XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20–24 августа 2015 года. С. 684–686.

ПРЕЦИЗИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА УДАРНЫХ ВОЛН

Д.А. Варфоломеев, К.И. Казин, В.Ф. Куропатенко
Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский НИИ технической физики им. Е.И. Забабахина, г. Снежинск

d.a.varfolomeev@mail.ru

Аннотация. Предлагается высокоточный метод расчета ударных волн. В его основе лежит неоднородный разностный метод В.Ф. Куропатенко в Лагранжевых координатах. Метод позволяет явно выделять в решении ударные волны в виде разрывов первого рода. Предлагается ряд способов повышения точности этого метода. В частности, для определения величин перед фронтом ударной волны наряду с разностным подходом предлагается использовать элементы метода характеристик. На примере расчета методических задач показано, что предлагаемый метод превосходит по точности все однородные методы, а по монотонности – исходный неоднородный метод.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 13-01-00072.

Для математического моделирования ударных волн в сплошных средах широко применяются однородные разностные методы, в которых ударные волны «размазываются» на несколько интервалов сетки. Неоднородные разностные методы позволяют явно выделять в решении ударные волны в виде разрывов первого рода, которые разграничивают области с гладким решением. Одним из первых неоднородных методов, который позволяет выделять в решении сильные и слабые разрывы, был метод характеристик [1, 2], использующий Эйлеровы координаты. В 1960-х годах был создан неоднородный разностный метод В.Ф. Куропатенко в Лагранжевых координатах [3]. Одной из особенностей данного метода является то, что он способен выделять в решении наиболее «важные» разрывы, а остальные разрывы «размазывать». Такая особенность позволяет с успехом применять его для расчета очень сложных течений, акцентируя внимание на определяющих течение областях.

В работе для метода [3] предлагаются способы повышения точности расчета выделенных ударных волн. Для определения величин перед фронтом ударной волны наряду с разностным подходом применяются элементы метода характеристик. Для повышения точности расчета величин за фронтом ударной волны при взаимодействии регулярной сетки и сетки особенностей предлагается алгоритм, позволяющий корректно учитывать возмущения, догоняющие фронт. Для интервалов перед фронтом и за фронтом предлагается подход, который сводит расчет величин в данных интервалах к расчету величин на регулярной сетке.

Задача состоит в том, чтобы на момент времени t^{n+1} определить все величины в интервале с разрывом (рис. 1). Алгоритм расчета особого интервала можно разбить на несколько этапов:

1. Определение величин перед фронтом:

- новое положение фронта и величины перед разрывом $(\rho, E, P, U, C)_{-}^{n+1}$,
- плотность ρ_α^{n+1} в α-интервале и массу ΔM , которая «перетекла» сквозь фронт за шаг по времени τ,
- термодинамические величины в $(E, P, M)_\alpha^{n+1}$ α-интервале;

2. Определение величин за фронтом:

- величины за разрывом $(\rho, E, P, U, C)_{+}^{n+1}$,
- величины в β-интервале и его массу M_β^{n+1}.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИН ПЕРЕД ФРОНТОМ

Определим скорость фронта ударной волны: $D^{n+1} = D^n + \tau\left(\frac{dD}{dt}\right)^{n+1}$, где $\left(\frac{dD}{dt}\right)^{n+1}$ – ускорение фронта, полученное с применением дополнительного к условиям Гюгонио уравнения для расчета величин вдоль траектории фронта ударной волны [3]. Новое положение фронта: $R_D^{n+1} = R_D^n + \tau D^{n+1}$.

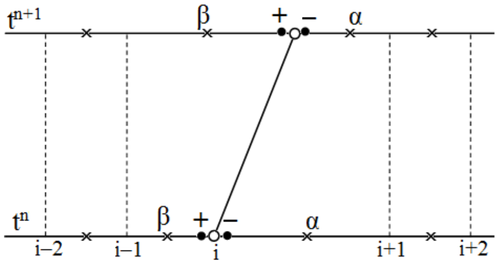

Рис. 1. Шаблон расчета особого интервала

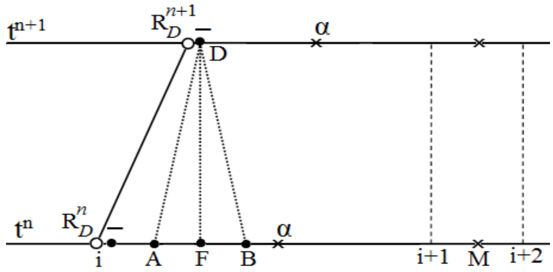

Рис. 2. Определение «минус» величин

Для нахождения величин перед фронтом ударной волны в точке D (рис. 2) воспользуемся характеристическими свойствами уравнений газовой динамики [1]. В момент времени t^n найдем такие точки A и B, что характеристики, выходящие из них, пересекаются в точке D. Из точки D опустим траекторию и найдем точку F. Таким образом, получаем характеристический треугольник, рассчитав который, определяем все термодинамические величины перед фронтом ударной волны.

