{dC}{dt} \right). \quad (8.10)$$

Продифференцировав (8.8) по t , получим

$$\frac{dC}{dt} = \frac{C^2}{\alpha} v. \quad (8.11)$$

Из (8.10), (8.11) следует

$$v = \frac{Z(t) \alpha^2}{C^2}, \quad (8.12)$$

где $Z = V_{\text{вх}} / (ER_{\text{вх}}\alpha)$. Проинтегрировав (8.10), выразим из полученного уравнения C и подставим в (8.11). В результате получим

$$v = z \left(\frac{1}{K_0} + \int_0^t z(t) dt \right)^{-2}. \quad (8.13)$$

Во время эксперимента на осциллограмме записывается зависимость $Z(t)$. Для получения искомой зависимости $v(t)$ необходимо

численное интегрирование записи полученного сигнала до заданного момента времени t .

Формула (8.13) значительно упрощается, если к заданному моменту времени величина смещений движущейся обкладки конденсатора Δx много меньше величины начального зазора K_0

$$\Delta x = \int_0^t v(t) dt \ll K_0.$$

В этом случае из (8.8) следует, что $C = \alpha/K_0$, и с учетом этого (8.12) принимает вид

$$v = K_0^2 Z(t).$$

Необходимо отметить, что при достаточно большой скорости движения свободной поверхности перед ней возникает ударная волна, которая может исказить результаты (так, для воздуха при скоростях 2—3 км/с начинаются процессы диссоциации и ионизации).

Емкостный датчик скорости не контактирует с поверхностью образца и не влияет на ее движение. Недостатком его является высокая чувствительность к электромагнитным помехам, определяемая большим внутренним сопротивлением датчика. Это требует в ряде случаев использования специальных экранов, а иногда, например при погружении электровзрывом, практически исключает применение датчика в экспериментах.

В [23] описывается электромагнитный датчик скорости, а в [24, 25] — его вариант с постоянным магнитом. Электромагнитный датчик скорости позволяет проводить измерение скорости движения токопроводящих поверхностей даже в условиях сильных электромагнитных помех. Метод основан на измерении ЭДС, которая наводится в измерительной катушке, при перемещении проводящей поверхности параллельно плоскости этой катушки.

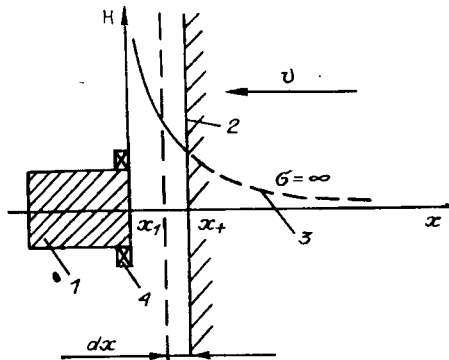
В [23] описано применение такого датчика скорости (названного индукционным) для исследования параметров упругопластических волн в кварците. ЭДС индукции в этих опытах вызывалась движением введенной в кварцит тонкой алюминиевой фольги. По существу в опытах проводились измерения массовой скорости в кварците за фронтом ударной волны. Представленный в [23] метод является развитием индукционного метода измерения массовой скорости диэлектрической среды, предложенного Е. К. Завойским и описанного в [10].

Специфическая особенность индукционного метода состоит в возможности регистрации фазовых превращений в ударных волнах, при которых происходят существенные изменения электрических свойств исследуемых материалов, т. е. превращения типа диэлектрик — металл или металл — диэлектрик.

Датчик на основе постоянного магнита не требует специального питания, что и определяет его большую стойкость к электромагнитным наводкам. Принцип работы датчика поясняется с по-

Рис. 8.5. Схема, демонстрирующая принцип работы электромагнитного датчика.

1 — постоянный магнит; 2 — токопроводящая поверхность; 3 — экспоненциальная зависимость изменения напряженности магнитного поля; 4 — катушка.



мощью рис. 8.5. Постоянный магнит 1 находится в диэлектрической среде с проницаемостью $\mu = 1$. Токопроводящая поверхность 2 является границей раздела сред, имеющих проводимости $\sigma = 0$ и $\sigma = \infty$. Напряженность магнитного поля по оси x может быть аппроксимирована экспоненциальной функцией вида $H(x) = H_0 \exp(-kx)$ (кривая 3). Здесь H_0 — напряженность магнитного поля в точке $x = 0$, k — численный множитель.

Легко показать, что при движении границы раздела со скоростью v изменение магнитного поля во времени будет иметь вид

$$\left. \frac{dH(x)}{dt} \right|_{x=x^+} = -vkH_0 e^{-kx^+}.$$

При этом в тонком слое токопроводящей среды наводятся вихревые токи, поле которых искажает исходное поле магнита 1 и индуцирует в измерительной катушке ЭДС

$$E = \eta n S \frac{dH}{dt} = \eta n S v k H_0 e^{-kx^+},$$

где n — число витков катушки, S — сечение катушки, η — коэффициент пропорциональности ($\eta < 1$). Для работы с датчиком требуется его предварительная калибровка.

В [25] исследована чувствительность датчика в опытах с дисками из алюминия, меди и стали различной толщины, которые показали, что сигнал с датчика имеет отрицательную полярность. Для ферромагнетиков полярность сигнала положительна.

В начале 70-х годов для исследования ударно-волновых процессов стала применяться лазерная интерферометрия [26]. Лазерные интерферометры на основе интерферометра Фабри — Перо, предназначенные для непрерывной регистрации массовой скорости, появились сравнительно недавно [27, 28] и позволили зарегистрировать скорости до 10 км/с.

Метод лазерной интерферометрии основан на регистрации спектра лазерного излучения, испытывающего доплеровское смещение при отражении от движущейся мишени. В качестве анализатора спектра используется интерферометр Фабри — Перо, а в качестве регистратора — фотохронограф, работающий в режиме ще-

левой развертки. Отраженный от движущейся мишени свет изменяет частоту в соответствии с соотношением Доплера $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{2v}{c} \cos \varphi$, где $\Delta\nu$ — доплеровский сдвиг частоты, ν — частота лазерного излучения, v — скорость мишени, c — скорость света, φ — угол между лучом и нормалью к поверхности мишени.

Если в процессе движения происходит деформирование мишени за счет того, что скорости движения различных ее участков различаются, то происходит искажение формы интерференционных колец. Скорость любой точки мишени вдоль любой интерференционной линии определяется по отклонению этой линии от первоначального положения.

§ 4. Методы непрерывного измерения давления в ударных волнах

Измерение давления в волновых течениях осуществляется с помощью манометрических преобразователей — датчиков, чувствительный элемент которых реагирует на изменение основных термодинамических величин (давления, плотности и температуры) за фронтом ударной волны. Известны следующие преобразователи непрерывного действия: пьезоэлектрические и пьезорезисторные датчики, датчики на основе эффектов ударной поляризации, ударного намагничивания, размагничивания и термоЭДС. Обзор экспериментальных и теоретических результатов по методам измерения давления в ударных волнах дан в [29, 30].

Из пьезоэлектрических датчиков давления наиболее распространенным является датчик на основе кварца (x -срез). Первые публикации о его применении для исследования ударно-волновых процессов относятся к 1960 г. [31, 32]. Кристаллический кварц отличается от других пьезоэлектриков стабильностью коэффициента преобразования механического напряжения в электрический сигнал в широком диапазоне температур независимо от скорости нарастания и величины напряжения в широком диапазоне давлений. Предел текучести Гюгонио для x -кварца составляет ~ 10 ГПа [33]. Датчик состоит из кварцевого диска с электродами на x -срезах, который может быть размещен в корпусе. В [34] описано несколько конструкций кварцевых датчиков и представлены результаты их применения для изучения ударно-волновых процессов в твердых телах и газах. Кварцевые диски в этих исследованиях имели диаметр 5—10 мм при толщине 0.5—2.0 мм. Принятие специальных конструктивных мер позволяет применять такие датчики для измерений в условиях сильных электромагнитных помех.

Режим работы кварцевого датчика (как и всех пьезоэлектрических преобразователей) зависит от нагрузки в электрической цепи. Так, в короткозамкнутой цепи, где $RC \ll t$ — времени движения ударной волны по кварцу, датчик регистрирует давление только в интервале времени движения фронта ударной волны по квар-

ду. В разомкнутой цепи ($RC \gg t$) датчик измеряет давление в существенно большем интервале времени.

На пьезоэлектрическом эффекте основан принцип действия датчиков с чувствительными элементами из титаната бария [35], цирконатотитаната свинца [36], ниобата и танталата лития [37].

Пересчет давления в исследуемом образце производится по формуле

$$P_1 = \frac{Z_0 + Z_1}{2Z_0} P_0,$$

где P_1 — давление в исследуемом материале, P_0 — давление в чувствительном элементе датчика, Z_0 и Z_1 — акустические импедансы материалов и образца соответственно. Основными преимуществами пьезоэлектрических датчиков являются: простота, доступность средств регистрации и большая разрешающая способность по времени (порядка 10 нс). К числу недостатков таких датчиков относится ограничение сверху диапазона измеряемых давлений величиной предела упругости Гюгонио (даже несколько ниже), т. е. несколькими десятками килобар.

В основе другой группы методов непрерывного измерения давления лежит использование пьезорезистивных датчиков давления. Чувствительными элементами пьезорезистивных датчиков давления являются материалы, изменяющие электрическое сопротивление при ударно-волновом нагружении. К числу их относятся манганин, константан, иттербий, сера, углерод и др.

