10. Кривулин Н.К. Вычисление средней скорости роста вектора состояний стохастической системы с синхронизацией событий // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. № 1. С. 109-116.

11. Krivulin N. Evaluation of the mean cycle time in stochastic discrete event dynamic systems // Proc. 6th Intern. Conf. on Queueing Theory and Network Applications. New York, NY, USA : ACM, 2011. P. 93-100.

12. Кривулин Н.К., Нев О.А. Асимптотические свойства вектора состояний обобщенной линейной стохастической системы с симметричной матрицей // Стохастическая оптимизация в информатике. 2011. Т. 7. С. 232-239.

13. Krivulin N. Evaluation of the Lyapunov exponent for stochastic dynamical systems with event synchronization // Recent Researches in Circuits, Systems, Multimedia and Automatic Control. WSEAS Press, 2012. April. Vol. 1 of Recent Advances in Electrical Engineering Series. P. 152-157.

14. Кривулин Н.К., Нев О.А. Исследование асимптотических характеристик стохастической динамической системы с синхронизацией событий // Модели и методы тропической математики в прикладных задачах экономики и управления. Сб. науч. статей / Под ред. Н. К. Кривулина. СПб.: ВВМ, 2013. С. 59-73.

Публикация подготовлена в рамках поддержанного РГНФ научного проекта №13-02-00338.

MODELING AND CALCULATION OF THE AVERAGE CYCLE TIME OF AN INFORMATION RETRIEVAL SYSTEM

N.K. Krivulin, doctor of physical and mathematical science, professor
Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg (Russia), nkk@math.spbu.ru
O.A. Nev, postgraduate
Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg (Russia), nevolga@gmail.com

УДК 536.71

УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА В ОБЛАСТИ УДАРНЫХ СЖАТИЙ И ТЕПЛОВЫХ РАСШИРЕНИЙ

В.Ф. Куропатенко, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник
ФГУП РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина, Снежинск (Россия), v.f.kuropatenko@vniitf.ru
С.Ю. Филатов, научный сотрудник
ФГУП РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина, Снежинск (Россия), phil_1@mail.ru

1. Введение. В литературе описано большое количество уравнений состояния веществ (УРС) от очень простых до очень сложных [1] – [3]. В математических экспериментах по изучению поведения сплошных сред под действием динамических нагрузок, которые проводятся на электронных вычислительных машинах (ЭВМ), затраты на УРС составляют до 80 % всех затрат времени ЭВМ даже в случае простых моделей (например, уравнения газодинамики с фазовыми переходами). В сложных моделях многокомпонентных сред с химическими реакциями и фазовыми переходами в процессе расчета число компонентов может изменяться и достигать нескольких десятков, а то и сотен. В таких моделях затраты на расчет характеристик смеси по заданным плотностям и энергиям компонентов столь велики, что даже на современных ЭВМ с быстродействием 10^{12} операций в секунду расчет одной задачи растягивается на длительное время. Малопараметрический УРС призван существенно сократить время моделирования на ЭВМ сложных физических (химических, механических) процессов.

2. Уравнения на ударной волне. Законы сохранения массы, импульса и энергии на поверхности сильного разрыва (ударной волны) в случае идеальной среды (с равным нулю девиатором тензора напряжений и без теплопроводности) имеют вид

$$\rho(D-U)=\rho_0(D-U_0), \tag{1}$$

$$\rho\cdot(D-U)\cdot U-P=\rho_0(D-U_0)\cdot U_0-P_0, \tag{2}$$

$$\rho(D-U)\cdot(E+0.5U^2)-P\cdot U=\rho_0(D-U_0)\cdot(E_0+0.5U_0^2)-P_0U_0. \tag{3}$$

