

## О ПРЕДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА

**В.Ф. Куропатенко, Г.В. Байдин, И.В. Лупанов**

Бурное развитие вычислительной техники облегчило применение математического моделирования во многих областях человеческой деятельности. В настоящее время математическим моделированием занимается огромное количество специалистов, использующих уже известные и хорошо обоснованные численные методы. При обосновании ряда методов были доказаны теоремы эквивалентности [1–4] о связи сходимости численного решения к точному с аппроксимацией и устойчивостью, а также теорема [5] об условиях монотонности численного решения. Следует, однако, помнить, что все эти теоремы были доказаны для линейных или линеаризованных уравнений на равномерных сетках. В случае же нелинейных уравнений и при применении неоднородных (адаптивных) сеток погрешность аппроксимации может оказаться несходящейся и предельное решение при сколь угодно большом увеличении числа точек сетки  $N$  может отличаться от точного решения. На возникновение несходящейся аппроксимации уравнения теплопроводности разностным уравнением на неравномерной сетке было обращено внимание в [1, 2]. В механике жидкости и газа нарушение равномерности сетки приводит к образованию «энтропийных» следов [6, 7]. В работе рассматривается проблема различия точного решения и предельного при  $N \rightarrow \infty$  решения нелинейного уравнения теплопроводности и уравнения электростатики в случае, когда соседние ячейки сетки сильно различаются.

*Ключевые слова:* уравнение Лапласа, адаптивно-встраиваемая сетка, аппроксимация, сходимость.

### Введение

Погрешность аппроксимации дифференциальных уравнений разностными в самом общем случае имеет вид бесконечного ряда

$$\omega(h) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}} h^k.$$

Ограничение погрешности аппроксимации  $\omega(h) \leq M$  приводит к тому, что в областях с большими значениями производных приходится уменьшать шаги  $h$  сетки. И наоборот, там, где производные малы, можно увеличивать шаги сетки с целью сокращения количества вычислительных операций. Таким образом, естественно возникает необходимость в применении неоднородной (адаптивной) сетки, в которой соседние сеточные ячейки различаются. Есть также и другая причина применения адаптивных сеток – наличие разномасштабных элементов в моделируемой конструкции или процессе.

В соответствии с [7] будем обозначать дифференциальные операторы, действующие на функцию  $f$ , через  $Lf$ , а разностные операторы – через  $\Lambda f$ . В [8] показано, что разностные уравнения вида

$$\Lambda f = 0 \tag{1}$$

после разложения сеточных функций в ряды Тейлора могут быть представлены в виде

$$\Lambda f = Lf + \omega(h) = 0, \tag{2}$$

где  $h$  – шаг сетки,  $\omega(h)$  – погрешность аппроксимации,  $Lf$  – члены, не содержащие шагов сетки и на равномерной сетке совпадающие с аппроксимируемым дифференциальным уравнением

$$Lf = 0. \tag{3}$$

Опыт показывает, что на неравномерной сетке вместо оператора  $Lf$  в (2) возникает оператор  $L_1 f \neq Lf$ . Иными словами, разностный оператор  $\Lambda f$  аппроксимирует не исходный дифференци-

альный оператор  $Lf$ , а некоторый другой оператор  $L_1f$ . Естественно, что эти операторы имеют разные решения. Решение уравнения  $Lf = 0$  является точным, а решение уравнения  $L_1f = 0$  является предельным при  $h \rightarrow 0$ . Итак, предельное решение, получаемое на неравномерной сетке, может отличаться от точного решения, не зависящего от сетки. Этот эффект особенно ярко проявляется в разностных уравнениях, содержащих разностный оператор Лапласа. К таким уравнениям, например, относятся:

1. Уравнение теплопроводности

$$LT = C_v \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla(k\nabla T) = 0, \tag{4}$$

где  $T$  – температура,  $C_v$  – теплоемкость,  $k$  – коэффициент теплопроводности.

2. Уравнение электростатики

$$L\phi = \Delta\phi = 0, \tag{5}$$

где  $\phi$  – потенциал электрического поля.

