О ФОКУСИРОВКЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ГАЗЕ

В.Ф. Куропатенко [1,2], Ф.Г. Магазов [2],
Е.С. Шестаковская [2]

[1] ***Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е.И. Забабахина***
Снежинск, Россия
[2] ***Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет),***
Челябинск, Россия

Постановка задачи

Зададим четыре параметра с разными размерностями:

U_{g0}, r_0, t_0, ρ_0.

Начальные параметры газа: $\rho_0 = const, U_0 = 0, P_0 = 0, E_0 = 0.$

На границе цилиндра в точке t_0, r_0 задана скорость $U_{g0} < 0$.

Законы сохранения на ударной волне (УВ):

$$\rho_w \left(D - U_w \right) - \rho_0 D = 0, \tag{1}$$

$$\rho_0 D U_w - P_w = 0, \tag{2}$$

$$\rho_0 D \left(E_w + \frac{1}{2} U_w^2 \right) - P_w U_w = 0. \tag{3}$$

Уравнения (1)–(3) замыкаются уравнением состояния

$$P = \left(\gamma - 1 \right) \rho E, \; P = F\left(S \right) \rho^{\gamma}. \tag{4}$$

$$M_w = \pi\rho_0 r_w^2,$$ - лагранжева координата УВ.

$$W = \frac{dM_w}{dt} = 2\pi\rho_0 r_w D.$$ - скорость УВ в лагранжевых координатах

Из (1) - (4) с учетом этих выражений следует :

$$\rho_w = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_0,$$

$$P_w = \frac{2}{\gamma+1}\rho_0^{1/3}\left(4\pi\right)^{-2/3}\left(3M_w\right)^{-4/3}W^2,$$

$$U_w = \frac{2}{\gamma+1}\left(4\pi\rho_0\right)^{-1/3}\left(3M_w\right)^{-2/3}W,$$

$$F_w = \left[\frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\gamma}\rho_0^{-(\gamma-1/3)}\left(4\pi\right)^{-2/3}\right]\left(3M_w\right)^{-4/3}W^2.$$

Зададим траекторию УВ в виде:

$$M_w = M_0 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^n, \qquad (5)$$

где t_f - время фокусировки

$$W = W_0 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1},$$

где $W_0 = \left(2M_0\right)^{1/2} \left(2\pi\rho_o\right)^{1/2} \frac{(\gamma + 1)}{2} U_{g0},$

$$t_f = t_0 - \frac{M_0 n}{W_0}.$$

Течение газа за ударной волной

Параметры адиабатического течения за ударной волной определяются уравнениями траектории,
сохранения массы и движения:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_M - U = 0, \qquad (6)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_M + 2\pi\rho^2 \frac{\partial\left(rU\right)}{\partial M} = 0, \qquad (7)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_M + 2\pi r \frac{\partial\left(F\rho^\gamma\right)}{\partial M} = 0. \qquad (8)$$

Перейдем в (6)-(8) к новым искомым функциям

$$R = r^2, \quad C = rU.$$

Получим:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)_M - 2C = 0, \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_M + 2\pi\rho^2 \frac{\partial C}{\partial M} = 0, \tag{10}$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_M + 2\pi R \frac{\partial\left(F\rho^\gamma\right)}{\partial M} - C^2 R^{-1} = 0. \tag{11}$$

Новые функции на ударной волне имеют вид

$$R_w = R_0 \frac{M_w}{M_0}, \quad C_w = C_0 \left(\frac{M_w}{M_0}\right)^{(n-1)/n}. \tag{12}$$

Перейдем от переменных *t*, *M* к переменным *t*, *ξ(t,M)*.
Зададим зависимость *ξ(t,M)* в виде:

$$\xi = \frac{M}{M_0}\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^{-n}.$$

Представим R, ρ и C в виде произведений функций от времени и функций от ξ:

$$R = \alpha_R(t)T(\xi) \quad \rho = \alpha_\rho(t)\delta(\xi) \quad C = \alpha_C(t)Z(\xi)$$