Величины ρ_0 – плотность, U_0 – массовая скорость, P_0 – давление, E_0 – удельная внутренняя энергия в уравнениях (1) – (3) описывают состояние вещества перед разрывом. Величины без индекса характеризуют состояние за разрывом, D – скорость ударной волны. Не умаляя общности будем рассматривать ударную волну в покоящемся веществе. Уравнение состояния в [1] рассматривалось в предположении, что P_0 и E_0 пренебрежимо малы по сравнению с P и E. При $P_0=0$, $E_0=0$ и $U_0=0$, уравнения (1) – (3) принимают вид

$$\rho\cdot(D-U)-\rho_0 D=0,\quad \rho_0 DU=P, \tag{4}$$

$$E=\frac{1}{2}DU\cdot\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right), \tag{5}$$

Система трех уравнений (4), (5) содержит пять величин P, ρ, E, U, D. Таким образом, если экспериментально измерить любые две из них, то из (4), (5) находятся значения остальных, т.е. полностью определяется точка на ударной адиабате. Более полувека назад было установлено, что зависимость между экспериментально измеренными D и U хорошо описывается линейным соотношением

$$D=C_0+b\cdot U. \tag{6}$$

В справочнике [2] собрана богатейшая информация по $D(U)$ соотношениям на основе большого количества обработанных экспериментальных данных.

Если в качестве независимых термодинамических переменных взяты ρ и E, то P определяется калорическим уравнением состояния (УРС) вида $P=P(\rho,E)$. В [3], [4] рассмотрены современные достаточно сложные и трудоемкие УРС. В то же время для экспресс-расчетов достаточно использовать простые УРС.

В [1] рассмотрено уравнение состояния вида

$$P = P_X(\rho) + P_T(\rho, S), \qquad E = E_X(\rho) + E_T(\rho, S), \tag{7}$$

где

$$P_X = \frac{\rho_0 C_0^2}{n}\left(x^{-n} - 1\right), \qquad P_T = \rho_0 C_0^2 \cdot f(S) \cdot x^{-\gamma}, \tag{8}$$

$$E_X = \frac{C_0^2}{n-1}\left(\frac{x^{1-n}}{n} + \frac{x(n-1)}{n} - 1\right), \qquad E_T = \frac{C_0^2 \cdot f(S)}{\gamma - 1} x^{1-\gamma}. \tag{9}$$

$x = \rho_0 / \rho$, C_0 – скорость звука перед ударной волной при $P = P_0$, $\rho = \rho_0$, S – энтропия, $n = const$, $\gamma = const$.

Из (8) и (9) следуют зависимости $P_X(E_X, x)$ и $P_T(E_T, x)$

$$P_X = \frac{(n-1)\rho_0 E_X}{x} + \rho_0 C_0^2\left(\frac{1-x}{x}\right), \qquad P_T = \frac{(\gamma - 1)\rho_0 E_T}{x}, \tag{10}$$

Подставив (10) в (7), получим УРС в виде

$$P = (\gamma - 1)\rho_0 E x^{-1} + \rho_0 C_0^2 \varphi(x), \tag{11}$$

где $\varphi(x) = \dfrac{n-\gamma}{(n-1)n} x^{-n} + \dfrac{\gamma - 1}{(n-1)x} - \dfrac{\gamma}{n}$.

В случае $\gamma = n$ уравнение (11) называется «уравнением с согласованными γ и n» [1]. Оно имеет вид

$$P = (n-1)\rho_0 E x^{-1} + \rho_0 C_0^2\left(x^{-1} - 1\right). \tag{12}$$

В этом уравнении ρ_0, C_0 и n – постоянные величины.

Рассмотрим, при каких условиях уравнения (4), (5), (12) согласуются с линейной зависимостью $D(U)$. Исключив в (4), (5), (12) P, E и x, получим зависимость D от U

$$D = \frac{n+1}{4} U + \sqrt{C_0^2 + \left(\frac{n+1}{4} U\right)^2}. \tag{13}$$

Из сравнения (13) с (6) видно, что эти зависимости различаются. И лишь в области $\dfrac{n+1}{4} U << C_0$ можно говорить об их близости.