3. Уравнение движения вязкой жидкости

$$\rho \frac{d\bar{U}}{dt} + \nabla P - \nabla(\mu\nabla\bar{U}) = 0, \tag{6}$$

где  $\bar{U}$  – скорость,  $\rho$  – плотность,  $P$  – давление,  $\mu$  – коэффициент вязкости. На примере уравнения теплопроводности и уравнения электростатики оценим погрешности, возникающие из-за применения неоднородных сеток и различия между точными и предельными при  $h \rightarrow 0$  решениями.

### 1. Разностное уравнение теплопроводности на неравномерной сетке

Рассмотрим для простоты краевую задачу для одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right), \tag{7}$$

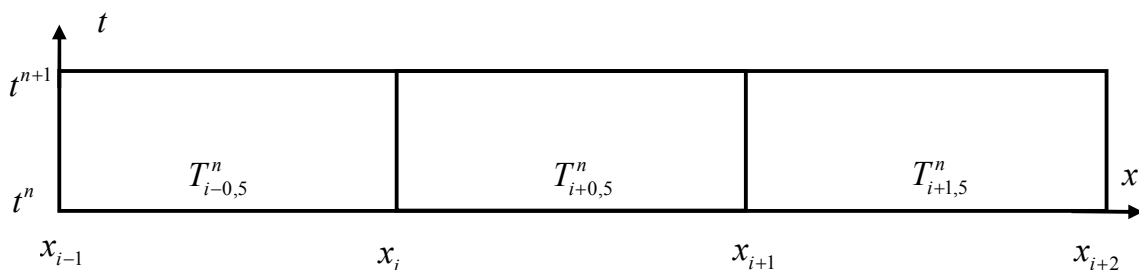
когда коэффициент теплопроводности является степенной функцией от температуры  $k = k_0 T^\alpha$ . Это так называемая задача о прогреве среды, имеющая точное (автомодельное) решение [9]. Начальная температура в области полагается нулевой, а зависимость температуры от времени на левой границе при  $x = 0$  задается выражением

$$T(0, t) = \left( \frac{\alpha D^2 t}{k_0} \right)^{1/\alpha} \quad \text{при } t > 0. \tag{8}$$

Решением задачи является функция, претерпевающая разрыв на фронте бегущей температурной волны при  $x = Dt$

$$T(x, t) = \begin{cases} \left[ \frac{\alpha D}{k_0} (Dt - x) \right]^{1/\alpha} & \text{при } 0 \leq x \leq Dt, \\ 0 & \text{при } x > Dt. \end{cases} \tag{9}$$

Перейдем к рассмотрению разностного уравнения, аппроксимирующего уравнение (7) на неравномерной сетке. Разностный шаблон изображен на рисунке.



Разностный шаблон

Температуры заданы в серединах сеточных ячеек. Умножив (7) на  $dxdt$ , проинтегрировав по ячейке ( $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ ,  $t^n \leq t \leq t^{n+1}$ ) и применив теорему о среднем значении, получим разностное уравнение

$$\Delta T = \frac{T_{i+0,5}^{n+1} - T_{i+0,5}^n}{\tau} - \frac{k_0}{h_{i+0,5}} \left( \frac{(T_{i+1}^*)^\alpha (T_{i+1,5}^* - T_{i+0,5}^*)}{0,5(h_{i+1,5} + h_{i+0,5})} - \frac{(T_i^*)^\alpha (T_{i+0,5}^* - T_{i-0,5}^*)}{0,5(h_{i+0,5} + h_{i-0,5})} \right) = 0. \quad (10)$$

Ограничимся рассмотрением явной разностной схемы, в которой  $t^* = t^n$  и вспомогательные величины берутся в момент времени  $t^n$ . Значения температуры на вертикальных гранях сеточной ячейки определяются линейной интерполяцией

$$T_i^n = \frac{h_{i+0,5}T_{i+1,5}^n + h_{i+1,5}T_{i+0,5}^n}{h_{i+0,5} + h_{i+1,5}}, \quad (11)$$

$$T_{i+1}^n = \frac{h_{i+0,5}T_{i-0,5}^n + h_{i-0,5}T_{i+0,5}^n}{h_{i+0,5} + h_{i-0,5}}. \quad (12)$$

Представив все сеточные значения  $T$  в виде рядов Тэйлора в точке  $(t^n, x_{i+0,5})$ , запишем (10) в виде

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{h_{i+1,5} + 2h_{i+0,5} + h_{i-0,5}}{4h_{i+0,5}} \frac{\partial}{\partial x} \left( k_0 T^\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \omega(\tau, h) = 0. \quad (13)$$

На неравномерной сетке отношения  $h_{i+1,5}$  и  $h_{i-0,5}$  к  $h_{i+0,5}$  остаются постоянными при измельчении сетки. Если сетка равномерная ( $h_{i-0,5} = h_{i+0,5} = h_{i+1,5}$ ), то коэффициент перед производной по  $x$

$$Z = (h_{i+1,5} + 2h_{i+0,5} + h_{i-0,5}) / 4h_{i+0,5} \quad (14)$$

равен единице. В этом случае  $\omega \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$  и  $\Delta T \rightarrow LT = 0$ . Если же сетка неравномерная, то  $Z \neq 1$  и  $\Delta T = L_1 T = 0$ . При этом уравнения  $L_1 T = 0$  и  $LT = 0$  различны. Решение уравнения  $LT = 0$  является точным решением задачи (9). Обозначим

$$k_1 = k_0 Z. \quad (15)$$

В этом случае решение уравнения (7) (предельное решение) с граничным условием (8) имеет вид

$$T(x, t) = \begin{cases} \left[ \frac{\alpha D_1}{k_1} (D_1 t - x) \right]^{1/\alpha} & \text{при } 0 \leq x \leq D_1 t, \\ 0 & \text{при } x > D_1 t. \end{cases} \quad (16)$$

Значения  $D_1$ ,  $k_1$  и  $D_0$ ,  $k_0$  связаны соотношением

$$D_0^2 / k_0 = D_1^2 / k_1. \quad (17)$$

Решения (9) и (16) на равномерной сетке (при  $Z = 1$ ) совпадают, на неравномерной сетке (при  $Z \neq 1$ ) различаются. Оценим эти различия.

Из (15) и (17) следует, что

$$D_1 = D_0 \sqrt{Z}. \quad (18)$$

Для случая  $Z > 1$  слабый разрыв в предельном решении находится в точке

$$x_1 = D_0 t \sqrt{Z}. \quad (19)$$

Следовательно, ширина участка  $D_0 t \leq x \leq D_1 t$  равна

$$\Delta x = D_0 t (\sqrt{Z} - 1). \quad (20)$$

Погрешность предельного решения на этом участке составляет 100 %, так как в точном решении на этом участке  $T = 0$ , а в приближенном  $T > 0$ .

Для интегральной оценки точности введем величину

$$J = \int T(x) dx. \quad (21)$$

Интеграл от точного решения равен

$$J = \int_0^{D_0 x} T(x) dx = \left( \frac{\alpha D_0}{k_0} \right)^{1/\alpha} \frac{\alpha}{1 + \alpha} (D_0 t)^{1 + \alpha/\alpha}. \quad (22)$$

Интеграл от предельного решения равен

$$J_1 = \int_0^{D_1 x} T_1(x) dx = \left( \frac{\alpha D_0}{k_0} \right)^{1/\alpha} \frac{\alpha}{1 + \alpha} (D_0 t)^{1 + \alpha/\alpha} Z^{1/2}. \quad (23)$$

Таким образом относительная погрешность зависит от  $Z$

$$\Delta J/J = \sqrt{Z} - 1. \quad (24)$$

В случае сетки, заданной по геометрической прогрессии с показателем 2,  $Z = 9/8$  и относительная погрешность  $\Delta J/J = 0,06$ .

## 2. Расчет электрического поля

В электростатике уравнения Максвелла для электрического поля принимают вид уравнений Пуассона или Гельмгольца [10]. И в том, и в другом уравнении центральное место занимает оператор Лапласа. Рассмотрим уравнение для напряженности электрического поля  $\varphi(r)$  в цилиндрической области  $1 \leq r \leq 2$ ,  $-\infty \leq z \leq \infty$

$$L\varphi = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0. \quad (25)$$

На границах этой области заданы  $\varphi = 0$  при  $r = 1$  и  $\varphi = 1$  при  $r = 2$ . Точное решение уравнения (25) имеет вид

$$\varphi = 1,4427 \ln r. \quad (26)$$

Рассмотрим теперь разностное уравнение, аппроксимирующее (25)

$$\Delta\varphi = \frac{1}{h_{i+0,5}} \left( r_{i+1} \frac{\varphi_{i+1,5} - \varphi_{i+0,5}}{0,5(h_{i+1,5} - h_{i+0,5})} - r_i \frac{\varphi_{i+0,5} - \varphi_{i-0,5}}{0,5(h_{i+0,5} - h_{i-0,5})} \right) = 0. \quad (27)$$

Значения  $r_i$  и  $r_{i+1}$  свяжем с серединой интервала  $i + 0,5$

$$r_{i+1} = r_{i+0,5} + 0,5h_{i+0,5}, \quad r_i = r_{i+0,5} - 0,5h_{i+0,5}. \quad (28)$$

Представив входящие в уравнение (27) значения  $\varphi$  в виде рядов Тэйлора и подставив их в (27), получим

$$\Delta\varphi = L_1\varphi + \omega(h) = 0. \quad (29)$$

При  $h \rightarrow 0$  уравнение (29) принимает вид предельного дифференциального уравнения

$$L_1\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + rZ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0, \quad (30)$$

решение которого имеет вид

$$\varphi = (r^{Z-1/Z} - 1) / (2^{Z-1/Z} - 1). \quad (31)$$

В случае, когда сетка задана по геометрической прогрессии со знаменателем 2, множитель  $Z = 9/8$ . В этом случае решение (31) таково

$$\varphi_1 = 12,4907 (r^{1/9} - 1). \quad (32)$$

Интегральное различие между точным и предельным решениями имеет вид

$$\Delta J/J = \left( \int_1^2 \varphi(r) r dr / \int_1^2 \varphi_1(r) r dr \right) - 1. \quad (33)$$

После нахождения интегралов, получим  $\Delta J/J = 0,01$ . Конечно, это малая относительная погрешность. Но не следует забывать, что она получена для конкретной сетки, когда соседние ячейки отличаются в два раза. В реальной действительности сетки могут быть очень разными и относительная погрешность может возрасти.

### **Заключение**

Проведено исследование влияния неравномерной сетки на различие между точным решением исходного дифференциального уравнения и точным решением предельного при  $N \rightarrow \infty$  уравнения, т. е. предельным решением. Проведенные расчеты и оценки свидетельствуют о том, что отличие предельного решения от точного конечно и эта разница зависит от степени неравномерности выбранной сетки.

### **Литература**

1. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 615 с.
2. Вычисления на квазиравномерных сетках / Н.Н. Калиткин, А.Б. Альшин, Е.А. Альшина, Б.В. Rogov. – М.: Физматлит, 2005.
3. Lax, P. Hyperbolic systems of conservation laws / P. Lax // *Communs Pure and Appl. Math.* – 1957. – No. 10. – P. 537–566.
4. Рихтмайер, Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон. – М.: Мир, 1972.
5. Годунов, С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики / С.К. Годунов // *Мат. сб.* – 1959. – № 47 (89). – С. 271–306.
6. Куропатенко, В.Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики / В.Ф. Куропатенко // *Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР.* – М., 1966. – Т. 74. – С. 107–137.
7. Яненко, Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их применение в газовой динамике / Н.Н. Яненко, Б.Л. Рождественский. – М.: Наука, 1978. – 687 с.
8. Куропатенко, В.Ф. Локальная консервативность разностных схем для уравнений газовой динамики / В.Ф. Куропатенко // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* – 1985. – Т. 25, № 8. – С. 1176–1188.
9. Самарский, А.А. Разностные схемы газовой динамики / А.А. Самарский, Ю.П. Попов. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
10. Вайнштейн, Л.А. Электромагнитные волны / Л.А. Вайнштейн. – М.: Радио и связь, 1988.

**Работа поддержана РФФИ. Грант №13-01-00072.**

**Куропатенко Валентин Федорович**, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры вычислительной механики сплошных сред, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск); главный научный сотрудник, РФЯЦ-ВНИИТФ (г. Снежинск); v.f.kuropatenko@rambler.ru.

**Байдин Григорий Васильевич**, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, РФЯЦ-ВНИИТФ (г. Снежинск); g.v.baidin@vniitf.ru.

**Лупанов Илья Викторович**, научный сотрудник, РФЯЦ-ВНИИТФ (г. Снежинск); bkmz\_2010@mail.ru.

## ON A SUPREME SOLUTIONS OF DIFFERENCE EQUATIONS ENCLOSING THE LAPLACE OPERATOR

**V.F. Kuropatenko**, South Ural State University, Chelyabinsk, RFNC VNIITF, Snezhinsk, Russian Federation, [v.f.kuropatenko@rambler.ru](mailto:v.f.kuropatenko@rambler.ru),  
**G.V. Baidin**, RFNC VNIITF, Snezhinsk, Russian Federation, [g.v.baidin@vniitf.ru](mailto:g.v.baidin@vniitf.ru),  
**I.V. Lupanov**, RFNC VNIITF, Snezhinsk, Russian Federation, [bkmz\\_2010@mail.ru](mailto:bkmz_2010@mail.ru)

The rapid IT development facilitated the math simulation application at various branches of human activity. In present, the huge amount of specialists are dealing with math simulations, that using well known and substantiated numerical algorithms. There were proved some equivalence theorems [1–4] about coupling of numerical solutions convergency with the approximation and stability. So was the theorem of the solution stability conditions [5]. One must remember, however, that all was proved under linearity equations and uniform meshes assumptions. While for nonlinear equations and nonuniform adaptive meshes the approximation errors may be nonconvergency and the supreme solution may differ from exact solution at unlimit growth of number mesh points  $N$ . The appearance of nonconvergency approximation for the equation of thermal conduction by finite-difference equation at nonuniform meshes was pointed early at [1, 2]. The violation of meshes uniforming leads to entropic trace appearing at liquid and gas mechanics [6, 7]. In the paper there is treating the problem of difference between exact and supreme solutions of nonlinear equation of thermal conduction or electrostatic equation in the case of strong difference between size of neighbour meshes cells.

*Keywords: Laplas equation, adaptive mesh refinement, approximation, convergency.*

### References

1. Samarski A.A. *Teoriya raznostnykh sistem* [Difference Scheme Theory]. Moscow, Nauka, 1977. 615 p.
2. Kalitkin N.N., Al'snin A.B., Al'snina E.A., Rogov B.V. *Vychislenia na kvaziravnomernykh setkakh* [The Calculations on Quaziregular Meshes]. Moscow, Fizmatlit, 2005.
3. Lax P. Hyperbolic Systems of Conservations Laws, 11. *Communs Pure and Appl. Math*, 1957, no. 10, pp. 537–566.
4. Richtmayer R., Morton K. *Raznostnye metody reshenia kraevykh zadach* [The Difference Methods of Boundary Tasks Solving]. Moscow, Mir, 1972.
5. Godunov S.K. The Difference Methods of Numerical Solving of Discontinuous Hydrodynamic Solutions [Raznostnyi metod chislennogo rascheta razryvnykh resheniy gidrodinamiki], *Matem. sb. [Math. Coll.]*, 1959, no. 47 (89), pp. 271–306.
6. Kuropatenko V.F. On Difference Methods for Hydrodynamic Equations [O raznostnykh metodakh dlya uravneniy gidrodinamiki]. *Trudy matem.instituta im.V.A. Steklova AN SSSR* [Works MIAN]. Moscow, 1966, Vol.74, pp. 107–137.
7. Yanenko N.N., Rozhdestvenski B.L. *Sistemy kvazilineynykh uravneniy i ikh primenenie v gazovoy dinamike* [The Systems of Quazilinear Equations and their Applications in Hydrodynamic]. Moscow, Nauka, 1978. 687 p.
8. Kuropatenko V.F. The local conservation of difference schemes for hydrodynamic equations [Localnaya konservativnost' raznostnykh skhem dlya uravneniu gazovoy dinamiki], *Zhurnal vychisl. Matem. i mat.fiziki [J. of CM and Mph.]*, 1985, Vol. 25, no. 8, pp. 1176–1188.
9. Samarski A.A., Popov Yu.P. *Raznostnye schemy gazovoy dinamiki* [Difference schemes of hydrodynamics]. Moscow, Nauka, 1975. 352 p.
10. Vainstain L.A. *Electromagnitnye volny* [Electromagnetic waves]. Moscow, Radio I Svyaz', 1988.

*Поступила в редакцию 26 марта 2013 г.*