Для учета изменения плотности в α-интервале за шаг по времени представим, что интервал $\left(R_D^n, R_{i+1}^n\right)$ с массой M_α^n является регулярным (величины в нем обозначим индексом C), т.е. на его левой границе отсутствует разрыв и она движется со скоростью вещества перед фронтом. Тогда ρ_α^{n+1} можно определить линейной интерполяцией между плотностями $\rho_C^{n+1} = \dfrac{M_\alpha^n}{\theta_C^{n+1}}$ и $\rho_{i+1.5}^{n+1}$, его массу $M_\alpha^{n+1} = \rho_\alpha^{n+1}\theta_\alpha^{n+1}$ и массу, перешедшую сквозь фронт ударной волны за шаг по времени: $\Delta M = M_\alpha^n - M_\alpha^{n+1}$.

Предположим теперь, что интервал $\left(R_F^n, R_{i+1}^n\right)$ является регулярным. Точка L – середина интервала. Линейной интерполяцией рассчитываем значения термодинамических величин в этом интервале на момент времени t^n. На момент времени t^{n+1} состояние в данном интервале соответствует значениям величин в α-интервале. Таким образом, задача определения «альфа» величин сводится к расчету регулярного интервала $\left(R_F^n, R_{i+1}^n\right)$ на момент времени t^{n+1}. Знак величины $\Delta U = U_-^{n+1} - U_{i+1}^{n+1}$ определяет сжатие или растяжение в интервале. Пользуясь методом расчета регулярных интервалов [3], определяем величины в интервале перед фронтом ударной волны. Таким образом, при расчете регулярных интервалов и интервала перед фронтом используется один метод, что позволяет получить одинаковый порядок аппроксимации.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИН ЗА ФРОНТОМ

На фронте ударной волны значения кинематических и термодинамических величин справа и слева в идеальной среде связаны между собой условиями Гюгонио. Скорость фронта ударной волны D^{n+1} и состояние перед фронтом на момент времени t^{n+1} определены. Тогда условия Гюгонио в совокупности с уравнением состояния $P = P(\rho, E)$ образуют замкнутую систему уравнений. Разрешая эту систему, определим параметры на фронте ударной волны в момент времени t^{n+1}.

Положение правой границы β-интервала соответствует положению сильного разрыва. Левая граница является границей соседнего регулярного интервала (рис. 1). Масса в интервале за фронтом равна сумме массы на момент времени t^n и массы, перешедшей через фронт ударной волны за шаг τ: $M_\beta^{n+1} = M_\beta^n + \Delta M$. Тогда, рассчитав его объем θ_β^{n+1}, определим плотность $\rho_\beta^{n+1} = \dfrac{M_\beta^{n+1}}{\theta_\beta^{n+1}}$.

Для определения величин в интервале за фронтом поступим аналогично определению величин в α-интервале. Представим, что интервал $\left(R_{i-1}^{n+1}, R_D^{n+1}\right)$ регулярный, т. е. разрыв на правой границе отсутствует. Определим состояние в данном интервале на момент времени t^n. Из точки с координатой $R_\beta^{n+1} = 0.5\left(R_{i-1}^{n+1} + R_D^{n+1}\right)$, «опустим» со скоростью $U_\beta^{n+1} = 0.5\left(U_{i-1}^{n+1} + U_+^{n+1}\right)$ траекторию на n слой и получим точку L: $R_L = R_\beta^{n+1} - \tau U_\beta^{n+1}$. Зная распределение величин за фронтом на момент t^n, рассчитаем величины в точке L. Теперь β-интервал на момент времени t^{n+1} можно рассчитать как регулярный. Заметим, что подобные операции проводятся потому, что масса β-интервала за шаг по времени изменилась, а, следовательно, середина β-интервала на моменты времени t^n и t^{n+1} не принадлежат одной траектории. По этой причине нельзя использовать Лагранжев метод напрямую.

Теперь можно говорить, что особый интервал на момент времени t^{n+1} рассчитан полностью.

3. ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ РАСЧЕТА ВЕЛИЧИН В ИНТЕРВАЛЕ ЗА ФРОНТОМ

В процессе счета сетка особенностей перемещается относительно регулярной сетки. При этом возникаю ситуации, когда разрыв переходит через границу регулярного интервала. В таком случае на момент t^n масса в интервале за фронтом равна нулю и применение подхода, описанного выше, приведет к тому, что точка L будет лежать на траектории фронта ударной волны. На практике это приводит к некорректному учету возмущений, «пришедших» из области за фронтом, и, как следствие, к немонотонностям за фронтом. Решить данную проблему можно путем измельчения шага по времени, что негативно отразится на расчете всей системы. В рамках рассматриваемого метода был разработан алгоритм расчета величин в интервале за фронтом при переходе разрыва через границу регулярного интервала.

Временно исключим из рассмотрения точку (i–1). Тогда интервал $\left(R_{i-2}^{n+1}, R_D^{n+1}\right)$ будет являться интервалом за фронтом в момент t^{n+1}. Обозначим величины в нем индексом K. Таким образом, сводим ситуацию к расчету величин в интервале за фронтом в общем случае и рассчитываем его.

Для «возврата» в рассмотрение точки (i-1) итерационно найдем такое значение R_{i-1}^{n+1}, при котором плотность ρ_β^{n+1} удовлетворяет условию сохранения массы ΔM в β-интервале, а с другой стороны удовлетворяет предположению линейности распределения плотности в области $\left(R_K, R_D^{n+1}\right)$. Пересчитаем скорость $U_{i-1}^{n+1} = \dfrac{R_{i-1}^{n+1} - R_D^n}{\tau}$ и ускорение $\left(\dfrac{dU}{dt}\right)_{i-1}^{n+1} = \dfrac{U_{i-1}^{n+1} - U_+^n}{\tau}$. Энергию E_β^{n+1} вычислим линейной интерполяцией на (n+1) слое между «плюс» величинами и величинами в точке K. Из уравнения состояния определяем необходимые ТД величины. Интервал $\left(R_{i-2}^{n+1}, R_{i-1}^{n+1}\right)$ рассчитывается как регулярный.

Применение данного подхода позволяет корректно учитывать возмущения, догоняющие фронт, и, тем самым, повысить точность и монотонность профилей величин за фронтом.

4. ТЕСТОВЫЕ РАСЧЕТЫ

Задача о движении ударной волны по линейному профилю плотности. Задана область $[0,1]$. На левой границе давление $P_L = 1.5$, на правой границе и в области U = 0. Количество расчетных точек равно 10. В области: энергия E = 0, распределение плотности $\rho(R) = 1.7 - 0.4R$. Вещество – идеальный газ, γ=5/3. Симметрия плоская.

На левой границе системы после распада произвольного разрыва образуется ударная волна, которая распространяется вправо. До прихода ударной волны профиль плотности перед фронтом не меняется, т.к. давление в области равно нулю. На рисунках 3 и 4 представлены зависимости плотности перед фронтом и за фронтом ударной волны от времени, полученные с помощью метода [3] и предлагаемого метода, а также аналитическое решение (начальное распределение). Из рисунков 3 и 4 видно, что использование предлагаемого метода позволило повысить монотонность и точность расчета термодинамических величин и скорости перед и за фронтом ударной волны.

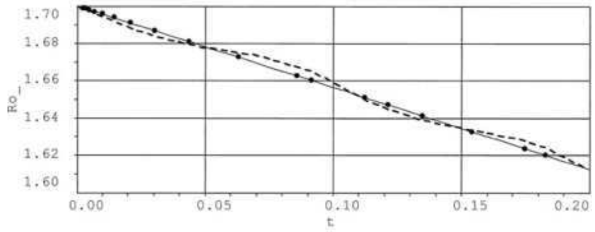

Рис. 3. Зависимости плотности перед фронтом от времени. Метод [3] (---), данная работа (—), точное решение (•)

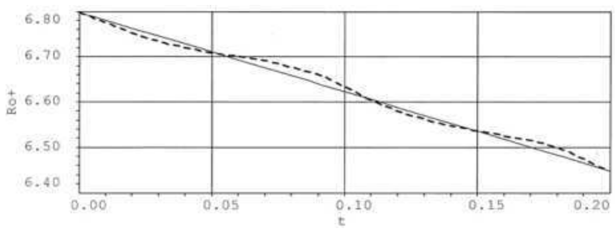

Рис. 4. Зависимости плотности за фронтом от времени. Метод [3] (---), данная работа (—)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемые способы модификации неоднородного разностного метода В.Ф. Куропатенко [3] повысили точность и монотонность расчета выделенных ударных волн. Идеология и порядок расчета величин остались прежними, изменились методы их определения. Авторами показана принципиальная возможность использования элементов метода характеристик внутри разностного метода. Данный подход применительно к методу [3] показал свою работоспособность и эффективность. Для любого другого разностного метода элементы метода характеристик можно использовать в качестве интерполяции для определения величин в любой точке пространства и времени. Преимуществом такой интерполяции является учет особенностей уравнения состояния и изменения течения во времени.

Литература

1. Жуков А.И. //Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1960.

2. Хоскин Н.Э. Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 264-292.

3. Куропатенко В.Ф., Коваленко Г.В., Кузнецова В.И. и др. // ВАНТ. Серия: Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 2. С. 9-17.