Поскольку предположение о постоянстве n в УРС (12) порождает нелинейную зависимость $D(U)$ (13), которая не согласуется с линейной зависимостью $D(U)$ (6), поступим наоборот. За основу возьмем линейную зависимость $D(U)$ (6). Из (4) – (6) выразим P и E через C_0 и b, и подставим полученные выражения в (11). В результате получим уравнение

$$n = 2b \cdot \left(2 - b \cdot (1 - x)\right) - 1, \tag{14}$$

которое означает, что вдоль ударной адиабаты n не может быть постоянной величиной.

3. Уравнение состояния. Будем считать, что n зависит от x, и поведение вещества вместо УРС (12) будем описывать уравнением

$$P = (n(x) - 1) \cdot \rho_{0K} x^{-1} E + \rho_{0K} C_{0k}^2 \cdot \varphi(x), \tag{15}$$

где ρ_{0K}, C_{0K} – плотность и скорость звука в точке $P = 0$, $T = 0$, $x = 1$.

УРС типа (15), в котором величина n зависит от x, было предложено и использовалось в [5] – [7]. Величина n, определяемая уравнением (14), линейно зависит от x в том диапазоне D и U, в котором справедлива зависимость $D(U)$ (6). Зависимость $n(x)$ (14) следует из (4), (5) и (15) и называется далее экспериментальной

Из [2], [3] следует, что функция $n(x)$ должна иметь максимум в окрестности $x \approx 1$, т.е., если при $x = 0$ $n = n_0$, то должно быть $n_M > n_0$. Остановимся на простой функции

$$n(x) = n_0 + (n_m - n_0)\frac{ax^2}{ax^2 + \left(x^2 - x_m^2\right)^2}, \tag{16}$$

где $a = \dfrac{16x_m^2}{4 - (n_m - n_0)^2}$. При $x = 0$ и $x = \infty$ $n(x) = n_0$, при $x = x_M$ $n(x) = n_m$.

При $x = 0$, $x = \infty$ и $x = x_m$ производная $n(x)$ обращается в ноль

$$\frac{dn}{dx} = \frac{(n_\mathrm{m} - n_0)\cdot 2ax^2\left(x_m^2 - x^2\right)}{\left(ax^2 + \left(x^2 - x_m^2\right)^2\right)^2} \tag{17}$$

При бесконечно большом сжатии $x \approx 0$ и при бесконечно большом разрежении вещество можно с большой долей достоверности считать газом с $\gamma = n_0$. Поскольку область применимости малопараметрического УРС ограничена конечным сжатием, то значение n_0, как и значения n_m, x_m, будем подбирать из условия наилучшего описания экспериментальных данных.

Возьмем функцию $\varphi(x)$ в (15) в виде, максимально близком к (12)

$$\varphi(x) = \frac{1 - x}{x^{n0+1}}, \tag{18}$$

Для определения температуры и теплоемкости разделим давление и энергию на холодные и тепловые составляющие.

$$P = P_X(x) + P_T(x,T), \qquad E = E_X(x) + E_T(x,T). \tag{19}$$

Зависимость $E_T(x,T)$ возьмем в соответствии с [9] в виде

$$E_T = \frac{AT^2}{\theta(x) + T}, \tag{20}$$

где A – индивидуальная характеристика вещества, для твердого тела близкая к $3R/\mu$; R – универсальная газовая постоянная; μ – молекулярная масса. Теплоемкость при постоянном x получается дифференцированием выражения (20)

$$C_V = \frac{AT\cdot(2\theta(x) + T)}{(\theta(x) + T)^2}. \tag{21}$$

Тепловое давление в соответствии с [9] имеет вид

$$P_T = -\frac{A}{\theta(x)}\cdot\frac{d\theta(x)}{dx}\cdot\frac{T^2}{\theta(x) + T}. \tag{22}$$