Наиболее распространенными в экспериментальных исследованиях являются датчики на основе манганина, свойства которого при высоких давлениях исследованы наиболее полно. В [29, 38] показано, что в диапазоне по крайней мере до 50 ГПа зависимость $\Delta R/R_0$ от P (ΔR — изменение сопротивления, R_0 — начальное сопротивление) близка к линейной и описывается полиномом второй степени:

$$P = 356.2 \frac{\Delta R}{R_0} + 42.7 \left(\frac{\Delta R}{R_0} \right)^2.$$

Датчики достаточно просты в изготовлении. По существу, это отрезок манганиновой проволочки или тонкой фольги, помещенный между двумя тонкими изолирующими прокладками. Общая толщина датчиков не превышает 0.3—0.5 мм, что позволяет устанавливать их в исследуемых образцах, практически не изменяя картины течения. Преимуществом их является слабая температурная чувствительность.

Иттербиевый датчик [39] обладает более высокой чувствительностью к давлению, в связи с чем он находит применение при измерениях в ударных волнах малой интенсивности. Углерод и сера обладают нелинейным пьезорезисторным эффектом. Применение их для ударно-волновых измерений описано в [40, 41].

Измерение давления диэлектрическим датчиком основано на регистрации изменения емкости пластинки из диэлектрика при сжатии ударной волной [42]. Датчик представляет собой конденсатор, который заряжается от источника постоянного тока через сопротивление R достаточно большой величины, чтобы выполнялось условие $RC \gg t_p$ (t_p — время регистрации, C — суммарная емкость (датчик плюс присоединенная цепь)). При сжатии датчика заряд конденсатора практически не изменяется (при отсутствии проводимости диэлектрика), а изменение емкости, вызванное сжатием диэлектрика, приводит к изменению напряжения на электродах датчика, которое регистрируется осциллографом с высокоомным входом. В качестве чувствительного элемента (диэлектрика) в датчиках такого типа использовались плексиглас, триацетат, лавсан, сапфир и др. Тарировочная зависимость таких датчиков нелинейна. Преимуществами диэлектрических датчиков являются их высокая чувствительность и помехозащищенность, а недостаток — слабая изученность поведения диэлектриков при нагрузке — разгрузке. Так, в [43] обнаружено, что при воздействии на диэлектрический датчик двух и более последовательных скачков давления происходит занижение амплитуды второй волны в несколько раз. Это явление не связано с каким-либо «критическим» давлением, не зависит от временных характеристик и характерно для чувствительных элементов из лавсана, фторопласта и слюды. Оно может быть объяснено, по-видимому, только резким изменением физических свойств применяемых диэлектриков при повторном ударном сжатии.

Имеются также датчики давления других типов, например датчики давления на основе эффекта ударной поляризации. В [41] впервые было показано, что при прохождении ударной волны между обкладками конденсатора, заполненного полярным диэлектриком, в цепи конденсатора возникает ЭДС, вызванная поляризацией диэлектрика за фронтом ударной волны. Феноменологическое описание явления впервые дано в [44]. Этот эффект используется в датчиках давления порогового типа. Принцип работы их заключается в изменении начального поляризационного тока при амплитуде давления выше некоторого порогового значения. Пороговая величина давления составляет 6 гигапаскалей для KI и 26.2 гигапаскалей для NaF.

Для измерения давления применяются также датчик давления на основе эффекта ударного намагничивания и размагничивания. Датчики этого типа основаны на явлении изменения магнитных свойств материалов под действием давления и температуры в ударных волнах. При этом может происходить как потеря магнитных свойств, так и намагничивание. Изменение магнитных свойств в значительной мере зависит от состава ферромагнитного материала. Так, в [45] приведена зависимость изменения магнитных свойств от давления в ударной волне при исследовании углеродистого железа с содержанием Si 3.25 % по весу. На этой кривой отчетливо проявляется фазовый переход 1-го рода в железе, начало которого соответствует давлению ~ 14.5 ГПа и окончание — ~ 22.5 ГПа.

Наконец, еще одна группа датчиков — это датчики давления на основе эффекта термоЭДС. В датчиках этого типа используется зависимость ЭДС, возникающей при ударно-волновом нагружении в местах соединения разнородных металлов и полупроводников, от давления в ударной волне. Измерения термоЭДС в динамических экспериментах показали, что величина ЭДС в этих опытах значительно выше, чем при статическом сжатии. В работах [38, 46] обобщены данные большинства экспериментальных исследований. Наиболее перспективными парами металлов для создания чувствительных элементов датчиков давления на этом принципе являются соединения медь — никель и медь — константан.

Глава 1

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1970.— Т. 1.— 492 с.; Т. 2.— 566 с.
2. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести.— М.: Высш. шк., 1968.— 510 с.
3. Блох В. И. Теория упругости.— Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1964.— 482 с.
4. Папкович П. Ф. Теория упругости.— М.; Л.: Оборонгиз, 1939.— 638 с.
5. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды.— М.: Наука, 1978.— 300 с.

Глава 2

1. Волчинская М. И., Гольдин В. Я., Калиткин Н. Н. Использование уравнений состояния в газодинамических расчетах.— М., 1975.— 23 с.— (Препринт/Ин-т прикл. математики; № 53).
2. Жарков В. Н., Калинин В. А. Уравнения состояния твердых тел при высоких давлениях и температурах.— М.: Наука, 1968.— 311 с.
3. Альтшулер Л. В. Применение ударных волн в физике высоких давлений // Успехи физ. наук.— 1965.— Т. 85, вып. 2.— С. 197—257.
4. Зейтц Ф. Современная теория твердого тела.— М.: Изд-во иностр. лит., 1949.— 280 с.
5. Паулинг Л. Природа химической связи.— М.: Изд-во иностр. лит., 1947.— 440 с.
6. Кормер С. Б., Урлин В. Д. Об интерполяционных уравнениях состояния металлов для области сверхвысоких давлений // Докл. АН СССР.— 1960.— Т. 131, № 3.— С. 542—545.
7. Альтшулер Л. В., Крупников К. К., Бражник М. И. Динамическая сжимаемость металлов при давлениях от четырехсот до четырех миллионов атмосфер // ЖЭТФ.— 1958.— Т. 34, вып. 4.— С. 886—893.
8. Альтшулер Л. В., Кормер С. Б., Баканова А. А., Трунин Р. Ф. Уравнения состояния алюминия, меди и свинца для области высоких давлений // ЖЭТФ.— 1960.— Т. 38, вып. 3.— С. 790—798.
9. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела.— М.: Физматгиз, 1963.— 315 с.
10. Gschneidner K. A. Physical properties and interrelationships of metallic and semimetallic elements // Solid State Phys.— 1964.— V. 16.— P. 376—284.
11. Поляков В. В., Щеголев Е. А. К расчету коэффициента Грюнайзена // ПМТФ.— 1979.— № 5.— С. 122—129.
12. Родионов К. П. Параметр Грюнайзена твердого тела // Физика металлов и металловедение.— 1967.— Т. 23, вып. 6.— С. 76—83.
13. Цянь Сюэ-Сень. Физическая механика.— М.: Мир, 1965.— 543 с.
14. Slater J. S. Introduction to Chemical Physics.— N. Y.; L., 1939.— P. 341.
15. Кормер С. Б., Урлин В. Д. Об интерполяционных уравнениях состояния металлов для области сверхвысоких давлений // Докл. АН СССР.— 1960.— Т. 131, № 3.— С. 542—544.
16. Сапожников А. Т., Першина А. В. Полуэмпирическое уравнение состояния металлов в широком диапазоне плотностей и температур // Вопросы атом-

- ной науки и техники. Методики и программы численного решения задач матем. физики.— 1979.— Вып. 4(6).— С. 47—56.
17. Елисеев Г. М., Клинишов Г. Е. Уравнение состояния твердых веществ и его сплайн-аппроксимация.— М., 1982.— 21 с.— (Препринт/АН СССР, Ин-т прикл. математики; № 173).
 18. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Физматгиз, 1963.— С. 686.
 19. Крушников К. К., Куропатенко В. Ф., Сапожников А. Т. и др. Расчет взрывов в средах с полиморфными фазовыми переходами // Докл. АН СССР.— 1972.— Т. 202, № 2.— С. 300—304.
 20. Куропатенко В. Ф., Сапожников А. Т. Расчет неустановившихся движений сжимаемых сред с фазовыми переходами // Числ. методы механики сплош. среды.— Новосибирск, 1971.— Т. 2, № 5.— С. 93—97.
 21. Быченков В. А., Гаджиева В. В., Куропатенко В. Ф. Влияние положения и ширины щели на количество горной породы, раздробленной при взрыве // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых.— 1973.— № 2.— С. 53—57.
 22. Куропатенко В. Ф. Дробление вещества при симметричном столкновении двух пластин // Числ. методы механики сплош. среды.— Новосибирск, 1970.— Т. 1, № 5.— С. 69—75.
 23. Куропатенко В. Ф., Минаева И. С. Уравнение состояния некоторых металлов // Числ. методы механики сплош. среды.— Новосибирск, 1982.— Т. 13, № 6.— С. 69—74.
 24. Мейсон Е. А., Сперлинг Т. Х. Вирialное уравнение состояния.— М.: Мир, 1972.— 279 с.
 25. Калиткин Н. Н., Кузьмина Л. В. Таблицы термодинамических функций веществ при высокой концентрации энергии.— М., 1975.— 31 с.— (Препринт/АН СССР, Ин-т прикл. математики; № 35).
 26. Копышев В. П. О термодинамике ядер одноатомного вещества // Числ. методы механики сплош. среды.— Новосибирск, 1977.— Т. 8, № 6.— С. 54—56.
 27. Чиркин В. С. Теплофизические свойства материалов ядерной техники.— М.: Атомиздат, 1968.— 484 с.
 28. Бакулин Ю. Д., Куропатенко В. Ф., Лучинский А. В. Магнитогиродинамический расчет взрывающихся проводников // ЖТФ.— 1976.— Т. 46, № 9.— С. 1963—1971.
 29. Куропатенко В. Ф. Математическое моделирование неустановившихся движений сред с равновесными фазовыми переходами // Вопросы атомной науки и техники. Методики и программы расчета задач матем. физики.— 1979.— Вып. 4(6).— С. 3—12.
 30. Куропатенко В. Ф., Минаева И. С. Математическое моделирование поведения металлов в широком диапазоне изменения давления // Физическая механика неоднородных сред.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1984.— С. 125—129.
 31. Пэжина П. Основные вопросы вязкопластичности.— М.: Мир, 1968.— 176 с.
 32. Воложенко-Климовицкий Ю. Я. Динамический предел текучести.— М.: Наука, 1965.— 179 с.
 33. Prandtl L. Spannungsverteilung in plastischen korper // Proc. 1st Int. Congr. Appl. Mech.— Delft, 1924.— P. 43.
 34. Рейс А. Учет упругой деформации в теории пластичности. Теория пластичности.— М.: Изд-во иностр. лит., 1948.— 260 с.
 35. Баум Ф. А., Станюкович К. П., Шехтер Б. И. Физика взрыва.— М.: Физматгиз, 1959.— 800 с.
 36. Ландау Л. Д., Станюкович К. П. Об изучении детонации конденсированных взрывчатых веществ // Докл. АН СССР.— 1945.— Т. 46.— С. 399—402.
 37. Юхансон К., Персон П. Детонация ВВ.— М.: Мир, 1973.
 38. Жерноклетов М. В., Зубарев В. Н., Телегин Г. С. Изэнтропы расширения продуктов взрыва конденсированных ВВ // ПМТФ.— 1969.— № 4.— С. 12—135.
 39. Зубарев В. Н. Движение продуктов взрыва за фронтом детонационной волны // ПМТФ.— 1965.— № 2.— С. 54—61.

40. Кузнецов Н. М., Шведов К. К. Уравнения состояния продуктов детонации гексогена // ФГВ.—1965.—№ 4.—С. 85—92.
41. Куропатенко В. Ф. Уравнение состояния продуктов детонации конденсированных ВВ // Числ. методы механики сплошн. среды.—Новосибирск, 1977.—Т. 8, № 6.—С. 68—71.

Глава 3

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды.—3-е изд.—М.: Наука, 1976.—Т. 1.—536 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред.—М.: ГИТТЛ, 1954.—795 с.
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.—М.: Наука, 1966.—686 с.
4. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды.—М.: Наука, 1971.—854 с.
5. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Система квазилинейных уравнений и их приложения к газовой дипаике.—М.: Наука, 1968.—592 с.
6. Куропатенко В. Ф. Дробление вещества при симметричном столкновении двух пластин // Числ. методы механики сплошн. среды.—Новосибирск, 1970.—Т. 1, № 5.—С. 69—77.

Глава 4

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика.—М.: Наука, 1986.—733 с.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.—М.: Наука, 1966.—686 с.
3. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды.—М.: Наука, 1971.—854 с.
4. Альтшулер Л. В. Применение ударных волн в физике высоких давлений // УФН.—1965.—Т. 85, вып. 2.—С. 197—258.
5. Альтшулер Л. В., Баканова А. А., Дудолодов И. П. и др. Ударные адиабаты металлов. Новые данные, статистический анализ и общие закономерности // ПМТФ.—1981.—№ 2.—С. 3—34.
6. Barcer L. M. E-phase Hugoniot of Iron // J. of Appl. Phys.—1975.—V. 46, N 6.—P. 2544—2547.
7. Альтшулер Л. В., Кормер С. Б., Баканова А. А., Трупин Р. Ф. Уравнение состояний алюминия, меди и свинца для области высоких давлений // ЖЭТФ.—1960.—Т. 38, вып. 3.—С. 790—798.
8. Scidmor J. C., Morris F. Experimental equation of State data for Uranium and its interpretation in the criticaj region // Proc. of Symp. on Thermodynamics of Nuclear Materials, Viena, 1962.—P. 173—216.
9. Жерноклетов М. В., Зубарев В. Н., Сутулов Б. Н. Адиабаты пористых металлов и изэнтропы расширения сплошной меди // ПМТФ.—1984.—№ 1.—С. 119—123.
10. Баканова А. А., Дудолодов И. П., Жерноклетов М. В. и др. Об испарении ударно сжатых металлов при расширении // ПМТФ.—1983.—№ 2.—С. 76—81.
11. Альтшулер Л. В., Баканова А. А., Бушман А. В. и др. Испарение ударно сжатого свинца в волнах разгрузки // ЖТФ.—1977.—Т. 73, вып. 5(11).—С. 1966—1972.
12. Альтшулер Л. В., Кормер С. Б., Бражник М. И. и др. Изэнтропическая сжимаемость алюминия, меди, свинца, железа при высоких давлениях // ЖЭТФ.—1960.—Т. 38, вып. 4.—С. 1061—1073.
13. Morris C. E., Fritz J. N. Quasi-elastic High pressure Waves in 2024 Al and Cu // Shock Waves in condensed Matter.—N. Y., 1982.—P. 382—386.
14. Бардиловский С. А., Караханов С. М. Вторичное сжатие и разгрузка дюралюминия за фронтом ударной волны // ФГВ.—1986.—№ 3.—С. 131—135.
15. McQueen R. J., Fritz J. N., Morris C. E. The velocity of sound behind Strong Shock Waves in 2024 Al // Shock Waves in condensed Matter.—Amsterdam, 1984.—P. 95—98.

16. Kusubov A. S., van Thiel M. Measurement of Elastic and Plastic Unloading Wave Profiles in 2024-T4 Aluminium Alloy // J. Appl. Phys.—1969.— V. 40. N 9.— P. 3776—3780.
17. Зельдович Я. Б., Компанец А. С. Теория детонации.— М.: Гостехиздат, 1955.— 286 с.
18. Баум Ф. А., Орленко Л. П., Станюкович К. П. и др. Физика взрыва.— М.: Наука, 1975.— 704 с.
19. Иванов А. Г., Новиков С. А., Тарасов Ю. М. Откольные явления в железе и стали, вызванные взаимодействием ударных волн разрежения // ФТТ.— 1962.— Т. 4, вып. 1.— С. 249—260.
20. Альтшулер Л. В., Брусиккий С. Е., Кузьменков Е. А. Изотермы и функции Грюнайзена ряда металлов // ПМТФ.— 1987.— № 1.— С. 134—146.
21. Frowles G. R. Attenuation of the Shock Wave Produced in Solid by Fluing Plate // J. Appl. Phys.— 1960.— V. 31, N 4.— P. 655—661.

Глава 5

1. Корнфельд М. Упругость и прочность жидкостей.— М.; Л.: Гостехиздат, 1951.— 107 с.
2. Райнхарт Д., Пирсон Д. Поведение металлов при импульсных нагрузках.— М.: Изд-во иностр. лит., 1958.— 296 с.
3. Броберг К. Б. Ударные волны в упругой и упругопластической среде.— М.: Госгортехиздат, 1959.— 116 с.
4. Новиков С. А., Дивнов И. И., Иванов А. Г. Исследование разрушения стали, алюминия и меди при взрывном нагружении // Физика металлов и материаловедение.— 1966.— Т. 21, вып. 4.— С. 608—614.
5. Иванов А. Г., Новиков С. А. Об ударных волнах разрежения в железе и стали // ЖЭТФ.— 1961.— Т. 40, вып. 6.— С. 1880—1882.
6. Иванов А. Г., Новиков С. А., Тараев Ю. И. Откольные явления в железе и стали, вызванные взаимодействием ударных волн разрежения // ФТТ.— 1962.— Т. 4, вып. 1.— С. 249—260.
7. McQueen R. Y., Marsh S. R. Ultimate yield strength of copper // J. Appl. Phys.— 1962.— V. 33, N 2.— P. 654—669.
8. Витман Ф. Ф., Иванов М. И., Иоффе Б. С. Сопротивление разрушению пластичных материалов при импульсном нагружении // Физика металлов и материаловедение.— 1964.— Т. 18, вып. 5.— С. 717—723.
9. Бучер Б. М., Баркер Л. М., Мансон Д. Е. и др. Влияние предистории напряженного состояния на нестационарный откол в металлах // Ракетн. техника и космонавтика.— 1964.— Т. 2, № 6.— С. 3—18.
10. Тарасов Ю. И. Исследования зависимости времени разрушения от растягивающей нагрузки для стали и меди // Докл. АН СССР.— 1965.— Т. 165, № 2.— С. 323—328.
11. Альтшулер Л. В., Новиков С. А., Дивнов И. И. Связь критических разрушающих напряжений со временем разрушения при взрывном нагружении металлов // Докл. АН СССР.— 1966.— Т. 166, № 1.— С. 67—70.
12. Ментешев С. В., Ратников В. П., Рыбаков А. П. и др. Действие взрыва листового заряда на ВВ на алюминиевую пластинку // ФГВ.— 1957.— Т. 3, № 2.— С. 286—290.
13. Скидмор Д. С. Ударные волны в твердых телах // Механика.— 1968.— № 4.— 128 с.
14. Новиков С. А., Синицына Л. М. О влиянии скорости деформации при отколе на величину разрушающих напряжений // Физика металлов и материаловедение.— 1969.— Т. 28, вып. 6.— С. 1103—1105.
15. Шалль Р. Физика детонации // Физика быстропотекающих процессов.— М.: Мир, 1971.— Т. II.— С. 277—349.
16. Клещенников О. А., Софронов В. И., Иванова Г. Г. и др. Экспериментальная проверка критериев разрушения в опытах с медными образцами // ЖТФ.— 1977.— Т. 47, вып. 8.— С. 1791—1797.
17. Breed V. R., Mader C. J., Venabl D. Technique for the determination of dynamic tensile strength characteristic // J. Appl. Phys.— 1967.— V. 38, N 8.— P. 3271—3275.

18. Tuler F. R. Tensile strain as a criterion of Spallation in metals // Shock waves and the Mechanical Properties of Solids // Syracuse.—1971.—N 4.—P. 395—405.
19. Иванов А. Г., Минеев В. Н. О масштабных эффектах при разрушении // ФГВ.—1979.—Т. 15, № 5.—С. 70—95.
20. Иванов А. Г. Откол в квазиакустическом приближении // ФГВ.—1975.—Т. 11, № 3.—С. 475—480.
21. Иванов М. А. Температурная зависимость удельной работы отрыва при отколе для Ст. 3 и меди // ФГВ.—1979.—Т. 15, № 4.—С. 131—134.
22. Stevens A. L., Tuler F. R. Effect of shock precompression on the dynamic fracture Strength of 1020 Steel and 6061-T6 aluminium // J. Appl. Phys.—1971.—V. 42, N 13.—P. 5665—5670.
23. Регель В. Р., Слуцкер А. И., Томашевский Э. Е. Кинетическая природа прочности твердых тел.—М.: Наука, 1974.—560 с.
24. Златин Н. А., Пугачев Г. С., Мочалов С. М. и др. Временная зависимость прочности металлов при долговечностях микросекундного диапазона // ФТТ.—1975.—Т. 17, вып. 9.—С. 2599—2602.
25. Мерзиевский Л. А., Титов В. М. О критерии долговечности металлов в микросекундном диапазоне // Докл. АН СССР.—1986.—Т. 286, № 1.—С. 109—113.
26. Фадеевко Ю. И. Временные критерии разрушения взрывом // ПМТФ.—1977.—№ 6.—С. 154—159.
27. Молодец А. М., Дремин А. Н. Термоактивационная трактовка откола // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 265, № 6.—С. 1385—1389.
28. Дремин А. Н., Молодец А. М. Кинетические характеристики откольного разрушения // ПМТФ.—1980.—№ 6.—С. 85—95.
29. Златин Н. А., Пугачев Г. С. Физические представления о процессе разрушения твердых тел при импульсных нагрузках: Тез. докл. III Всесоюз. симп. по импульсным давлениям.—М., 1979.—С. 30—33.
30. Глушко А. И. Исследование откола как процесса образования микропор // Изв. АН СССР. МТТ.—1978.—№ 5.—С. 132—140.
31. Ахмадеев Н. Х., Нигматулин Р. И. Динамическое откольное разрушение в волнах разгрузки // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 266, № 5.—С. 1131—1134.
32. Ахмадеев Н. Х., Нигматулин Р. И. Моделирование откольного разрушения при ударном деформировании. Анализ схемы мгновенного откола // ПМТФ.—1981.—№ 3.—С. 120—128.
33. Рузанов А. И. Численное исследование откольной прочности с учетом микроповреждений // Изв. АН СССР. МТТ.—1984.—№ 5.—С. 109—115.
34. Романычева Л. К., Рузанов А. И. Численное исследование откольного разрушения в меди // ПМТФ.—1982.—№ 4.—С. 117—122.
35. Канель Г. И., Черных Л. Г. О процессе откольного разрушения // ПМТФ.—1980.—№ 6.—С. 78—84.
36. Канель Г. М., Разоренов С. В., Фортвов В. Е. Кинетика разрушения алюминиевого сплава АМг6М в условиях откола // ПМТФ.—1984.—№ 5.—С. 60—63.
37. Фомин В. М., Хакимов Э. М. Откольное разрушение среды в плоских волнах разрежения.—Новосибирск, 1981.—44 с.—(Препринт/АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т теорет. и прикл. механики; № 1).
38. Журков С. Н. Дилатонный механизм прочности твердых тел // ФТТ.—1983.—Т. 25, вып. 10.—С. 3119—3123.
39. Петров В. А. Дилатонная модель термофлуктуационного зарождения трещины // ФТТ.—1983.—Т. 25, вып. 10.—С. 3124—3127.
40. Санин И. В., Воробьев А. И., Горновой А. А. Кинетико-статистическая модель откольного разрушения металлов // ФГВ.—1987.—Т. 23, № 1.—С. 67—70.
41. Бушман А. В., Канель Г. И., Ни А. Л. и др. Динамика конденсированных сред при интенсивных импульсных воздействиях. Механические свойства.—Черноголовка, 1983.—38 с.—(Препринт/АН СССР, отд-ние Ин-та хим. физики).
42. Степанов Г. В. Уругоупругое деформирование материалов под действием импульсных нагрузок.—Киев: Наук. думка, 1979.—268 с.

43. Новиков С. А. Прочность при квазистатическом и ударно-волновом нагружении // ФГВ.—1985.—Т. 21, № 6.—С. 77—85.
44. Иванов А. Г., Новиков С. А., Сеницын В. А. и др. Прочность и разрушение материалов и простейших конструкций при интенсивных импульсных нагрузках // Прикл. проблемы прочности и пластичности.—Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1985.—Вып. 29.—С. 3—21.
45. Голубев В. К., Новиков С. А., Сеницын В. А. и др. Влияние температуры на критические условия откольного разрушения металлов // ПМТФ.—1980.—№ 4.—С. 136—140.
46. Голубев В. К., Новиков С. А., Соболев Ю. С. и др. О критических условиях зарождения микроповреждений при отколе // ПМТФ.—1983.—№ 4.—С. 151—158.
47. Davison L., Yraham R. A. Shock compression of solids // Phys. Rep.—1979.—V. 55, N 4.—P. 255—379.
48. Тарасов Б. А. Сопротивление разрушению пластин при ударном нагружении // Проблемы прочности.—1974.—№ 3.—С. 121—122.
49. Erkman J. O. Smooth spalls and the polymorphism of Iron // J. Appl. Phys.—1961.—V 32, N 5.—P. 939—944.
50. Батьков Ю. В., Иванов А. Г., Новиков С. А. Исследование разгрузки стали, ударно-сжатой выше точки фазового перехода // ПМТФ.—1985.—№ 6.—С. 142—144.
51. Иванов А. Г., Новиков С. А. Ударные волны разрежения в железе при взрывном нагружении // ФГВ.—1986.—Т. 22, № 3.—С. 91—99.
52. Грязнов Е. Ф., Одинцов В. А., Селиванов В. В. Гладкие кольцевые отколы // Изв. АН СССР. МТТ.—1976.—Т. 6.—С. 148—153.
53. Молодец А. М., Дремин А. Н. Температурная зависимость откольной прочности // ФГВ.—1983.—Т. 19, № 5.—С. 154—158.
54. Smith J. H. Three low pressure spall thresholds in copper // Dynamic Behavior of Metals, Philadelphia, ASTM.—1963.—P. 264—281.
55. Голубев В. К., Новиков С. А., Соболев Ю. С. и др. Влияние температуры на прочность и разрушение меди и никеля при отколе // Проблемы прочности.—1985.—№ 1.—С. 63—65.
56. Ashby M. F., Yandhi C., Taplin D. M. Fracture mechanism maps and their construction for f. c. c. metals and alloys // Asta met.—1979.—V. 27, N 3.—P. 699—729.
57. Глушак Б. Л., Новиков С. А., Погорелов А. П. и др. Временная зависимость откольной прочности меди в субмикросекундном диапазоне // Докл. АН СССР.—1981.—Т. 259, № 4.—С. 830—832.
58. Борин И. П., Новиков С. А., Погорелов А. П. и др. О кинетике разрушения металлов в субмикросекундном диапазоне долговечности // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 266, № 6.—С. 1377—1380.
59. Новиков С. А., Погорелов А. П., Сеницын В. А. Исследование временной зависимости разрушающих напряжений при отколе в меди, никеле и титане // ПМТФ.—1983.—№ 3.—С. 136—139.
60. Иванов А. Г., Клещевников О. А., Цыпкин В. И. и др. Откол в стали // ФГВ.—1981.—Т. 17, № 6.—С. 82—89.
61. Борин И. И., Лагутин В. И., Бонюшкин Е. К. и др. Откольное разрушение меди в режиме быстрого объемного разогрева // Вопросы атомной науки и техники. Импульсные реакторы и простые сборки.—1985.—Вып. 1.—С. 40—42.
62. Тарасов Б. А. О количественном описании откольных повреждений // ПМТФ.—1973.—№ 6.—С. 137—140.
63. Schmidt R. M., Davies F. W., Lempriere B. M. et al. Temperature dependent Spall threshold of four metal alloys // J. Phys. Chem. Sol.—1978.—V. 39, N 4.—P. 375—385.
64. Батьков Ю. В., Новиков С. А., Сеницын В. А. и др. Влияние температуры образца на величину разрушающих напряжений при отколе в алюминиевом сплаве АМг6 // ПМТФ.—1979.—№ 3.—С. 133—137.
65. Голубев В. К., Новиков С. А., Сеницын Л. М. О разрушении материалов при нагружении взрывом листового заряда ВВ // ПМТФ.—1981.—№ 2.—С. 112—118.

66. Голубев В. К., Новиков С. А., Синицына Л. М. и др. О влиянии угла выхода ударной волны на свободную поверхность на образование откола в металлах // ПМТФ.— 1983.— № 3.— С. 131—136.
67. Акимов И. М., Голубев В. К., Новиков С. А. и др. Деформационное искажение структуры меди ударной волной, возбуждаемой при поглощении излучения ОКГ в кадмиевом экране // Физика и химия обработки материалов.— 1985.— № 2.— С. 46—50.
68. Златин Н. А., Мочалов С. М., Пугачев Г. С. и др. Лазерный дифференциальный интерферометр // ЖТФ.— 1973.— Т. 43, вып. 9.— С. 1961—1964.
69. Morris Y. E., Fritz J. N., Holian B. L. Quasielastic High-Pressure Waves in 2024 Al and copper // Shock Waves in condensed Matter-1981: Proc./AIP Conf.— N. Y., 1982.— P. 382—390.
70. Rosenberg Z., Mayselss M., Partom Y. et al. Spall. studies in copper // J. Appl. Phys.— 1985.— V. 58. N 2.— P. 1083—1086.
71. Степанов Г. В., Романченко В. И., Астанин В. В. Экспериментальное определение разрушающих напряжений при отколе в упругопластических материалах // Проблемы прочности.— 1977.— № 3.— С. 96—99.
72. Канель Г. И., Щербань В. В. Пластическая деформация и откольное разрушение железа Армко в ударной волне // ФГВ.— 1980.— Т. 16, № 4.— С. 93—103.
73. Новиков С. А. Напряжения сдвига и откольная прочность материалов при ударных нагрузках // ПМТФ.— 1981.— № 3.— С. 109—120.
74. Новиков С. А., Голубев В. К., Соболев Ю. С. и др. Влияние температуры на величину разрушающих напряжений при отколе в металлах // Прикл. проблемы прочности и пластичности.— Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1979.— Вып. 11.— С. 141—147.
75. Голубев В. К., Новиков С. А., Соболев Ю. С. и др. О влиянии термообработки на прочность стали 40X при отколе // Проблемы прочности.— 1984.— № 4.— С. 41—43.
76. Голубев В. К., Новиков С. А., Соболев Ю. С. и др. О влиянии термообработки на прочность и разрушение сталей 30ХГСА и 20ХН3А при ударно-волновом нагружении // Проблемы прочности.— 1987.— № 1.— С. 89—92.
77. Голубев В. К., Новиков С. А., Соболев Ю. С. и др. Влияние температуры и времени нагружения на прочность и разрушение железа и сталей Ст. 3 и 12Х18Н10Т при отколе // Проблемы прочности.— 1985.— № 6.— С. 28—34.
78. Клещевников О. А., Тюняев Ю. Н., Софронов В. Н. и др. Динамический предел текучести и удельная работа отрыва при отколе ряда конструкционных сталей // ФГВ.— 1986.— Т. 22, № 4.— С. 102—106.
79. Ахмадеев Н. Х., Болотнова Р. Х. Откол в пластинах из армо-железа и стали Ст.3, испытывающих $\alpha \rightleftharpoons \epsilon$ фазовые превращения // Детонация и ударные волны: Тр./VIII Всесоюз. симп. по горению и взрыву.— Черноголовка, 1986.— С. 23—26.
80. Голубев В. К., Новиков С. А., Соболев Ю. С. и др. О характере откольного разрушения меди, никеля, титана и железа в температурном диапазоне — 196—800 °С // Проблемы прочности.— 1983.— № 3.— С. 78—84.
81. Murr L. E. Work hardening and pressure dependence of dislocation density and arrangements in shock loaded nickel and copper // Ser. Met.— 1978.— V. 12, N 2.— P. 204—206.
82. Романченко В. И., Степанов Г. В. Зависимость критических напряжений от временных параметров нагрузки при отколе в меди, алюминии и стали // ПМТФ.— 1980.— № 4.— С. 141—147.
83. Голубев В. К., Новиков С. А., Соболев Ю. С. и др. О характере откольного разрушения алюминия и его сплавов Д16 и АМг6 в температурном диапазоне — 196—600 °С // Проблемы прочности.— № 2.— С. 53—59.
84. Голубев В. К., Новиков С. А., Соболев Ю. С. и др. Влияние температуры на прочность и разрушение титанового сплава ВТ14 при отколе // Физ.-хим. механика материалов.— 1984.— № 2.— С. 112—114.
85. Канель Г. И., Петрова Э. Н. Прочность титана ВТ6 в условиях ударно-волнового нагружения // Детонация: Тр./II Всесоюз. совещ. по детонации.— Черноголовка, 1981.— С. 136—142.

86. Голубев В. К., Новиков С. А., Соболев Ю. С. и др. Разрушение и вязкость свинца при отколе // ПМТФ.— 1982.— № 6.— С. 108—114.
87. Се Дин-Ю. Рост пузырьков в вязкой жидкости, вызванный кратковременным импульсом // Теорет. основы инж. расчетов.— 1970.— № 4.— С. 120—124.
88. Keller D. V., Trulio J. Y. Mechanism of Spall in lucite // J. Appl. Phys.— 1963.— V. 34, N 1.— P. 172—175.
89. Тарасов Б. А. О временной зависимости прочности оргстекла при ударной нагрузке // Проблемы прочности.— 1972.— № 12.— С. 63—64.
90. Евсеев Е. П., Зильбербранд Е. Л., Златин Н. А. и др. Динамическая ветвь временной зависимости прочности полиметилметакрилата // Письма в ЖЭТФ.— 1977.— Т. 3, вып. 14.— С. 684—688.
91. Голубев В. К., Новиков С. А., Соболев Ю. С. О влиянии температуры на откольное разрушение полимерных материалов // Детонация: Тр. III Всесоюз. совещ. по детонации.— Черногоровка, 1981.— С. 153—165.
92. Голубев В. К., Новиков С. А., Соболев Ю. С. О влиянии температуры на откольное разрушение полимерных материалов // ПМТФ.— 1982.— № 1.— С. 143—150.
93. Голубев В. К., Новиков С. А., Соболев Ю. С. Откольное разрушение плексигласа, фторопласта и полиэтилена при нормальной и повышенной температурах // Проблемы прочности.— 1982.— № 2.— С. 88—91.
94. Свиридов В. А., Глушақ Б. Л., Новиков С. А. и др. Особенности поведения полиметилметакрилата при импульсных нагрузках // ЖТФ.— 1983.— № 5.— С. 960—962.
95. Голубев В. К., Новиков С. А., Соболев Ю. С. Влияние температуры на откольное разрушение полимерных материалов // Детонация: Тр. IV Всесоюз. совещ. по детонации.— Черногоровка, 1981.— С. 123—130.
96. Дремин А. Н., Канель Г. И., Колдунов С. А. Исследование откола в воде, этиловом спирте и плексигласе // Горение и взрыв.— М.: Наука, 1972.— С. 569—574.
97. Рыбиков А. П. Исследование откольных явлений в конденсированных телах // Критические явления. Физико-химические превращения.— Черногоровка, 1978.— С. 140—144.
98. Bull T. H. The tensile strengths of liquids under dynamic loading // Philos. Mag.— 1956.— V. 1, ser. 8, N 2.— P. 153—165.
99. Erlich D. C., Wooten D. C., Crendson R. C. Dynamic tensile failure of glycerol // J. Appl. Phys.— 1971.— V. 42, N 13.— P. 5495—5502.
100. Carlson Y. A. Dynamic tensile strength of mercury // J. Appl. Phys.— 1975.— V. 46, N 9.— P. 1594—1601.
101. Carlson Y. A., Levine H. S. Dynamic tensile strength of glycerol // J. Appl. Phys.— 1975.— V. 43, N 4.— P. 1594—1601.
102. Иванов М. А. Температурная зависимость прочности глицерина при отколе // ПМТФ.— 1981.— № 1.— С. 140—144.

Глава 6

1. Fowles G. R. Shock wave compression of hardened and Annealed 2024 Aluminium // J. Appl. Phys.— 1961.— V. 32, N 8.— P. 1475—1487.
2. Альтшулер Л. В. Применение ударных волн в физике высоких давлений // УФН.— 1965.— № 85, вып. 2.— С. 197—258.
3. Альтшулер Л. В., Бражник М. И., Телегин Г. С. Прочность и упругость железа и меди при высоких давлениях ударного сжатия // ПМТФ.— 1971.— № 6.— С. 159—166.
4. Большаков А. П., Новиков С. А., Сеницын В. А. Исследование динамических диаграмм одноосного растяжения и сжатия меди и сплава АМг6 // Проблемы прочности.— 1979.— № 10.— С. 87—88.
5. Steinberg D. J., Cochran S. G., Guinan M. W. A constitutive model for metals applicable at high-stroune rate // J. Appl. Phys.— 1980.— V. 51, N 3.— P. 1498—1504.
6. Новиков С. А., Сеницына Л. М. О влиянии давления ударного сжатия на величину критических напряжений сдвига // ПМТФ.— 1970.— № 6.— С. 107—110.

7. Дремин А. Н., Канель Г. И. Волны сжатия и разрежения в ударно-сжатых металлах // ПМТФ.— 1976.— № 2.— С. 146—152.
8. Lipkin J., Assay J. R. Reshock and release of Shock-compressed 6061-T6 Aluminium // J. Appl. Phys.— 1977.— V. 48, N 1.— P. 182—189.
9. Гильман Дж. Дж. Динамика дислокаций и поведение материалов при ударном воздействии // Механика: Сб. переводов.— М.: Мир, 1970.— № 2(120).— С. 96—134.
10. Johnson J. N., Barker L. M. Dislocation Dynamics and Steady Plastic Wave Profiles in 6061-T6 Aluminium // J. Appl. Phys.— 1969.— V. 40, N 11.— P. 4324—4334.
11. Нигматулин Р. И., Холиц Н. Н. К модели упругопластической среды с дислокационной кинетикой пластического деформирования // Изв. АН СССР. МТТ.— 1974.— № 4.— С. 131—146.
12. Канель Г. И. Модель кинетики пластической деформации металлов в условиях ударно-волнового нагружения // ПМТФ.— 1982.— № 2.— С. 105—110.
13. Глазырин В. П., Платова Т. М., Саженев А. П. Определение параметров дислокационной модели и расчет на ее основе вязкости и эволюции ударных волн // III Всесоюз. симп. по импульсным давлениям: Тез. докл.— М.: ВНИИФТРИ, 1979.— С. 46—47.
14. Альтшулер Л. В., Чекин Б. С. Релаксационные параметры металлов за фронтом ударных волн // Детонация. Критические явления. Физико-химические превращения в ударных волнах.— Черноголовка, 1978.— С. 87—89.
15. Годунов С. К., Роменский Б. И. Нестационарные уравнения нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах // ПМТФ.— 1972.— № 6.— С. 124—144.
16. Годунов С. К., Козин Н. С. Структура ударных волн в упруговязкой среде с нелинейной зависимостью максвелловской вязкости от параметров вещества // ПМТФ.— 1974.— № 5.— С. 104—108.
17. Бахрах С. М., Иванов А. Г., Ковалев Н. П. и др. Прочность алюминия при упругопластическом сжатии в ударной волне // Детонация. Критические явления. Физико-химические превращения в ударных волнах.— Черноголовка, 1978.— С. 94—100.
18. Альтшулер Л. В., Чекин Б. С. Реология волновой деформации металлов // ФГВ.— 1985.— Т. 21, № 5.— С. 140—143.
19. Гулидов А. И., Фомин В. М., Яненко Н. Н. Структура волн сжатия в неупругих средах // Изв. АН СССР. МТТ.— 1975.— № 5.— С. 92—98.
20. Фомин В. М., Хакимов Э. М. Численное моделирование волн сжатия и разрежения в металлах // ПМТФ.— 1979.— № 5.— С. 114—122.
21. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды.— М.: Наука, 1978.— С. 304.
22. Альтшулер Л. В., Чекин Б. С. Структура ударных волн и определяющие уравнения металлов // ПМТФ.— 1987.— № 6.— С. 119—128.
23. Yasiv D., Rosenberg Z., Partom Y. Determination of the dependence of yield strength in 2024-Al under dynamic loading with in-material manganese gauges // Mechanical Properties at high Rates of Strain: Proc. Third Conf. on the Mechanical Properties of materials at high Rates of Strain.— Oxford, 1984.— P. 105—109.
24. Kusubov A. S., Thiel M. Dynamic Yield Strength of 2024-Al at 313 kbar // J. Appl. Phys.— 1969.— V. 40, N 2.— P. 893—894.
25. Rosenberg Z., Partom Y., Yaziv D. The use of in-material stress gauges for estimating the dynamic yield strength of shock loaded Solids // J. Appl. Phys.— 1984.— V. 56, N 1.— P. 143—146.
26. Chartagnac P. F. Determination of mean and deviatoric Stresses in Shock Loaded Solids // J. Appl. Phys.— 1982.— V. 53, N 2.— P. 948—953.
27. Батьков Ю. В., Новиков С. А., Сишцын В. А. и др. Исследование сдвиговых напряжений в металлах на фронте ударной волны // Проблемы прочности.— 1981.— № 5.— С. 56—59.
28. Альтшулер Л. В., Кормер С. В., Бражник Н. И. Изэнтропическая сжимаемость меди, свинца и железа при высоких давлениях // ЖЭТФ.— 1960.— Т. 38, вып. 4.— С. 1061—1073.

29. Эсей Дж. Р., Чэбилдас Л. К. Определние сдвиговой прочности алюминиевого сплава 6061-T6, подвергнутого сжатию при ударном нагружении // Ударные волны и явления высокоскоростной деформации металлов.— М.: Металлургия, 1984.— С. 110—120.
30. Assay J. R., Chabildas L. C., Dandekar D. R. Shear Strength of Shock-loaded polycrystalline tungsten // J. Appl. Phys.— 1980.— V. 51, N 9.— P. 4774—4783.
31. Новиков С. А., Сеницын В. А., Иванов А. Г. и др. Упругопластические свойства ряда металлов при взрывном нагружении // ФММ.— 1966.— Т. 21, вып. 3.— С. 452—460.
32. Иванов А. Г., Новиков С. А., Сеницын В. А. Исследование упругопластических волн в железе и стали при взрывном нагружении // ФТТ.— 1963.— Т. 5, вып. 1.— С. 269—278.
33. МакКуин Р., Марш С., Тейлор Д. Н. и др. Уравнения состояния твердых тел по результатам исследования ударных волн // Высокоскоростные ударные явления.— М.: Мир, 1978.— С. 299—427.
34. Степанов Г. В. Упругопластическое деформирование металлов действием импульсных нагрузок.— Киев: Наук. думка, 1979.— С. 268.
35. Gills P. P., Hage K. C., Wasley R. J. Elastic Precursor decay in Tantalum // J. Appl. Phys.— 1971.— V. 42, N 5.— P. 2145—2146.
36. Arvidson T. E., Gupta J. M., Duvall G. F. Precursor decay in 1060 Aluminium // J. Appl. Phys.— 1975.— V. 46, N 10.— P. 4471—4478.
37. Taylor J. W., Rice M. N. Elastic-Plastic Properties of Iron // J. Appl. Phys.— 1963.— V. 34, N 2.— P. 364—371.
38. Moek W., Holt W. H. Shock reverberation in Tantalum // J. Appl. Phys.— 1983.— V. 54, N 11.— P. 6757—6758.
39. Авиационные материалы: Справочник/Под ред. А. Т. Туманова.— М.: ОНТИ, 1975.— Т. 1.— 431 с.
40. Работнов Ю. М. Механика деформируемого твердого тела.— М.: Наука, 1979.— С. 744.
41. Клещевников О. А., Тюняев Ю. Н., Софронов В. Н. и др. Динамический предел текучести и удельная работа отрыва при отколе ряда конструкционных материалов // ФГВ.— 1986.— Т. 22, № 4.— С. 102—106.
42. Новиков С. А., Сеницын В. А. О влиянии температуры на упругопластические свойства стали при взрывном нагружении // Проблемы прочности.— 1978.— № 12.— С. 104—106.
43. Morris C. E., Fritz J. N., Holian B. L. Quasielastic highpressure Waves in 2024-Al and Copper // Shock Waves in condensed Matter-1981: Proc./AIP Conf.— N. Y., 1982.— P. 382—386.
44. Батьков Ю. В., Новиков С. А., Чернов А. В. Сдвиговая прочность твердых тел и ее влияние на распространение плоских УВ // ФГВ.— 1986.— Т. 22, № 2.— С. 114—120.
45. Урлин В. Д. Плавление при сверхвысоких давлениях, полученных в ударной волне // ЖЭТФ.— 1965.— Т. 49, вып. 2(8)— С. 435—492.
46. Верещагин Л. Ф. Синтетические алмазы и гидроэрозия: Избр. тр.— М.: Наука, 1982.— С. 382.
47. Воробьев А. А., Дремин А. Н., Канель Г. И. Зависимости коэффициентов упругости алюминия от степени сжатия в ударной волне // ПМТФ.— 1974.— № 5.— С. 94—100.
48. Curran D. R. Nonhydrodynamic Attenuation of Shock Waves in Al // J. Appl. Phys.— 1963.— V. 34, N 9.— P. 2677—2690.
49. Борзиловский С. А., Караханов С. М. Вторичное сжатие и разгрузка дюралюминия за фронтом ударной волны // ФГВ.— 1986.— Т. 22, № 3.— С. 131—136.
50. Erkman J. O., Christensen A. B. Attenuation of Shock Waves in Aluminium // J. Appl. Phys.— 1967.— V. 38, N 3.— P. 5395—5403.
51. McQueen R. G., Fritz J. N., Morris C. E. The velocity of sound behind strong Shock Waves in 2024-Al // Shock Waves in condensed Matter-1983: Proc./AIP Conf.— 1983.— N 4.— P. 95—98.
52. Brown J. M., McQueen R. G. Melting of Iron under core conditions // Geophys. Res. Lett.— 1980.— V. 7, N 7.— P. 533—536.

53. Ross M. A Review of some recent theoretical calculations of phase transitions and comparisons with experimental results // Shock Waves in condensed Matter-1983: Proc./APE Conf.— Amsterdam, 1983.— P. 19—26.
54. Дремин А. Н., Канель Г. И., Черникова О. Б. Сопротивление пластической деформации АД1 в дюралюминия Д16 в условиях ударного сжатия // ПМТФ.— 1981.— № 4.— С. 132—138.
55. Новиков С. А. Напряжения сдвига и откольная прочность материалов при ударных нагрузках (обзор) // ПМТФ.— 1981.— № 3.— С. 109—120.
56. Young D. A., Grover R. Theory of the iron equation of State and Melting Curve to very high pressure // Shock Waves condensed Matter-1983: Proc./APE Conf., Amsterdam, 1983.— P. 95—98.

Глава 7

1. Рихтмайер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач.— М.: Изд-во иностр. лит., 1960.— 262 с.
2. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.— М.: Наука, 1968.— 591 с.
3. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем.— М.: Наука, 1971.— 550 с.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М.: Наука, 1983.— 614 с.
5. Самарский А. А. О консервативных разностных схемах // Проблемы прикладной математики и механики.— М.: Наука, 1971.— С. 129—136.
6. Попов Ю. П., Самарский А. А. Полностью консервативные разностные схемы // Журн. вычисл. математики и матем. физики.— 1969.— Т. 9, № 4.— С. 953—958.
7. Куропатенко В. Ф. Связь дивергентности с консервативностью разностных схем для уравнений газовой динамики.— М., 1982.— 26 с.— (Препринт/АН СССР, Ин-т прикл. математики; № 192).
8. Kurapatenko V. F. Investigation of the Dissipative Properties of Difference Schemes for the Gas-Dynamics Equations // Numer. Meth. Fluids Dynamics.— 1984.— P. 207—224.
9. Куропатенко В. Ф. Локальная консервативность разностных схем для уравнений газовой динамики // Журн. вычисл. математики и матем. физики.— 1985.— Т. 25, № 8.— С. 1176—1188.
10. Куропатенко В. Ф. О полной консервативности разностных законов сохранения // Вопросы атомной науки и техники. Методики и программы числ. решения задач матем. физики.— 1982.— Вып. 3(11).— С. 3—5.
11. Яненко Н. Н., Шокин Ю. И. О первом дифференциальном приближении разностных схем для гиперболических систем уравнений // Сиб. мат. журн.— 1969.— Т. 10, № 5.— С. 1173—1187.
12. Шокин Ю. И., Яненко Н. Н. Метод дифференциального приближения.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.— 364 с.
13. Коновалов А. Н. Применение метода расщепления к численному решению динамических задач теории упругости // Журн. вычисл. математики и матем. физики.— 1964.— Т. 4, № 4.— С. 760—764.
14. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений // Вычисл. методы в гидродинамике.— М.: Мир, 1967.— С. 212—263.
15. Майнчен Дж., Сак С. Метод расчета «Тензор» // Вычисл. методы в гидродинамике.— М.: Мир, 1967.— С. 185—211.
16. Быченко В. А., Гаджиева В. В., Куропатенко В. Ф. Расчет неустановившихся движений разрушаемых сред // Числ. методы механики сплош. среды.— Новосибирск, 1972.— Т. 3, № 2.— С. 3—17.
17. Гулидов А. И., Фокин В. М. Численное моделирование отскока осесимметричных стержней от твердой преграды // ПМТФ.— 1980.— № 3.— С. 126—132.
18. Веденяпин Е. Н., Кукуджанов В. Н. Метод численного интегрирования задач распространения волн в упругой среде // Журн. вычисл. математики и матем. физики.— 1981.— Т. 21, № 5.— С. 1233—1248.

19. Кукуджанов В. Н. Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред // Успехи механики.— 1985.— Т. 8, вып. 4.— С. 21—65.
20. Кукуджанов В. Н., Кузьмина В. С. К моделированию откольного разрушения при соударении пластин // Изв. АН СССР. МТТ.— 1985.— № 3.— С. 99—104.
21. Куропатенко В. Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.— М., 1966.— Т. 74.— С. 107—137.
22. Годунов С. К. Разностный метод счета разрывных решений уравнений газодинамики // Матем. сб.— 1959.— № 47(89), вып. 3.— С. 271—306.
23. Lax P. D. Weak Solution of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computations // Comm. Pure and Appl. Math.— 1954.— V. 7.— P. 159—193.
24. Neumann J., Richtmyer R. A method for the numerical calculation of hydrodynamical Shocks // J. Appl. Phys.— 1950.— V. 21, N 3.— P. 232—237.
25. Becker R. Stosselle und Detonation // Z. Phys.— 1922.— V. 8.— P. 43—52.
26. Wilkins M. L. Use of Artificial Viscosity in Multidimensional Fluid Dynamic Calculations // J. Comput. Phys.— 1980.— V. 36, N 3.— P. 281—303.
27. Куропатенко В. Ф. Метод расчета ударных волн // Докл. АН СССР.— 1960.— Т. 133, № 4.— С. 771—772.
28. Куропатенко В. Ф. Метод построения разностных схем для численного интегрирования уравнений газодинамики // Изв. вузов. Сер. матем.— 1962.— № 3(28).— С. 75—83.
29. Куропатенко В. Ф. Об одной форме псевдовязкости // Изв. СО АН СССР. Сер. технич.— 1967.— № 13, вып. 3.— С. 81—82.
30. Кочан М. С., Тришин Ю. А. Растягивающие напряжения в мишени при соударении твердых тел // ПМТФ.— 1977.— № 4.— С. 114—124.
31. Ахмадеев Н. Х., Нигматулин Р. И. Моделирование откольного разрушения при ударном деформировании. Анализ схемы мгновенного откола // ПМТФ.— 1981.— № 3.— С. 120—128.
32. Санин И. В., Воробьев А. И., Горновой А. А. Кинетико-статистическая модель откольного разрушения металлов // ФГВ.— 1987.— Т. 23, № 1.— С. 67—70.
33. Ильюшин А. А. Пластичность.— М.: Изд-во АН СССР, 1963.— 395 с.
34. Ильюшин А. А., Победра Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости.— М.: Наука, 1980.— 280 с.
35. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел.— М.: Наука, 1977.— 384 с.
36. Труделл И. Введение в курс рациональной механики.— М.: Мир, 1975.— 591 с.
37. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела.— М.: Наука, 1988.— 712 с.
38. Дьяченко В. Ф. Об одном новом методе численного решения нестационарных задач газовой динамики с двумя пространственными переменными // Журн. вычисл. математики и матем. физики.— 1965.— Т. 5, № 4.— С. 680—688.
39. Pasta J. R., Ulam S. Heuristic numerical work in some problems of hydrodynamics // Math. Tables Aids Comput.— 1959.— V. 13.— P. 13—27.
40. Глаголева Ю. П., Жогов Б. М., Кирьянова Ю. Ф. и др. Основы методики «Медуза» численного расчета двумерных нестационарных задач газодинамики // Числ. методы механики сплош. среды.— Новосибирск, 1972.— Т. 2, № 3.— С. 18—55.
41. Sofronof J. D., Rasskazova V. V., Nesterenko L. V. The use of nonregular nets for solving two-dimensional nonstationary problems in gas dynamics // Numer. Meth. Fluid Dynamics.— М., 1984.— P. 82—121.
42. Михайлова Н. В., Тишкин В. Ф., Тюрина Н. Н. и др. Численное моделирование двумерных газодинамических течений на лагранжевой сетке переменной структуры.— М., 1984.— 27 с.— (Препринт/АН СССР, Ин-т прикл. математики; № 156).
43. Алексеева Т. Н., Быченков В. А., Куропатенко В. Ф. Методика «Рapid» расчета двумерных адиабатических течений сжимаемых сред в перемен-

- ных Лагранжа со свободным соседством точек // Вопросы атомной науки и техники. Методики и программы численного решения задач матем. физики.— 1988.— Вып. 1.— С. 14—21.
44. Шульц У. Д. Двумерные конечно-разностные гидродинамические уравнения в переменных Лагранжа // Вычислительные методы в гидродинамике.— М.: Мир, 1967.— С. 9—54.
45. Забродин А. В., Софронов И. Д., Ченцов Н. Н. Адаптивные разностные методы математического моделирования нестационарных газодинамических течений // Вопросы атомной науки и техники. Методики и программы численного решения задач математической физики.— 1988.— Вып. 4.— С. 3—22.

Глава 8

1. Келлер Д., Пеннинг Дж. Применение взрывающейся фольги для получения плоских ударных волн и ускорения тонких пластин // Электрический взрыв проводников.— М.: Мир, 1965.— Т. 2.— С. 299—316.
2. Павловский А. И., Кашинцов В. И., Глушак Б. Л. и др. Генерирование механического импульса электрическим взрывом проводника // ФГВ.— 1983.— Т. 19, № 3.— С. 124—126.
3. Глушак Б. Л., Новиков С. А., Свиридов В. А. и др. Исследование волн напряжения в стеклотекстолите и фторопласте при их быстром разогреве излучением // ПМТФ.— 1980.— № 6.— С. 99—103.
4. Fox J. A., Barr D. N. Laser-induced stress waves in 6061-T6-Al // J. Appl. Opt.— 1973.— V. 12, N 11.— P. 2547—2548.
5. Yang L. C. Stress waves generated in thin metallic films by a Q-switched ruby laser // J. Appl. Phys.— 1974.— V. 45, N 6.— P. 2501—2608.
6. Хохлов Н. П., Свиридов В. А., Глушак Б. Л. и др. Затухание волн напряжения малой длительности в алюминии и меди // Письма в ЖТФ.— 1980.— Т. 6, вып. 23.— С. 1427—1430.
7. Perkin J. L., Morris E., Large D. W. The spalling of aluminium with a pulsed electron beam // J. Appl. Phys.— 1971.— V. 4, N 7.— P. 974—984.
8. Boade R. R., Burchett L. Electron-deposition-induced spallation in tantalum // J. Appl. Phys.— 1976.— V. 47, N 8.— P. 3412—3417.
9. Альтшулер Л. В., Кормер С. Б., Баканова А. А. и др. Уравнение состояния алюминия, меди и свинца для области высоких давлений // ЖЭТФ.— 1960.— Т. 38, вып. 3.— С. 790—798.
10. Альтшулер Л. В. Применение ударных волн в физике высоких давлений // УФН.— 1965.— Т. 85, вып. 2.— С. 197—258.
11. Баум Ф. А., Орленко Л. П., Станюкович К. П. и др. Физика взрыва.— М.: Наука, 1975.— 704 с.
12. Погорелов А. П., Глушак Б. Л., Новиков С. А. и др. О зависимости импульса отдачи от жесткости преграды в режиме скользящей детонации слоя ВВ // ФГВ.— 1977.— Т. 13, № 5.— С. 771—774.
13. Hoskin N. E., Allan J. W., Bailey W. P. et al. The Motion of Plates and Cylinders driven by Detonation waves at tangential incidence // Proc. of the 4th Symp. (Intern.) on Detonation, White Oak, 1965.— Washington, 1967.— P. 14—26.
14. Глушак Б. Л., Новиков С. А., Погорелов А. П. и др. Исследование инициирования ТНТ и ТГ 50/50 ударными волнами малой длительности // ФГВ.— 1981.— Т. 17, № 6.— С. 90—95.
15. Дерибас А. А. Физика упрочнения и сварки взрывом.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.— 221 с.
16. Гензер А., Вунш Д., Соунс Т. Ускорение тонких пластин с помощью взрывающейся фольги // Электрический взрыв проводников.— М.: Мир, 1965.— Т. 2.— С. 317—340.
17. Чернышев В. К., Иванов В. А. Настольный электрический генератор плоской ударной волны // Физика высоких давлений/Тр. ВНИИФТРИ.— 1979.— Вып. 44(74).— С. 123—126.

18. Баллистические установки/Под ред. Н. А. Златина.— М.: Наука, 1974.— 344 с.
19. Минеев В. Н., Погорелов В. П., Иванов А. Г. и др. Установка для исследования поведения материалов и конструкций при динамических нагрузках // ФГВ.— 1978.— Т. 14, № 3.— С. 129—133.
20. Дубовик А. С. Фотометрическая регистрация быстротекущих процессов.— М.: Наука, 1975.— С. 456.
21. Иванов А. Г., Новиков С. А. Метод емкостного датчика для регистрации мгновенной скорости движущейся поверхности // Приборы и техника эксперимента.— 1963.— № 1.— С. 135—138.
22. Taylor J. W., Rice M. N. Elastic-plastic properties in Iron // J. Appl. Phys.— 1963.— V. 34, N 2.— P. 364—371.
23. Жугин Ю. Н., Крушников К. К. Индукционный метод непрерывной регистрации скорости конденсированной среды в ударно-волновых процессах // ПМТФ.— 1983.— № 1.— С. 102—108.
24. Fritz J. N., Morgan J. A. An electromagnetic Technique for Measuring Material Velocity // Rev. Sci. Instrum.— 1973.— V. 44, N 2.— P. 215—221.
25. Новиков С. А., Кашинцов В. И., Федоткин А. С. Измерение скорости токопроводящих облобок датчиком электромагнитного типа // ФГВ.— 1985.— Т. 21, № 1.— С. 71—74.
26. Златин Н. А., Мочалов С. М. Лазерный дифференциальный интерферометр // ЖТФ.— 1973.— Т. 43, вып. 9.— С. 1961—1965.
27. Тянь-Куинд-Зенг, Юан Тянь-Ю. Двухлучевая лазерная интерференционная система Фабри — Перо для измерения скорости // XIV Междунар. конгресс по высокоскоростной фотографии.— М., 1980.— С. 50—58.
28. Stengel R. F. Velocimeter handles Speeds to 10 km/s // Design news.— 1980.— V. 3, N 16.— P. 68—71.
29. Астаин В. В., Минеев В. Н., Обухов А. С. и др. Электрические измерения параметров ударных волн манометрическими датчиками.— Киев, 1984.— 51 с.— (Препринт/АН УССР, Ин-т проблем прочности).
30. Уртъев П. А., Эриксон Р. М., Хейс Б. и др. Измерение давления и массовой скорости в твердых телах при динамическом нагружении // ФГВ.— 1985.— Т. 22, № 5.— С. 113—125.
31. Neilson F. W., Benedick W. B. Piezoelectric Response of Quartz beyond its Higniot Elastic Limit // Bull. Amer. Phys. Soc.— 1960.— Ser. 14, v. 5, N 3.— P. 511—515.
32. Graham R. A. Piezoelectric Behavior Impacted Quartz // Bull. Amer. Phys. Soc.— 1960.— Ser. 14, v. 5, N 3.— P. 402—406.
33. Wackerly J. Shock-Wave Compression of Quartz // J. Appl. Phys.— 1962.— V. 33, N 5.— P. 922—927.
34. Бондаренко С. И., Гердюков Н. Н., Крысанов Ю. А. и др. Применение кварцевых датчиков давления для исследования ударно-волновых процессов // ФГВ.— 1981.— Т. 17, № 3.— С. 146—148.
35. Солоухин Р. И. Импульсный пьезодатчик давления // Приборы и техника эксперимента.— 1961.— № 3.— С. 170—171.
36. Neilson F. W. Effect of Strong Shocks in Ferroelectric Materials // Bull. Amer. Phys. Soc.— 1957.— V. 2, N 6.— P. 302—309.
37. Graham R. A. Pressure Dependence of the Piezoelectric Polarisation in LiNbO₃ and LiTaO₃ // Ferroelectrics.— 1976.— V. 10, N 1.— P. 65—69.
38. Канель Г. И. Применение манганиновых датчиков для измерения давления ударного сжатия конденсированных сред.— Черногловка, 1973.— 22 с.— (Препринт/АН СССР, Отд-ние Ин-та хим. физики).
39. Минеев В. Н., Иванов А. Г. ЭДС, возникающая при ударном сжатии вещества // УФН.— 1976.— Т. 119, вып. 1.— С. 75—109.
40. Уотсон Р. Датчик для определения давления ударных волн // Приборы для научных исследований.— 1967.— Т. 38, № 7.— С. 119—120.

41. Eichelberger R. J., Hawer G. E. Solid State Transducer for Recording of Intense Pressure Impulses // *Lesondes de Detonation*, Paris, 1962.— P. 363—381.
42. Фот Н. А. Разработка и исследование методов непосредственной регистрации напряжений в металлах при действии импульсных нагрузок: Автореф. дис.— Киев, 1971.— 20 с.
43. Батьков Ю. В., Новиков С. А., Пермяков В. В. Некоторые особенности измерения импульсных давлений с помощью диэлектрического датчика // ПМТФ.— 1981.— № 2.— С. 103—105.
44. Иванов А. Г., Новицкий Е. З. Задача о двойном слое в ударно сжатых диэлектриках // ПМТФ.— 1966.— № 5.— С. 104—107.
45. Graham R. A. Pressure Dependence of the Magnetisation of Invar and Silectron from 30 to 450 k bar // *J. Appl. Phys.*— 1968.— V. 39, N 2.— P. 437—440.
46. Нестеренко Б. Ф. Электрические эффекты при ударном нагружении контакта металлов // ФГВ.— 1975.— Т. 11, № 3.— С. 444—456.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1	
Законы сохранения для сплошной среды	7
§ 1. Изучаемая среда	—
§ 2. Напряженное состояние	12
§ 3. Деформация твердого тела	17
§ 4. Объемная деформация	20
§ 5. Главные оси тензора деформаций	22
§ 6. Условия совместности деформаций	23
§ 7. Скорость деформации	24
§ 8. Закон сохранения массы	25
§ 9. Закон сохранения количества движения	27
§ 10. Закон сохранения энергии	29
§ 11. Законы сохранения в случае одномерно пространственных движений	30
Глава 2	
Определяющие уравнения плотных сред	34
§ 1. Термодинамические потенциалы	—
§ 2. Производные термодинамических величин и соотношения между ними	36
§ 3. Уравнения состояния металлов	40
§ 4. Зависимость E_x от удельного объема	45
§ 5. Квантовая теория теплоемкости одноатомных твердых тел	47
§ 6. Тепловая энергия и тепловое давление	50
§ 7. Уравнения состояния в переменных V, T	56
§ 8. Уравнения состояния в переменных p, E	59
§ 9. Определение энергии сублимации холодного вещества	64
§ 10. Уравнение состояния смеси жидкости и пара	66
§ 11. Зависимость напряжений от упругих деформаций. Закон Гука	68
§ 12. Пластические деформации. Упрочнение	73
§ 13. Уравнение состояния продуктов детонации	77
Глава 3	
Одномерные непрерывные движения сжимаемых сред	81
§ 1. Уравнения механики сплошной среды в случае малых возмущений	—
§ 2. Акустические волны	83
§ 3. Простая волна	86
§ 4. Волны сжатия и расширения	90
§ 5. Отражение волны разрежения от жесткой стенки	93
Глава 4	
Ударные волны и волны разрежения	99
§ 1. Основные соотношения на ударном разрыве	—
§ 2. Некоторые закономерности сжатия и течения в ударных волнах	103

3.	Сжатие твердых тел ударными волнами	108
4.	Изэнтропическое расширение ударно сжатых металлов	115
5.	Детонационная волна	121
6.	Произвольный разрыв. Взаимодействие волн	126
7.	Ударные волны разрежения	129
8.	Гидродинамическое затухание ударной волны	131
Глава 5		
	Откольное разрушение конструкционных материалов	136
1.	Способы образования растягивающих напряжений	—
2.	Критерии откольного разрушения металлов	138
3.	Методы определения откольной прочности	146
4.	Результаты экспериментальных исследований	152
Глава 6		
	Сдвиговая прочность ударно сжатых металлов	174
§ 1.	Деформирование металлов в ударных волнах и волнах разгрузки	—
§ 2.	Модели пластического деформирования металлов в ударных волнах	179
§ 3.	Экспериментальные методы определения сдвиговой прочности	188
§ 4.	Особенности структуры ударной волны и волны разрежения в упругопластической среде	195
§ 5.	Упругий предвестник и динамическая прочность	198
§ 6.	Динамический предел текучести и упругие свойства металлов в ударных волнах	204
Глава 7		
	Математические модели плотных сред	212
§ 1.	Основные черты и свойства математических моделей	—
§ 2.	Физическая модель волновых нагрузок в твердых телах	217
§ 3.	Метод построения разностных уравнений	224
§ 4.	Консервативность и диссипативные свойства разностной схемы	229
§ 5.	Анализ S -консервативности некоторых разностных схем	233
§ 6.	Методы расчета ударных волн	236
§ 7.	Модели разрушения плотной среды при динамических нагрузках	241
§ 8.	Математическая модель волновой деформации плотной среды	249
§ 9.	Разностные методы расчета больших деформаций	255
Глава 8		
	Экспериментальные методы создания и регистрации динамических нагрузок	262
1.	Методы создания ударных волн	—
2.	Способы ускорения ударников	265
3.	Методы измерения массовой скорости в ударной волне в виде непрерывной зависимости	270
4.	Методы непрерывного измерения давления в ударных волнах	274
	Список литературы	278

Научное издание

Глушак Борис Леонидович
Куропатенко Валентин Федорович
Новиков Станислав Александрович

**ИССЛЕДОВАНИЕ
ПРОЧНОСТИ
МАТЕРИАЛОВ
ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ
НАГРУЗКАХ**

Редактор издательства *Л. П. Гольмиева*
Художник *И. Б. Елистратов*
Художественный редактор *С. В. Марковская*
Технический редактор *А. В. Сурганова*
Корректоры *Г. И. Шведкина, Р. К. Червова*

ИБ № 34438

Сдано в набор 13.11.90. Подписано к печати 24.02.92. Формат 60×90^{1/16}. Бумага газетная. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 18,5. Усл. кр.-отт. 18,5. Уч.-изд. л. 19,2. Тираж 576 экз. Заказ № 488. С056.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099 Новосибирск, ул. Советская, 18.
4-я типография издательства «Наука». 530077 Новосибирск, ул. Станиславского, 25.

ВНИМАНИЮ ЗАКАЗЧИКОВ!

Сибирское отделение издательства «Наука» предлагает свои услуги индивидуальным и коллективным заказчикам в издании любого вида литературы. Бумага, переплетные материалы и оплата по договоренности.

Наш адрес: 630099, Новосибирск, Советская 18, комн. 321. Тел. 22-00-44.