Определим эти зависимости на ударной волне, т.е. при *ξ=1*

$$T_w = T_1, \quad \alpha_R(t) = R_0\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^{n} T_1^{-1},$$

$$\delta_w = \delta_1, \quad \alpha_\rho = \rho_0\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\delta_1^{-1}, \tag{13}$$

$$Z_w = Z_1, \quad \alpha_C(t) = C_0\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^{n-1} Z_1^{-1}.$$

Т.о. система уравнений (9)-(11) преобразуется в систему уравнений для T, δ и Z:

$$\xi T' = A_1, \tag{14}$$

$$\delta_1 B_1 Z' - \xi Z_1 \delta' = 0, \tag{15}$$

$$-\frac{\xi}{Z_1} Z' + \frac{C_1 \gamma \xi}{\delta_1} \delta' = C_2. \tag{16}$$

где

$$A_1 = T - \frac{2Z T_1}{(\gamma+1) Z_1}, \quad B_1 = \frac{2\delta^2}{(\gamma-1)\delta_1^2}, \quad C_1 = \frac{\delta^{\gamma-1} T \xi^{-2/n}}{\delta_1^{\gamma-1} T_1},$$

$$C_2 = \frac{Z^2 T_1}{(\gamma+1) Z_1^2 T} - \frac{(n-1)Z}{n Z_1} - C_1 \frac{(n-2)\delta}{n \delta_1}.$$

Уравнения (14) - (16) образуют относительно T', δ', Z' систему линейных неоднородных уравнений.

Определитель системы равен

$$\Delta = B_1 C_1 \gamma \xi - \xi^2 .$$

При $\Delta \neq 0$ существует единственное решение системы (14)–(16). Оно имеет вид

$$T' = \frac{A_1}{\xi}, \quad \delta' = \frac{B_1 C_2 \delta_1}{\Delta}, \quad Z' = \frac{\xi C_2 Z_1}{\Delta}. \tag{17}$$

Уравнения (17) интегрируются численно, начиная с ударной волны, где $\xi=1$, до значения ξ_*, при котором $\Delta(\xi_*)=0$. Значение n_* определяется так, чтобы было одновременно $\Delta(\xi_*)=0$ и $C_2(\xi_*)=0$.

Значения ξ_* и n_* зависят от γ. Они приведены в таблице

γ	1.1	1.2	4/3	1.4	5/3
n_*	1.770501	1.722331	1.684516	1.670651	1.631252
ξ_*	6.768540	4.873946	3.896265	3.616019	2.990161

Решение в особой точке

В особой точке определитель системы (14)-(16) обращается в ноль одновременно с C_2

$$\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{T_*\ \delta_*^{\gamma+1}\ \xi_*^{(n-2)/n}}{T_1\ \delta_1^{\gamma+1}}-\xi_*^2=0. \tag{18}$$

$$\frac{1}{\gamma+1}\left(\frac{Z_*}{Z_1}\right)^2-\frac{n-1}{n}\left(\frac{Z_*}{Z_1}\right)\left(\frac{T_*}{T_1}\right)-\frac{2(\gamma-1)(n-2)}{n\gamma(\gamma+1)}\left(\frac{T_*}{T_1}\right)\xi_*=0. \tag{19}$$

Из выражения производной Δ'

$$\Delta'=\left(\Delta+\xi^2\right)\left(\frac{2(\gamma+1)\delta C_2}{(\gamma-1)\delta_1\Delta}-\frac{4Z\,T_1}{(\gamma+1)Z_1\,T\xi}+\frac{2(n-1)}{n\xi}\right)-2\xi.$$

следует, что Δ'=∞ при Δ=0.

Для определения значения ξ_* интерполируем поведение $\Delta(\xi)$ функцией от ξ

$$\Delta = \frac{1}{a}\sqrt{\xi\left(\xi_* - \xi\right)}. \qquad (20)$$

Производная Δ' имеет вид $\quad \Delta' = \dfrac{1}{2a^2\Delta}\left(\xi_* - 2\xi\right).$

Постоянная величина a в (20) определяется в точке ξ_ν, ближайшей к ξ_* и такой, что $\Delta(\xi_\nu)$ и $\Delta'(\xi_\nu)$ ещё конечные. Тогда

$$\xi_* = \frac{2\xi_\nu\left(\Delta_\nu - \xi_\nu\Delta'_\nu\right)}{\Delta_\nu - 2\xi_\nu\Delta'_\nu}.$$

Далее находим T_* экстраполяцией

$$T_* = T_\nu + T'_\nu\left(\xi_* - \xi_\nu\right).$$

Значение δ_* находим из условия $\Delta_* = 0$.

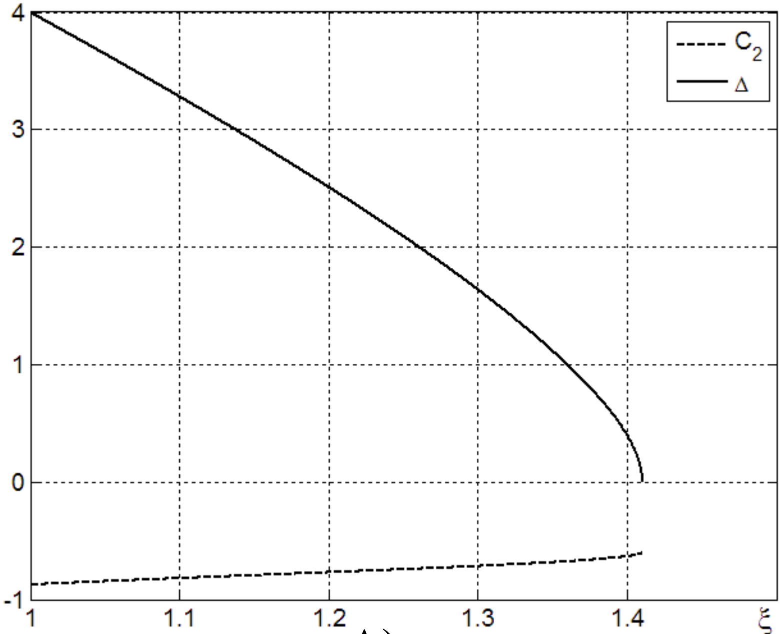
$$\delta_* = \delta_1 \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{T_1}{T_*} \xi_*^{(n+2)/n} \right)^{1/(\gamma+1)},$$

а значение Z_* из уравнения (19) $C_2(\xi_*)=0$.

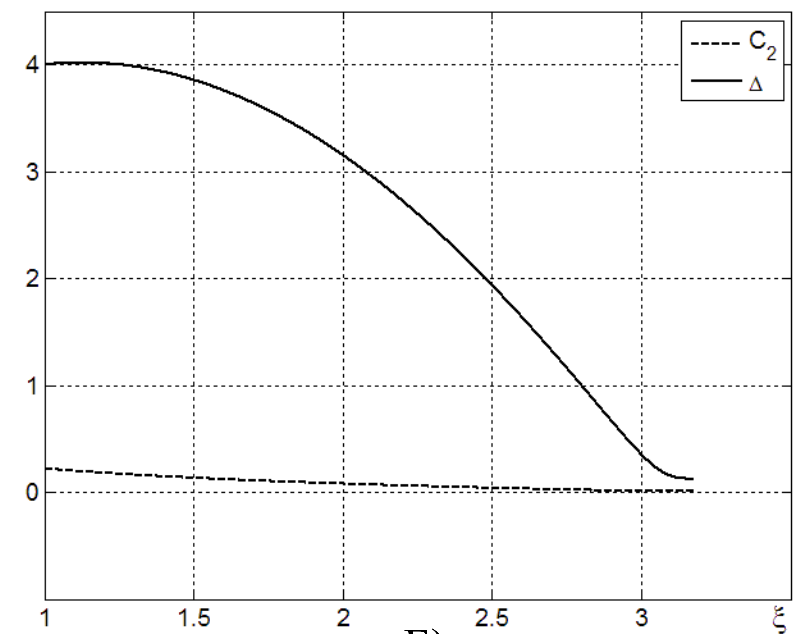
После раскрытия неопределенности в точке ξ_*

$$\frac{C_2(\xi_*)}{\Delta(\xi_*)} = \frac{0}{0}$$

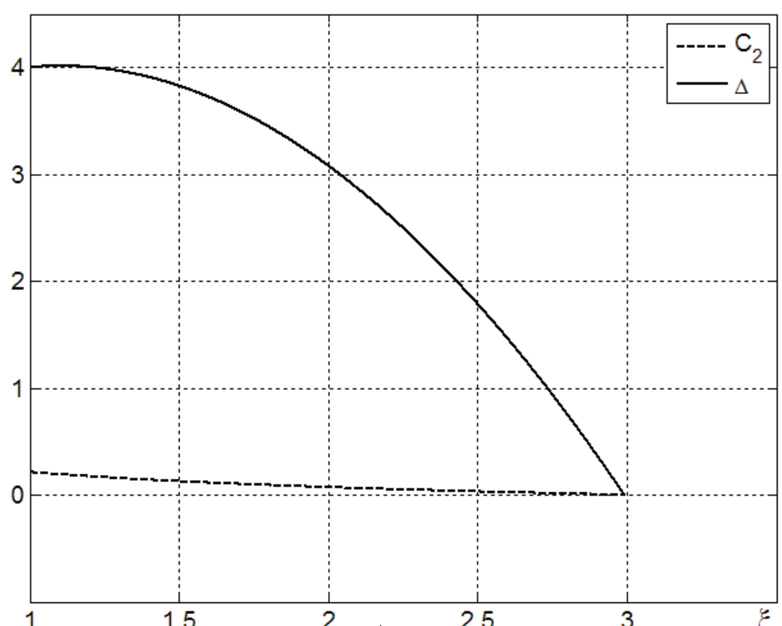
интегрирование уравнений (17) продолжается до $\xi \approx 10^{10}$.



А)



Б)



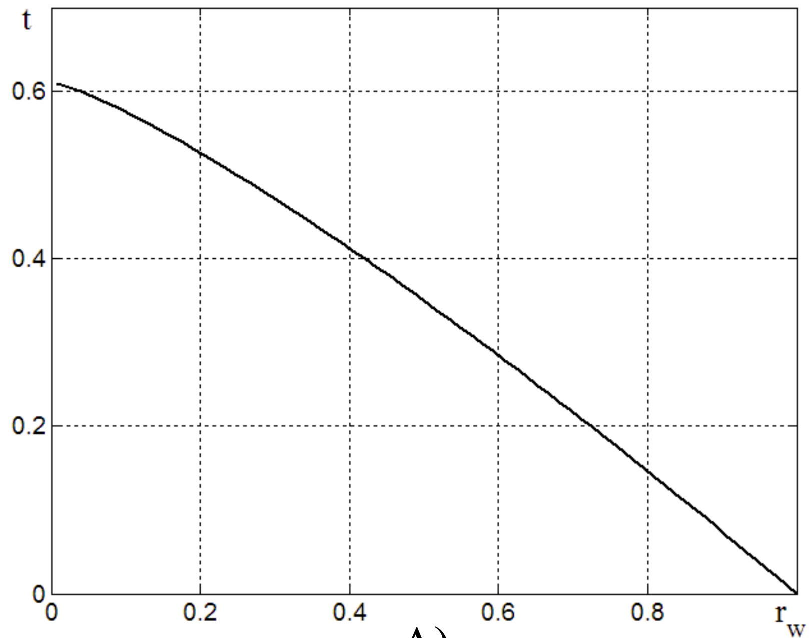
В)

Рис. 1. Фрагменты поиска значения n_* . Графики зависимостей определителя Δ и коэффициента C_2 от ξ для γ=*5/3*.

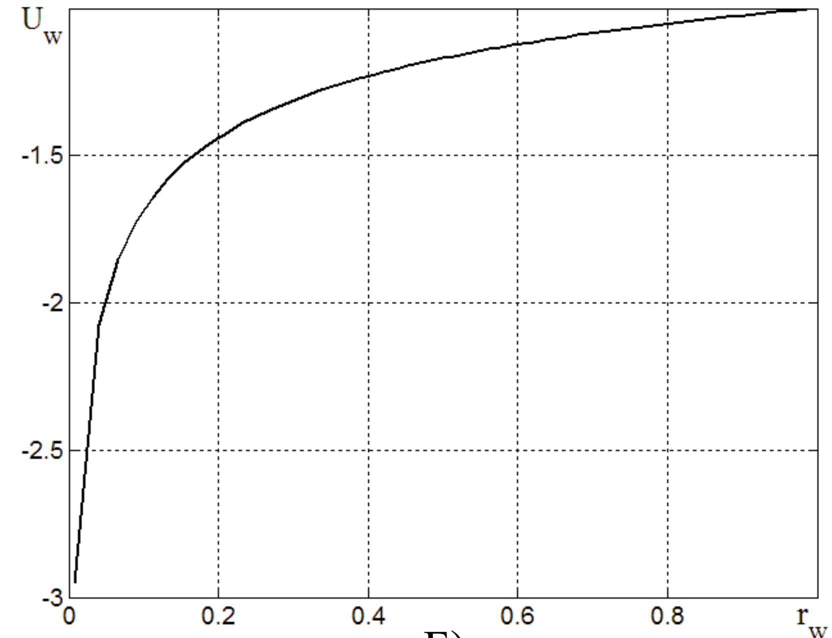
А) *n=4*

Б) *n=1,625*

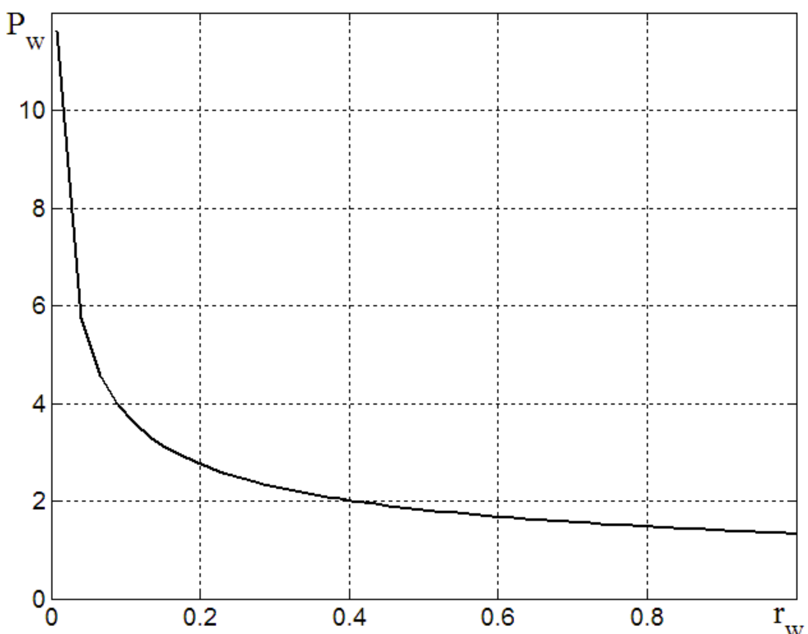
В) *n*= n_*=*1,631252*.



А)

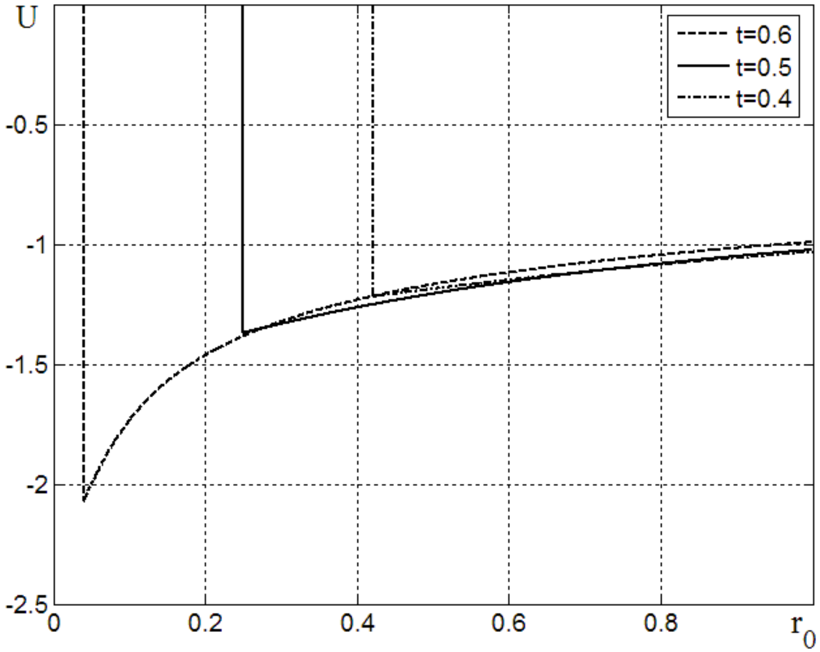


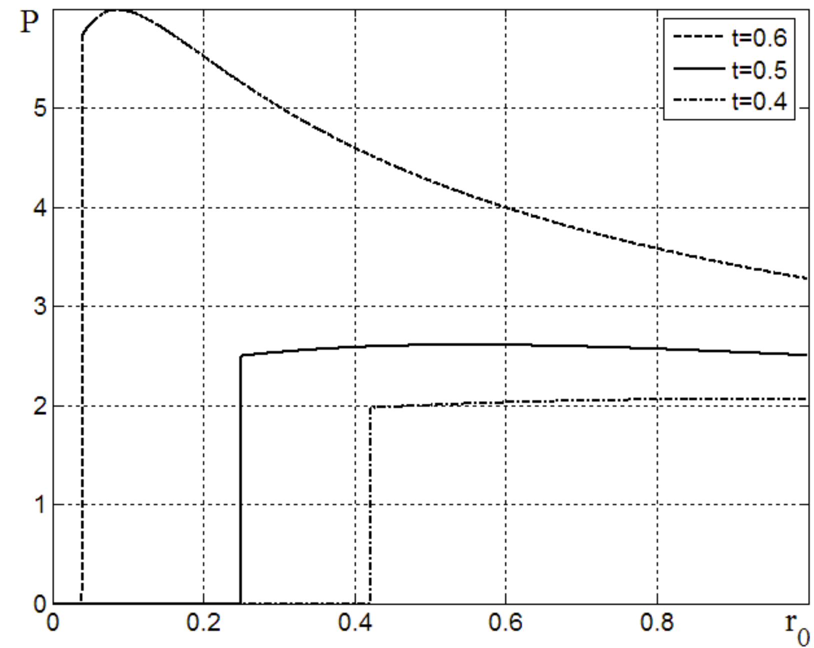
Б)



В)

Рис. 2. А) Траектория УВ;
Б) Зависимость скорости
на фронте УВ от эйлеровой
координаты;
В) Зависимость давления
на фронте УВ от эйлеровой координаты
для γ=5/3 и n_*=1,631252.





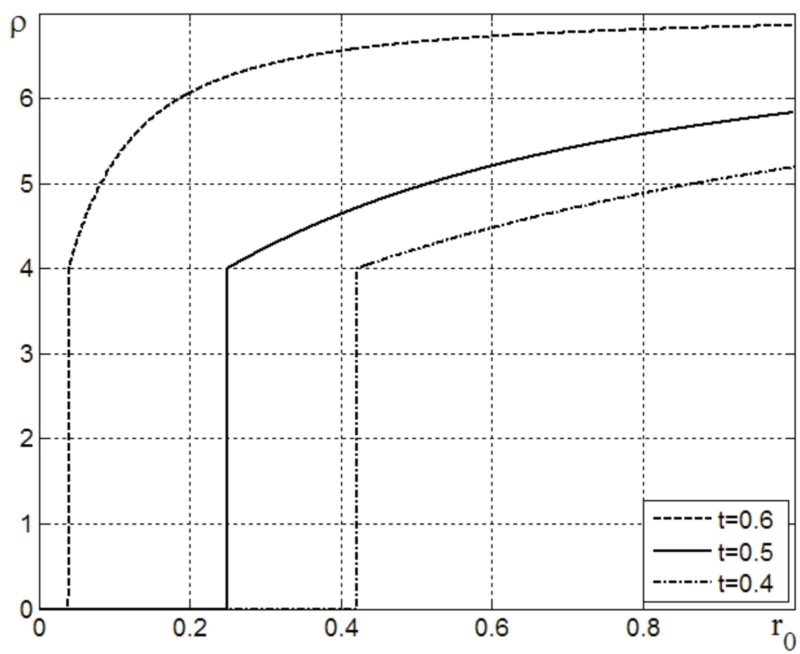


Рис. 3. Зависимости скорости, давления и плотности от эйлеровой координаты для γ=5/3, n_*=1,631252 и трех моментов времени.

Спасибо за внимание!