Поскольку справедливо уравнение

$$P_T = \left(n(x)-1\right)\frac{\rho_{0K}}{x} E_T \ , \tag{23}$$

то характеристическая функция $\theta(x)$ оказывается связанной с $n(x)$ уравнением

$$\frac{d\ln\theta(x)}{dx} = -\frac{n(x)-1}{x} \ . \tag{24}$$

Из (24) и (16) следует зависимость $\theta(x)$

$$\theta(x) = \theta_0 \cdot x^{1-n_0} \cdot \left(\frac{x^2 + B\cdot x_m^2}{x^2 + \dfrac{1}{B}\cdot x_m^2} \right), \tag{25}$$

где $B = \dfrac{2+\left(n_m - n_0\right)}{2-\left(n_m - n_0\right)}$.

Потребуем, чтобы изобара $P = 10^{-4}$ ГПа проходила через точку, характеризующую нормальное состояние ($P = 10^{-4}$ ГПа, T = 293 °K, $\rho = \rho_0$, $C_P = C_{P0}$), и через точку плавления при $P = 10^{-4}$ ГПа ($T = T_{пл}$, $C_P = C_{Pпл}$, $\rho = \rho_{пл}$). Таким образом, чтобы описать зависимость $C_P(T)$ при $P = const$ возникает необходимость выразить C_P через T и x. Для этого воспользуемся уравнением [9]

$$C_P = C_V - \frac{T\cdot\left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_X^2}{\rho_{0K}\cdot\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}\right)_T} . \tag{26}$$

Производная $\left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_X$ получается дифференцированием (23) с учетом того, что $\left(\dfrac{\partial P_X}{\partial T}\right)_X = 0$, в виде

$$\left(\frac{\partial P_T}{\partial T}\right)_X = \frac{\left(n(x)-1\right)\cdot\rho_{0K}}{x}\cdot C_V \ . \tag{27}$$

Поскольку справедливо (19), то

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_T = \frac{dP_X}{dx} + \left(\frac{\partial P_T}{\partial x}\right)_T . \tag{28}$$

Совокупность уравнений (15) – (18), (25) определяет уравнение состояния вещества, которое содержит 7 параметров: ρ_{0K}, C_{0K}, A, n_0, n_m, x_m и θ_0. Их численные значения определяются так, чтобы наилучшим образом описать поведение ударной адиабаты, нормального состояния вещества $P_0 = 10^{-4}$ ГПа, $T_0 = 293$ °K, $\rho_0 = \rho(P_0, T_0)$, $C_{P0} = C_P(\rho_0, T_0)$ и в точке плавления $P_{пл} = 10^{-4}$ ГПа, $T_1 = T_{пл}$, $\rho_1 = \rho_{пл}(\mathrm{T}_{пл}, \mathrm{P}_0)$, $C_{P1} = C_P(T_{пл}, \mathrm{P}_0)$.

4. Результаты расчетов. Расчеты выполнены для нескольких простых веществ – металлов. Подбор параметров уравнения состояния выполнен при помощи оригинальной версии симплекс метода. В качестве целевой функции выбрана сумма квадратичных разностей между расчетными и экспериментальными значениями давлений и $n(x)$ на ударной адиабате, теплового расширения вещества и теплоемкости при постоянном давлении. Результаты расчетов приведены в таблице 1. Для рассмотренных материалов получено удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными.

Таблица 1 - Параметры УРС пяти металлов

Величины	Вещества				
	Al (алюминий)	Au (золото)	Mg (магний)	Pb (свинец)	Cu (медь)
n_0	1.62	1.515	1.291	1.719	1.49
n_m	1.933	2.564	1.944	2.027	2.997
x_m	1.908	2.485	2.613	1.66	2.484
ρ_{0K}, г/см^3	2.908	19.668	1.833	11.501	9.014
C_{0K}, км/с	5.642	3.402	4.724	2.102	3.904
$A \cdot 10^6$, кДж/г	920.39	140.65	1106.14	127.6	394.94
θ_0, К	15.012	8.004	43.141	39.198	1.466

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Забабахин Е.И. Некоторые вопросы газодинамики взрыва. Снежинск.: РФЯЦ-ВНИИФ, 1977. 203 с.

2. Трунин Р.Ф., Гударенко Л.Ф., Жерноклетов М.В., Симаков Г.В.. Экспериментальные данные по ударно-волновому сжатию и адиабатическому расширению веществ. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2001, 439 с.

3. Жарков В.И., Калинин В.А. Уравнение состояния твердых тел при высоких давлениях и температурах. М.: Наука, 1968. 310 с.

4. Куропатенко В.Ф. Уравнение состояния компонентов низкотемпературной плазмы // Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Часть 2. Москва.: Янус-К. серия Б, Том VII, 2008. С. 436-450.

5. Куропатенко В.Ф. Уравнение состояния продуктов детонации конденсированных. // Численные методы механики сплошных сред. 1977, Т. 8. № 6. с. 68-71.

6. Куропатенко В.Ф. Уравнение состояния продуктов детонации плотных ВВ. // ФГВ. 1989. № 6. С. 112-117.

7. Куропатенко В.Ф. Моделирование отклика веществ на динамическое воздействие // Химическая физика. 2002. Т. 21. № 10. С 46-54.

8. Самсонов Г.В. и др. Физико-химические свойства элементов. Справочник. Киев.: Наукова думка, 1965. 808 с.

9. Куропатенко В.Ф. Модели механики сплошных сред. Челябинск.: Челябинский государственный университет, 2007. 302 с.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №13-01-00072.

EQUATION OF STATE IN THE REGION OF SHOCK COMPRESSIONS AND THERMAL EXPANSIONS

V.F. Kuropatenko, doctor of science in mathematics and physics, professor, principal research officer
Russian Federal Nuclear Center - Zababakhin All-Russia Research Institute of Technical Physics, Snezhinsk (Russia), v.f.kuropatenko@vniitf.ru
S.Yu. Filatov, research officer
Russian Federal Nuclear Center - Zababakhin All-Russia Research Institute of Technical Physics, Snezhinsk (Russia), phil_1@mail.ru

УДК 621.318.122.001.41

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДА ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА

М.В. Ланкин, кандидат технических наук, доцент кафедры информационных и измерительных систем и технологий
ФБГОУ ВПО «Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М.И.Платова», Новочеркасск (Россия)
А.М. Ланкин, инженер Центра ресурсоэнергосбережения
ФБГОУ ВПО «Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М.И.Платова», Новочеркасск (Россия), lankinjohn@rambler.ru

Важной диагностической характеристикой электротехнического устройств (ЭУ) является его вебер-амперная характеристика (ВАХ). На наш взгляд для решения задачи получения ВАХ ЭУ может быть использован метод натурно-модельного эксперимента (НМЭ). Известны положительные примеры применения НМЭ в решении задач контроля и прогнозирования магнитных свойств изделий из ферромагнитных материалов [1].Нами предложена разновидность метода НМЭ, базирующаяся на измерении параметров формы тока и напряжения ЭУ. В данном методе определение ВАХ основано на решении обратной задачи метода гармонического баланса (МГБ) [2,3].

Решение прямой задачи МГБ[4]позволяет определить форму тока $i(t)$, протекающего через элемент цепи с нелинейной индуктивностью (НИ) заданной в виде ряда Фурье:

$$i(t)=\sum_{m=0}^{n} I_{(2m+1)} \sin\left(\left(2m+1\right)\omega t\right), \quad (1)$$

где $I_{(2m+1)}$ – амплитуда $(2m+1)$ - ой гармоники тока, ω – угловая частота,

если известна форма напряжения приложенного к НИ:

$$U(t)=U_a \sin(\omega t), \quad (2)$$

где U_a – амплитуда приложенного к нелинейной индуктивности напряжения;

а также ее ВАХ, заданная аппроксимирующим выражением: