

Федеральное агентство по образованию Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Челябинский государственный университет»

В.Ф. Куропатенко

**Модели механики
сплошных сред -**

Челябинск 2007

УДК 532.51+532.529+536.71+541.126

Куропатенко В.Ф.

Модели механики сплошных сред / Челябинск, Челяб. гос. ун-т, 2007.

ISBN 5-8920-4125-5

Излагаются модели механики сплошных сред (МСС), записываемые в виде системы законов сохранения – нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и уравнений состояния. Во всех моделях МСС выделяется адиабатическое ядро, образуемое законами сохранения для идеальной сжимаемой среды (уравнения Эйлера). Реальные свойства (вязкость, упругость, пластичность, теплопроводность, фазовые переходы и др.) описываются путем включения дополнительных членов в уравнения адиабатического ядра. Отдельные главы посвящены моделям деформаций и напряжений, теории ударных и детонационных волн, слабым, контактными и произвольным разрывам, установившимся течениям, теории размерности и подобия. Рассмотрены методы построения уравнений состояния твердых тел, жидкостей и газов и приводятся необходимые для этого сведения из термодинамики. В последней главе излагается современная модель многокомпонентной среды. Модели МСС ориентированы на их применение в математическом моделировании физических процессов в широком диапазоне изменения величин, когда твердые вещества могут претерпевать полиморфные переходы, разрушаться, плавиться, испаряться. Книга рассчитана на специалистов в области механики сплошных сред. Она будет полезна научным и инженерно-техническим работникам, занимающимся математическим моделированием динамических процессов в сплошных средах, студентам физических и математико-механических факультетов, специализирующимся в этой области.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 07-01-00-378.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Челябинского государственного университета

Научный редактор академик РАН Б.В. Литвинов

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор Ю.М. Ковалев,
доктор технических наук, профессор Н.Н. Тихонов.

Без объявл.

У5

ISBN 5-8920-4125-5



© Челябинский государственный
университет, 2007

Оглавление

Оглавление.....	3
Предисловие	7
Введение.....	12
Глава 1. Деформация и напряжение	17
§1. Изучаемая среда	17
§2. Тензор поворотов	19
§3. Тензор деформаций. Дисторсия	21
§4. Дилатация.....	21
§5. Уравнение неразрывности.....	23
§6. Условия совместности деформаций.....	24
§7. Силы и напряжения	26
§8. Главные напряжения.....	30
§9. Наибольшие касательные напряжения	35
§10. Шаровая часть и девиатор тензора напряжений.....	37
Глава 2. Законы сохранения	40
§1. Два метода изучения движений сплошной среды	40
§2. Закон сохранения массы.....	43
§3. Закон сохранения количества движения идеальной среды	44
§4. Закон сохранения энергии идеальной среды	45
§5. Законы сохранения в лагранжевых координатах	46
§6. Следствия законов сохранения идеальной среды.....	48
§7. Закон сохранения количества движения неидеальной среды	49
§8. Закон сохранения энергии неидеальной среды	51

§9. Законы сохранения идеальной среды для одномерных движений.....	53
§10. Элементы теории уравнений с частными производными	58
§11. Уравнения идеальной среды в характеристической форме	61
§12. Уравнения идеальной среды в случае малых возмущений	66
§13. Постановка задач механики сплошной среды	70
Глава 3. Термодинамические потенциалы и термодинамические уравнения	72
§1. Термодинамические потенциалы	72
§2. Дифференциальные уравнения термодинамики.....	75
§3. Термодинамические коэффициенты.....	79
§4. Термодинамическое равновесие.....	82
§5. Теплоемкость.....	85
§6. Внутренняя энергия	88
§7. Термодинамические неравенства.....	89
Глава 4. Уравнение состояния.....	92
§1. Общие требования	92
§2. Выбор независимых термодинамических переменных	96
§3. Идеальный газ	97
§4. Уравнение состояния реальных газов.....	105
§5. Другие формы уравнения состояния реальных газов	111
§6. Конденсированное вещество и его свойства.....	115
§7. Холодная энергия. Холодное давление	124
§8. Тепловая энергия и тепловое давление	129
§9. Теплоемкость ядер	130
§10. Тепловая энергия и тепловое давление ядер.....	136
§11. Тепловая энергия и тепловое давление электронов	139
§12. Уравнение состояния конденсированного вещества	142
Глава 5. Ударные волны. Слабые и контактные разрывы.....	146
§1. О возможности перехода непрерывного решения в разрывное	146

§2. Условия на сильных разрывах.....	149
§3. Ударная адиабата	153
§4. Ударные волны в идеальном газе.....	157
§5. Ударные волны в конденсированном веществе	162
§6. О взаимном расположении в плоскости x, t фронта ударной волны сжатия и характеристик	164
§7. Структура фронта ударной волны в вязком газе	166
§8. Условия на слабых разрывах	171
§9. Условия на контактных разрывах	173
§10. Произвольные разрывы	174
§11. Зависимость P от U для волны разрежения в идеальном газе.....	176
§12. Зависимость P от U для волны разрежения в конденсированном веществе	177
§13. Некоторые задачи о распаде произвольного разрыва.....	179
Глава 6. Установившиеся течения	186
§1. Уравнение Бернулли.....	186
§ 2. Зависимость давления от скорости в установившемся течении	189
§ 3. Ударная поляра.....	191
§ 4. Сверхзвуковой поток возле стенки	196
§ 5. Уравнения газовой динамики в характеристической форме для двумерного случая	199
§ 6. Инварианты.....	203
§ 7. Простые волны. Движение газа возле криволинейной поверхности	208
Глава 7. Элементы теории подобия	213
§1. Размерные и безразмерные величины	213
§2. Характеристики и определяющие параметры	216
§3. Физическое подобие и моделирование явлений.....	217
§ 4. Приведение некоторых уравнений к безразмерному виду	219

§5. Применение теории размерности к задаче о движущемся поршне.....	224
§6. Одномерные автомодельные движения	232
§7. Задача о точечном взрыве	235
Глава 8. Детонация и горение	244
§1. Взрывчатые вещества.....	244
§2. Гидродинамическая теория детонации.....	248
§3. Формулы для расчета параметров нормальной детонационной волны.....	255
§4. Структура фронта нормальной детонационной волны.....	258
§5. Гидродинамическая модель горения	263
§6. Детонация конденсированных ВВ	265
§7. Энергия детонатора и инициирование ВВ	268
§8. Движение продуктов взрыва после инициирования ВВ подвижным поршнем	275
§9. Уравнение состояния продуктов детонации плотных ВВ.....	278
Глава 9. Модели многокомпонентных сред.....	287
§1. Многокомпонентная среда.....	287
§2. Механика многоскоростных континуумов	289
§3. Парное взаимодействие компонентов	294
§4. Кластерное взаимодействие.....	295
§5. Уравнение для объемной концентрации	297
Рекомендованная литература.....	299

Предисловие

В течение почти двух столетий механика сплошных конденсированных сред (газодинамика и гидродинамика) развивалась исключительно на основе уравнений Л. Эйлера, написанных в 1755 г. для идеальной сжимаемой среды, в которой действует единственная сила – давление. Несмотря на существенную схематизацию и упрощение свойств реальных сред этот подход оказался очень плодотворным и до настоящего времени не потерял своего значения, так как он позволяет применить достаточно строгие математические методы к решению практически важных инженерных задач. Аналитические решения, которые удается построить для законов сохранения в случае идеальной сжимаемой и несжимаемой сред, в последние десятилетия прошлого века приобрели огромное значение для проверки точности численных методов. Триумфальное развитие электронной вычислительной техники и методов математического моделирования открывает все новые и новые возможности для моделирования сложных физических процессов в реальных средах. Сложилась парадоксальная ситуация, когда точность вычислений на ЭВМ существенно превышает точность применяемых физических моделей. Эта далеко не всеми осознаваемая ситуация ставит перед механиками задачу перехода к моделям следующего поколения, перехода от уравнений Эйлера к уравнениям неидеальных сжимаемых сред с реальными уравнениями состояния и уравнениями, определяющими связи между компонентами девиатора тензора напряжений и соответствующими деформациями (вязкость, упругость, пластичность). Особое место занимают неравновесные метастабильные состояния и фазовые переходы, скорость которых

зависит от скорости дилатации и дисторсии. Их описание невозможно без дополнительных кинетических уравнений, определяющих скорости роста зародышей новой фазы в недрах старой фазы, скорости роста микроповрежденности в области отрицательных давлений и др.

В последние годы появился новый класс моделей, занимающих промежуточное положение между моделями сплошной среды и микромоделями. Это модели молекулярной динамики. Это уже не микроуровень, на котором изучаются взаимодействия отдельных атомов, молекул и других микрообъектов, но еще не макроуровень, на котором среда рассматривается как сплошная. Информация о поведении вещества, полученная с помощью таких мезомodelей, может эффективно использоваться в моделях механики сплошной среды, которые далеко не исчерпали своих богатых возможностей.

Кроме моделей идеальной сжимаемой сплошной среды, основанных на законах сохранения массы, импульса и энергии, записанных Л. Эйлером в виде системы уравнений в частных производных, существует ряд других моделей, учитывающих те или иные физические особенности поведения среды. Так, например, в 1822 г. через примерно 70 лет после появления уравнений Эйлера, А. Навье и в 1847 г. Д. Стокс предположили, что в малом диапазоне изменения давления среду можно считать несжимаемой. Это предположение вместе с добавлением вязкой дисторсии позволило им написать законы сохранения массы и импульса «несжимаемой» вязкой сплошной среды. Модель Навье – Стокса является локальной моделью, что не мешает ее широкому применению для практических применений. Локальной моделью являются также уравнения Гука для упругих деформаций и ряд условий текучести для пластической дисторсии. Наличие многих локальных моделей создает видимость, что модели механики не связаны друг с другом. На самом деле механика сплошных сред (МСС) является единой наукой, в которой имеют право на жизнь как общие, так и частные модели. Применимость тех или иных моделей зависит от решаемой проблемы и

необходимой точности прогнозирования результатов. Частные модели получаются из общей путем принятия упрощающих гипотез, как в случае Навье-Стокса. Излагаемый в этой книге курс лекций студентам Челябинского государственного университета «Модели механики сплошных сред» пронизан идеей единства моделей механики. Мы представляем структуру моделей механики сплошных сред следующим образом.

Уравнения Эйлера образуют ядро всех моделей механики сплошных сред. Поскольку из законов сохранения массы, импульса и энергии идеальной сжимаемой сплошной среды вытекает следствие – сохранение энтропии вдоль траектории (линии тока) любой частицы, то это ядро будем называть адиабатическим. Если теперь разделить тензор напряжений на шаровой тензор – давление P и девиатор тензора напряжений S_{ik} , то вязкость, упругость, пластичность, сухое трение в порошках описываются дополнительными членами в уравнениях движения и энергии адиабатического ядра. Теплопроводность учитывается добавлением соответствующего члена в уравнение энергии. Уравнения состояния вещества могут быть сколь угодно сложными и описывать равновесные фазовые переходы. Для описания неравновесных фазовых переходов, неравновесных химических реакций, неравновесного роста или залечивания микро- и макродефектов к уравнениям адиабатического ядра добавляются соответствующие кинетические эволюционные уравнения. От скорости деформаций могут зависеть также и предел упругости, и прочность. Структура моделей МСС схематически изображена на Рис. 1.

Главы 1 и 2 посвящены изучению законов сохранения для непрерывных течений в различной форме. В главе 3 даются сведения из термодинамики, необходимые для понимания, построения или обоснования уравнений состояния веществ, изложению которых посвящена глава 4. Законы сохранения на сильных, слабых и контактных разрывах рассмотрены в главе 5. Глава 6 содержит изложение уравнений и некоторых решений в случае установившегося движения

сплошной среды. Глава 7 знакомит читателя с элементами теории подобия. В главе 8 рассматриваются модели детонации и горения, поскольку взрывчатые и горючие вещества являются широко распространенным источником энергии.

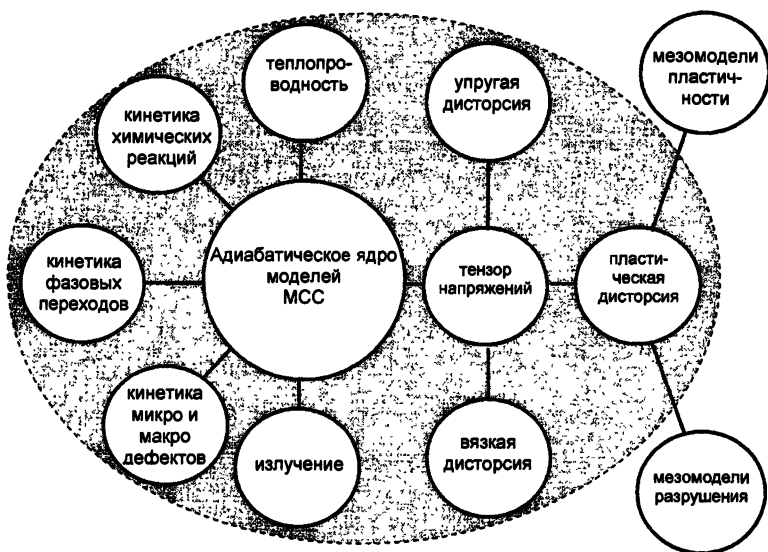


Рис. 1. Схематическое изображение структуры моделей механики сплошных сред.

Наконец, глава 9 посвящена изложению современной модели многокомпонентной среды. Мы считаем, что повышение точности математического моделирования физических процессов в сплошных средах, уменьшение зависимости результатов моделирования от определяемых экспериментально эмпирических констант моделей, повышение надежности прогнозирования результатов математического моделирования лежат на пути применения моделей многокомпонентных сред.

Я выражаю благодарность сотрудникам математического отделения Российского Федерального ядерного центра – Всероссийского научно-

исследовательского института технической физики – И.А. Доровских, Ю.В. Кайгородцевой, И.Р. Макеевой и С.Н. Ромаговской за обсуждения и помощь в подготовке рукописи этой книги.

В.Ф. Куропатенко

Введение

Механика сплошной среды является древней наукой, использующей и теоретические, и экспериментальные методы. Ее границы трудно очертить. Механика изучает процессы, происходящие с течением времени во всех известных агрегатных состояниях вещества (твердое тело, жидкость, газ, плазма) и переходы из одного состояния в другое – фазовые переходы.

Как наука, механика делится на ряд направлений в зависимости от изучаемых сред и протекающих в них процессов (механика твердого тела, механика жидкости газа и плазмы, механика многокомпонентных сред и т.д.).

Химически чистые вещества в природе встречаются редко. Подавляющее большинство веществ является многокомпонентными смесями – эмульсии, суспензии, сплавы, аэрозоли и т.д. При нагревании, сжатии, движении и других воздействиях на смесь каждый компонент может претерпевать фазовые переходы, что приводит к изменению типа смеси. И эти процессы тоже изучает механика.

Разработка и создание образцов техники и различных сооружений требуют знания свойств применяемых конструкционных материалов. Сугубо практические задачи механики диктуют необходимость все более полного и детального исследования явлений, сопровождающих воздействие нагрузок, особенно динамических, на материалы. Знание свойств материалов играет фундаментальную роль при решении задач безопасности и предотвращения разрушения конструкций практически во всех отраслях народного хозяйства.

Необходимость прогнозирования поведения образцов техники не только в режиме нормальной эксплуатации, но и в экстремальных условиях, резко

повышает роль моделирования, как одного из основных методов механики сплошной среды. Моделированием называют замену изучения свойств реального объекта (натуры) изучением свойств его модели. Модели делятся на два вида: лабораторные модели и математические модели. Соответственно и моделирование делится на лабораторное и математическое. Очевидно, что модель не может быть тождественна натуре. Тогда это не модель. Как правило, лабораторная модель по существенным параметрам должна быть подобна натуре. В механике сплошных сред есть ряд критериев подобия, используемых для выбора лабораторных моделей. Например, число Куранта $K=tc/L$, где t – время, c – скорость звука, L – размеры, или число Маха $M=U/c$, где U – скорость, или число Рейнольдса $Re=UL/\nu$, где ν – коэффициент вязкости. В механике используются и другие критерии подобия. Их названия связаны с именами ученых, которые первыми их использовали (Эйлер, Фруд, Нуссельт, Пекле, Прандтль, Кнудсен и другие).

Математическое моделирование – это теоретическое описание и исследование изучаемого явления с помощью математического аппарата. Система уравнений, описывающих начальное состояние природы, ее поведение под действием внешних воздействий, сами внешние воздействия и свойства материалов природы называется математической моделью.

Следует отметить, что в последние 25-30 лет в связи с прогрессом в области электронных вычислительных машин роль математического моделирования резко возросла. Более того, есть такие проблемы, когда математическое моделирование является единственным средством предварительного изучения явления. С середины 90-х годов математические модели и математическое моделирование применяются практически во всех областях человеческой деятельности: механика сплошных сред, физика, электроника, электротехника, химия, технология химических, металлургических и других производств, экономика, социальные системы, биология, медицина и т.д.

При построении математических моделей физических, механических, химических и других процессов следует учитывать многие особенности этих процессов. Как правило, это делается путем включения в модель специальных эволюционных уравнений, либо дополнительных членов в законах сохранения. Равновесные свойства вещества описываются уравнениями состояния. Развитие математического моделирования потребовало повышения точности уравнений состояния и увеличения объема информации о свойствах веществ, получаемой либо из экспериментов, либо из теоретических моделей вещества. В этих условиях одним из основных стал метод экспериментального измерения параметров ударных волн. Среди свойств материалов, проявляющихся при динамических нагрузках, экспериментально наиболее полно и последовательно изучена сжимаемость на ударных волнах и на основе этих исследований построены разнообразные математические модели уравнений состояния. В настоящее время ударные адиабаты экспериментально определены для большинства элементов периодической системы Менделеева, а также для многих химических соединений.

Особое место занимает область состояний, в которой вещества в процессе динамического нагружения и последующей разгрузки находятся в твердой фазе. В этой области в полной мере проявляются их неравновесные свойства, что приводит к широкому многообразию видов разрушения кристаллических тел. Указанная область охватывает широкий диапазон средних напряжений на фронте ударной волны в металле от нормального состояния до $\sim 10^2$ ГПа.

Трудности непосредственного измерения величин в процессе упругого и пластического деформирования и разрушения вещества активизировали развитие физических и математических моделей этих явлений. Были созданы различные по глубине физического рассмотрения модели от моделей механики сплошной среды до физических моделей, описывающих упругость, пластичность и разрушение с помощью кинетических уравнений. К началу 90-х годов усилиями отечественных

и зарубежных исследователей накоплен весьма обширный запас опытных данных о свойствах вещества в экстремальных условиях нагружения. Анализ этих данных позволил выявить ряд закономерностей поведения твердых, жидких и газовых сред в условиях высокоскоростного деформирования. Однако, несмотря на значительные успехи, проблема изучения разрушения и пластического деформирования материалов при динамических нагрузках остается актуальной и в наши дни, поскольку среди исследователей нет единого подхода к трактовке и описанию этих явлений.

Предложенные в разные годы математические модели описания поведения металлов под действием импульсных нагрузок, включая модели процессов разрушения во встречных волнах разрежения и сопротивления пластической деформации ударно сжатых металлов можно разделить на две группы. Прежде всего, это так называемые "точные" модели, включающие эволюционные уравнения развития процессов деформирования и разрушения. Второй подход представлен более простыми, так называемыми "инженерными" моделями, в которых откольная прочность и динамический предел текучести представляются функцией некоторых интегральных характеристик вещества.

В случае, когда величины, характеризующие изменение состояния и движение вещества непрерывны вместе с первыми производными, законы сохранения записываются в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных. Законы сохранения выполняются также и на разрывах. Различают три типа устойчивых разрывов: сильные, слабые и контактные. На сильных разрывах все величины, характеризующие движение вещества и его деформации, разрывны. Сильные разрывы перемещаются по веществу и называются ударными волнами. Сильные разрывы, на поверхности которых происходит химическая реакция разложения молекул и выделяется энергия, называются детонационными волнами или волнами горения в зависимости от скорости разложения молекул исходного (взрывчатого вещества). На ударных и

детонационных волнах энтропия растет даже в идеальной среде в отличие от непрерывных течений, где она сохраняется вдоль траектории частицы. Если сильный разрыв не перемещается относительно вещества, он называется контактным разрывом. На контактных разрывах часть величин непрерывна, а часть разрывна.

Несмотря на бурное развитие метода математического моделирования, в механике сплошных сред продолжают играть большую роль аналитические решения. Для их получения исходная система законов сохранения, как правило, упрощается. Очень часто решения строятся для простейшего уравнения состояния газов – идеального газа, или простейшего уравнения состояния конденсированного вещества – линейной зависимости давления от удельного объема или плотности. В неидеальных средах для построения аналитических решений используется закон Гука в линейном приближении, если деформации упругие, и в приближении идеальной пластичности, если пластические. Построение аналитических решений позволяет проанализировать особенности рассматриваемого движения сплошной среды и сделать оценки характеристик течения. Аналитические решения играют также важную роль в качестве эталонных решений для оценки свойств численных методов, применяемых для математического моделирования различных течений сплошной среды. Поскольку погрешность математического эксперимента складывается из погрешности физической модели и погрешности математической модели, то применение аналитических решений позволяет управлять условиями проведения численного эксперимента для того, чтобы сделать математическую часть погрешности существенно меньше физической. Конечно, этот контроль имеет хотя и важное, но все-таки частное значение. Верификация любой модели механики сплошной среды невозможна без физического эксперимента. Проверка или эмпирическое подтверждение свойств модели делаются, как правило, путем сравнения результатов расчетов с экспериментом.

Глава 1. Деформация и напряжение

§1. Изучаемая среда

Физические модели вещества можно разделить на две группы в зависимости от того, на каком уровне (микроскопическом или макроскопическом) рассматриваются его свойства. Как правило, модели, в которых рассмотрение свойств ведется на макроуровне, предназначены для описания поведения тел, размеры которых не соизмеримы с размерами микрочастиц. Свойства вещества в таких моделях описываются термодинамическими величинами, характеризующими средние свойства достаточно представительного ансамбля микрочастиц. В основе макромоделей лежит гипотеза о непрерывном изменении характеристик вещества в пространстве x, y, z, t . Это сразу дает возможность записать законы сохранения массы, количества движения и энергии в виде дифференциальных уравнений в частных производных. Наличие разрывов в параметрах не противоречит гипотезе сплошности, ибо в случае разрыва законы сохранения остаются справедливыми, принимая вид условий на разрыве. Именно к этой группе моделей относятся модели механики сплошной среды.

Сплошная среда состоит из континуума точек. Траектория любой произвольно выбранной точки с координатами x_0, y_0, z_0 в момент t_0 при $t > t_0$ определяется системой уравнений

$$x = x(t, x_0, y_0, z_0), \quad y = y(t, x_0, y_0, z_0), \quad z = z(t, x_0, y_0, z_0). \quad (1.1)$$

Запишем систему уравнений (1.1) в дифференциалах

$$\begin{aligned}
 dx &= \frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial x}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial x}{\partial z_0} dz_0, \\
 dy &= \frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial y}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial y}{\partial z_0} dz_0, \\
 dz &= \frac{\partial z}{\partial t} dt + \frac{\partial z}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial z}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial z}{\partial z_0} dz_0.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Система уравнений (1.2) содержит 12 производных. Три производных при dt определяют компоненты вектора скорости

$$U_x = \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0}, \quad U_y = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0}, \quad U_z = \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0}. \tag{1.3}$$

Следует помнить, что производные x, y, z по t берутся при постоянных значениях x_0, y_0, z_0 . Остальные 9 производных образуют матрицу градиентов относительных смещений

$$\left\| x_{ij} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{array} \right\|.$$

Матрица $\left\| x_{ij} \right\|$ описывает все относительные смещения, то есть деформации и повороты сплошной среды. Разложим эту матрицу на симметричную матрицу $\left\| \epsilon_{ij} \right\|$, которая называется тензором деформаций T_ϵ , и кососимметричную матрицу $\left\| \omega_{ij} \right\|$, которая называется тензором поворотов T_ω .

$$\left\| x_{ij} \right\| = \left\| \epsilon_{ij} \right\| + \left\| \omega_{ij} \right\|.$$

Движения среды, при которых меняются расстояния между материальными точками, будем называть деформацией. В то же время, довольно часто деформацией называют не процесс, а относительные изменения характеристик

тела (относительные приращения линейных отрезков, объема, углов и т.д.). Ниже термин «деформация» будет использоваться и в том, и в другом смысле.

Введем следующие обозначения компонентов тензоров $\|\epsilon_{ij}\|$ и $\|\omega_{ij}\|$

$$\|\epsilon_{ij}\| = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix}, \quad \|\omega_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0 & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & \omega_{zy} & 0 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что компоненты тензоров $\|x_{ij}\|$, $\|\epsilon_{ij}\|$, $\|\omega_{ij}\|$ связаны уравнениями:

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = \epsilon_{xx}, \quad \frac{\partial y}{\partial y_0} = \epsilon_{yy}, \quad \frac{\partial z}{\partial z_0} = \epsilon_{zz}, \quad (1.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial y_0} &= \gamma_{xy} + \omega_{xy}, & \frac{\partial x}{\partial z_0} &= \gamma_{xz} + \omega_{xz}, \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} &= \gamma_{yx} + \omega_{yx}, & \frac{\partial y}{\partial z_0} &= \gamma_{yz} + \omega_{yz}, \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} &= \gamma_{zx} + \omega_{zx}, & \frac{\partial z}{\partial y_0} &= \gamma_{zy} + \omega_{zy}. \end{aligned} \right\} (1.5)$$

§2. Тензор поворотов

Рассмотрим вращение абсолютно жесткого тела, при котором деформации, т.е. изменение объема (дилатация) и изменение формы (дисторсия), равны нулю. Это значит, что

$$\epsilon_{ii} = 0, \quad \gamma_{ij} = 0 \quad \text{и} \quad \omega_{ij} \neq 0.$$

При $\epsilon_{ii} = 0, \gamma_{ij} = 0$ из (1.4), (1.5) следует

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x_0} &= 0, & \frac{\partial y}{\partial y_0} &= 0, & \frac{\partial z}{\partial z_0} &= 0, \\ \omega_{xy} &= \frac{\partial x}{\partial y_0}, & \omega_{xz} &= \frac{\partial x}{\partial z_0}, & \omega_{yx} &= \frac{\partial y}{\partial x_0}, \\ \omega_{yz} &= \frac{\partial y}{\partial z_0}, & \omega_{zx} &= \frac{\partial z}{\partial x_0}, & \omega_{zy} &= \frac{\partial z}{\partial y_0}. \end{aligned} \right\} (1.6)$$

Рассмотрим прямоугольный элемент абсолютно жесткого тела, изображенный на Рис.1.1, где $\Delta x_0 = x_A - x_0$, $\Delta y_0 = y_B - y_0$. Выразив синус угла поворота элемента относительно оси Oz_0 через приращения Δx , Δy и начальные размеры ребер прямоугольника Δx_0 , Δy_0 , получим

$$\sin\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x_0} = -\frac{\Delta x}{\Delta y_0}.$$

Записав аналогичные соотношения для поворотов относительно осей Ox_0 , Oy_0 и перейдя к пределу при $\Delta x_0 \rightarrow 0$, $\Delta y_0 \rightarrow 0$, $\Delta z_0 \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\partial y}{\partial x_0} = -\frac{\partial x}{\partial y_0}; \quad \frac{\partial y}{\partial z_0} = -\frac{\partial z}{\partial y_0}; \quad \frac{\partial z}{\partial x_0} = -\frac{\partial x}{\partial z_0}. \quad (1.7)$$

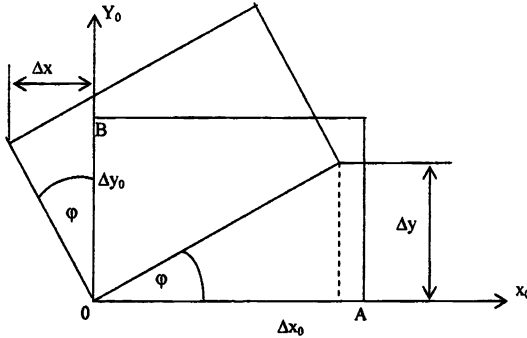


Рис.1.1. Относительное смещение при повороте абсолютно жесткого тела вдоль оси Oz_0 .

Из (1.6) и (1.7) следует

$$\omega_{xy} = -\omega_{yx}, \quad \omega_{xz} = -\omega_{zx}, \quad \omega_{yz} = -\omega_{zy}.$$

С другой стороны $\omega_{xy} = \frac{\partial x}{\partial y_0}$ и одновременно $\omega_{xy} = -\frac{\partial y}{\partial x_0}$. Аналогично можно

записать ω_{xz} и ω_{yz} . Сложив два выражения ω_{xy} и разделив на два (и аналогично ω_{yz} и ω_{xz}), получим

$$\left. \begin{aligned} \omega_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial y_0} - \frac{\partial y}{\partial x_0} \right) = -\omega_{yx}, \\ \omega_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial z_0} - \frac{\partial z}{\partial x_0} \right) = -\omega_{zx}, \\ \omega_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial z_0} - \frac{\partial z}{\partial y_0} \right) = -\omega_{zy}. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

§3. Тензор деформаций. Дисторсия

Три компоненты ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} тензора деформаций, стоящие на главной диагонали, называются деформациями сжатия (растяжения) или удлинениями. Шесть оставшихся компонентов γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} , γ_{yx} , γ_{zy} , γ_{xz} тензора деформаций T_ε называются деформациями сдвига. Возвращаясь к уравнениям (1.5) с учетом (1.8) получим

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{\partial y}{\partial x_0} \right), \\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial z_0} + \frac{\partial z}{\partial x_0} \right), \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial z_0} + \frac{\partial z}{\partial y_0} \right). \end{aligned}$$

Шесть компонентов γ_{ij} тензора деформаций γ_{yx} , γ_{zx} , γ_{zy} , γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} определяют дисторсию, то есть изменение формы тела.

§4. Дилатация

Рассмотрим элемент массы dm , занимающий объем $d\theta_0 = dx_0 dy_0 dz_0$.

Удельный объем вещества в этом объеме равен

$$V_0 = \frac{d\theta_0}{dm}.$$

Ограничимся частным случаем, когда этот элемент не меняет формы и не вращается. Изменяется лишь его объем. Тогда после деформации масса dm займет

объем $d\theta = dx dy dz$, а удельный объем примет значение V . Свяжем V с V_0 . Подставив dx, dy, dz из (1.2) при постоянном времени t в выражение

$$V = \frac{dx dy dz}{dm},$$

получим

$$V dm = \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial x}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial x}{\partial z_0} dz_0 \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial y}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial y}{\partial z_0} dz_0 \right) \times \left(\frac{\partial z}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial z}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial z}{\partial z_0} dz_0 \right). \quad (1.9)$$

Дисторсия и вращение элемента dm отсутствуют. Из (1.8) следует, что при отсутствии вращения выполнены уравнения

$$\frac{\partial x}{\partial y_0} = \frac{\partial y}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial x}{\partial z_0} = \frac{\partial z}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial y}{\partial z_0} = \frac{\partial z}{\partial y_0}, \quad (1.10)$$

а при отсутствии дисторсии выполнены уравнения

$$\frac{\partial x}{\partial y_0} = -\frac{\partial y}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial x}{\partial z_0} = -\frac{\partial z}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial y}{\partial z_0} = -\frac{\partial z}{\partial y_0}. \quad (1.11)$$

Из (1.10) и (1.11) следует

$$\frac{\partial x}{\partial y_0} = \frac{\partial x}{\partial z_0} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x_0} = \frac{\partial y}{\partial z_0} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x_0} = \frac{\partial z}{\partial y_0} = 0. \quad (1.12)$$

После подстановки (1.12) в (1.9) выражение для удельного объема упрощается

$$V = \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} \frac{\partial z}{\partial z_0} \cdot \frac{dx_0 dy_0 dz_0}{dm}.$$

Поскольку $V_0 = dx_0 dy_0 dz_0 / dm$, то выражение для дилатации принимает вид

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} \frac{\partial z}{\partial z_0}. \quad (1.13)$$

С помощью (1.4) запишем (1.13) в виде

$$\frac{V}{V_0} = \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz}. \quad (1.14)$$

Величину V_0/V обратную дилатации V/V_0 называют сжатием вещества.

§5. Уравнение неразрывности

Введем уравнение для скорости изменения удельного объема. Продифференцируем V по t при постоянных x_0, y_0, z_0 , т.е. вдоль траектории этой точки

$$\frac{1}{V_0} \frac{\partial V}{\partial t} = \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} \left(\frac{1}{\varepsilon_{xx}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0} + \frac{1}{\varepsilon_{yy}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0} + \frac{1}{\varepsilon_{zz}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0} \right). \quad (1.15)$$

Подставив (1.4) и (1.14) в (1.15), получим

$$\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}. \quad (1.16)$$

Перейдем к плотности $\rho=1/V$. Тогда (1.16) примет вид

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0} + \rho \operatorname{div} \bar{U} = 0. \quad (1.17)$$

Поскольку в каждой точке пространства $\rho=\rho(t,x,y,z)$, то с учетом (1.2) можно записать производную $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0} &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{xyz} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{xyz} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_{txz} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0} + \\ &+ \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_{txy} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0}. \end{aligned}$$

Из этого уравнения видно, что $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ при постоянных x_0, y_0, z_0 отличается от $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ при

постоянных x, y, z . Чтобы их различать, обозначим $\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{x_0 y_0 z_0}$. Подставляя

(1.3) в предыдущее уравнение, получим

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + U_x \frac{\partial\rho}{\partial x} + U_y \frac{\partial\rho}{\partial y} + U_z \frac{\partial\rho}{\partial z}. \quad (1.18)$$

Производная $\frac{d\rho}{dt}$ в виде (1.18) называется **субстациональной**, т.к. она берется в направлении, касательном к траектории материальной частицы x_0, y_0, z_0 . Из (1.17) и (1.18) следует уравнение

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\bar{U} = 0. \quad (1.19)$$

Производная $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ в (1.19) берется при постоянных значениях x, y, z . Это уравнение выражает закон сохранения массы и называется **уравнением неразрывности**.

§6. Условия совместности деформаций

Шесть компонентов тензора деформации $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ определяются частными производными по x_0, y_0, z_0 всего трех независимых функций x, y, z и имеют вид

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial x}{\partial x_0}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial y}{\partial y_0}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial z}{\partial z_0}, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{\partial y}{\partial x_0} \right),$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial z_0} + \frac{\partial z}{\partial x_0} \right), \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial z_0} + \frac{\partial z}{\partial y_0} \right).$$

Уравнения совместности деформаций получаются следующим образом. Продифференцируем γ_{xy} по x_0 и y_0

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x_0 \partial y_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 x}{\partial x_0 \partial y_0^2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x_0^2 \partial y_0} \right).$$

Подставив в правую часть выражения для ε_{xx} и ε_{yy} , получим одно из уравнений совместности деформаций (Сен-Венана)

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x_0 \partial y_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x_0^2} \right). \quad (1.20)$$

Аналогично получаются уравнения

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x_0 \partial z_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z_0^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x_0^2} \right), \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y_0 \partial z_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z_0^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y_0^2} \right), \quad (1.22)$$

выражающие связь дилатации с дисторсией. Вторая группа уравнений совместности получается следующим образом. Продифференцируем ϵ_{xx} по y_0 и z_0

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y_0 \partial z_0} = \frac{\partial^3 x}{\partial x_0 \partial y_0 \partial z_0}.$$

Выразим из выражения для γ_{xy} производную $\frac{\partial x}{\partial y_0}$

$$\frac{\partial x}{\partial y_0} = 2\gamma_{xy} - \frac{\partial y}{\partial x_0}.$$

Подставив эту производную в предыдущее уравнение, получим

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y_0 \partial z_0} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x_0 \partial z_0} - \frac{\partial^3 y}{\partial x_0^2 \partial z_0}.$$

Выразим производную $\frac{\partial y}{\partial z_0}$ из выражения для γ_{yz} и подставим в предыдущее уравнение

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y_0 \partial z_0} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x_0 \partial z_0} - 2 \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial x_0^2 \partial y_0}.$$

Выразим производную $\frac{\partial z}{\partial x_0}$ из выражения для γ_{xz} и подставим в предыдущее уравнение

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y_0 \partial z_0} = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x_0} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y_0} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z_0} \right). \quad (1.23)$$

Аналогично получаются уравнения

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z_0 \partial x_0} = \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x_0} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y_0} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z_0} \right), \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x_0 \partial y_0} = \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x_0} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y_0} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z_0} \right). \quad (1.25)$$

Шесть дифференциальных уравнений (1.20)-(1.25) называются условиями совместности деформаций или уравнениями Сен-Венана. Эти уравнения, как и законы сохранения, являются фундаментальными уравнениями. Они не зависят ни от механических свойств среды, ни от характера ее деформирования.

§7. Силы и напряжения

Объектом механики сплошных сред являются процессы, протекающие в газах, жидкостях, твердых телах и плазме. Различные типы сплошных сред характеризуются различными силами взаимодействия между соседними частицами вещества. Эти силы действуют на некоторых площадках.

Вектором плоской площадки Σ , ограниченной некоторым контуром, вдоль которого установлено положительное направление, называется вектор $\bar{\Pi}$, модуль которого равен Σ , а направление выбрано перпендикулярно к Σ так, чтобы положительный обход контура от его конца казался идущим против часовой стрелки.

Из всех поверхностных сил \bar{F} выделим силу, действующую всегда по нормали произвольно ориентированной площадки Σ . Условием параллельности векторов \bar{F} и $\bar{\Pi}$ является равенство нулю их векторного произведения

$$\bar{F} \times \bar{\Pi} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ \Pi_x & \Pi_y & \Pi_z \end{vmatrix} = 0.$$

Приравняв нулю каждую из компонент этого векторного произведения, получим

$$\frac{F_x}{\Pi_x} = \frac{F_y}{\Pi_y} = \frac{F_z}{\Pi_z}.$$

Обозначим это отношение через P . Тогда

$$\vec{F} = P\vec{\Pi},$$

или, что то же самое

$$P = \frac{|\vec{F}|}{|\vec{\Pi}|}.$$

Сила, действующая по нормали к единичной площадке независимо от ее ориентации в пространстве, называется давлением.

Среда, в которой давление является единственной силой, характеризующей взаимодействие между макрочастицами, называется **идеальной**. Если же кроме давления в среде действуют силы, направленные не по нормали к произвольной площадке, то в таком случае среда называется **неидеальной**, а силы – **напряжениями**.

Рассмотрим неидеальную среду, в которой напряжения, возникающие на некоторой площадке $\vec{\Pi}$ при действии силы \vec{F} , зависят от взаимного расположения двух векторов: вектора силы \vec{F} и вектора \vec{n} - нормали к площадке $\vec{\Pi}$.

Пусть в некоторой точке O с координатами x_0, y_0, z_0 , лежащей на единичной площадке $\vec{\Pi}$, приложена сила \vec{F} , которая создает в этой точке вполне конкретное напряженное состояние. Вообще говоря, площадку, проходящую через точку O , можно ориентировать по-разному. В зависимости от ориентации площадки напряжения, нормальные и касательные к площадке, будут разными. Иными словами, в объеме, окружающем точку x_0, y_0, z_0 , сила \vec{F} создает непрерывное неравномерное поле напряжений, зависящее от взаимной ориентации силы и площадки.

Площадка $\vec{\Pi}$ на координатных плоскостях имеет три проекции – площадки $\vec{\Pi}_x, \vec{\Pi}_y, \vec{\Pi}_z$, ортогональные соответственно осям O_x, O_y, O_z . Эти четыре площадки образуют тетраэдр (Рис. 1.2). Везде далее буква u выражения силы

будет обозначать, что сила действует на площадку, ортогональную направлению, указанному буквой. Такие же обозначения имеют отношение и к площадкам.

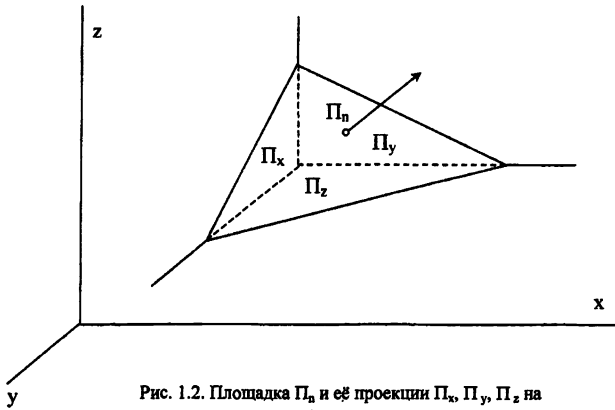


Рис. 1.2. Площадка Π_n и её проекции Π_x, Π_y, Π_z на плоскости, ортогональные координатным осям.

Вектор нормали к площадке \bar{n}

$$\bar{n} = n_x \bar{i} + n_y \bar{j} + n_z \bar{k} \quad (1.26)$$

является единичным. Проекция вектора \bar{n} на координатные направления равны его направляющим косинусам

$$n_x = \cos(n, x), \quad n_y = \cos(n, y), \quad n_z = \cos(n, z).$$

Следовательно

$$n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \quad (1.27)$$

Напряжения, которые создает сила \bar{F} на каждой из указанных трех площадок $\bar{P}_x, \bar{P}_y, \bar{P}_z$, обозначим через $\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z$. Компоненты каждого из этих векторов будем обозначать двумя буквами. Первая буква будет обозначать площадку, а вторая буква – направление действия напряжения. Например, τ_{xy} означает, что это напряжение действует на площадку \bar{P}_x , ортогональную оси x, в направлении оси y.

Разложим \bar{F}_x , \bar{F}_y , \bar{F}_z на компоненты нормальные и касательные к каждой из площадок. Далее разложим напряжение, касательное к каждой площадке, на два составляющих напряжения, направленных вдоль осей, в плоскости которых лежит площадка. Нормальные напряжения будем обозначать буквой σ_{ij} , а касательные — буквой τ_{ij} .

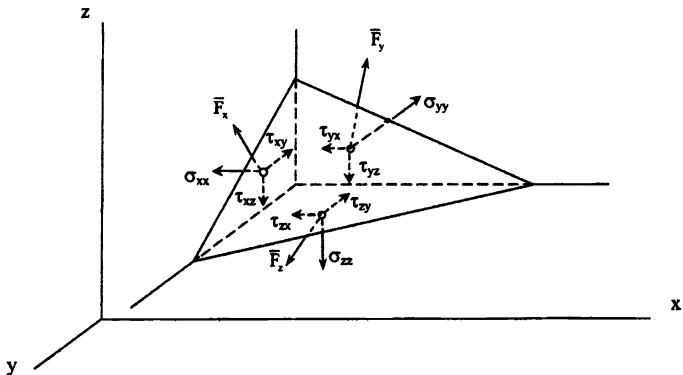


Рис. 1.3. Нормальные и касательные компоненты сил \bar{F}_x , \bar{F}_y , \bar{F}_z , действующих на площадку, ортогональные осям Ox , Oy , Oz .

В результате получим три разложения напряжений \bar{F}_x , \bar{F}_y , \bar{F}_z (Рис. 1.3)

$$\bar{F}_x = \sigma_{xx} \bar{i} + \tau_{xy} \bar{j} + \tau_{xz} \bar{k},$$

$$\bar{F}_y = \tau_{yx} \bar{i} + \sigma_{yy} \bar{j} + \tau_{yz} \bar{k},$$

$$\bar{F}_z = \tau_{zx} \bar{i} + \tau_{zy} \bar{j} + \sigma_{zz} \bar{k}.$$

Они содержат три нормальных и шесть касательных напряжений на гранях тетраэдра и образуют тензор напряжений

$$\|\Gamma_\sigma\| = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}.$$

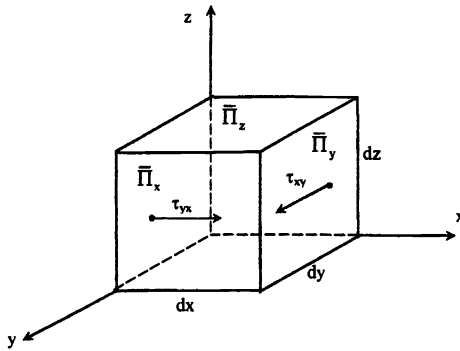


Рис. 1.4. Касательные напряжения τ_{xy} и τ_{yx} , действующие на грани Π_y и Π_x куба.

Рассмотрим куб (Рис. 1.4), три ребра которого совпадают с координатными осями и имеют размеры $\Delta x = \Delta y = \Delta z$. Действия сил, действующих на грани Π_x и Π_y и стремящихся повернуть рассматриваемый куб вокруг оси z , определяются напряжениями τ_{xy} , τ_{yx} и площадями граней $\bar{\Pi}_x = \Delta y \Delta z$ и $\bar{\Pi}_y = \Delta x \Delta z$. При равновесии результирующий момент сил относительно оси z равен нулю, т.е.

$$\tau_{xy} \Delta x \Delta y \Delta z - \tau_{yx} \Delta x \Delta y \Delta z = 0,$$

откуда следует

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Аналогично получаются условия

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

Таким образом, тензор напряжений T_σ является симметричным.

§8. Главные напряжения

Представим силу \bar{F} , действующую на площадку $\bar{\Pi}_n$ с нормалью \bar{n} , в виде

$$\bar{F} = F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k}. \quad (1.28)$$

Вектор \bar{F} и его компоненты F_x , F_y , F_z и, кроме того, нормальное σ_n и касательное τ_n напряжения, действующие на площадку $\bar{\Pi}_n$, изображены на Рис.1.5. Площади

граней тетраэдра, лежащих в координатных плоскостях, обозначим Π_x , Π_y , Π_z , а площадь косой грани Π_n . Рассмотрим условия равновесия тетраэдра в двумерном случае, когда координата z отсутствует. В этом случае проекция тетраэдра на плоскость Oxy имеет вид, изображенный на Рис. 1.6.

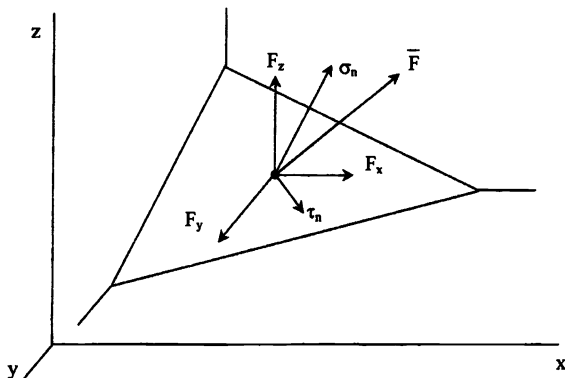


Рис. 1.5. Два разложения силы \bar{F} , действующей на площадку $\bar{\Pi}_n$: 1. На компоненты F_x , F_y , F_z вдоль координатных осей; 2. На компоненты σ_n , τ_n — нормальное и касательное к площадке Π_n напряжения.

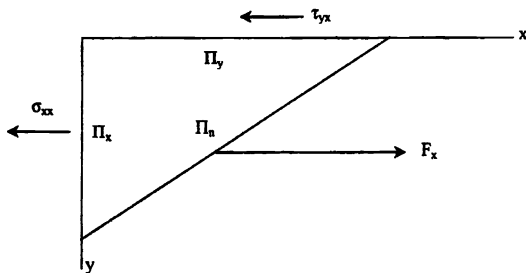


Рис.1.6. Схема напряжений, удовлетворяющих условиям равновесия треугольника.

На площадку Π_n действует сила F_x , на площадку Π_y — сила τ_{yx} , на площадку Π_x — сила σ_{xx} . Таким образом, условие равновесия имеет вид

$$F_x \Pi_n = \sigma_{xx} \Pi_x + \tau_{yx} \Pi_y .$$

В случае трех переменных условие равновесия тетраэдра принимает вид

$$F_x \Pi_n = \sigma_{xx} \Pi_x + \tau_{yx} \Pi_y + \tau_{zx} \Pi_z. \quad (1.29)$$

Так как отношение площади любой из трех ортогональных граней к площади наклонной грани равно косинусу угла между нормальными к этим граням

$$\frac{\Pi_x}{\Pi_n} = \cos(x, n) = n_x, \quad \frac{\Pi_y}{\Pi_n} = \cos(y, n) = n_y, \quad \frac{\Pi_z}{\Pi_n} = \cos(z, n) = n_z,$$

то из (1.29) следует

$$F_x = \sigma_{xx}n_x + \tau_{yx}n_y + \tau_{zx}n_z. \quad (1.30)$$

Аналогично получаются два других уравнения

$$F_y = \tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{zy}n_z, \quad (1.31)$$

$$F_z = \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z. \quad (1.32)$$

Модуль полного напряжения, действующего на площадке Π_n , определяется выражением

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2.$$

Компоненты F_x , F_y , F_z не являются ни нормальными, ни касательными напряжениями и для рассмотрения прочности не удобны. Определим нормальное напряжение σ_n , действующее на площадку Π_n . Оно равно скалярному произведению вектора \bar{F} на вектор \bar{n}

$$\sigma_n = \bar{F} \bar{n} = F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z. \quad (1.33)$$

Из (1.30)–(1.33) следует

$$\sigma_n = \sigma_{xx}n_x^2 + \sigma_{yy}n_y^2 + \sigma_{zz}n_z^2 + 2\tau_{xy}n_x n_y + 2\tau_{xz}n_x n_z + 2\tau_{yz}n_y n_z. \quad (1.34)$$

Величина касательного напряжения τ_n на площадке Π_n находится из уравнения

$$\tau_n^2 = F^2 - \sigma_n^2. \quad (1.35)$$

Из бесчисленного множества наклонных площадок, которые можно мысленно провести через точку O , будем считать ту площадку главной, на которой касательное напряжение τ_n равно нулю, а действующая сила \bar{F} и нормальное напряжение σ_n совпадают по величине и направлению. Если обозначить главное напряжение через σ_v , то оно должно удовлетворять уравнению

$$\sigma_v \bar{n} = \bar{F}. \quad (1.36)$$

Из (1.26), (1.28) и (1.36) следует

$$\sigma_v n_x = F_x, \quad \sigma_v n_y = F_y, \quad \sigma_v n_z = F_z. \quad (1.37)$$

Подставив (1.37) в (1.30) – (1.32), получим три уравнения

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx} - \sigma_v) n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z &= 0, \\ \tau_{xy} n_x + (\sigma_{yy} - \sigma_v) n_y + \tau_{zy} n_z &= 0, \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + (\sigma_{zz} - \sigma_v) n_z &= 0, \end{aligned} \quad (1.38)$$

которые вместе с (1.27) образуют систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными σ_v , n_x , n_y , n_z . Если рассматривать σ_v как параметр, то уравнения (1.38) являются однородными относительно n_x , n_y , n_z . В силу (1.27) система (1.38) не имеет тривиального (нулевого) решения. Условием же существования нетривиального решения (1.38) является равенство нулю определителя системы

$$D = \sigma_v^3 - \sigma_v^2 J_1 + \sigma_v J_2 - J_3 = 0, \quad (1.39)$$

где

$$J_1(T_\sigma) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz},$$

$$J_2(T_\sigma) = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2,$$

$$J_3(T_\sigma) = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{zx}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2.$$

Коэффициенты уравнения (1.39) не зависят от n_x , n_y , n_z , т.е. инвариантны относительно ориентации площадки \bar{F} . Они называются инвариантами тензора напряжений и являются основными характеристиками напряженного состояния в точке. Поскольку σ_v ($v = 1, 2, 3$) являются корнями уравнения (1.39), то его можно записать в виде

$$(\sigma_v - \sigma_1)(\sigma_v - \sigma_2)(\sigma_v - \sigma_3) = 0,$$

или, что то же самое, в виде

$$\sigma_v^3 - \sigma_v^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_v(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) - \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0. \quad (1.40)$$

Из сравнения (1.39) и (1.40) следуют выражения инвариантов T_σ через главные напряжения

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3,$$

$$J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Выше давление было определено, как сила, не зависящая от ориентации площадки. Инвариант J_1 тоже представляет собой силу, не зависящую от ориентации площадки \bar{F} . Поэтому естественно связать их друг с другом. Как правило, полагают

$$P = \frac{1}{3} J_1 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (1.41)$$

В ряде статей и монографий перед выражением, стоящим в правой части (1.41), берется знак минус. Это не играет принципиального значения. Знак плюс означает лишь то, что при сжатии вещества давление и среднее главное напряжение в нем положительны. Знак минус берется в том случае, когда при сжатии вещества давление положительно, а напряжения отрицательны. Для современных моделей механики сплошной среды удобнее брать знак плюс. Корни уравнения (1.39) называются главными напряжениями σ_ν ($\nu = 1, 2, 3$) и обычно нумеруются в порядке убывания

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

Направление главного напряжения называется главной осью тензора напряжений. Таких осей три. Каждая характеризуется набором направляющих косинусов n_{xi} , n_{yi} , n_{zi} , определенных для соответствующего главного напряжения. Для каждого из главных напряжений σ_1 , σ_2 , σ_3 косинусы n_x , n_y , n_z должны находиться из системы трех уравнений. Поскольку ранг матрицы системы (1.38) после подстановки в нее одного из главных напряжений равен двум, то одно из уравнений (1.38) является следствием двух других. Поэтому в качестве третьего уравнения для определения n_{xi} , n_{yi} , n_{zi} используется уравнение (1.27).

Таким образом, система уравнений для определения косинусов первого главного направления имеет вид

$$\begin{aligned}(\sigma_{xx} - \sigma_1)n_{x1} + \tau_{yx}n_{y1} + \tau_{zx}n_{z1} &= 0, \\ \tau_{xy}n_{x1} + (\sigma_{yy} - \sigma_1)n_{y1} + \tau_{yz}n_{z1} &= 0, \\ n_{x1}^2 + n_{y1}^2 + n_{z1}^2 &= 1.\end{aligned}$$

Аналогично получаются системы уравнений для косинусов второго и третьего главных направлений.

Главные направления тензора напряжений ортогональны и удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}n_{x1}n_{x2} + n_{y1}n_{y2} + n_{z1}n_{z2} &= 0, \\ n_{x1}n_{x3} + n_{y1}n_{y3} + n_{z1}n_{z3} &= 0, \\ n_{x2}n_{x3} + n_{y2}n_{y3} + n_{z2}n_{z3} &= 0.\end{aligned}$$

§9. Наибольшие касательные напряжения

Выберем в рассматриваемой точке главные оси тензора напряжений в качестве новых координатных осей x, y, z . Тогда на площадках Π_x, Π_y, Π_z касательные напряжения равны нулю и на произвольно выбранной площадке нормальное и касательное напряжения по аналогии с (1.34) и (1.35) примут вид

$$\sigma_n = \sigma_1 n_x^2 + \sigma_2 n_y^2 + \sigma_3 n_z^2, \quad (1.42)$$

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2,$$

$$\tau^2 = F^2 - \sigma_n^2 = \sigma_1^2 n_x^2 + \sigma_2^2 n_y^2 + \sigma_3^2 n_z^2 - (\sigma_1 n_x^2 + \sigma_2 n_y^2 + \sigma_3 n_z^2)^2. \quad (1.43)$$

Исключим в (1.43), например, n_z^2 с помощью (1.27). После этого найдем такие n_x и n_y , при которых τ станет максимальным. Для этого подставим

$$n_z^2 = 1 - n_x^2 - n_y^2$$

в (1.43). Условием экстремума τ является равенство нулю частных производных

$$\frac{\partial \tau^2}{\partial n_x} = 0, \quad \frac{\partial \tau^2}{\partial n_y} = 0.$$

Проведя дифференцирование τ^2 , получим два уравнения

$$n_x(\sigma_1 - \sigma_3 - 2(\sigma_1 - \sigma_3)n_x^2 - 2(\sigma_2 - \sigma_3)n_y^2) = 0,$$

$$n_y(\sigma_2 - \sigma_3 - 2(\sigma_1 - \sigma_3)n_x^2 - 2(\sigma_2 - \sigma_3)n_y^2) = 0.$$

Если в (1.43) исключить n_y^2 , то получим систему уравнений, содержащих n_x, n_z .

Наконец, при исключении n_x^2 получается система уравнений, содержащих n_y, n_z .

Все решения этих систем уравнений вместе с (1.27) приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1.

Характеристики главных осей тензора напряжений.

n_x	0	0	± 1	0	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$
n_y	0	± 1	0	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$
n_z	± 1	0	0	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	0

Значения направляющих косинусов в трех первых столбцах таблицы дают направления главных осей, выбранных так, что касательные напряжения на площадках F_1, F_2, F_3 равны нулю, т.е. τ^2 достигает минимума.

В трех последних столбцах таблицы приведены значения косинусов, определяющие нормали к площадкам, проходящим через одну из главных осей и делящим угол между другими главными осями пополам (Рис.1.7). Подставив направляющие косинусы из трех последних столбцов в уравнение (1.43), получим значения главных касательных напряжений

$$\tau_{1,2} = \pm 0,5(\sigma_1 - \sigma_2), \quad \tau_{2,3} = \pm 0,5(\sigma_2 - \sigma_3), \quad \tau_{3,1} = \pm 0,5(\sigma_3 - \sigma_1). \quad (1.44)$$

На площадках, на которых касательные напряжения принимают значения (1.44), действуют также нормальные напряжения. Их значения получаются из (1.42) после подстановки направляющих косинусов из таблицы в виде

$$\sigma_{n1} = 0,5(\sigma_2 + \sigma_3), \quad \sigma_{n2} = 0,5(\sigma_1 + \sigma_3), \quad \sigma_{n3} = 0,5(\sigma_1 + \sigma_2).$$

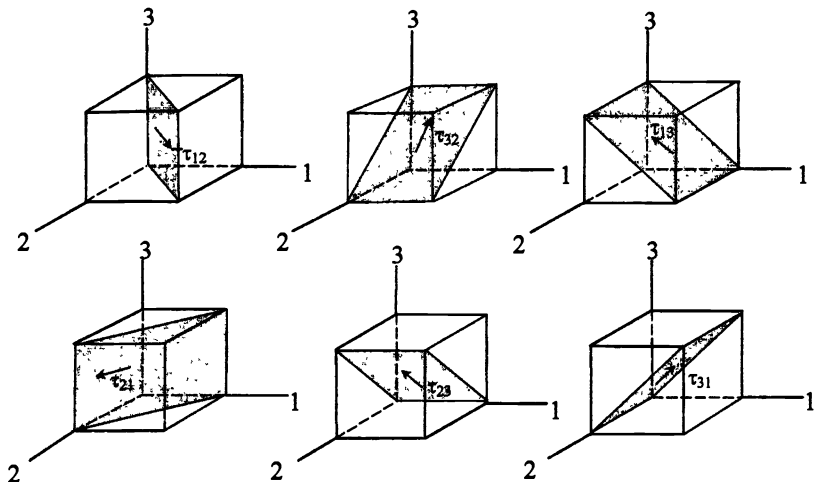


Рис. 1.7. Плоскости, на которых действуют главные касательные напряжения.

Поскольку $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то максимальное главное касательное напряжение равно

$$\tau_{3,1} = 0,5(\sigma_1 - \sigma_3).$$

§10. Шаровая часть и девиатор тензора напряжений

Остановимся еще на одном представлении тензора напряжений.

Представим T_σ в виде суммы двух тензоров

$$T_\sigma = T_{1\sigma} + D_\sigma,$$

где

$$T_{1\sigma} = \begin{vmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{vmatrix}, \quad D_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - P & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - P & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - P \end{vmatrix}.$$

Тензор $T_{1\sigma}$ называется шаровым тензором напряжений и равен давлению, а тензор D_σ , характеризующий касательные напряжения, называется девиатором тензора напряжений. Нормальные составляющие тензора D_σ обозначают

$$S_{xx} = \sigma_{xx} - P, \quad S_{yy} = \sigma_{yy} - P, \quad S_{zz} = \sigma_{zz} - P.$$

По аналогии с тензором T_σ из уравнения

$$S_v^3 - S_v^2 J_1(D_\sigma) + S_v J_2(D_\sigma) - J_3(D_\sigma) = 0$$

находятся главные напряжения S_v тензора D_σ

$$S_1 = \sigma_1 - P, \quad S_2 = \sigma_2 - P, \quad S_3 = \sigma_3 - P. \quad (1.45)$$

Инварианты $J_1(D_\sigma)$, $J_2(D_\sigma)$, $J_3(D_\sigma)$ следующим образом выражаются через компоненты девиатора напряжений

$$\begin{aligned} J_1(D_\sigma) &= S_{xx} + S_{yy} + S_{zz}, \\ J_2(D_\sigma) &= S_{xx}S_{yy} + S_{yy}S_{zz} + S_{zz}S_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ J_3(D_\sigma) &= S_{xx}S_{yy}S_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - S_{xx}\tau_{yz}^2 - S_{yy}\tau_{zx}^2 - S_{zz}\tau_{xy}^2. \end{aligned}$$

Если перейти к главным напряжениям, то инварианты девиатора тензора напряжений запишутся в виде

$$\begin{aligned} J_1(D_\sigma) &= S_1 + S_2 + S_3, \\ J_2(D_\sigma) &= S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_1, \\ J_3(D_\sigma) &= S_1S_2S_3. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Подставим (1.45) в первое уравнение (1.46). В результате получим

$$J_1(D_\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 3P. \quad (1.47)$$

Из (1.41) и (1.47) следует, что

$$J_1(D_\sigma) = 0. \quad (1.48)$$

С помощью (1.48) преобразуем (1.46). Для этого разделим правую часть (1.46) на 2 и в одну из половинок подставим поочередно

$$S_1 = -S_2 - S_3, \quad S_2 = -S_1 - S_3, \quad S_3 = -S_1 - S_2.$$

Сложив полученные выражения $J_2(D_\sigma)$ и разделив на два, получим

$$J_2(D_\sigma) = -\frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2).$$

Отношение модуля $|J_2(D_\sigma)|$ к квадрату давления P^2 называют неидеальностью среды.

Многочисленные эксперименты показывают, что большинство твердых тел способно выдержать без разрушения большие всесторонние напряжения. В то же время, значительно меньшие по величине напряжения сдвига вызывают разрушение тела. В связи с этим, разделение тензора напряжений на шаровой тензор $T_{1\sigma}$ и девиатор D_σ существенно облегчает рассмотрение напряженного состояния тела, поскольку тензор $T_{1\sigma}$, вызывающий дилатацию, может быть связан с шаровым тензором деформаций или шаровым тензором скоростей деформаций, а тензор D_σ , вызывающий дисторсию, соответственно с девиаторами тензоров деформаций или скоростей деформаций. Выделение давления полезно еще и тем, что позволяет строить уравнение состояния вещества, непрерывно переходящее в уравнение состояния жидкости в условиях, когда компоненты тензора напряжений становятся пренебрежимо малы по сравнению с P .

Глава 2. Законы сохранения

§1. Два метода изучения движений сплошной среды

Уравнения механики сплошной среды могут быть записаны в двух различных формах – эйлеровой и лагранжевой.

Для получения уравнений в форме Эйлера в сплошной среде необходимо выделить некоторый объем и затем проследить за потоками массы, импульса и энергии через поверхность, ограничивающую этот объем. Одни частицы вещества вытекают в выбранный объем, другие вытекают из него, но тем не менее всегда можно указать массу, количество движения и полную энергию вещества, находящегося в этом объеме.

В силу произвольности объема уравнения в форме Эйлера справедливы в каждой точке пространства. Они позволяют проследить изменение всех необходимых величин (P , ρ , E , U_x , U_y , U_z и др) в точке x , y , z в зависимости от времени t .

Уравнения в форме Лагранжа получаются в том случае, когда объектом наблюдения является не объем, а некоторая масса вещества (частица). Каждой частице присваивается определенное значение координат Лагранжа, которые в процессе движения не меняются. В качестве координат Лагранжа может быть взято, например, начальное положение частицы или ее массовые координаты в некоторой системе отсчета, или просто номер частицы. Таким образом, уравнения в форме Лагранжа позволяют проследить изменение величин P , ρ , E , U_x , U_y , U_z в некоторой движущейся частице вещества с лагранжевыми координатами a , b , c в

зависимости от времени t . Очевидно, что эйлеровы координаты этой частицы меняются с течением времени. Эти изменения определяются уравнениями

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t).$$

Выразим производные по x, y, z некоторой функции $f(x, y, z, t)$ через производные по a, b, c . В результате получим систему трех линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a}, \\ \frac{\partial f}{\partial b} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial b}, \\ \frac{\partial f}{\partial c} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial c}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В системе уравнений (2.1) производные по a, b, c известны, поскольку известны зависимости x, y, z от a, b, c . Производные $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ являются решением

системы уравнений (2.1) и выражаются через производные $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}, \frac{\partial f}{\partial c}$ следующим образом

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{D_0} \left(D_{x1} \frac{\partial f}{\partial a} - D_{x2} \frac{\partial f}{\partial b} + D_{x3} \frac{\partial f}{\partial c} \right), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{D_0} \left(D_{y1} \frac{\partial f}{\partial a} - D_{y2} \frac{\partial f}{\partial b} + D_{y3} \frac{\partial f}{\partial c} \right), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{D_0} \left(D_{z1} \frac{\partial f}{\partial a} - D_{z2} \frac{\partial f}{\partial b} + D_{z3} \frac{\partial f}{\partial c} \right), \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} D_{x1} &= \frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial y}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial b}, & D_{x2} &= \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial y}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial a}, & D_{x3} &= \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial z}{\partial a}, \\ D_{y1} &= \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial b}, & D_{y2} &= \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial a}, & D_{y3} &= \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial z}{\partial a}, \end{aligned}$$

$$D_{z1} = \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial y}{\partial b}, \quad D_{z2} = \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial y}{\partial a}, \quad D_{z3} = \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial a},$$

$$D_0 = \frac{\partial x}{\partial a} D_{x1} - \frac{\partial x}{\partial b} D_{x2} + \frac{\partial x}{\partial c} D_{x3}.$$

Таким образом, $\text{div} \bar{f}$ и $\text{grad} \varphi$ в лагранжевых переменных приобретают вид

$$\text{div} \bar{f} = \frac{1}{D_0} \left(D_{x1} \frac{\partial f_x}{\partial a} - D_{x2} \frac{\partial f_x}{\partial b} + D_{x3} \frac{\partial f_x}{\partial c} - \right.$$

$$\left. - D_{y1} \frac{\partial f_y}{\partial a} + D_{y2} \frac{\partial f_y}{\partial b} - D_{y3} \frac{\partial f_y}{\partial c} + \right.$$

$$\left. + D_{z1} \frac{\partial f_z}{\partial a} - D_{z2} \frac{\partial f_z}{\partial b} + D_{z3} \frac{\partial f_z}{\partial c} \right), \quad (2.5)$$

$$\text{grad} \varphi = \frac{1}{D_0} \left(\left(D_{x1} \frac{\partial \varphi}{\partial a} - D_{x2} \frac{\partial \varphi}{\partial b} + D_{x3} \frac{\partial \varphi}{\partial c} \right) \bar{i} - \right.$$

$$\left. - \left(D_{y1} \frac{\partial \varphi}{\partial a} - D_{y2} \frac{\partial \varphi}{\partial b} + D_{y3} \frac{\partial \varphi}{\partial c} \right) \bar{j} + \right.$$

$$\left. + \left(D_{z1} \frac{\partial \varphi}{\partial a} - D_{z2} \frac{\partial \varphi}{\partial b} + D_{z3} \frac{\partial \varphi}{\partial c} \right) \bar{k} \right). \quad (2.6)$$

Рассмотрим полную производную функции $f(t, x, y, z)$ вдоль некоторого направления, определяемого производными $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$

$$\left(\frac{df}{dt} \right)_{x_0 y_0 z_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{xyz} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{tyz} \left(\frac{dx}{dt} \right)_{x_0 y_0 z_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{txz} \left(\frac{dy}{dt} \right)_{x_0 y_0 z_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{txy} \left(\frac{dz}{dt} \right)_{x_0 y_0 z_0}. \quad (2.7)$$

Вдоль линии тока, определяемой уравнениями

$$dx = U_x dt, \quad dy = U_y dt, \quad dz = U_z dt,$$

производная df/dt является скоростью изменения характеристики f частицы вещества (субстанции). Поэтому производная (2.7), записанная в виде

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{xyz} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{tyz} U_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{txz} U_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{txy} U_z, \quad (2.8)$$

является субстациональной производной. Условие постоянства лагранжевой координаты a вдоль линии тока имеет вид

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} U_x + \frac{\partial a}{\partial y} U_y + \frac{\partial a}{\partial z} U_z = 0.$$

Точно такой же вид имеют уравнения для лагранжевых координат v и s .

§2. Закон сохранения массы

В пространстве x, y, z рассмотрим произвольно взятый объем Ω , в котором отсутствуют разрывы. В некоторый момент времени t_0 масса вещества, находящегося в этом объеме, равна

$$M = \int_{\Omega} \rho d\Omega,$$

где плотность ρ есть функция аргументов x, y, z, t . Скорость изменения плотности в каждой точке объема Ω есть $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{xyz}$ и, следовательно, изменение массы

вещества за время Δt в объеме Ω равно

$$\Delta M = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt d\Omega. \quad (2.9)$$

Будем считать, что источников массы нет, и единственной причиной изменения массы в объеме Ω является поток вещества через поверхность F , ограничивающую объем Ω . Поток вещества за время Δt через всю поверхность равен

$$\Delta M = - \int_F \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \rho \bar{U} \cdot d\bar{F} dt. \quad (2.10)$$

Заменяя в (2.10) с помощью теоремы Остроградского-Гаусса поверхностный интеграл объемным интегралом, получим

$$\Delta M = - \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \operatorname{div} \rho \bar{U} d\Omega dt. \quad (2.11)$$

Из равенства ΔM в (2.9) и (2.11) следует

$$\int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{U} \right) d\Omega dt = 0.$$

Поскольку объем Ω и промежуток времени Δt являются произвольными, то подынтегральная функция равна нулю

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{U} = 0. \quad (2.12)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (1.19), полученным путем рассмотрения дилатации сплошной среды. Закон сохранения массы в форме (2.12) называется уравнением неразрывности.

§3. Закон сохранения количества движения идеальной среды

Вещество, находящееся в объеме Ω в момент t_0 , имеет количество движения $\bar{K} = \int_{\Omega} \rho \bar{U} d\Omega$. Величина $\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{U})$ есть скорость изменения вектора $\rho \bar{U}$ в каждой точке объема Ω . Если эта величина отлична от нуля, то за время Δt количество движения в рассматриваемом объеме изменится на величину

$$\Delta \bar{K} = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{U}) d\Omega dt. \quad (2.13)$$

Поскольку в объеме Ω нет источников, то указанное изменение количества движения произошло по следующим причинам:

а) из-за потока количества движения через поверхность F

$$\bar{J}_1 = - \int_F \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \rho \bar{U} (\bar{U} \cdot d\bar{F}) dt,$$

в) из-за импульса поверхностных сил, действующих на поверхности F

$$\bar{J}_2 = - \int_F \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} P d\bar{F} dt.$$

Из всех поверхностных сил в выражение для импульса входит только давление P , поскольку мы рассматриваем идеальную среду.

Применяя теорему Остроградского-Гаусса к \bar{J}_1 и \bar{J}_2 , получим для их суммы выражение

$$\bar{J}_1 + \bar{J}_2 = - \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \left[\bar{U} \operatorname{div}(\rho \bar{U}) + \rho \left(U_x \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + U_y \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + U_z \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) + \operatorname{grad} P \right] d\Omega dt. \quad (2.14)$$

Приравнявая затем изменение количества движения $\Delta \bar{K}$ (2.13) импульсу давления и потоку через внешнюю поверхность (2.14) и принимая во внимание произвольность Ω и Δt , получим закон сохранения количества движения в векторной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{U}) + \bar{U} \operatorname{div}(\rho \bar{U}) + \rho \left(U_x \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + U_y \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + U_z \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) + \operatorname{grad} P = 0. \quad (2.15)$$

§4. Закон сохранения энергии идеальной среды

Пусть ε – энергия единицы массы вещества. Тогда $\rho\varepsilon$ – энергия вещества, находящегося в единичном объеме. За время Δt энергия в объеме Ω изменится на величину

$$\Delta Q = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) d\Omega dt. \quad (2.16)$$

Если в объеме Ω отсутствуют источники энергии, то это изменение энергии определяется:

1. Энергией, которую приносит втекающая в объем Ω за время Δt среда.
2. Работой поверхностных сил за время Δt на поверхности F , ограничивающей объем Ω .
3. Энергией, которая передается веществу, находящемуся в объеме Ω , окружающими частицами вещества вследствие теплопередачи.

Математически эти причины изменения энергии в объеме Ω записываются следующим образом

$$\Delta Q = - \int_F \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left[\rho \varepsilon \bar{U} + P \bar{U} - K \frac{\partial T}{\partial n} \bar{n} \right] d\bar{F} dt.$$

Здесь K - коэффициент теплопроводности, T - температура. Применяя теорему Остроградского-Гаусса, запишем это выражение в виде

$$\Delta Q = - \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} [\operatorname{div}(\rho \varepsilon \bar{U} + P \bar{U}) - \operatorname{div}(K \operatorname{grad} T)] d\Omega dt. \quad (2.17)$$

Приравнявая оба выражения ΔQ (2.16) и (2.17) и принимая во внимание произвольность Ω и Δt , приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \operatorname{div}(\rho \varepsilon \bar{U} + P \bar{U}) - \operatorname{div}(K \operatorname{grad} T) = 0, \quad (2.18)$$

которое является дифференциальной формой закона сохранения энергии и называется **уравнением энергии идеальной среды**.

§5. Законы сохранения в лагранжевых координатах

Законы сохранения в (2.12), (2.15), (2.18) могут быть записаны в лагранжевых координатах с помощью уравнений (2.1)-(2.6). Необходимым условием такой записи является введение лагранжевых координат. Однако, на практике переход к лагранжевым координатам осуществляется лишь частично. При этом используется только свойство лагранжевой координаты сохраняться вдоль траектории материальной частицы. Поэтому в уравнениях (2.12), (2.15) и (2.18) члены группируются с целью образования субстациональных производных. В оставшихся членах сохраняются производные по пространственным эйлеровым переменным. Такой прием не требует конкретного определения лагранжевых переменных a, b, c .

Преобразуем уравнение (2.12) к виду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + U_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + U_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \operatorname{div} \bar{U} = 0. \quad (2.19)$$

Первых четыре члена в этом уравнении есть субстациональная производная плотности. Используя (2.8), запишем (2.19) в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\bar{U} = 0. \quad (2.20)$$

Поскольку вдоль траектории каждой частицы сохраняются ее лагранжевы координаты, то полная производная ρ в уравнении (2.20) является частной производной ρ в лагранжевых координатах

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} \right)_{abc}.$$

Если от ρ перейти к удельному объему $V = \frac{1}{\rho}$, то уравнение (2.20) примет вид

$$\frac{dV}{dt} - V \operatorname{div}\bar{U} = 0. \quad (2.21)$$

С помощью выражения субстациональной производной (2.8) запишем уравнения (2.15) и (2.18) в виде

$$\frac{d\rho\bar{U}}{dt} + \rho\bar{U} \operatorname{div}\bar{U} + \operatorname{grad}P = 0, \quad (2.22)$$

$$\frac{d\rho\varepsilon}{dt} + \rho\varepsilon \operatorname{div}\bar{U} + \operatorname{div}P\bar{U} - \operatorname{div}(K \operatorname{grad}T) = 0, \quad (2.23)$$

где

$$\frac{d\rho\bar{U}}{dt} = \left(\frac{\partial\rho\bar{U}}{\partial t} \right)_{abc}, \quad \frac{d\rho\varepsilon}{dt} = \left(\frac{\partial\rho\varepsilon}{\partial t} \right)_{abc}.$$

В случае отсутствия теплопроводности уравнение энергии идеальной сплошной среды принимает вид

$$\frac{d\rho\varepsilon}{dt} + \rho\varepsilon \operatorname{div}\bar{U} + \operatorname{div}P\bar{U} = 0. \quad (2.24)$$

§6. Следствия законов сохранения идеальной среды

Продифференцировав почленно первое и второе слагаемые в уравнении (2.22) и от полученного уравнения отняв (2.20), получим первое следствие законов сохранения массы и количества движения

$$\rho \frac{d\bar{U}}{dt} + \text{grad}P = 0. \quad (2.25)$$

Перейдем теперь к закону сохранения энергии. Продифференцировав почленно первое и третье слагаемые в (2.23) и отняв уравнение (2.20), умноженное на ε , получим второе следствие системы законов сохранения

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + \text{div}P\bar{U} - \text{div}(K \text{ grad}T) = 0. \quad (2.26)$$

Будем считать, что удельная энергия ε равна сумме удельной внутренней энергии E и удельной кинетической энергии $0,5\bar{U}^2$

$$\varepsilon = E + 0,5\bar{U}^2.$$

Подставив ε в (2.26), почленно продифференцировав первое и второе слагаемые и отняв уравнение (2.25), умноженное на \bar{U} , получим третье следствие системы законов сохранения

$$\rho \frac{dE}{dt} + P \text{div}\bar{U} - \text{div}(K \text{ grad}T) = 0. \quad (2.27)$$

Из (2.20) и (2.27) следует еще одно уравнение

$$\frac{dE}{dt} - \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} - \frac{1}{\rho} \text{div}(K \text{ grad}T) = 0.$$

Если от ρ перейти к V , то это уравнение принимает вид

$$\frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} = V \text{div}(K \text{ grad}T). \quad (2.28)$$

Сравним уравнение (2.28) со следствием второго закона термодинамики

$$\frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} = T \frac{dS}{dt}. \quad (2.29)$$

Из (2.28) и (2.29) следует

$$T \frac{dS}{dt} = \operatorname{div} \bar{q},$$

где $\bar{q} = K \operatorname{grad} T$ – тепловой поток. Поскольку $\operatorname{div} \bar{q}$ может принимать и положительные, и отрицательные значения, то знак $\frac{dS}{dt}$ может быть любым.

В адиабатических процессах теплопроводность отсутствует, т.е.

$$\operatorname{div} \bar{q} = 0.$$

В этом случае вдоль траектории каждой частицы выполняется закон сохранения энтропии в виде

$$\frac{dS}{dt} = 0. \quad (2.30)$$

Уравнение (2.30) называют часто дополнительным законом сохранения энтропии. Течения, удовлетворяющие уравнению (2.30), называются адиабатическими.

Уравнение (2.30) в силу определения субстациональной производной (2.8) имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + U_x \frac{\partial S}{\partial x} + U_y \frac{\partial S}{\partial y} + U_z \frac{\partial S}{\partial z} = 0.$$

Течения, у которых выполняется не только (2.30), но также и

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial z} = 0,$$

называются изэнтропическими.

§7. Закон сохранения количества движения неидеальной среды

В случае неидеальной среды напряжения на поверхности \bar{F} описываются тензором напряжений T_{σ} , вследствие чего импульс поверхностных сил, действующих на поверхности F , определяется выражением

$$\bar{J}_2 = - \int_F \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (\bar{\sigma}_x dF_x + \bar{\sigma}_y dF_y + \bar{\sigma}_z dF_z) dt,$$

где $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z$ – три компоненты силы $\bar{\Pi}$, действующие на площадках dF_x, dF_y, dF_z .

Для неидеальной среды изменение количества движения в объеме Ω и поток количества движения через ограничивающую объем Ω поверхность F такие же, как и для идеальной среды

$$\Delta \bar{K} = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{U}) d\Omega dt, \quad \bar{J}_1 = - \int_F \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \rho \bar{U} (\bar{U} \cdot d\bar{F}) dt.$$

Сложив \bar{J}_1 и \bar{J}_2 , приравняв эту сумму значению $\Delta \bar{K}$ и применив теорему Остроградского-Гаусса получим, как и выше, закон сохранения количества движения в виде

$$\frac{\partial \rho \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{U} U_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{U} U_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{U} U_z}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} = 0.$$

С помощью уравнения субстациональной производной преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{d\rho \bar{U}}{dt} + \rho \bar{U} \text{div} \bar{U} + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} = 0.$$

Почленно продифференцируем $\rho \bar{U}$ и, используя закон сохранения массы в виде (2.12), упростим это уравнение. Далее примем во внимание, что тензор напряжений T_σ представляется в виде суммы шарового тензора напряжений $T_{1\sigma}$ и девиатора напряжений D_σ . Заменяв σ на $S + P$, получим уравнение движения в виде

$$\rho \frac{d\bar{U}}{dt} + \text{grad}P + \left(\frac{\partial \bar{S}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{S}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{S}_z}{\partial z} \right) = 0, \quad (2.31)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{S}_x &= S_{xx} \bar{i} + \tau_{xy} \bar{j} + \tau_{xz} \bar{k}, \\ \bar{S}_y &= \tau_{yx} \bar{i} + S_{yy} \bar{j} + \tau_{yz} \bar{k}, \\ \bar{S}_z &= \tau_{zx} \bar{i} + \tau_{zy} \bar{j} + S_{zz} \bar{k}.\end{aligned}$$

Уравнение движения (2.31) содержит в качестве составной части уравнение движения идеальной среды и переходит в него непрерывно при $\bar{S}_x \rightarrow 0$, $\bar{S}_y \rightarrow 0$, $\bar{S}_z \rightarrow 0$. Векторное уравнение движения (2.31) можно расщепить на три скалярных

$$\begin{aligned}\rho \frac{dU_x}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dU_y}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dU_z}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial S_{zz}}{\partial z}.\end{aligned}\quad (2.32)$$

§8. Закон сохранения энергии неидеальной среды

Для неидеальной среды приток энергии ΔQ_2 в объем Ω через его границы и работа ΔA напряжений на поверхности F определяются выражением

$$\Delta Q_2 + \Delta A = - \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \left(\int_F (\rho \varepsilon \bar{U} - \bar{q}) d\bar{F} + \int_F (\bar{\sigma}_x \bar{U} dF_x + \bar{\sigma}_y \bar{U} dF_y + \bar{\sigma}_z \bar{U} dF_z) \right) dt. \quad (2.33)$$

Применив в (2.33) теорему Остроградского-Гаусса, приравняв ΔQ (2.16) и $\Delta Q_2 + \Delta A$ в (2.33) и приравняв нулю подынтегральную функцию, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \text{div}(\rho \varepsilon \bar{U} - \bar{q}) + \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx} U_x + \tau_{xy} U_y + \tau_{xz} U_z) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} U_x + \sigma_{yy} U_y + \tau_{yz} U_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} U_x + \tau_{zy} U_y + \sigma_{zz} U_z) = 0.\end{aligned}\quad (2.34)$$

Уравнение (2.34) выражает закон сохранения энергии в неидеальной среде в дифференциальной форме. Воспользуемся представлением тензора напряжений в виде суммы шарового тензора и девиатора и запишем (2.34) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \operatorname{div}((\rho\varepsilon + P)\bar{U} - \bar{q}) + \frac{\partial}{\partial x}(S_{xx}U_x + \tau_{xy}U_y + \tau_{xz}U_z) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}U_x + S_{yy}U_y + \tau_{yz}U_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}U_x + \tau_{zy}U_y + S_{zz}U_z) = 0. \end{aligned}$$

Преобразуем закон сохранения энергии к уравнению энергии. Из законов сохранения массы и энергии следует

$$\begin{aligned} & \rho \frac{d\varepsilon}{dt} + \operatorname{div}(P\bar{U} - \bar{q}) + \frac{\partial}{\partial x}(S_{xx}U_x + \tau_{xy}U_y + \tau_{xz}U_z) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}U_x + S_{yy}U_y + \tau_{yz}U_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}U_x + \tau_{zy}U_y + S_{zz}U_z) = 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Подставим сюда $\varepsilon = E + \frac{1}{2}\bar{U}^2$ и запишем (2.35) в виде

$$\rho \frac{dE}{dt} + P \operatorname{div}\bar{U} - \operatorname{div}\bar{q} + A + B_x + B_y + B_z = 0,$$

где

$$\begin{aligned} A &= \bar{S}_x \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{S}_y \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \bar{S}_z \frac{\partial \bar{U}}{\partial z}, \\ B_x &= U_x \left(\rho \frac{dU_x}{dt} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right), \\ B_y &= U_y \left(\rho \frac{dU_y}{dt} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right), \\ B_z &= U_z \left(\rho \frac{dU_z}{dt} + \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Из (2.32) следует, что $B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = 0$. Кроме того, заменим $\operatorname{div}\bar{U}$ с помощью (2.21) на $\frac{dV}{dt}$. В результате получим

$$\frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho} \left(\bar{S}_x \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{S}_y \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \bar{S}_z \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) + \operatorname{div}\bar{q}. \quad (2.36)$$

В случае равенства нулю дивергента тензора напряжений уравнение (2.36) совпадает с уравнением энергии идеальной среды. Такое представление уравнения энергии является важным шагом на пути построения математических моделей, применимых в широком диапазоне изменения термодинамических величин. Сама форма уравнения предполагает единство подходов к описанию поведения среды как в области малых напряжений и температур, так и в области высоких давлений и температур и дает возможность описывать поведение среды в переходных областях от твердого тела к жидкости и от жидкости к газу или плазме. Уравнение энергии выражает фундаментальные свойства сплошной среды, поскольку не содержит величин, зависящих от свойств конкретного вещества.

§9. Законы сохранения идеальной среды для одномерных движений

Многие движения сплошной среды могут с большой точностью рассматриваться как одномерные, т.е. такие, когда все искомые функции зависят только от одной пространственной координаты. Пусть такой координатой будет x .

Тогда $\frac{\partial}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, $U_y = U_z = 0$ и уравнения (2.20), (2.25) и (2.26) упрощаются

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \rho \frac{dU}{dt} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \rho \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial(PU)}{\partial x} = 0. \quad (2.37)$$

Соответственно, упрощается и субстанциональная производная

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}.$$

Три уравнения (2.37) связывают 4 неизвестных функции P , ρ , E , U . Четвертым уравнением этой системы является уравнение состояния, например,

$$P = f(\rho, E),$$

где f - некоторая функция. Таким образом, уравнения (2.37) вместе с уравнением состояния образуют систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными.

Движение среды, описываемое уравнениями (2.37), называется **плоским**. Кроме плоских течений встречаются также одномерные движения со сферической симметрией (когда все искомые величины зависят только от расстояния до центра симметрии) и с цилиндрической симметрией (когда все искомые величины зависят только от расстояния до оси симметрии, а скорость ортогональна цилиндрической поверхности). Эти движения описываются уравнениями, отличными от (2.37).

Перейдем к новым координатам r, φ, ψ . Декартовы координаты x, y, z

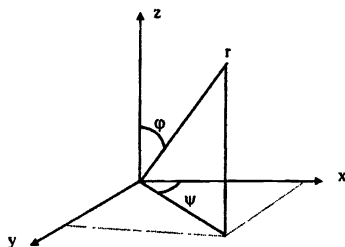


Рис.2.1.

выражаются через новые координаты следующим образом $x = r \sin \varphi \cos \psi$, $y = r \sin \varphi \sin \psi$, $z = r \cos \varphi$.

Поскольку движение является сферически симметричным, то компоненты вектора скорости U_φ и U_ψ равны нулю и только $U_r \neq 0$. Выразим компоненты скорости в

декартовых координатах через U_r, φ и ψ

$$U_x = U_r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi, \quad U_y = U_r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi, \quad U_z = U_r \cdot \cos \varphi.$$

Выразим далее r, φ и ψ через x, y и z

$$\varphi = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \psi = \arctg \frac{y}{x}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.38)$$

Заменяем далее все производные по x, y, z , входящие в уравнения газодинамики, производными по z, φ, ψ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Производные от r, φ, ψ по x, y, z находятся дифференцированием (2.38)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \sin \varphi \cos \psi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi \sin \psi, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{r} \cos \varphi \cos \psi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{r} \cos \varphi \sin \psi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{r} \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\sin \psi}{r \sin \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\cos \psi}{r \sin \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

Подставим эти производные в (2.39) и с помощью полученных выражений преобразуем (2.20), (2.25), (2.26) к виду

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{2\rho U_r}{r} = 0,$$

$$\rho \frac{dU_r}{dt} + \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \quad (2.40)$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial}{\partial r}(P U_r) + \frac{2P U_r}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(K \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{2K}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0.$$

Таким образом, при переходе от плоского случая (уравнения (2.37)) к случаю сферически симметричных движений уравнение движения не меняется, а в уравнении неразрывности и в уравнении энергии появляются дополнительные слагаемые, содержащие r в знаменателе.

Рассмотрим далее цилиндрические координаты r, φ, z . Пусть ось симметрии совпадает с осью Oz , r – расстояние до оси симметрии, а φ есть угол в плоскости x, y , отсчитываемый от оси Ox .

Цилиндрически симметричные движения являются одномерными лишь в случае, когда характеризующие течение величины зависят только от r и не зависят от φ и z . Если же все величины зависят от r и z и не зависят от φ , то течение является двумерным цилиндрически симметричным.

Декартовы координаты x , y и компоненты скорости U_x , U_y выражаются через цилиндрические координаты r , φ и компоненты скорости U_r , $U_\varphi=0$ по формулам

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad U_x = U_r \cos \varphi, \quad (2.41)$$

$$y = r \cdot \sin \varphi, \quad U_y = U_r \sin \varphi.$$

Соответственно, r и φ выражаются через x и y

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}.$$

Производные r и φ по x и y имеют вид

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{r} \sin \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{r} \cos \varphi.$$

Используем эти производные и выразим $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ через $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Подставляя (2.41) и (2.42) в (2.12), (2.15) и (2.18) при $K = 0$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + U_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + U_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial U_r}{\partial r} + \rho \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\rho U_r}{r} &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) + \frac{\partial P}{\partial r} &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial U_z}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial P}{\partial z} &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + U_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{\partial (P U_r)}{\partial r} + \frac{\partial (P U_z)}{\partial z} + \frac{P U_r}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Уравнения (2.43) описывают двумерное цилиндрически симметричное движение. Предположение о том, что искомые функции не зависят не только от φ , но и от z , приводит к упрощению уравнений (2.43)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + U_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\rho U_r}{r} &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial P}{\partial r} &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + \frac{\partial (P U_r)}{\partial r} + \frac{P U_r}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Если ввести коэффициент α , то уравнения (2.44), описывающие одномерные движения идеальной среды при отсутствии теплопроводности, можно записать в общем виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\alpha \rho U_r}{r} = 0, \quad \rho \frac{dU_r}{dt} + \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \quad \rho \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial}{\partial r} (P U_r) + \frac{\alpha P U_r}{r} = 0.$$

Эти уравнения при $\alpha = 0$ описывают движения с плоской симметрией, при $\alpha = 1$ — с цилиндрической симметрией, при $\alpha = 2$ — со сферической симметрией. Объединим вторые и третьи члены в уравнениях неразрывности и энергии и запишем их в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial r^\alpha U_r}{r^\alpha \partial r} = 0, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial r^\alpha P U_r}{\rho r^\alpha \partial r} = 0.$$

Если ввести лагранжеву координату уравнением

$$a = \int_0^r \rho r^\alpha dr$$

и с помощью уравнения

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial r},$$

преобразовать (2.44), то в лагранжевой постановке они примут вид

$$\frac{dV}{dt} - \frac{\partial r^\alpha U_r}{\partial a} = 0, \quad \frac{dU_r}{dt} + r^\alpha \frac{\partial P}{\partial a} = 0, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial r^\alpha P U_r}{\partial a} = 0.$$

§10. Элементы теории уравнений с частными производными

Рассмотрим уравнение, содержащее частные производные функции $\Phi(t, x)$

$$A(x, t) \frac{\partial \Phi}{\partial t} + B(x, t) \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0. \quad (2.45)$$

Если $A \neq 0$ и $B \neq 0$, то в каждой точке плоскости x, t они определяют одно направление, вдоль которого полная производная функции Φ по одному из аргументов равна нулю

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = 0. \quad (2.46)$$

Это направление называется **характеристическим**. Из (2.45) и (2.46) следует, что оно определяется уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \frac{B(x, t)}{A(x, t)}.$$

Линия, которая в каждой точке плоскости x, t имеет характеристическое направление, называется **характеристикой** уравнения (2.45). Если уравнение (2.46) рассматривать вдоль характеристики, то оно принимает вид

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0.$$

Это есть уравнение (2.45) в характеристической форме.

Рассмотрим несколько примеров, демонстрирующих переход к характеристической форме уравнения.

Пример 1. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка в частных производных

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + a \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad (2.47)$$

где $a = \text{const}$. Если сравнить (2.47) с (2.45), то видно, что $A = 1$, $B = a$. Следовательно, характеристики уравнения (2.47) – это прямые линии в плоскости x, t с уравнением

$$\frac{dx}{dt} = a = \text{const}$$

или, что то же самое, с уравнением $x = at + x_0$.

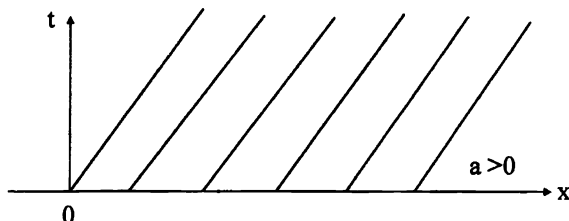


Рис. 2.2. Поле характеристик, вдоль которых переносятся значения Φ .

При $a > 0$ прямые наклонены вправо, при $a < 0$ – влево. Уравнение (2.47) в характеристической форме $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ также можно проинтегрировать

$$\Phi = \text{const.}$$

Таким образом, значение Φ переносится вдоль характеристики, не меняясь, хотя на разных характеристиках значения Φ могут различаться.

Пример 2. Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + b \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} + c \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + f\left(x, t, \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = 0. \quad (2.48)$$

Чтобы записать это уравнение в характеристической форме, преобразуем его, вводя коэффициенты α, β, γ

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + F = 0. \quad (2.49)$$

Коэффициенты α , β , γ должны быть связаны с a , b , c . Чтобы определить эти зависимости, запишем (2.49) в виде

$$\alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + (\beta + \alpha\gamma) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} + \gamma\beta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + F + \quad (2.50)$$

$$+ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) + \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0.$$

Сравнивая (2.50) и (2.48), получаем систему уравнений

$$\alpha = a, \quad \beta + \alpha\gamma = b, \quad \gamma\beta = c,$$

$$F + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) = f.$$

Решая полученную систему, определим α , β и γ

$$\alpha = a, \quad \gamma_{1,2} = \frac{1}{2a} (b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}), \quad \beta = \frac{2ac}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Введем далее величину R так, что

$$R = \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Тогда (2.49) запишется в виде

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \gamma \frac{\partial R}{\partial x} + F = 0. \quad (2.51)$$

Первые два члена этого уравнения совпадают с левой частью уравнения (2.45), следовательно, характеристическое направление определяется коэффициентом γ

$$\frac{dx}{dt} = \gamma_{1,2} = \frac{1}{2a} (b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}).$$

Рассмотрим возможные случаи:

1). $b^2 - 4ac > 0$. В этом случае в каждой точке (x, t) имеется два различных характеристических направления, следовательно, в плоскости x, t имеется два

различных семейства характеристик. Уравнение (2.48) в этом случае называется **уравнением гиперболического типа**.

2). $b^2 - 4ac = 0$. В этом случае имеется одно семейство характеристик (вернее, оба семейства характеристик совпадают) и уравнение (2.48) называется **уравнением параболического типа**.

3). $b^2 - 4ac < 0$. В этом случае в вещественной области нет характеристик и уравнение (2.48) называется **уравнением эллиптического типа**.

Запишем далее уравнение (2.51) в характеристической форме. Для этого воспользуемся выражением для полной производной:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{1,2} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2a}(b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) \frac{\partial}{\partial x}.$$

В результате из (2.51) и выражения для R получим вдоль характеристик первого семейства

$$\left(\frac{d}{dt}\left(a \frac{d\Phi}{dt}\right)\right)_{1,2} + F = 0, \quad (2.52)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = \frac{1}{2a}(b + \sqrt{b^2 - 4ac}), \quad (2.53)$$

и вдоль характеристик второго семейства

$$\left(\frac{d}{dt}\left(a \frac{d\Phi}{dt}\right)\right)_{1,2} + F = 0, \quad (2.54)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = \frac{1}{2a}(b - \sqrt{b^2 - 4ac}). \quad (2.55)$$

Уравнения (2.52) и (2.54) являются уравнениями в характеристической форме, а уравнения (2.53) и (2.55) есть уравнения характеристик.

§11. Уравнения идеальной среды в характеристической форме

Рассмотрим уравнения идеальной среды в эйлеровых координатах в случае плоского адиабатического течения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (2.56)$$

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} + \rho U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad (2.57)$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + P \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad (2.58)$$

$$P = P(\rho, E). \quad (2.59)$$

С помощью уравнения движения преобразуем уравнение энергии (2.58) к виду

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho U \frac{\partial E}{\partial x} + P \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (2.60)$$

Умножим (2.57) на λ , (2.60) на μ (λ и μ пока произвольные функции) и сложим с (2.56)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} + \lambda \rho \frac{\partial U}{\partial t} + (\rho + \lambda \rho U + \mu P) \frac{\partial U}{\partial x} + \\ + \mu \rho \left(\frac{\partial E}{\partial t} + U \frac{\partial E}{\partial x} \right) + \lambda \frac{\partial P}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Полученное уравнение содержит комбинации производных величин ρ , U , E , совпадающие по форме с левой частью (2.45). Что касается функции P , то коэффициент при $\frac{\partial P}{\partial x}$ оказался равным нулю и, в соответствии с §10, для этой величины не может быть выбрано характеристическое направление. Однако, уравнение (2.61) содержит производные трех термодинамических величин, которые связаны уравнением состояния. Дифференцируя P в (2.59) по x , получим

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_E \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_\rho \frac{\partial E}{\partial x}. \quad (2.62)$$

С помощью соотношения (2.62) из (2.61) исключим $\frac{\partial P}{\partial x}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (U + \lambda P_\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \lambda \rho \frac{\partial U}{\partial t} + (\rho + \lambda \rho U + \mu P) \frac{\partial U}{\partial x} +$$

(2.63)

$$+ \mu \rho \frac{\partial E}{\partial t} + (\mu \rho U + \lambda P_E) \frac{\partial E}{\partial x} = 0.$$

Здесь введены обозначения: $P_\rho = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)$, $P_E = \left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)$. Левая часть уравнения

(2.63) содержит производные по направлениям от величин ρ , U и E . Чтобы три направления, определяемые коэффициентами уравнения, совпадали, необходимо, чтобы указанные коэффициенты были пропорциональны

$$\frac{U + \lambda P_\rho}{1} = \frac{\lambda \rho U + \rho + \mu P}{\lambda \rho} = \frac{\mu \rho U + \lambda P_E}{\mu \rho} = \frac{dx}{dt}. \quad (2.64)$$

Таким образом, получаются уравнения для нахождения λ и μ , при которых направления дифференцирования ρ , E , U будут совпадать

$$\lambda (P_E - \mu \rho P_\rho) = 0, \quad \lambda^2 \rho P_\rho - \mu P - \rho = 0. \quad (2.65)$$

Решая систему (2.65), получим

$$\lambda_1 = + \frac{C_s}{P_\rho}, \quad \lambda_2 = - \frac{C_s}{P_\rho}, \quad \lambda_3 = 0, \quad (2.66)$$

где

$$C_s^2 = P_\rho + \frac{P P_E}{\rho^2}.$$

Для значений λ_1 и λ_2

$$\mu_{1,2} = \frac{P_E}{\rho P_\rho}, \quad (2.67)$$

для значения λ_3

$$\mu_3 = - \frac{P}{P}.$$

Подставляя (2.66) и (2.67) в (2.64), получим три различных характеристических направления в каждой точке x, t

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = U + C_s, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = U - C_s, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_3 = U. \quad (2.68)$$

Соответственно, вместо (2.63) получим три уравнения в характеристической форме. Уравнения вдоль первого и второго характеристических направлений (2.68) имеют вид

$$P_\rho \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{1,2} \pm \rho C_s \left(\frac{dU}{dt}\right)_{1,2} + P_E \left(\frac{dE}{dt}\right)_{1,2} = 0, \quad (2.69)$$

где

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_1 = \frac{\partial}{\partial t} + (U + C_s) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \left(\frac{d}{dt}\right)_2 = \frac{\partial}{\partial t} + (U - C_s) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Уравнения вдоль третьего характеристического направления, которое является линией тока, получается из (2.63) при $\lambda_3 = 0$ и $\mu_3 = -\rho/P$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x}\right) - \frac{\rho^2}{P} \left(\frac{\partial E}{\partial t} + U \frac{\partial E}{\partial x}\right) = 0. \quad (2.70)$$

После перехода к производной по третьему характеристическому направлению (2.70) принимает вид

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_3 - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_3 = 0, \quad (2.71)$$

где $\left(\frac{d}{dt}\right)_3 = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}$. Сравнив (2.71) с (2.29), получаем, что вдоль третьего

характеристического направления $\frac{dS}{dt} = 0$ или $S = \text{const}$.

Характеристическая форма (2.69), (2.71) уравнений идеальной сплошной среды не является единственной. Воспользовавшись выражением для производной $\frac{dP}{dt}$

$$\frac{dP}{dt} = P_\rho \frac{d\rho}{dt} + P_E \frac{dE}{dt},$$

можно (2.69) и (2.71) записать в виде:

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_{1,2} \pm \rho C_s \left(\frac{dU}{dt}\right)_{1,2} = 0, \quad (2.72)$$

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_3 - C_s^2 \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_3 = 0.$$

В случае идеального газа

$$P = f(S) \rho^\gamma \quad (2.73)$$

уравнение (2.72) запишем в виде, содержащем $\left(\frac{dC_s}{dt}\right)_{1,2}$. Для этого выразим ρ

через C_s

$$\rho = \left(\frac{C_s^2}{\gamma f(S)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (2.74)$$

и подставим в (2.73)

$$P = \left(\frac{C_s^{2\gamma}}{\gamma^\gamma f(S)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Предположим, что $f(S) = \text{const}$ и продифференцируем P по t

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_{1,2} = \frac{2}{\gamma-1} C_s^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} (\gamma f(s))^{-\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{dC_s}{dt}\right)_{1,2}. \quad (2.75)$$

Подставив (2.74) и (2.75) в (2.72), получим

$$\frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{dC_s}{dt}\right)_{1,2} \pm \left(\frac{dU}{dt}\right)_{1,2} = 0. \quad (2.76)$$

После интегрирования (2.76) получаются уравнения для инвариантов Римана:

$$\alpha = U + \frac{2}{\gamma-1} C_s = \text{const} \quad \text{вдоль характеристики} \quad \frac{dx}{dt} = U + C_s,$$

$$\beta = U - \frac{2}{\gamma - 1} C_s = \text{const} \quad \text{вдоль характеристики} \quad \frac{dx}{dt} = U - C_s.$$

§12. Уравнения идеальной среды в случае малых возмущений

Если в некоторой точке среды слабо изменить хотя бы одну из величин, характеризующих состояние и движение, то это возмущение будет распространяться во все стороны. Рассмотрим дифференциальное уравнение, описывающее малые возмущения. Исходными уравнениями для него являются уравнения неразрывности и движения в эйлеровых координатах и уравнение состояния

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (2.77)$$

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} + \rho U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad (2.78)$$

$$P = P(\rho, S).$$

Рассмотрим производную давления как функцию плотности и энтропии

$$\frac{dP}{dt} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S \frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_\rho \frac{dS}{dt}.$$

Поскольку в изэнтропических движениях

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad \frac{dS}{dt} = 0,$$

то это уравнение упрощается. Далее с помощью (2.77) преобразуем полученное уравнение к виду

$$\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} + \rho C_s^2 \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (2.79)$$

Дополнительно к предположению о постоянстве энтропии сделаем еще два предположения:

а) $C_s^2 = \text{const} = C_0^2,$

б) величины ρ и U имеют вид: $U = \delta U, P = P_0 + \delta P$, где δU и δP малые, $P_0 = \text{const}$.

Эти два условия являются качественной и количественной характеристикой малых возмущений. Если возмущения таковы, что указанные условия выполняются хотя бы приближенно, то эти возмущения можно считать малыми или звуковыми. После сделанных предположений уравнения (2.78) и (2.79) принимают вид:

$$\rho_0 \frac{\partial \delta U}{\partial t} + \frac{\partial \delta P}{\partial x} = 0, \quad (2.80)$$

$$\frac{\partial \delta P}{\partial t} + \rho_0 C_0^2 \frac{\partial \delta U}{\partial x} = 0. \quad (2.81)$$

Продифференцируем второе уравнение по t , первое по x и вычтем их друг из друга, умножив предварительно первое уравнение на C_0^2

$$\frac{\partial^2 \delta P}{\partial t^2} - C_0^2 \frac{\partial^2 \delta P}{\partial x^2} = 0.$$

Это уравнение есть классическое уравнение звуковых колебаний. Здесь под δP подразумевается малое возмущение P . Для δU получается аналогичное уравнение.

При построении характеристических уравнений для системы (2.80), (2.81) поступим так же, как для уравнений (2.56)-(2.58). Умножим (2.80) на неопределенный множитель λ и сложим с (2.81). В результате получим

$$\lambda \rho_0 \frac{\partial \delta U}{\partial t} + \rho_0 C_0^2 \frac{\partial \delta U}{\partial x} + \frac{\partial \delta P}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \delta P}{\partial x} = 0.$$

Из условия совпадения характеристических направлений двух операторов для δU и δP , найдем

$$\lambda_{1,2} = \pm C_0.$$

Таким образом, получаем уравнения в характеристической форме

$$\frac{d\delta P}{dt} \pm \rho_0 C_0 \frac{d\delta U}{dt} = 0 \quad (2.82)$$

вдоль характеристик

$$\frac{dx}{dt} = \pm C_0. \quad (2.83)$$

Поскольку $\rho_0 = \text{const}$, $C_0 = \text{const}$, то уравнения (2.82), (2.83) можно проинтегрировать. После интегрирования получим:

1) вдоль характеристик 1-го семейства

$$x = x_0 + C_0 (t - t_0) \quad (2.84)$$

справедливо уравнение

$$\delta P + \rho_0 C_0 \delta U = \text{const},$$

2) вдоль характеристик 2-го семейства

$$x = x_0 - C_0 (t - t_0) \quad (2.85)$$

справедливо уравнение

$$\delta P - \rho_0 C_0 \delta U = \text{const}.$$

Выразим δP и δU через α и β . Аналогично инвариантам Римана введем инварианты

$$\alpha = \delta U + \frac{1}{\rho_0 C_0} \delta P, \quad \beta = \delta U - \frac{1}{\rho_0 C_0} \delta P. \quad (2.86)$$

$$\delta U = 0,5 (\alpha + \beta), \quad \delta P = 0,5 (\alpha - \beta) \rho_0 C_0. \quad (2.87)$$

С помощью (2.84)-(2.87) проанализируем, как распространяются малые возмущения. Пусть в момент $t = t_0$ заданы малые возмущения δP_0 и δU_0 в виде

$$\begin{aligned} \delta P_0 = 0, \quad \delta U_0 = 0, & \quad \text{при } x < x_1, \\ \delta P_0 = f(x), \quad \delta U_0 = 0, & \quad \text{при } x_1 \leq x \leq x_2, \\ \delta P_0 = 0, \quad \delta U_0 = 0, & \quad \text{при } x_2 < x. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Из (2.86) и (2.88) следует

$$\begin{aligned} \alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 0, & \quad \text{при } x < x_1, \\ \alpha_0 = \frac{f(x)}{\rho_0 C_0}, \quad \beta_0 = -\frac{f(x)}{\rho_0 C_0}, & \quad \text{при } x_1 \leq x \leq x_2, \\ \alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 0, & \quad \text{при } x_2 < x. \end{aligned} \quad (2.89)$$

В некоторый момент $t > t_0$ характеристики, выходящие из точек t_0, x_1 и t_0, x_2 образуют на оси x 5 областей А, В, С, D, Е (Рис. 2.3).

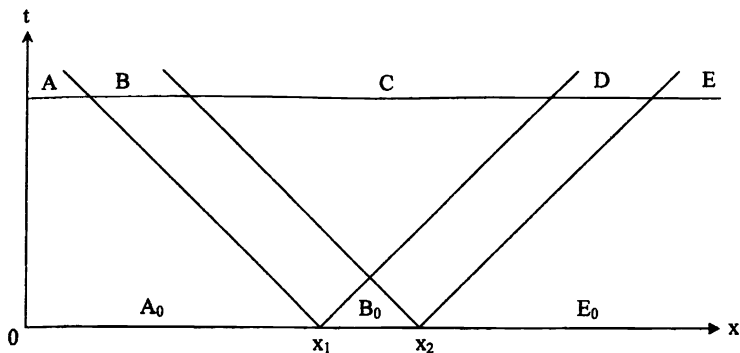


Рис. 2.3. Картина характеристик, разделяющих области постоянного и переменного течения, в плоскости x, t .

В каждую точку области А приходят α и β характеристики, выходящие из точек области A_0 (при $t=0$). Следовательно, в области А $\alpha = \alpha_0 = 0$, $\beta = \beta_0 = 0$ и в соответствии с (2.87) и (2.89) получим $\delta U = 0$, $\delta P = 0$. В каждую точку области В приходит α характеристика из области A_0 , вдоль которой $\alpha = \alpha_0 = 0$ и одна β характеристика из области B_0 , вдоль которой $\beta_0 = -\frac{f(x)}{\rho_0 C_0}$. В соответствии с (2.87)

в этой области получим

$$\delta P = \frac{1}{2} f(x), \quad \delta U = -f(x)/2\rho_0 C_0.$$

В каждую точку области С приходит одна α характеристика из области A_0 с $\alpha = \alpha_0 = 0$ и одна β характеристика из области E_0 с $\beta = \beta_0 = 0$. Подставляя эти значения в (2.87), получим в области С

$$\delta P = 0, \quad \delta U = 0.$$

Аналогично получается решение в области D

$$\delta P = \frac{1}{2} f(x), \quad \delta U = f(x)/2\rho_0 C_0,$$

и в области E

$$\delta P = 0, \quad \delta U = 0.$$

Анализ полученного решения показывает, что начальное возмущение $f(x)$ при $t > 0$ распадается на две одинаковые части: $0,5f(x)$, которые переносятся без изменения вдоль характеристик в противоположных направлениях. Скорость распространения этого возмущения равна наклону характеристики $\frac{dx}{dt} = \pm C_0$. Эта скорость зависит только от свойств среды и не зависит от формы возмущения. Типичными возмущениями для воздуха являются шумы, звуковые сигналы, поэтому величина C получила название **скорость звука**.

Скорость звука, которая определяется по формуле

$$C^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s,$$

является вещественной, при условии

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \geq 0.$$

Все случаи нарушения этого условия требуют специального рассмотрения.

§13. Постановка задач механики сплошной среды

Общую задачу механики сплошной среды можно сформулировать так: определить движение каждой частицы, ее деформацию и внутренние силы (гидродинамическое давление в случае идеальной жидкости), возникающие в каждой точке жидкости в каждый момент движения под воздействием внешних причин.

При решении конкретных задач механики сплошной среды необходимо знать область интегрирования уравнений, в которой должно быть найдено решение, начальное состояние среды (начальные данные) и внешние причины движения среды (граничные условия). Этого, однако, часто оказывается недостаточно, чтобы найти решение. Причиной трудностей является нелинейность уравнений, выражающих законы сохранения. Именно нелинейность

уравнений приводит к образованию в сплошной среде поверхностей разрыва. Разрывы, возникающие даже при сколь угодно гладких начальных данных и граничных условиях, требуют привлечения дополнительных уравнений, связывающих величины в гладких областях по обе стороны разрыва. Образующиеся в среде разрывы могут отличаться друг от друга по своим свойствам. Ниже мы будем рассматривать:

а) сильные разрывы (разрывы всех величин), которые часто называют фронтом ударной волны;

б) слабые разрывы (разрывы первых производных);

в) контактные разрывы (разрывы не всех, а только части искомых величин).

Законы сохранения или их следствия – это система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Для идеальной среды она имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{U} &= 0, \\ \rho \frac{d\bar{U}}{dt} + \operatorname{grad} P &= 0, \\ \frac{dE}{dt} - \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Пять уравнений содержат шесть искомых функций: U_x , U_y , U_z , P , ρ , E . Для замыкания системы нужно добавить еще одно уравнение. Таким уравнением является уравнение состояния вещества

$$P = P(\rho, E).$$

Глава 3. Термодинамические потенциалы и термодинамические уравнения

§1. Термодинамические потенциалы

Уравнения состояния вещества, являющиеся частью определяющих уравнений, замыкающих систему законов сохранения, должны удовлетворять общим законам термодинамики. При выводе термодинамических уравнений и термодинамических неравенств все вопросы будут рассматриваться с позиций их использования при построении уравнений состояния.

Термодинамика занимается рассмотрением макроскопических систем, включающих настолько большое число микрочастиц, что становится возможным перейти к средним по пространству и по времени характеристикам вещества. Вещество в некотором объеме Ω , ограниченном поверхностью F , в зависимости от условий на этой поверхности образует различные термодинамические системы. Вещество или поле, находящееся вне объема Ω , называется окружающей или **внешней средой**. Если на поверхности F , являющейся границей термодинамической системы, совершается работа каких-либо сил, то говорят о механическом взаимодействии термодинамической системы с окружающей средой. Если на поверхности F отличен от нуля поток тепла, то взаимодействие системы с окружающей средой называется **тепловым**. Взаимодействие, которое приводит к обмену веществом между системой и окружающей средой называется **материальным взаимодействием**. Если материальное взаимодействие

отсутствует, то термодинамическая система называется **замкнутой**, а если присутствует, то **открытой**. Если отсутствуют механическое, тепловое и материальное взаимодействия, то система называется **изолированной**.

Важнейшую роль в термодинамике играет понятие термодинамического равновесия системы. Изолированная термодинамическая система независимо от своего начального состояния, в конце концов, приходит в состояние, которое с течением времени не меняется. Это состояние называется **состоянием термодинамического равновесия**.

Система в состоянии термодинамического равновесия характеризуется различными термодинамическими величинами, связанными друг с другом определяющими уравнениями.

Среди термодинамических величин особое место занимают величины, которые называются термодинамическими функциями или термодинамическими потенциалами, изменение которых при изменении состояния является полным дифференциалом. Каждый термодинамический потенциал зависит от конкретного набора независимых термодинамических величин – **аргументов**. Все остальные термодинамические величины являются частными производными термодинамического потенциала по аргументам, а термодинамические уравнения представляют собой общие аналитические зависимости между этими величинами. Термодинамика дает только общие сведения о взаимосвязи термодинамических функций, но не может определить их вид для конкретного вещества.

Чтобы пояснить сказанное выше, рассмотрим подробнее один из термодинамических потенциалов – внутреннюю энергию

$$E = E(V, S), \quad (3.1)$$

где V – удельный объем, S – энтропия. Давление и температура определяются уравнениями

$$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S, \quad T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V. \quad (3.2)$$

С учетом (3.2) полный дифференциал E принимает вид

$$dE = -PdV + TdS. \quad (3.3)$$

Поскольку уравнение (3.1) содержит зависимость энергии от объема, а зависимость энергии от первого и второго инвариантов тензора деформаций отсутствует, то это означает, что уравнения (3.1)-(3.3) применимы для описания лишь идеальной среды.

Кроме внутренней энергии, в термодинамике используются для описания свойств вещества следующие термодинамические потенциалы:

1. Энтропия $S = S(V, E)$.
2. Энтальпия $H = H(P, S) = E + PV$.
3. Свободная энергия Гельмгольца или просто свободная энергия
 $F = F(V, T) = E - TS$.
4. Свободная энергия Гиббса или просто термодинамический потенциал
 $G = G(P, T) = F + PV$.
5. Функция Мазье $\psi = \psi(V, T^{-1}) = -FT^{-1} = S - \frac{E}{T}$.
6. Функция Планка $\Phi = \Phi(P, T^{-1}) = GT^{-1} = \frac{E + PV}{T} - S$.

Термодинамические величины, являющиеся аргументами термодинамических потенциалов, называются естественными независимыми переменными. Если термодинамическая функция задана как функция естественных независимых переменных, то термодинамические свойства вещества определены полностью. Если же она задана как функция другого набора независимых переменных, то для определения всех термодинамических свойств этого недостаточно.

§2. Дифференциальные уравнения термодинамики

Основное уравнение термодинамики

$$TdS = dE + PdV, \quad (3.4)$$

являющееся обобщенной формой обоих начал термодинамики, содержит пять термодинамических функций P , V , E , T , S , определяющих состояние системы. Поскольку уравнение (3.4) содержит три дифференциала, то можно утверждать, что две из термодинамических функций являются независимыми. Чтобы определить три зависимых термодинамических величины, необходимо к уравнению (3.4) добавить еще два уравнения и искать решение полученной таким образом системы трех уравнений с тремя неизвестными. Такими уравнениями могут быть, например, термическое уравнение состояния

$$P = P(V, T), \quad (3.5)$$

связывающее давление, температуру и удельный объем, и калорическое уравнение состояния

$$E = E(V, T), \quad (3.6)$$

связывающее внутреннюю энергию, температуру и удельный объем. Эти три уравнения полностью описывают все свойства системы, находящейся в некотором термодинамическом процессе. Способ исследования систем с помощью трех указанных уравнений является наиболее общим. Поскольку из пяти термодинамических функций P , V , E , T , S любые две могут быть выбраны в качестве независимых, то ни одной из частных производных этих функций нельзя отдать предпочтения перед другими, и для выяснения свойств системы необходимо, вообще говоря, рассматривать все несколько десятков частных производных.

Пусть между величинами x , y , z имеется некоторая зависимость. Предположим, что y и z независимы, тогда

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_y dz. \quad (3.7)$$

Если же предположить, что независимыми являются x и z , то

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_z dx + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x dz. \quad (3.8)$$

Выразим из (3.8) dx

$$dx = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_z} dy - \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x}{\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_z} dz. \quad (3.9)$$

Приравняв частные производные при dy и dz в (3.7) и (3.9), получим

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_z = 1, \quad (3.10)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x = - \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_y. \quad (3.11)$$

Запишем (3.11) в виде

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y + 1 = 0. \quad (3.12)$$

Подставив в (3.10) и (3.12) вместо x , y , z поочередно все термодинамические функции, получим систему дифференциальных уравнений в частных производных, являющуюся частью системы дифференциальных уравнений термодинамики.

Из (3.12) следует 10 уравнений

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_P + 1 = 0, \quad (3.13)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P + 1 = 0, \quad (3.14)$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_V \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_E \left(\frac{\partial V}{\partial E}\right)_P + 1 = 0, \quad (3.15)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P + 1 = 0, \quad (3.16)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_E \left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_S \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_P + 1 = 0, \quad (3.17)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_E \left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_T \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_P + 1 = 0, \quad (3.18)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E \left(\frac{\partial V}{\partial E}\right)_S \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V + 1 = 0, \quad (3.19)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V + 1 = 0, \quad (3.20)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_S \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_E + 1 = 0, \quad (3.21)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_E \left(\frac{\partial V}{\partial E}\right)_T \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V + 1 = 0. \quad (3.22)$$

Достаточно просто можно показать, что любое другое уравнение, следующее из (3.12), будет совпадать с одним из уравнений (3.13)-(3.22).

Рассмотрим теперь сложную зависимость между четырьмя величинами x, y, z, η

$$x = x(y(z, \eta), z). \quad (3.23)$$

Частные производные этой функции имеют вид

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_\eta = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_\eta, \quad (3.24)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)_z. \quad (3.25)$$

Если рассмотреть частные производные сложной зависимости $x = x[y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)]$ между пятью переменными x, y, z, ξ, η

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_{\eta} = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)_{\eta} + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)_{\eta},$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)_{\xi} = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)_{\xi} + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)_{\xi},$$

то легко увидеть, что с помощью (3.25) и (3.10) они приводятся к виду (3.24) и, следовательно, не представляют интереса.

Подставляя в (3.24) и (3.25) поочередно все термодинамические функции, получим большое количество термодинамических уравнений. Какие из этих уравнений вместе с (3.13)-(3.24) выбирать в качестве независимых при нахождении производных, в значительной степени дело вкуса.

Наконец, еще одна группа уравнений получается из условия независимости второй производной термодинамического потенциала от порядка дифференцирования

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial y}. \quad (3.26)$$

Подставляя в (3.26) вместо x поочередно все термодинамические потенциалы, а вместо y, z их естественные независимые переменные, и используя уравнение (3.24), (3.25), получают

– для $H(P, S)$ – уравнение

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_P; \quad (3.27)$$

– для $F(T, V)$ – уравнение

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T; \quad (3.28)$$

– для $G(P, T)$ – уравнение

$$\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_T = -\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P; \quad (3.29)$$

– для $E(V,S)$ – уравнение

$$\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V = -\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S; \quad (3.30)$$

– для $S(V,E)$ – уравнение

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_E = P \left(\frac{\partial T}{\partial E}\right)_V - T \left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_V; \quad (3.31)$$

– для $\psi(V, \frac{1}{T})$ – уравнение

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P; \quad (3.32)$$

– для $\Phi(P, \frac{1}{T})$ – уравнение

$$-T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_T + P \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T. \quad (3.33)$$

§3. Термодинамические коэффициенты

Все указанные 60 производных характеризуют свойства вещества, проявляющиеся в различных термодинамических процессах. Наиболее важные из них выражаются в виде соответствующих термодинамических коэффициентов.

1. Изобарическим температурным коэффициентом объемного расширения α называется относительное изменение объема тела при изменении его температуры на один градус при постоянном давлении

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P. \quad (3.34)$$

Практически для всех известных веществ коэффициент объемного расширения положителен. Иными словами,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P > 0. \quad (3.35)$$

2. Изотермическим коэффициентом сжимаемости тела называется отношение относительного изменения объема к изменению давления при постоянной температуре

$$\beta_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T. \quad (3.36)$$

3. Адиабатическим коэффициентом сжимаемости или просто адиабатической сжимаемостью называется относительное изменение удельного объема при изменении давления на единицу при постоянной энтропии

$$\beta_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_s. \quad (3.37)$$

Величина, обратная β_s , называется модулем упругости или модулем всестороннего сжатия

$$K = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_s = \rho \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s.$$

4. Изохорическим температурным коэффициентом давления называется относительное изменение давления при изменении температуры на один градус при постоянном объеме

$$\sigma = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V. \quad (3.38)$$

5. Адиабатической скоростью распространения звука называется величина

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s}. \quad (3.39)$$

Она указывает, с какой скоростью распространяются малые возмущения в покоящейся среде.

6. Жесткостью вещества называется величина

$$a = \sqrt{-\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_s}, \quad (3.40)$$

характеризующая наклон изэнтроп в плоскости P, V . Она указывает, с какой скоростью перемещаются малые возмущения по веществу в Лагранжевой системе координат $dm = \rho dx$. Жесткость a легко выражается через скорость распространения звука C

$$a = \rho C.$$

Жесткость вещества a при рассмотрении течения в лагранжевых координатах называют скоростью перемещения звука.

7. Изотермической скоростью распространения звука называется величина

$$C_T = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T}. \quad (3.41)$$

Она характеризует скорость распространения малых возмущений в покоящейся среде с постоянной температурой (при очень сильной теплопроводности).

Величина C_T характеризует наклон изотерм в переменных P, ρ .

Модуль упругости K связан с жесткостью a соотношением

$$K = \rho a^2. \quad (3.42)$$

Скорость распространения звука C легко может быть выражена через сжимаемость

$$C = \frac{1}{\sqrt{\rho \beta_s}}. \quad (3.43)$$

Таким образом, чем выше сжимаемость вещества, тем меньше скорость распространения в нем малых возмущений, и наоборот, при уменьшении сжимаемости скорость звука возрастает. В несжимаемых веществах (в ряде случаев можно считать вещества несжимаемыми) величина β_s равна нулю, и, следовательно, малые возмущения распространяются в таком веществе с бесконечной скоростью.

Часть термодинамических величин, например P, T, α, β_s, C могут быть измерены экспериментально в некоторых областях их изменения. Для

определения значений термодинамических величин, которые не поддаются прямому экспериментальному измерению, могут быть использованы соответствующие дифференциальные уравнения термодинамики. Для их применения необходимо знать уравнение состояния вещества.

§4. Термодинамическое равновесие

Говорят, что система находится в термодинамическом равновесии, если ее состояние не меняется с течением времени. Различают два типа равновесия:

механическое, когда во всей системе давление постоянно

$$P(x,y,z) = \text{const}, \quad (3.44)$$

и тепловое, когда во всей системе температура постоянна

$$T(x,y,z) = \text{const}. \quad (3.45)$$

Будем считать, что $T \geq 0$. В таком случае из (3.2) следует, что при $T > 0$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V > 0.$$

Остальные термодинамические функции (V, E, S) могут, вообще говоря, меняться при изменении x, y, z . Продифференцировав приведенные в §1 выражения термодинамических потенциалов, получим, что только дифференциалы энергии Гиббса (термодинамический потенциал) $G = E + PV - TS$ и функции Планка

$\Phi = \frac{E + PV}{T} - S$ приводятся к виду содержащему dP и dT

$$dG = VdP - SdT, \quad d\Phi = \frac{1}{T} \left(VdP - \frac{E + PV}{T} dT \right). \quad (3.46)$$

Из выражений для dG и $d\Phi$ следует, что в состоянии равновесия (теплового и механического) при $dP = 0$, $dT = 0$ термодинамический потенциал и функция Планка постоянны .

$$G = \text{const}, \quad \Phi = \text{const}. \quad (3.47)$$

Равновесное состояние может быть устойчивым или неустойчивым. В термодинамике доказывается, что в состоянии устойчивого равновесия энергия Гиббса минимальна. Следовательно, любые малые возмущения E , V , и S , выводящие систему из состояния устойчивого равновесия P_0 , V_0 , E_0 , S_0 , T_0 , должны удовлетворять неравенству

$$\Delta E + P_0 \Delta V - T_0 \Delta S > 0, \quad (3.48)$$

где $\Delta E = E - E_0$, $\Delta V = V - V_0$, $\Delta S = S - S_0$. Представим малое изменение внутренней энергии $E(V, S)$ в виде ряда Тейлора в точке E_0 , V_0 , S_0

$$\begin{aligned} \Delta E = & \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S \Delta V + \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V \Delta S + \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2} \right)_S \Delta V^2 + 2 \frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S} \Delta V \Delta S + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2} \right)_V \Delta S^2 \right] + \dots, \end{aligned} \quad (3.49)$$

где все производные берутся в равновесном состоянии P_0 , V_0 , E_0 , T_0 , S_0 .

Подставив (3.49) в (3.48), и приняв во внимание, что $T = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V$, $P = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S$,

получим

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2} \right)_S \Delta V^2 + 2 \frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S} \Delta V \Delta S + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2} \right)_V \Delta S^2 > 0. \quad (3.50)$$

Запишем условия положительности этой квадратичной формы при любых ΔV и ΔS .

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2} \right)_S > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2} \right)_V > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2} \right)_S \left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2} \right)_V - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S} \right)^2 > 0. \quad (3.51)$$

Первые два неравенства вместе с определениями T и P дают

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S < 0, \quad (3.52)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_V > 0. \quad (3.53)$$

Третье из неравенств (3.51) запишем в виде

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_v + \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s > 0. \quad (3.54)$$

Заменяем в уравнении (3.54) производную $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s$$

и вынесем общий множитель

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s \left[\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s - \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_v \right] > 0. \quad (3.55)$$

Подставив сюда очередное термодинамическое уравнение

$$\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_v = \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p + \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_v,$$

получим с учетом (3.52) еще одно термодинамическое неравенство

$$\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p > 0. \quad (3.56)$$

Заменяем далее в уравнении (3.54)

$$\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_v = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_v$$

и вынесем общий множитель

$$\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_v \left[\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s - \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s \right] > 0. \quad (3.57)$$

Подставив в (3.57) одно из термодинамических уравнений

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s,$$

получим с учетом (3.53)

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T < 0. \quad (3.58)$$

Запишем (3.52) в виде

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s = \left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_s \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_s < 0. \quad (3.59)$$

Из (3.2) и (3.59) следует еще одно термодинамическое неравенство

$$P \left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_s > 0. \quad (3.60)$$

Запишем далее (3.2) в виде

$$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V. \quad (3.61)$$

Из (3.61) и (3.53) при $T > 0$ следует

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V > 0. \quad (3.62)$$

Остальные термодинамические неравенства будут получены в §7 после рассмотрения теплоемкости и внутренней энергии.

§5. Теплоемкость

Теплоемкостью тела называется отношение количества теплоты, поглощенной телом в некотором термодинамическом процессе, к повышению температуры

$$C = \frac{dQ}{dT}.$$

Теплоемкость выражается в джоулях на градус (дж/град). Отношение теплоемкости C однородного тела к его массе называется удельной массовой теплоемкостью

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}.$$

Она выражается в дж/кг·град. Наряду с удельной теплоемкостью (теплоемкость одного килограмма) можно рассматривать молярную теплоемкость $\tilde{c} = cM$

(дж/к·моль·град) или атомную теплоемкость $\tilde{c} = c\mu$ (дж/кг·атом·град).

Теплоемкость зависит не только от системы, но и от процесса, в котором эта система принимает участие. Нагревание тела, вообще говоря, сопровождается изменением его термодинамических параметров, в частности, удельного объема и давления. Однако, можно указать два таких способа нагревания тела, при которых остаются постоянными либо P , либо V . Если удельную теплоемкость при постоянном объеме обозначить через C_V , удельную теплоемкость при постоянном давлении через C_P , то связь между dQ и dT в обоих процессах примет вид:

$$dQ = C_V dT,$$

$$dQ = C_P dT.$$

Определим вначале связь между теплоемкостями C_P и C_V . Для этого напишем полный дифференциал функции $S(V, T)$ и умножим его на T

$$dQ = TdS = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV.$$

Отсюда следует, что

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V. \quad (3.63)$$

Аналогично, рассматривая зависимость $S(P, T)$, получим

$$C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P. \quad (3.64)$$

Из условий устойчивого равновесия (3.53), (3.56) $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V > 0$, $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P > 0$ следует,

что при $T > 0$

$$C_V > 0, C_P > 0.$$

Это означает, что если тело поглощает тепловую энергию, то его температура повышается. Практически для всех веществ $C > 0$ при движении вдоль

произвольной траектории в пространстве термодинамических функций. Воспользуемся одним из термодинамических уравнений

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P.$$

Умножив это уравнение на T , и используя определения C_V (3.63) и C_P (3.69), получим

$$C_P = C_V + T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P.$$

С помощью уравнения Максвелла (3.28) преобразуем это уравнение к виду

$$C_P = C_V + T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P.$$

Преобразуем это уравнение дальше. Для этого из уравнения (3.14) выразим производную $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V / \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$$

и подставим ее в предыдущее уравнение. В результате проделанных преобразований приходим к уравнению, связывающему C_P и C_V

$$C_P = C_V - T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2 / \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T. \quad (3.65)$$

Поскольку в состоянии устойчивого равновесия $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T < 0$, то из (3.65) следует,

что при $T > 0$

$$C_P > C_V.$$

Воспользуемся далее уравнениями (3.63) и (3.64) и получим отношение C_P к C_V

$$\frac{C_P}{C_V} = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V.$$

Подставив сюда (3.16) и (3.20), получим

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \frac{C_P}{C_V} \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T. \quad (3.66)$$

Поскольку при $T > 0$ $\frac{C_P}{C_V} > 1$, то из (3.66) с учетом (3.52) и (3.58) следует

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S < \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T < 0. \quad (3.67)$$

Неравенство (3.67) означает, что при $T > 0$ наклон изэнтроп к оси Ov является более крутым, чем наклон изотерм. Однако, при $T \rightarrow 0$ наклоны адиабаты и изэнтропы сближаются. Из (3.65) следует, что при $T=0$ $C_P=C_V$ и, значит, $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$. Это, собственно, и есть теорема Нэрнста (1906 г.). Планк

расширил теорему Нэрнста, предположив, что нулевая изотерма совпадает с нулевой изэнтропой (третье начало термодинамики).

Равенство нулю энтропии при $T=0$ связано с квантовой природой реальных систем.

Из теоремы Нэрнста следует, что вдоль нулевой изотермы будет

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = 0, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = 0. \quad (3.68)$$

Подставляя (3.68) в уравнения Максвелла (3.28) и (3.29), получим вдоль нулевой изотермы

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = 0. \quad (3.69)$$

§6. Внутренняя энергия

Выбрав в качестве независимых функций T и V , запишем (3.4) в виде

$$dQ = TdS = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + P\right] dV. \quad (3.70)$$

Отсюда сразу следует, что

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V, \quad T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = P + \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T. \quad (3.71)$$

Из (3.63) и (3.71) следует широко применяемое выражение

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V. \quad (3.72)$$

С помощью уравнения Максвелла (3.28) преобразуем второе из уравнений (3.71) к виду

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P, \quad (3.73)$$

совпадающему с (3.32). Таким образом, нами получены выражения, связывающие

$\left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V$ и $\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T$ с давлением P , температурой T , производной $\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$ и удельной

теплоемкостью C_V .

Подстановка (3.72) и (3.73) в выражение полного дифференциала dE дает

$$dE = C_V dT + \left[T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P \right] dV. \quad (3.74)$$

Это есть общее уравнение, показывающее, как изменяется внутренняя энергия при изменении температуры и удельного объема.

§7. Термодинамические неравенства

Будем считать, что в нормальных веществах коэффициент объемного расширения положителен, т.е. выполнено условие (3.35). Из (3.29) следует еще одно термодинамическое неравенство

$$\left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_T < 0. \quad (3.75)$$

Из уравнения (3.13) выразим $\left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_V$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V = -\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P. \quad (3.76)$$

С помощью правила (3.10) запишем

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P. \quad (3.77)$$

Из (3.37) и неравенств (3.35), (3.56) получим

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P > 0. \quad (3.78)$$

Из (3.76), (3.52) и (3.78) следует

$$\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V > 0. \quad (3.79)$$

Из (3.30) и (3.79) получим еще одно неравенство

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S < 0. \quad (3.80)$$

Запишем далее

$$\left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_V = \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V. \quad (3.81)$$

Из (3.46), (3.70) и (3.81) следует

$$\left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_V > 0. \quad (3.82)$$

Запишем производную $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ в виде

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_V \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V. \quad (3.83)$$

Из (3.62), (3.82) и (3.83) следует

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V > 0. \quad (3.84)$$

Из уравнения Максвелла (3.28) и (3.84) следует

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T > 0. \quad (3.85)$$

Из уравнения Максвелла (3.27) и (3.78) получим еще одно неравенство

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S > 0. \quad (3.86)$$

Рассмотрим теперь производную $\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_P$. Представим ее в виде

$$\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_P = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P.$$

С помощью (3.2) преобразуем это уравнение

$$\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_P = T + P \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P. \quad (3.87)$$

В области $P \geq 0$ в силу (3.78)

$$\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_P \geq 0. \quad (3.88)$$

Равенство в формуле (3.88) имеет место при $T = 0$, $P = 0$, т.е. в точке, где достигается максимально плотная упаковка атомов в кристалле. В области $P < 0$ вблизи нулевой изотермы возможно

$$\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_P < 0.$$

Аналогичная ситуация возникает с некоторыми другими производными, знак которых зависит от знака давления P .

Глава 4. Уравнение состояния

§1. Общие требования

Характеристики сплошной среды, как и характеристики вещества, носят статистический характер и выражают средние свойства ансамблей микрочастиц. Так температура и давление газа пропорциональны средней кинетической энергии его молекул. Связи между характеристиками сплошной среды – термодинамическими функциями называются уравнениями состояния (УРС) термодинамической системы (сплошной среды или вещества). Поскольку термодинамика изучает свойства равновесных систем, то УРС могут описывать изменение состояния вещества со временем только как смену равновесных состояний. Это ограничение носит принципиальный характер.

Информацию о свойствах вещества получают двумя путями:
экспериментально,
с помощью молекулярно-атомных теоретических моделей.

Современные теоретические модели позволяют получить количественные значения свойств веществ в отдельных и, как правило, неперекрывающихся областях фазовой диаграммы изменения термодинамических функций. Обычно эти модели связаны с трудоемкими численными расчетами, а полученная с их помощью информация существует в виде графиков или таблиц ограниченного объема, что затрудняет непосредственное использование этих данных в численном моделировании нестационарных газодинамических процессов. В

связи с этим, при построении широкодиапазонных уравнений состояния используются полуэмпирические модели, в которых общий вид функциональных зависимостей термодинамического потенциала от независимых термодинамических переменных устанавливается с привлечением теоретических представлений, а данные экспериментальных измерений используются для определения численных значений коэффициентов в этих зависимостях. Такой подход позволяет максимально использовать имеющуюся экспериментальную и расчетную информацию и дает возможность построить уравнение состояния в компактной форме, удобной для проведения численных расчетов.

Следует различать среду и вещество. Средой обычно называют материальную субстанцию, заполняющую рассматриваемый объем. В редких случаях среда является одним веществом. Как правило, сплошные среды являются смесями разных веществ. В качестве примера можно указать плазму. Если плазма находится в равновесном состоянии, то ее свойства можно описывать единым уравнением состояния. Если же плазма подвергается воздействию электромагнитного поля, т.е. участвует в неравновесном процессе, то требуется по отдельности рассматривать УРС ионов и УРС электронов, поскольку они по разному реагируют на воздействие электромагнитного поля. Для описания их взаимодействия к системе законов сохранения следует добавить эволюционные уравнения, описывающие релаксацию температур, давлений и скоростей.

Набор свойств вещества, которые необходимо использовать для математического моделирования поведения вещества в широком диапазоне изменения его характеристик, очень большой. Современные модели механики сплошной среды должны описывать такие неустановившиеся движения сжимаемых идеальных и неидеальных сред, в которых свойства среды могут меняться в широком диапазоне от упругих свойств при низких температурах до свойств фотонного газа при высоких температурах. При расчете динамики среды

учитываются адиабатическая сжимаемость, теплопроводность, фазовые переходы (плавление, испарение, полиморфизм), детонация ВВ, упругость, пластичность, хрупкость, разрушение, электропроводимость, магнитные и электрические свойства. Если свойства среды определяются уравнениями не эволюционного типа, то они относятся к уравнениям состояния веществ. Неравновесные свойства описываются уравнениями эволюционного типа, дополняющими систему законов сохранения.

Расчет величин по уравнениям состояния при численном решении нестационарных задач механики сплошной среды достаточно трудоемок и составляет большую часть в общем объеме вычислений. Поэтому при создании УРС большое внимание следует обращать на их экономичность.

Разные физические модели требуют знания разных теплофизических свойств. Однако, есть величины, знание которых нужно в каждой модели независимо от диапазона изменения термодинамических величин. Это, прежде всего, давление P . В газах, жидкостях и плазме, находящихся в равновесном состоянии, давление часто является единственной поверхностной силой. В твердых телах дело обстоит сложнее, поскольку поверхностные силы зависят от ориентации площадок. Однако, несмотря на тензорный характер напряжений и деформаций, в твердом теле связь между P и удельным объемом V принимает вид зависимости между шаровыми частями соответствующих тензоров. Следовательно, построение зависимости $F(P, V, E) = 0$ является основной задачей независимо от применяемой физической и математической модели.

Как показывает практика расчетов на ЭВМ динамики сжимаемых сред, уравнения состояния должны удовлетворять ряду требований.

Уравнение состояния должно точно аппроксимировать экспериментальные и теоретические данные о термодинамических свойствах веществ. Это необходимо для точности математического моделирования динамических процессов. Под точным описанием экспериментальных и теоретических данных

понимается такое описание, когда отклонение УРС от исходных данных не превышает погрешности получения этих данных.

В пределах существования каждой фазы, т.е. в пределах области стабильности и метастабильности, поверхность УРС должна быть непрерывной и гладкой. Это необходимо для успешной реализации численных алгоритмов. Разрывы термодинамических функций или разрывы их производных, т.е. изломы поверхности УРС, приводят к появлению нефизичных колебаний и потере точности численных алгоритмов.

Разрывы термодинамических функций при выходе за пределы области метастабильности или разрывы их производных при выходе за пределы области стабильности фазы, т.е. при фазовых переходах, отражают реальные свойства вещества и они неизбежны. На такие разрывы алгоритм расчета динамики должен реагировать так, чтобы точность расчета сохранялась. В этих случаях метод "размазывания" сильных разрывов недопустим, т.к. он приводит к резкому снижению точности.

В пределах существования каждой фазы уравнение состояния должно удовлетворять общим термодинамическим требованиям устойчивого равновесия (3.52), (3.58), (3.62), (3.75), (3.82), (3.86). При нарушении хотя бы одного из перечисленных неравенств и всех возможных следствий из них состояние вещества становится неустойчивым. В этом случае для определения поведения вещества со временем дополнительно к законам сохранения нужно рассматривать эволюционные уравнения, в соответствии с которыми вещество "выходит" из нестабильных или метастабильных состояний.

Кроме перечисленных условий, уравнение состояния должно отражать тот факт, что вещество невозможно бесконечно сжимать прилагая конечное давление. Это требование имеет вид

$$P \rightarrow +\infty \text{ при } V \rightarrow 0. \quad (4.1)$$

Оно должно выполняться и при изотермическом, и при адиабатическом процессах. Необходимые условия выполнения требования (4.1) имеют вид

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T > 0,$$

или, что то же самое,

$$\left(\frac{\partial^3 E}{\partial V^3}\right)_S < 0, \quad \left(\frac{\partial^3 E}{\partial V^3}\right)_T < 0.$$

Уравнение состояния должно быть широкодиапазонным, поскольку переход в процессе расчета динамики с одного уравнения состояния на другое может привести к появлению нефизических возмущений и к изменению структуры решения задачи. Дело в том, что такие процессы, как плавление, испарение, диссоциация, ионизация делают термодинамическую поверхность сложной по структуре и для ее точного описания простых форм уже недостаточно. Математическая форма УРС становится сложной. Поскольку перечисленные требования противоречивы, то при построении УРС стараются обеспечить разумное сочетание высокой точности, экономичности и широкого диапазона применимости.

§2. Выбор независимых термодинамических переменных

В адиабатических процессах $\frac{dS}{dt} = 0$ и законы сохранения массы, количества движения и энергии содержат три термодинамические величины P , V , E . Внутренняя энергия E зависит от V и S , а давление определяется выражением (3.2) и также является функцией от V и S . Если в уравнениях (3.1) и (3.2) исключить S , то получается уравнение состояния, которое чаще всего используется в виде

$$P = P(V, E).$$

Этого уравнения оказывается достаточно для замыкания системы законов сохранения в адиабатическом случае. Однако, при описании адиабатических течений вещества иногда возникает необходимость определить и температуру. В этом случае уравнение состояния должно содержать уже две функции

$$P = P(V, E), \quad T = T(V, E).$$

Эти функции являются зависимыми. Они должны удовлетворять условию термодинамической совместности (3.31).

Если основные уравнения содержат четыре термодинамических величины P, V, E, T , то в качестве независимых термодинамических переменных чаще всего используют V и T . Уравнения состояния

$$P = P(V, T), \quad E = E(V, T)$$

также являются зависимыми. Они должны удовлетворять условию термодинамической совместности (3.32).

Наконец, если основные уравнения содержат одно из следствий законов сохранения в виде уравнения производства энтропии

$$\frac{dS}{dt} = F(a_i),$$

где a_i – некоторые термодинамические параметры или компоненты тензора деформаций или скоростей деформаций, то в качестве основных величин выбираются V и S . В этом случае уравнение состояния задается в виде

$$E = E(V, S),$$

а значения P и T находятся как частные производные (3.2).

§3. Идеальный газ

Совокупность хаотически движущихся микрочастиц (молекул, атомов, ионов, протонов, электронов и т.д.) называется газом. Каждая микрочастица имеет положительный или отрицательный электрический заряд, величина которого зависит от ее структуры. Эти заряды определяют действующие между

микрочастицами силы притяжения и отталкивания, т.е. энергию взаимодействия, которую называют **потенциальной**. Каждая частица с номером i имеет массу m_i и скорость U_i и, следовательно, обладает кинетической энергией $0,5m_iU_i^2$. Если в любой момент времени определенная по всем, находящимся в некотором объеме, микрочастицам, потенциальная энергия пренебрежимо мала по сравнению с осредненной кинетической энергией, то газ называется **идеальным**. В противном случае газ называется **газом Ван-дер-Ваальса**. Иными словами, идеальный газ можно рассматривать как совокупность невзаимодействующих материальных точек, движущихся прямолинейно с постоянной скоростью до тех пор, пока они не столкнутся со стенками сосуда, в котором находится газ.

Будем считать, что все микрочастицы имеют одинаковую массу m и каждая из них движется со своей скоростью U_i . Внутренняя энергия одного моля идеального газа (выраженная в граммах масса вещества, равная его молекулярному весу) равна

$$E = mN \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} U_i^2 \right), \quad (4.2)$$

где $N = 6,02 \cdot 10^{23}$ 1/моль – число Авогадро, равное числу частиц в одном моле $\mu = mN$ г/моль. После перехода к среднеквадратической скорости

$$U^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_i^2$$

выражение (4.2) для E принимает вид

$$E = \frac{1}{2} \mu U^2.$$

Согласно гипотезе Больцмана средняя кинетическая энергия одноатомной молекулы с массой m пропорциональна абсолютной температуре T

$$\frac{mU^2}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

где $K = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град - постоянная Больцмана. Умножив эту величину на N , получим

$$E = \frac{3}{2} RT,$$

поскольку произведение N и K является универсальной газовой постоянной $NK = R = 8,31$ Дж/моль·град. Если E разделить на μ , то получится энергия одного грамма одноатомного идеального газа

$$E = \frac{1}{2} U^2 = \frac{3}{2} AT \text{ Дж/г.}$$

Величина A Дж/г·град, равная отношению универсальной газовой постоянной R к молекулярному весу μ вещества, называется газовой постоянной одного грамма (или килограмма). Значения этой величины для некоторых газов приводятся в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Вещество	Химическая формула	Молекулярный вес μ , г/моль	Газовая постоянная A , Дж/г·град
Водород	H_2	2,016	4,14
Гелий	He	3,990	2,09
Метан	CH_4	16,08	0,518
Аммиак	NH_3	17,03	0,488
Вода	H_2O	18,016	0,416
Азот	N_2	28,02	0,297
Оксид углерода	CO	28,00	0,297
Воздух	—	28,95	0,288
Кислород	O_2	32,00	0,260

Молекулы газа могут состоять из различного числа атомов. Одноатомная молекула имеет лишь три степени свободы поступательного движения. Двухатомная молекула с неизменным расстоянием между атомами имеет уже

пять степеней свободы: три степени свободы поступательного движения и две степени свободы вращательного движения молекулы вокруг осей, проходящих через ее центр тяжести. Согласно теореме Больцмана, на каждую степень свободы поступательного и вращательного движения приходится в среднем одинаковая энергия равная $0,5KT$. Таким образом, на пять степеней свободы жесткой двухатомной молекулы приходится энергия равная $\frac{5}{2}KT$.

Можно отказаться от жесткой модели двухатомной молекулы и предположить, что атомы совершают колебания вдоль прямой, проходящей через их центры. В этом случае возникает еще одна степень свободы колебательного движения. Колеблющиеся атомы обладают кинетической и потенциальной энергией. Можно утверждать, принимая во внимание несогласованность колебаний в разных молекулах, что кинетическая и потенциальная энергия, приходящиеся на одну степень свободы колебательного движения, равны друг другу и в соответствии с теоремой Больцмана равны $0,5KT$. Таким образом, средняя энергия молекулы двухатомного газа, обладающей тремя степенями свободы поступательного движения, двумя – вращательного и одной – колебательного движения, равна

$$Q = \frac{7}{2}KT.$$

Если молекула имеет три степени свободы поступательного движения, r степеней свободы вращательного и s степеней свободы колебательного движения, то ее средняя энергия выражается формулой

$$Q = \frac{mU^2}{2} = \frac{3+r+2s}{2}KT.$$

Следовательно, энергия N молекул, находящихся в одном моле вещества, равна

$$QN = \frac{3+r+2s}{2}RT \text{ Дж/моль.}$$

Энергия же одного грамма вещества получается после деления QN на μ и, поскольку $mN = \mu$, то E принимает вид

$$E = \frac{1}{2} U^2 = \frac{3+r+2s}{2} AT \text{ Дж/г.} \quad (4.3)$$

Формула (4.3) определяет внутреннюю энергию одного грамма идеального газа, поскольку в идеальном газе отсутствует энергия взаимодействия между молекулами.

Предположим, что r и s не зависят от T . В этом случае из (3.72) и (4.3) получается следующее выражение для удельной теплоемкости C_V идеального газа

$$C_V = \frac{3+r+2s}{2} A. \quad (4.4)$$

Из (4.3) и (4.4) следует выражение для удельной внутренней энергии идеального газа

$$E = C_V T. \quad (4.5)$$

Предположение о независимости числа степеней свободы от температуры приводит к постоянству теплоемкости $C_V = \text{const}$. Но это противоречит следствию из теоремы Нернста о том, что $C_V \rightarrow 0$ при $T \rightarrow 0$. Отмеченное противоречие указывает, что при низких температурах модель идеального газа является неудовлетворительной.

Рассмотрим теперь уравнение для давления идеального газа. Основное уравнение кинетической теории газов для давления, называемое уравнением Клаузиуса, имеет вид

$$P = \frac{1}{3+r+2s} n m U^2, \quad (4.6)$$

где n – число микрочастиц в единице объема, m – масса микрочастицы, U – среднеквадратическая скорость микрочастицы. Произведение m на n равно плотности вещества

$$\rho = n m \text{ г/см}^3.$$

Из (4.3) и (4.6) следуют две формы уравнения состояния идеального газа

$$P = \frac{2}{3+r+2s} \rho E,$$

$$P = A \rho T. \quad (4.7)$$

Чтобы получить теплоемкость C_P рассмотрим уравнение (3.65), которое запишем в виде

$$C_P = C_V - T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T. \quad (4.8)$$

Производные, входящие в (4.8), найдем, дифференцируя (4.7)

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{A}{V}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{V^2}{AT}. \quad (4.9)$$

Подставив (4.9) в (4.8), получим

$$C_P = C_V + A. \quad (4.10)$$

Обозначая отношение $\frac{C_P}{C_V}$ через γ , запишем (4.10) в виде

$$C_V = \frac{A}{\gamma - 1}. \quad (4.11)$$

Исключая из (4.7) и (4.5) температуру T и используя (4.11), получим уравнение состояния идеального газа в виде зависимости между давлением, плотностью и внутренней энергией

$$P = (\gamma - 1) \rho E. \quad (4.12)$$

Если вместо плотности ввести удельный объем, то (4.12) запишется в виде

$$P = \frac{(\gamma - 1)E}{V}. \quad (4.13)$$

Из (4.4) и (4.10) следует выражение для C_P

$$C_P = \frac{5+r+2s}{2} A.$$

Таким образом, отношение удельных теплоемкостей γ принимает вид

$$\gamma = \frac{5+r+2s}{3+r+2s}.$$

Обозначим сумму степеней свободы вращательного и колебательного движения $r + 2S$ через x . По физическому смыслу $x \geq 0$. Т.о. зависимость $\gamma(x)$ является монотонно убывающей функцией, достигающей максимального значения $\gamma = \frac{5}{3}$ при $x = 0$. Из таблицы 4.2, в которой помещены экспериментально определенные значения γ для некоторых газов и паров, видно, что более сложным микрочастицам (с большим значением x) – соответствуют меньшие значения γ .

Таблица 4.2

Значения $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ для некоторых газов.

Газ	γ
Гелий	1,66
Водород	1,41
Азот	1,40
Вода (пар)	1,32
Этилен	1,25

Построим уравнение состояния идеального газа в виде зависимости P от удельного объема V и энтропии S . Для этого в уравнение (3.3) подставим выражения E и T через P и V , полученные из (4.5) и (4.13)

$$E = \frac{PV}{\gamma - 1}, \quad T = \frac{PV}{C_v(\gamma - 1)}.$$

В результате этой подстановки получим уравнение

$$d \ln(PV^\gamma) - \frac{1}{C_v} dS = 0,$$

которое после интегрирования дает зависимость P от V и S

$$P = KV^{-\gamma} e^{\frac{S}{C_v}}$$

Постоянную интегрирования K определим в точке P_0, V_0, S_0 , в которой газ можно считать идеальным. Тогда уравнения состояния примет вид

$$P = P_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^\gamma e^{\frac{S-S_0}{C_v}} \quad (4.14)$$

Согласно теореме Нэрнста минимальное значение энтропии равно нулю. Формально граница области применимости модели идеального газа получается из (4.14) при $S = 0$

$$P_r(V) = P_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^\gamma e^{-\frac{S_0}{C_v}} \quad (4.15)$$

В действительности эта граница лежит существенно выше линии (4.15), поскольку в области малых значений S вещества находятся, как правило, в состоянии твердого тела и модель идеального газа не применима.

Согласно рассмотренной выше классической теории, теплоемкость идеального газа не зависит от температуры. Однако, опыт показывает, что это приблизительно верно лишь для одноатомных газов. Для многоатомных газов теплоемкость при повышении температуры возрастает. Из таблицы 4.3 видно, что для углекислого газа модель идеального газа применима при $T > 1500 - 2000 \text{ К}$.

Таблица 4.3

Зависимость теплоемкости CO_2 от T .

$T, \text{ К}$	270	370	470	770	1470	2270
$\tilde{C}_v \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{град}}$	27,96	32,19	37,84	40,82	44,12	46,47

§4. Уравнение состояния реальных газов

При изучении свойств идеального газа его частицы считались не взаимодействующими. В действительности между молекулами существуют силы взаимодействия (притяжение и отталкивание), проявляющиеся на любых расстояниях. По природе своей – это электрические силы, обусловленные тем, что атомы и молекулы содержат электрически заряженные частицы. Количественно оценить силы взаимодействия между молекулами трудно. Как показывает опыт, силы притяжения и отталкивания очень сильно зависят от расстояний между центрами молекул. Приближенно можно считать, что те и другие обратно пропорциональны расстоянию r между центрами молекул в некоторых степенях. При переходе от отдельных частиц к сплошной среде зависимости сил взаимодействия частиц от расстояния между ними превращаются в зависимости от удельного объема. Уравнения состояния газов, основанные на таких зависимостях, являются приближенными. Но все же они в широком диапазоне давлений и температур точнее УРС идеального газа.

Рассмотрим одно из таких приближенных уравнений состояния. При рассмотрении идеального газа нами было сделано два предположения: а) молекулы газа – точки, объем каждой молекулы равен нулю, и б) молекулы не взаимодействуют друг с другом. Откажемся от первого предположения, то есть будем считать, что газ нельзя сжать до нулевого объема. Иными словами, существует предельное значение удельного объема, которое нельзя уменьшить действием сколь угодно большого давления. Это предельное значение называется коволюмом. Будем считать, что коволюм постоянная величина для каждого газа. Обозначим его через b . Тогда уравнение (4.7) примет вид

$$P(V - b) = \nu RT. \quad (4.16)$$

Подставляя далее производную $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{P}{T}$ в уравнение термодинамической совместности

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P,$$

получим, что E не зависит от удельного объема V .

Из уравнения связывающего C_p и C_v

$$C_p = C_v + T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P,$$

после подстановки производных

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{P}{T}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{A}{P}$$

следует связь C_p и C_v

$$C_p = C_v + A.$$

Поскольку $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, то как и в идеальном газе, $C_v = \frac{A}{\gamma - 1}$. Интегрируя уравнение

(3.72) при $C_v = \text{const}$, получим выражение для E

$$E = C_v T. \quad (4.17)$$

Исключим в (4.16) и (4.17) температуру T и в полученное уравнение подставим выражение для C_v . В результате получим калорическое уравнение состояния

$$P(V - b) = (\gamma - 1)E. \quad (4.18)$$

Изотермы этого газа имеют вид, изображенный на Рис.4.1.

Определим далее изэнтропу рассматриваемого газа. Для этого продифференцируем (4.18), подставим полученное выражение dE в основное термодинамическое уравнение и исключим T с помощью (4.16). В результате получим связь между P , V и S

$$P(V - b)^{\gamma} = f(S), \quad (4.19)$$

где

$$f(S) = P_0(V_0 - b)^{\gamma} e^{\frac{\gamma-1}{A}(S-S_0)}.$$

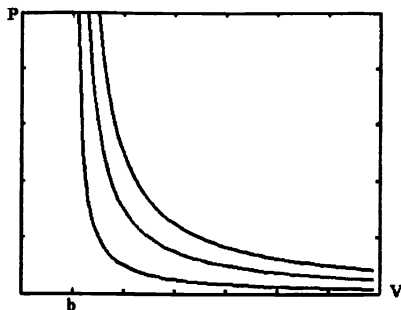


Рис. 4.1. Зависимость от V изотерм реального газа (4.16).

Изэнтропы, описываемые уравнением (4.19), также, как и изотермы, имеют асимптоту $V = b$ в плоскости P, V и $\rho = \frac{1}{b}$ в плоскости P, ρ .

Учтем теперь силы притяжения между молекулами, которые приводят к тому, что давление, оказываемое молекулами газа на стенки сосуда, будет меньше, чем в случае идеального газа, на величину ΔP . Силы притяжения между молекулами тем сильнее, чем ближе молекулы друг к другу, то есть чем выше плотность. Следовательно, можно считать, что ΔP обратно пропорционально V , в некоторой степени. В простейшем случае ΔP имеет вид

$$\Delta P = \frac{a}{V^m}.$$

При $m = 2$ уравнение состояния называется **уравнением Ван-дер-Ваальса**

$$P = \frac{AT}{V - b} - \frac{a}{V^2}. \quad (4.20)$$

Это уравнение удовлетворительно объясняет некоторые экспериментальные факты при давлениях $10^{-2} - 10^{-4}$ ГПа и температурах $T = 400 + 1400\text{K}$.

Рассмотрим изотермы Ван-дер-Ваальса. Уравнение (4.20) запишем в виде

$$V^3 - \left(b + \frac{aT}{P}\right)V^2 + \frac{a}{P}V - \frac{ab}{P} = 0. \quad (4.21)$$

Это уравнение третьей степени при фиксированных P и T имеет три корня (три значения V), причем либо все они вещественные, либо два корня комплексные и один вещественный. Изотермы Ван-дер-Ваальса имеют вид, изображенный на Рис. 4.2. Изотерма T_1 имеет максимум и минимум, так что данному значению P_1 соответствует три значения удельного объема V_A, V_B, V_C . Естественно считать, что минимальному из этих трех значений соответствует жидкое состояние, а максимальному – газообразное. Третье значение корня V_D попадает в область DE , где $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T > 0$ и изотермическая скорость звука оказывается, таким образом, величиной мнимой. Это означает, что состояния, соответствующие точкам кривой на участке DE , физически неустойчивы.

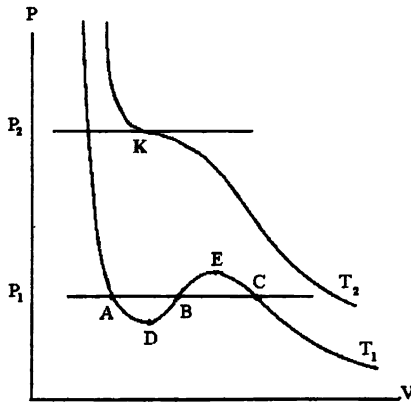


Рис. 4.2. Теоретические изотермы Ван-дер-Ваальса.

Состояния вещества, соответствующие точкам на изотерме T_1 , лежащим на отрезках AD и EC , могут быть осуществлены в особых случаях и не могут существовать сколь угодно долго. Эти состояния называются **метастабильными**.

Приведенные выше рассуждения полностью подтверждаются опытом. Опытные изотермы T_1 и T_2 имеют вид, изображенный на Рис. 4.3. Таким образом, вместо теоретической кривой, имеющей максимум и минимум, опытная кривая имеет горизонтальный участок, означающий что при одном и том же давлении вещество может занимать различный объем. Поскольку точка А (Рис. 4.3) соответствует жидкому состоянию, а точка С – газообразному, то, очевидно, все промежуточные состояния являются двухфазными; в них пар находится в равновесии с жидкостью. Это равновесие возможно только при давлении насыщенного пара, зависящего от T .

Если в качестве давления P , входящего в (4.20), взять давление насыщенного пара P_H , соответствующего температуре T и затем менять T (меняя одновременно P_H), то значения первого корня лягут на некоторую линию A_1B (Рис. 4.3) и значения второго корня – на линию C_1B . Поскольку давление на этих линиях равно давлению насыщенного пара P_H , то левее A_1B , где $P > P_H$ возможно только жидкое состояние, и правее C_1B , где $P < P_H$ – только газообразное.

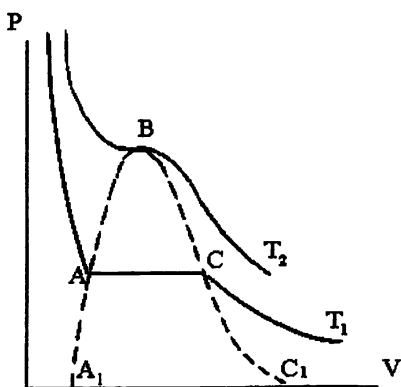


Рис.4.3. Схематическое изображение опытных изотерм $T_1 = \text{const}$ и $T_2 = \text{const}$ в переменных P, V .

Изотерма Ван-дер-Ваальса позволяет определить положение горизонтального участка опытной кривой относительно максимума и минимума

кривой Ван-дер-Ваальса. Как было замечено Максвеллом, переход из состояния А в состояние С по двухфазной прямой при постоянном давлении P_H и переход из А в С по кривой ADBEC (Рис. 4.2) должны сопровождаться одной и той же работой

$$\int_{V_A}^{V_C} P_H dV = \int_{V_A}^{V_C} PdV, \quad (4.22)$$

где $P(V, T)$ определяется уравнением (4.20). Интегрируя (4.22), получим

$$P_H (V_C - V_A) = AT \ln \left(\frac{V_C - b}{V_A - b} \right) + \frac{a}{V_C} - \frac{a}{V_A}, \quad (4.23)$$

где величины V_A и V_C связаны с P_H и T уравнениями

$$P_H = \frac{AT}{V_C - b} - \frac{a}{V_C^2}, \quad P_H = \frac{AT}{V_A - b} - \frac{a}{V_A^2}. \quad (4.24)$$

Выражая V_C и V_A из (4.24) через P_H и T и подставляя их в (4.23), получим уравнение, связывающее P_H и T . Из этого уравнения для каждого фиксированного T определяется соответствующее ему P_H . Таким образом, давление в двухфазной области зависит только от T и не зависит от V .

Из Рис. 4.3 видно, что имеется изотерма, где все три корня совпадают и, следовательно, в точке совпадения корней исчезает различие между жидким и газообразным состоянием. Такая точка В называется **критической точкой**, а величины P , V , T в ней – **критическими величинами**.

Таблица 4.4

Критические параметры некоторых веществ.

Вещество	T_k , К	P_H , бар	ρ_k , г/см ³
Водород	33	13	0,031
Азот	126	34	0.312
Углекислота	304	74	0,162
Вода	547	220	0,40

Критические значения P_k , V_k , T_k легко вычислить. Поскольку в этой точке все три корня совпадают, то, следовательно, уравнение (4.21) должно быть точным кубом

$$V^3 - \left(b + \frac{AT_k}{P_k} \right) V^2 + \frac{a}{P_k} V - \frac{ab}{P_k} = (V - V_k)^3. \quad (4.25)$$

Из (4.25) следует

$$b + \frac{AT_k}{P_k} = 3V_k, \quad \frac{a}{P_k} = 3V_k^2, \quad \frac{ab}{P_k} = V_k^3.$$

Решив эту систему уравнений, получим значения критических параметров, выраженные через a и b

$$P_k = \frac{a}{27b^2}, \quad V_k = 3b, \quad T_k = \frac{8a}{27Ab}.$$

Через критическую точку проходит критическая изотерма, которая отделяет жидкое состояние от газообразного. При температуре выше критической, вещество может находиться только в газообразном состоянии, причем плотность его может достигать очень больших значений.

§5. Другие формы уравнения состояния реальных газов

Рассмотрим уравнение состояния реального газа, отличное от уравнения состояния Ван-дер-Ваальса, в виде

$$P = \frac{AT}{V-b} - a \frac{V - V_{0k}}{V^3}. \quad (4.26)$$

Смысл изменения состоит в том, чтобы нулевая изотерма проходила через точку $P = 0$, $V = V_{0k}$, в которой силы притяжения уравновешивают силы отталкивания при $P = 0$, $T = 0$. Определим производную

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{A}{V-b}$$

и подставим ее в уравнение (3.74). В результате получим уравнение

$$dE = C_v dT + a \frac{V - V_{0k}}{V^3} dV. \quad (4.27)$$

Интегрирование (4.27) дает калорическое уравнение состояния

$$E = C_v T - \frac{a(2V - V_{0k})}{2V^2} + E_0, \quad (4.28)$$

где $E_0 = \text{const}$ постоянная интегрирования. Так как нас интересует в подавляющем большинстве случаев не абсолютное значение внутренней энергии, а ее изменение в различных процессах, то постоянную интегрирования найдем из условия, что $V = V_{0k}$ при $T = 0$, $E = 0$, после чего (4.28) примет вид

$$E = C_v T + \frac{a(V - V_{0k})^2}{2V_{0k} V^2}. \quad (4.29)$$

Из термического (4.26) и калорического (4.29) уравнений состояния следует требуемое уравнение

$$P = \frac{A}{C_v(V-b)} E - a \frac{V - V_{0k}}{V^3} \left(1 + \frac{A(V - V_{0k})V}{C_v(V-b)V_{0k}} \right). \quad (4.30)$$

Из (4.29) и (4.30) видно, что в рассматриваемом реальном газе внутренняя энергия линейно зависит от температуры и, в свою очередь, давление линейно зависит от внутренней энергии.

Перейдем далее к определению энтропии реального газа. Для этого в уравнение

$$dS = \frac{1}{T} dE + \frac{P}{T} dV$$

подставим P из (4.30) и dE из (4.27)

$$dS = \frac{C_v}{T} dT + \frac{A}{V-b} dV.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$S = C_v \ln T(V-b)^{\frac{A}{C_v}} + S_0. \quad (4.31)$$

Это уравнение означает, что энтропия меняется вдоль изотермы и, таким образом, изотермы и изэнтропы должны пересекаться. Уравнение (4.31) можно переписать в виде

$$T(V - b)^{\frac{A}{C_v}} = e^{\frac{s - s_0}{C_v}}.$$

Выразив отсюда T и подставив его в (4.26), получим уравнения изэнтропы реального газа

$$P = f(s)(V - b)^{-\left(\frac{A}{C_v} + 1\right)} - \frac{a(V - V_{0k})}{V^3}, \quad (4.32)$$

$$E = \frac{f(s)C_v}{A}(V - b)^{-\frac{A}{C_v}} + \frac{a(V - V_{0k})^2}{2V_{0k}V^2}, \quad (4.33)$$

где

$$f(s) = Ae^{\frac{s - s_0}{a}}.$$

Эти уравнения имеют смысл только для однофазных состояний. В области под кривой A_1BC_1 (Рис. 4.3), где $P = P(T)$, уравнения изэнтропы будут иметь вид, отличный от (4.32) и (4.33). В этом случае они записываются в неявной форме, поскольку уже зависимость P от T определяется трансцендентным уравнением. Следовательно, в каждом конкретном случае уравнение изэнтропы в двухфазной области должно строиться численным методом. При давлениях выше критического жидкость и газ не отличаются друг от друга, и переход через критическую изотерму происходит непрерывно (внутренняя энергия, энтропия и другие термодинамические величины при таком переходе меняются непрерывно). В области давлений ниже критического фазовый переход имеет ярко выраженный характер. В области A_1BC_1 (Рис. 4.3) жидкость находится в равновесии со своим паром. Поэтому, чтобы при постоянных температуре и давлении $P = P_H$ перевести вещество из точки A в точку C (Рис. 4.3), то есть из жидкого состояния в газообразное, необходимо затратить определенную

энергию. Количество теплоты, необходимой для того, чтобы изотермически испарить один грамм жидкости при давлении насыщенного пара, называется **удельной скрытой теплотой испарения Q**

$$Q = \int_{S_A}^{S_C} T dS = \int_A^C (dE + PdV).$$

Поскольку в процессе фазового перехода $T = \text{const}$, то оказывается

$$Q = T(S_C - S_A) = AT \ln \left(\frac{V_C - b}{V_A - b} \right). \quad (4.34)$$

Таблица 4.5

Удельная теплоемкость, теплота и температура плавления, теплота испарения и температура кипения некоторых веществ при $P = 1 \text{ атм}$.

вещество	удельная теплоемкость $C_p \cdot 10 \frac{\text{Дж}}{\text{г град}}$	температура плавления $^{\circ}\text{C}$	удельная теплота плавления $Q_{\text{п}} \frac{\text{Дж}}{\text{г}}$	температура кипения $^{\circ}\text{C}$	удельная теплота испарения $Q_{\text{и}} \frac{\text{Дж}}{\text{г}}$
Алюминий	0,88	658,7	322+394	2300	9220
Железо	0,457	1530	293	3050	6300
Золото	0,13	1063	66,6	2800	1575
Калий	0,763	64	60,8	760	2080
Лед (вода)	4,19	0	334	100	2260
Литий	4,40	186	628	1317	20500
Магний	1,3	651	373	1103	5450
Медь	0,39	1083	214	2360	5410
Натрий	1,3	98	113	883	4220
Никель	0,46	1452	243-306	3000	7210
Свинец	0,13	327,3	22,5	1750	880
Серебро	0,235	960,8	88	2160	2350

Удельная теплота испарения Q зависит от T , так как V_C и V_A зависят от T . Из (4.34) следует, что при увеличении температуры T удельная теплота испарения

уменьшается, так как $V_C \rightarrow V_K$ и $V_A \rightarrow V_K$ при $T \rightarrow T_K$, то есть разница между V_C и V_A уменьшается при увеличении T . В критической точке $V_A = V_C$ и, следовательно, $Q(T_K) = 0$. При давлениях $P > P_K$ удельная скрытая теплота испарения равна нулю.

Из сказанного выше следует, что испарение вещества при $P < P_K$ приводит:

- 1) к возрастанию энтропии S ($S_C > S_A$),
- 2) к возрастанию удельной внутренней энергии (следует из (4.29)).

Фазовые переходы, сопровождающиеся поглощением или выделением тепла, называются фазовыми переходами первого рода. Они характеризуются скачкообразным изменением ряда свойств веществ: внутренней энергии, удельного объема, энтропии, скорости звука и др. Некоторые величины, например, термодинамический потенциал, при фазовом переходе первого рода скачка не испытывают. К фазовым переходам первого рода относят испарение (конденсацию), плавление (кристаллизацию), многие переходы из одной кристаллической модификации в другую (полиморфные переходы).

Кроме фазовых переходов первого рода, существуют такие фазовые переходы, при которых поглощения или выделения тепла не происходит. Их называют фазовыми переходами второго рода. При фазовых переходах второго рода внутренняя энергия, удельный объем, энтропия, другие величины непрерывны, зато теплоемкости и некоторые термодинамические коэффициенты (скорость звука, сжимаемость, коэффициент теплового расширения и др.) в точке перехода изменяются скачком.

Других фазовых переходов, кроме переходов 1-го и 2-го рода, вообще не существует.

§6. Конденсированное вещество и его свойства

Основной чертой, отличающей твердые и жидкие тела от газов, является сильное взаимодействие между молекулами (атомами). Чтобы сжать газ в

несколько раз, требуется сравнительно небольшое давление порядка нескольких сотен или тысяч атмосфер. Иначе ведут себя при сжатии твердые или жидкие тела. Чтобы сжать такое вещество, необходимо преодолеть силы отталкивания, которые сильно растут при сближении молекул. Сжимаемость, например, металлов намного меньше сжимаемости газов и при нормальных условиях имеет порядок 10^{-6} атм⁻¹. Чтобы сжать металл в два раза, необходимо давление порядка нескольких миллионов атмосфер.

Чаще всего твердое тело или жидкость являются неидеальной средой. Однако, поскольку тензоры напряжений и деформаций делятся на шаровую часть и девиатор, то можно рассматривать по отдельности уравнение состояния, связывающее шаровые части тензоров напряжений и деформаций, и определяющие уравнения, связывающие компоненты девиаторов указанных тензоров. Таким образом, рассматривая уравнение состояния можно специально не указывать, какое тело изучается, твердое или жидкое, а говорить о поведении конденсированного вещества.

В конденсированном веществе расстояние между атомами сравнимо с размерами самих атомов. При низких температурах конденсированное вещество имеет устойчивую кристаллическую структуру. Это означает, что силы притяжения уравновешиваются силами отталкивания. При сжатии межатомные расстояния уменьшаются и возрастают силы отталкивания (конденсированное вещество сопротивляется сжатию). При разрежении межатомные расстояния возрастают и увеличиваются силы притяжения (вещество сопротивляется растяжению).

Основными структурными элементами кристаллов являются ионные остовы и валентные электроны. К ионным остовам относятся ядра и сильно связанные с ними электроны, конфигурация которых практически не изменяется, если изолированный в начале атом окружить другими атомами или ионами. Соответственно, к валентным электронам относят те электроны, конфигурация

которых претерпевает существенные изменения, когда отдельные атомы соединяются, образуя твердое тело. Хотя такое представление является упрощенным, тем не менее, различия в пространственном распределении валентных электронов, в их количестве и их роли позволяют провести классификацию кристаллов по их физическим свойствам.

Все твердые тела делят на металлы и диэлектрики.

Металлы. С ионным остовом жестко связана только часть электронов, разная в разных металлах. Между ионными остовами находится много валентных (свободных) электронов, которые определяют такие свойства, как электропроводность и пластичность.

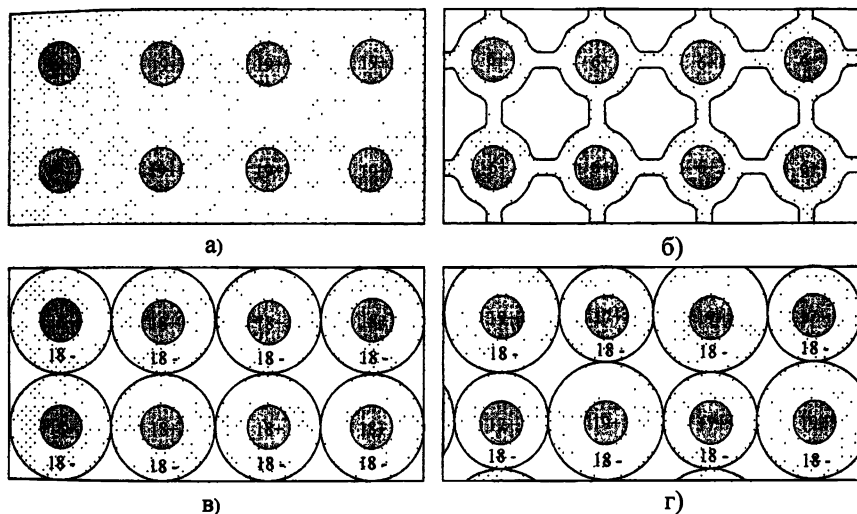


Рис. 4.4. Схематическое двумерное изображение распределения электронов в основных типах твердых тел. Внутренние кружки – ядра, наружные слои – электроны, цифры обозначают величину заряда.

а) металл калий, атомы и свободные электроны; б) ковалентный кристалл, углерод, атомы и валентные электроны предпочтительных направлений; в) молекулярный кристалл аргон, элементы структуры – молекулы; г) ионный кристалл, химическое соединение, хлорид калия, два типа атомов.

Диэлектрики. В диэлектриках все электроны жестко связаны с ионным остовом, но пространственное распределение электронов разное. В зависимости

от пространственного распределения электронов диэлектрики делятся на три типа.

1. **Ковалентные кристаллы.** В ковалентных кристаллах, хотя все элементы и жестко связаны со своим ионным остовом, тем не менее они локализируются вдоль некоторых предпочтительных направлений, что приводит к возникновению ковалентных связей.

2. **Молекулярные кристаллы.** Все электронные оболочки атомов целиком заполнены, то есть все электроны жестко связаны с остовом. Строительными элементами кристалла служат не атомы, а молекулы (например, H_2 , N_2 , инертные газы в твердом состоянии и др.).

3. **Ионные кристаллы.** Сюда относятся химические соединения, образованные металлическим и неметаллическим элементами (например, $NaCl$).

Силы, удерживающие структурные элементы кристалла рядом друг с другом, являются, в основном, силами электростатического характера. При взаимодействии одинаково заряженных структурных элементов между ними возникает сила отталкивания, а при взаимодействии противоположно заряженных элементов – сила притяжения. И те, и другие силы зависят от расстояния между центрами ионных остовов или атомов. Главное различие между ними заключается в направлении действия этих сил. Силы отталкивания положительны, так как направлены в сторону увеличения расстояния от центра атома, то есть от его центра. Силы притяжения отрицательны, так как они направлены в сторону центра атома. И силы притяжения, и силы отталкивания по абсолютной величине растут с уменьшением расстояния между центрами атомов, однако, характер этой зависимости разный. При некотором расстоянии между центрами атомов силы притяжения уравнивают силы отталкивания. При сжатии твердого тела расстояние между атомами уменьшается, силы отталкивания растут быстрее, чем уменьшаются силы притяжения. В результате этого в теле возникает положительное давление. При растяжении твердого тела

из положения равновесия расстояние между атомами увеличивается, силы притяжения увеличиваются быстрее, чем уменьшаются силы отталкивания. В результате этого в теле возникает отрицательное давление. Силы взаимодействия ионных остовов имеют разную природу, определяемую тремя видами связей: межатомными, межмолекулярными и водородными.

1. **Межатомные связи** в свою очередь делятся на три типа:

1.1. **Ионная связь** устанавливается между атомами, имеющими кроме заполненных электронных оболочек валентные электроны, которые могут легко отдавать (щелочные металлы, галогены) или присоединять.

1.2. **Ковалентная связь** возникает в случае, когда атомы обмениваются своими валентными электронами (N_2 , O_2 , CH_4 и др.).

1.3. **Металлическая связь** возникает в случае, если положительно заряженные ионы плотно упаковываются в электронном газе, образованном свободными электронами.

2. **Межмолекулярная связь** (Ван-дер-Ваальсова связь) возникает между молекулами.

3. **Водородная связь** возникает из-за того, что атом водорода способен связывать два отрицательных иона.

За исключением сил Ван-дер-Ваальса, силы притяжения можно рассматривать, как результат стремления атомов достичь устойчивой электронной конфигурации путем приобретения, потери или обобществления валентных электронов. Схематически зависимости сил притяжения и отталкивания от межатомного расстояния изображены на Рис. 4.5.

При определении конкретного вида сил притяжения или отталкивания в конкретном веществе, как правило, неявно подразумевается, что $T = 0$ и атомы покоятся в положениях равновесия. Это соответствует представлениям классической механики о том, что при $T = 0$ в кристалле прекращается всякое

движение. Поэтому зависимость давления P от удельного объема V при $T = 0$ называют "холодной".

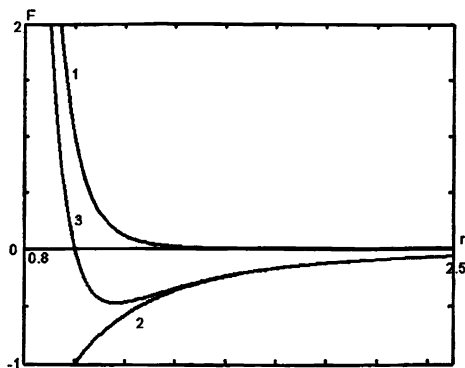


Рис. 4.5. Зависимость сил взаимодействия атомов от расстояния между их центрами: 1 – силы отталкивания; 2 – силы притяжения; 3 – результирующая сил притяжения и сил отталкивания.

В квантовой механике понятие полного покоя лишено физического смысла. Если бы атомы остановились, то это определило бы их скорости и координаты, что противоречит принципу неопределенности. Следовательно, при $T = 0$, атомы должны колебаться возле положений равновесия. Эти колебания называются нулевыми колебаниями.

Кристалл из N атомов эквивалентен приблизительно $3N$ гармоническим осцилляторам. Частота одного осциллятора определяется выражением

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad (4.35)$$

где m – масса осциллятора, K – коэффициент упругости. При $T = 0$ импульс U и смещение осциллятора l минимальны. Выразим l через U из уравнения неопределенности

$$l \approx \frac{h}{2U}$$

и подставим ℓ в выражение энергии осциллятора

$$E = \frac{U^2}{2m} + \frac{K\ell^2}{2}.$$

В результате получим связь E с U в виде

$$E = \frac{U^2}{2m} + \frac{h^2 K}{8U^2}. \quad (4.36)$$

Минимум E достигается при $\frac{dE}{dU} = 0$, т.е. при

$$\frac{U}{m} - \frac{h^2 K}{4U^3} = 0.$$

Отсюда значение импульса, при котором энергия достигает минимума, равно

$$U_M = \left(\frac{h^2 K m}{4} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Подставляя его в (4.36), и используя (4.35) получим минимальную энергию, то есть энергию нулевых колебаний одного осциллятора в виде

$$E_{\text{НК}} = \frac{h\omega_0}{2}.$$

Если все $3N$ частот в кристалле одинаковы (приближение Эйнштейна), то энергия нулевых колебаний кристалла равна

$$E_{\text{НК}} = \frac{3}{2} N h \omega_0.$$

Поскольку частоты могут быть разные, то нужно просуммировать по частотам ω_i

$$E_{\text{НК}} = \sum_{i=0}^{3N} \frac{h\omega_i}{2}.$$

Если предположить, что спектр нулевых колебаний кристалла соответствует теории Дебая, то энергия нулевых колебаний единицы массы примет вид

$$E_{\text{НК}} = \frac{9}{8} \frac{R}{\mu} \theta(V), \quad (4.37)$$

где R – универсальная газовая постоянная, μ – молекулярный вес, θ – дебаевская температура, зависящая от удельного объема. Давление нулевых колебаний равно

$$P_{\text{нк}} = -\frac{9}{8} \frac{R}{\mu} \frac{d\theta(V)}{dV}.$$

Подставив сюда (4.37), получим

$$P_{\text{нк}} = \Gamma_{\text{нк}} \frac{E_{\text{нк}}}{V},$$

где

$$\Gamma_{\text{нк}} = -\frac{d \ln \theta(V)}{d \ln V} \quad (4.38)$$

называется **функцией Грюнайзена**.

При температуре T , отличной от абсолютного нуля, атомы в конденсированном веществе приобретают дополнительную кинетическую энергию, которая увеличивается с ростом температуры. Поскольку эта энергия зависит от температуры, будем называть ее тепловой энергией. Если температура не слишком высока, атомы совершают малые колебания около положения равновесия. При увеличении температуры растет амплитуда колебаний и тепловая энергия, а вместе с ними и количество атомов, перемещающихся по телу. Когда энергия колебаний становится больше величины потенциального барьера, атомы начинают свободно перемещаться по телу. Тепловое движение при этом теряет колебательный характер и становится похожим на хаотическое движение атомов в газах.

Конденсированное вещество начинает вести себя как плотный газ.

Внутренняя энергия E идеального вещества зависит от двух термодинамических функций. Рассмотрим два случая, когда независимыми переменными являются V, S или V, T . Согласно теореме Нернста нулевая изотерма совпадает с нулевой изэнтропой. Следовательно,

$$E_x(V) + E_{\text{нк}}(V) = \lim_{S \rightarrow 0} E(V, S) = \lim_{T \rightarrow 0} E(V, T).$$

Некоторые характеристики металлов при нормальных условиях.

Величина	Al	Cu	Pb
Плотность ρ , г/см ³	2,71	8,93	11,34
Теплоемкость $C_V \cdot 10$, Дж/г·град	8,96	3,82	1,29
Скорость звука C_0 , км/сек	5,20	3,95	1,91
Коэффициент объемного расширения $\alpha \cdot 10^5$, град ⁻¹	2,31	1,65	2,90
Модуль упругости $K_0 \cdot 10^{-5}$, бар	7,32	13,9	4,14
Жесткость $a_0 \cdot 10^{-6}$, г/см·сек	1,41	3,52	2,17

Если тепловая энергия удовлетворяет условию

$$\lim_{T \rightarrow 0} E_T(V, T) = \lim_{S \rightarrow 0} E_T(V, S) = 0,$$

то полная энергия имеет вид

$$E = E_x(V) + E_{\text{нк}}(V) + E_T. \quad (4.39)$$

Из (4.39) и (3.2) следует, что и P представляется в виде суммы

$$P = P_x(V) + P_{\text{нк}}(V) + P_T,$$

где

$$P_x = -\frac{dE_x}{dV}, \quad P_{\text{нк}} = -\frac{dE_{\text{нк}}}{dV}, \quad P_T = -\left(\frac{\partial E_T}{\partial V}\right)_S.$$

Теоретические расчеты зависимостей $P_x(V)$ и $E_x(V)$ в практически достигнутом диапазоне плотностей и давлений основаны на квантовомеханическом рассмотрении взаимодействия атомов. При этом в ряде случаев теоретические результаты удовлетворительно согласуются с опытными данными. Однако, основная информация о кривых холодного сжатия $P_x(V)$ и $E_x(V)$ в диапазоне давлений до нескольких сот ГПа извлекается из обработки экспериментальных данных по ударно-волновой сжимаемости твердых тел.

Поскольку при изменении холодных давления и энергии энтропия остается постоянной, и т.о. холодное сжатие обратимо, то его часто называют упругим.

Механически равновесное состояние конденсированного вещества при $T = 0$ и $P = 0$ характеризуется взаимной компенсацией межуатомных сил притяжения и отталкивания и минимумом холодной энергии $E_x(V)$, который можно принять за начало ее отсчета: $E_x = 0$ при $V = V_{0к}$. Величина $V_{0к}$ характеризует удельный объем кристаллического состояния с максимально плотной упаковкой атомов при температуре $T = 0$ К. Это величина теоретическая. Удельный объем V_0 вещества в нормальных условиях при $T = 300$ К, $P = 0,1$ МПа всегда больше $V_{0к}$ из-за теплового объемного расширения и из-за дефектов кристаллической структуры. Нормальный удельный объем вещества V_0 , как правило, превосходит удельный объем $V_{0к}$ на 1+2%.

§7. Холодная энергия. Холодное давление

Анализ работ, посвященных обоснованию аналитической формы зависимости энергии взаимодействия структурных элементов конденсированного вещества при $T = 0$ от плотности и определению численных значений параметров показывает, что все многообразие уравнений сводится для сил притяжения к степенной зависимости от плотности и либо степенной, либо экспоненциальной зависимости для сил отталкивания. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся зависимости $E_x(\delta)$ и $P_x(\delta)$, где δ – безразмерная плотность.

Для металлов часто используются следующие зависимости E_x и P_x от δ .

$$E_x = aF(\delta) - c\delta^{\frac{1}{3}} + d\delta^{\frac{2}{3}}, \quad (4.40)$$

$$P_x = \frac{1}{3} \rho_{0к} \delta^3 \left(abF(\delta) - c\delta^{\frac{2}{3}} + 2d\delta \right), \quad (4.41)$$

где $F(\delta) = \exp(b(1 - \delta^{-\frac{1}{3}}))$. Первый и третий члены в этих уравнениях описывают при $d > 0$ силы отталкивания. Влияние первого члена в металлах со слабым перекрытием электронных оболочек мало. Если же вклад перекрытия оболочек в энергию взаимодействия не мал, то третьим членом в (4.40) и (4.41) можно пренебречь и получаемые зависимости принимают вид

$$E_x = aF(\delta) - c\delta^{\frac{1}{3}}, \quad (4.42)$$

$$P_x = \frac{1}{3}\rho_{0k}\delta^{\frac{2}{3}}\left(abF(\delta) - c\delta^{\frac{2}{3}}\right). \quad (4.43)$$

Уравнения (4.42), (4.43) по форме совпадают с уравнениями для ионных кристаллов, которые применяются для описания свойств холодных металлов. Ниже кратко излагаются встречающиеся в литературе зависимости E_x , P_x от δ . Для валентных кристаллов предлагаются уравнения

$$E_x = F(\delta)(a\delta^{\frac{1}{3}} - c), \quad (4.44)$$

$$P_x = \frac{1}{3}\rho_{0k}F(\delta)\delta^{\frac{2}{3}}\left(a\delta^{\frac{2}{3}} + ab\delta^{\frac{1}{3}} - bc\right), \quad (4.45)$$

а для некоторых металлов и молекулярных кристаллов уравнения Борна – Майера

$$E_x = \frac{C_{0k}^2}{b\mu}[3\mu(F(\delta) - 1) - b(\delta^\mu - 1)], \quad (4.46)$$

$$P_x = \rho_{0k}C_{0k}^2\delta^{\frac{2}{3}}\left(F(\delta) - \delta^{\mu+\frac{1}{3}}\right). \quad (4.47)$$

Исходя из феноменологической теории конечных деформаций Мурнагана, Бэрч предложил уравнения

$$E_x = \frac{3a_1}{4\rho_{0k}}\left\{a_2 + 1,5 - 3(1 + a_2)\delta^{\frac{2}{3}} + (1,5 + 3a_2)\delta^{\frac{4}{3}} - a_2\delta^2\right\}, \quad (4.48)$$

$$P_x = \frac{3}{2} a_1 \delta^{\frac{5}{3}} \left(\delta^{\frac{2}{3}} - 1 \right) \left(1 + a_2 - a_2 \delta^{\frac{2}{3}} \right). \quad (4.49)$$

Паком, Эвансом и Джеймсом были предложены комбинированные зависимости $E_x(\delta)$ и $P_x(\delta)$, сочетающие экспоненциальную функцию со степенным рядом от $\delta^{\frac{1}{3}}$

$$E_x = \frac{3A}{\rho_{0k}} \left\{ \left(\delta^{-\frac{4}{3}} + \frac{4}{b} \delta^{-\frac{3}{3}} + \frac{12}{b^2} \delta^{-\frac{2}{3}} + \frac{24}{b^3} \delta^{-\frac{1}{3}} + \frac{24}{b^4} \right) F(\delta) + \frac{1}{5} \delta^{-\frac{5}{3}} \right\}, \quad (4.50)$$

$$P_x = A \delta^{-\frac{2}{3}} (bF(\delta) - 1). \quad (4.51)$$

Наиболее широкое распространение получили уравнения

$$E_x = A \left(\delta^{\frac{m}{3}} - 1 \right) - B \left(\delta^{\frac{n}{3}} - 1 \right), \quad (4.52)$$

$$P_x = \frac{1}{3} \rho_{0k} \delta \left(Am \delta^{\frac{m}{3}} - Bn \delta^{\frac{n}{3}} \right). \quad (4.53)$$

Рассматривая (4.52), (4.53) в 1903 г. Ми полагал $n = 3$, в 1923 г. Бор использовал (4.52), (4.53) также при $n = 3$. Целый ряд работ (Борн, Слейтер, Леннард-Джонс, Грюнайзен, Паулинг, Бардин и др.) был направлен на уточнение n и m .

Для описания свойств ряда металлов при $\delta > 1$ в иногда используется зависимость

$$E_x = C_{0k}^2 \sum_{i=1}^N \frac{3a_i}{i} \left(\delta^{\frac{i}{3}} - 1 \right), \quad (4.54)$$

$$P_x = \rho_{0k} C_{0k}^2 \sum_{i=1}^N a_i \delta^{1+\frac{i}{3}}. \quad (4.55)$$

В литературе встречается большое число других зависимостей $E_x(\delta)$ и $P_x(\delta)$. Но из сравнения даже небольшого числа уравнений (4.40)-(4.55) видно, что аналитическая форма неустойчива относительно квантовомеханических

предположений о свойствах вещества – небольшое отличие в предположениях о квантовомеханических свойствах приводит к сильно различающимся аналитическим зависимостям. Несмотря на заметное продвижение в области теоретических моделей кристаллического состояния вещества, в настоящее время не удается построить теоретическую зависимость $E_x(\delta)$, не требующую использования экспериментальных данных для уточнения численных значений входящих в нее параметров. При анализе квантовомеханических моделей, используемых для описания свойств конденсированных сред, видно, что в них для получения конечных уравнений делается много упрощающих гипотез. Так, например, во всех приведенных выше уравнениях плотность входит в степени $i/3$. Это является следствием предположения, что плотность пропорциональна γ^{-3} , где γ среднее расстояние между центрами структурных элементов. Есть и другие упрощающие гипотезы. Именно поэтому, получаемые уравнения носят качественный характер и нуждаются в уточнении с помощью привлечения результатов экспериментов.

Любое уравнение состояния применимо в некоторой области изменения δ . Чем шире эта область, тем предпочтительнее оказывается уравнение состояния. Глобальные уравнения состояния, применимые во всей области изменения термодинамических величин, должны удовлетворять условиям

$$P_x = 0, E_x = 0, \frac{dP_x}{d\delta} = \rho_{0k} C_{0k}^2 \quad \text{при } \delta = 1, \quad (4.56)$$

$$P_x = 0, E_x = Q_0 \quad \text{при } \delta = 0, \quad (4.57)$$

$$P_x = \infty, E_x = \infty \quad \text{при } \delta = \infty. \quad (4.58)$$

Величина C_{0k} является предельным значением скорости звука $C(P, T)$ при $P \rightarrow 0$ и $T \rightarrow 0$.

В области $V > V_{0k}$ равнодействующая сил взаимодействия $P_x < 0$, т.к. силы притяжения по модулю превосходят силы отталкивания (Рис. 4.5). При уменьшении плотности (увеличении удельного объема) силы взаимодействия

быстро убывают, поэтому холодная энергия, возрастая, стремится к постоянному значению Q , равному удельной теплоте испарения конденсированного вещества при нулевой температуре. Для металлов величина Q составляет обычно несколько кДж/г. Отрицательность $P_x(V)$ при $V > V_{0k}$ означает, что для всестороннего расширения вещества необходимо приложить растягивающее усилие. Величина наименьшего давления $P_{x \min}$ зависит от вида кривой $P_x(V)$, а также от величины Q . Связь между работой силы $P_x(V)$ и теплотой испарения Q имеет вид

$$Q = - \int_{V_{0k}}^{\infty} P_x(v) dV.$$

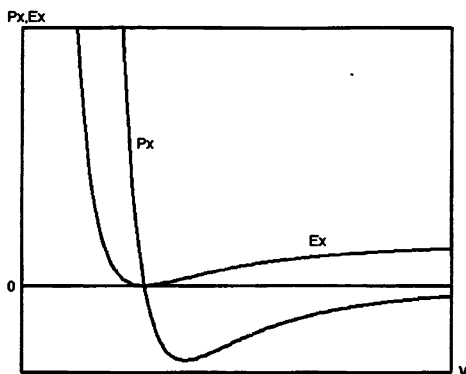


Рис. 4.5. Схематическое изображение зависимостей P_x и E_x от V .

Анализ показывает, что из приведенных выше уравнений (4.40)-(4.55) условиям широкодиапазонности (4.56)-(4.58) удовлетворяют лишь уравнения (4.52)-(4.55) и уравнения (4.48), (4.49) при условии, что $Q < \frac{9}{8} C_{0k}^2$. Только эти уравнения пригодны для применения во всем диапазоне $0 < \delta < \infty$. Остальные уравнения имеют ограниченную область применения.

§8. Тепловая энергия и тепловое давление

Тепловая составляющая давления и энергии с удовлетворительной точностью может быть представлена в виде суммы, в которой первое слагаемое описывает свойства атомов (ионов, ядер), а второе – электронов

$$P_T = P_{Tя}(V, T) + P_{Te}(V, T), \quad (4.59)$$

$$E_T = E_{Tя}(V, T) + E_{Te}(V, T).$$

Преобразуем уравнение термодинамической совместности так, чтобы оно не содержало P_x и E_x , $P_{нк}$ и $E_{нк}$

$$\left(\frac{\partial E_T}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P_T}{\partial T}\right)_V - P_T. \quad (4.60)$$

Подставив (4.59) в (4.60), получим линейное дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial P_T}{\partial T}\right)_V - \frac{P_T}{T} = \frac{1}{T} \left\{ \left(\frac{\partial E_{Tя}}{\partial V}\right)_T + \left(\frac{\partial E_{Te}}{\partial V}\right)_T \right\}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$P_T = \psi(V)T + T \int \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial E_{Tя}}{\partial V} + \frac{\partial E_{Te}}{\partial V} \right) dT. \quad (4.61)$$

Поскольку $\psi(V)$ является произвольной функцией, обязанной своим происхождением правилам интегрирования, то в общем случае ее можно представить в виде $\psi(V) = \psi_я(V) + \psi_e(V)$. Тогда уравнение (4.61) разделяется по компонентам

$$P_{Tя} = \psi_я(V)T + T \int \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial E_{Tя}}{\partial V} \right) dT, \quad (4.62)$$

$$P_{Te} = \psi_e(V)T + T \int \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial E_{Te}}{\partial V} \right) dT.$$

В классе уравнений состояния, определяемом гипотезой (4.59), уравнения (4.62) являются определениями ядерной и электронной компонент давления.

§9. Теплоемкость ядер

Классические модели твердого тела позволяют определить теплоемкость кристалла. Будем считать, что ядра совершают гармонические колебания возле положения равновесия и каждое из них имеет 3 колебательных степени свободы. На каждую колебательную степень свободы приходится энергия КТ. Значит энергия одного ядра равна

$$E_{\text{Тя}} = 3KT,$$

где K – постоянная Больцмана ($K = 1,38 \cdot 10^{-23}$ дж/град). Чтобы получить удельную энергию одного моля вещества ядер, нужно $E_{\text{Тя}}$ умножить на число Авагадро $N = 6,02 \cdot 10^{26}$ 1/кмоль. Тогда

$$E_{\text{Тя}} = 3RT, \quad (4.63)$$

где $R = NK$ – универсальная газовая постоянная ($R = 8,31$ кДж/кмоль град). Энергия единичной массы будет содержать индивидуальную газовую постоянную $A = R/\mu$ (μ – молекулярный вес). Из (4.58) и (4.63) получается теплоемкость ядер

$$C_V = 3A = \text{const.}$$

Это так называемый закон Дюлонга и Пти. Он справедлив только в некотором конечном диапазоне температур. Более точные теории теплоемкости Эйнштейна и Дебая дают качественно другие зависимости $C_V(T)$. Эти зависимости при $T = 0$ дают значение $C_V = 0$ и $\frac{dC_V}{dT} = 0$, а при температурах, приближающихся к температуре плавления, дают почти постоянные значения $C_V = 3A$.

Рассмотрим квантовую теорию теплоемкости Эйнштейна. Предполагается, что все атомы одинаковы. Они колеблются около положений равновесия с одинаковой частотой ν и имеют по три колебательных степени свободы.

Колебания атомов не зависят друг от друга. Предполагается далее, что систему из N атомов можно заменить системой из $3N$ гармонических осцилляторов с одной степенью свободы.

Поскольку энергия нулевых колебаний рассматривается отдельно, то тепловой энергией ядер является энергия, которую они приобретут при увеличении температуры от 0 до T . Эта энергия равна

$$E = nh\nu, \quad (4.64)$$

где n – общее число квантов энергии сообщенной телу, состоящему из $3N$ гармонических осцилляторов при изменении его температуры от 0 до T , h – постоянная Планка. Число n можно определить из условия минимума свободной энергии системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия при постоянных V и T

$$\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_{V,T} = 0.$$

Подставим сюда

$$F = E - TS,$$

где E берется в соответствии с (4.64). В результате получим

$$\left(\frac{\partial E}{\partial n}\right)_{T,V} - T\left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)_{T,V} = 0. \quad (4.65)$$

Из (4.64) в предположении, что ν не зависит от T , получаем

$$\left(\frac{\partial E}{\partial n}\right)_{T,V} = h\nu. \quad (4.66)$$

Для нахождения $\left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)_{V,T}$ используем данное Больцманом статистическое

определение энтропии

$$S = K \ln W,$$

где W – величина, характеризующая наиболее вероятное состояние системы $3N$ квантовых осцилляторов, получившей n квантов энергии. При нагревании кристалла не все осцилляторы получают по одинаковому количеству квантов энергии $h\nu$. Эта энергия распределяется между квантовыми осцилляторами в соответствии с распределением Больцмана

$$N_i = N_0 e^{-\frac{i h \nu}{kT}},$$

где N_0 – число осцилляторов, не получивших ни одного кванта энергии, т.е. находящихся на самом низком энергетическом уровне, N_i – число осцилляторов, получивших по i квантов энергии $h\nu$. Величина W выражается через n и N

$$W = \frac{(n + 3N - 1)! 3N}{n! (3N)!}.$$

При $N \gg 1$ и $n \gg 1$ единицей можно пренебречь. Воспользовавшись формулой Стирлинга

$$\ln x! = x(\ln x - 1),$$

получим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)_{T,V} = K \ln\left(\frac{n + 3N}{n}\right). \quad (4.67)$$

Из (4.65), (4.66) и (4.67) следует, что полное количество квантов энергии $h\nu$, необходимое для нагревания системы $3N$ гармонических осцилляторов от 0 до T , равно

$$n = \frac{3N}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Подставив n в (4.64), получим выражение для энергии

$$E = \frac{3N h \nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (4.68)$$

Продифференцировав E по T , получим выражение для теплоемкости ядер

$$C_V = 3R \left(\frac{h\nu}{KT} \right)^2 \frac{e^{\frac{h\nu}{KT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1 \right)^2}, \quad (4.69)$$

где $R = NK$. Это и есть формула Эйнштейна.

В теории Эйнштейна сделано предположение, что все ядра колеблются с одинаковой частотой ν . Температуру $T = \theta$, при которой

$$\frac{h\nu}{KT} = 1, \quad (4.70)$$

называют характеристической температурой Эйнштейна. Это число. Поскольку для разных веществ ν разное, то θ является характеристикой вещества.

Подставив (4.70) в (4.69), получим теплоемкость одного моля

$$C_V(\theta) = \frac{3R \cdot 2,71}{1,71^2} = 2,78R.$$

Воспользовавшись (4.70), запишем (4.69) в виде

$$C_V = 3R \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(e^{\frac{\theta}{T}} - 1 \right)^2}. \quad (4.71)$$

Рассмотрим асимптотическое поведение $C_V(T)$. При $T \rightarrow \infty$, и т.о. $\frac{\theta}{T} \rightarrow 0$

разложим экспоненту в ряд Тэйлора

$$e^{\frac{\theta}{T}} = 1 + \frac{\theta}{T} + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\theta}{T} \right)^3 + \dots$$

Подставив это выражение в (4.71), получим

$$C_V \approx 3R \frac{1 + \frac{\theta}{T} + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{T} \right)^2}{1 + \frac{\theta}{T} + \frac{7}{12} \left(\frac{\theta}{T} \right)^2} \approx 3R \left(1 - \frac{1}{12} \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \right),$$

т.е. при $T \rightarrow \infty$, $C_v \rightarrow 3R$. Во втором случае $T \rightarrow 0$, $\frac{\theta}{T} \rightarrow \infty$

$$\lim_{T \rightarrow 0} C_v = \lim_{T \rightarrow 0} 3R e^{-\frac{\theta}{T}} = 0.$$

Основным недостатком теории теплоемкости Эйнштейна является ее различие с экспериментом в области низких температур, что связано с двумя предположениями: 1) о независимости ν от T ; 2) о независимости колебаний атомов друг от друга.

В 1912 г. Дебай, а затем Борн отказались от этих ограничений. Сохранив следующее из (4.68) выражение энергии, приходящейся на один осциллятор, колеблющийся с частотой ν

$$\bar{E} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

Дебай воспользовался результатами классической механики, согласно которым число независимых колебаний dN единичного объема однородного изотропного упругого тела, характеризуемых частотами между ν и $\nu + d\nu$, пропорционально квадрату частоты

$$dN = 4\pi \left(\frac{1}{C_e^2} + \frac{1}{C_t^2} \right) \nu^2 d\nu,$$

где C_e и C_t – скорость продольных и поперечных звуковых волн. Тепловая энергия осцилляторов в объеме \bar{V} 1 г атома тела получается после умножения \bar{E} на dN по всем частотам от 0 до ν_{\max}

$$E = \int_0^{\nu_{\max}} 4\pi \left(\frac{1}{C_e^2} + \frac{2}{C_t^2} \right) \frac{h\nu\bar{V}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu. \quad (4.72)$$

Максимальная частота ν_{\max} определяется из условия, что в объеме \bar{V} находится $3N$ осцилляторов

$$4\pi\bar{V}\left(\frac{1}{C_e^2} + \frac{2}{C_i^2}\right) \int_0^{v_{\max}} v^2 dv = 3N. \quad (4.73)$$

После интегрирования (4.73) получим

$$4\pi\bar{V}\left(\frac{1}{C_e^2} + \frac{2}{C_i^2}\right) = \frac{9N}{v_{\max}^3}. \quad (4.74)$$

С учетом (4.74) выражение для тепловой энергии ядер принимает вид

$$E = 9NKT \int_0^{v_{\max}} \frac{\left(\frac{hv}{KT}\right) v^2}{\left(e^{\frac{hv}{KT}} - 1\right) v_{\max}^3} dv.$$

Если обозначить $x = hv/KT$, $x_{\max} = hv_{\max}/KT$, $hv_{\max}/K\theta_D = 1$, где θ_D – дебаевская температура, то получим окончательное выражение для тепловой энергии ядер

$$E = 9RT \left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}. \quad (4.75)$$

Продифференцировав E по T , получим выражение для атомной теплоемкости при постоянном объеме

$$C_v = 3Rf_D \left(\frac{\theta_D}{T}\right), \quad (4.76)$$

где

$$f_D = 3 \left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^4 e^x dx}{(e^x - 1)^2}.$$

Эта модель также имеет недостатки.

1. Колебания сплошного тела, выражаемые через продольную и поперечную скорости звука, соответствуют акустическим частотам, тогда как колебания атомов соответствуют оптическим частотам.

2. К стоячим волнам в сплошном теле Дебай применил правила квантования, которые можно применять только к микросистемам.

3. Интегрирование в (4.72) ведется от нулевой частоты, а не от минимальной частоты нулевых колебаний.

Поскольку модельные уравнения (4.68) и (4.75) лишь качественно описывают зависимость энергии от температуры, а уравнения (4.69), (4.76) также качественно описывают зависимость теплоемкости от температуры, то допустимо применение и других зависимостей $E(T)$ и $C_V(T)$, обладающих близкими свойствами.

Таблица 4.7

Атомный вес, температура плавления и теплоемкость некоторых элементов.

Элемент	Li	Be	B	C	Na	Al	Si	Fe
Атомный вес (г/моль)	6,94	9,02	10,82	12	23	26,97	28,06	55,84
Температура плавления (К)	459	1620	2570	-	370	933	1690	1808
Атомная теплоемкость C_V (Дж/град·моль)	23	16,1	14	6,1	28,4	24	20,76	24,9

В качестве зависимости $C_V(T)$ для ядер может быть использована функция

$$C_V = 3RT \frac{2b(V) + T}{(b(V) + T)^2}, \quad (4.77)$$

которая с помощью подбора функции $b(V)$ может удовлетворительно описать $C_V(T)$ как при малых T , так и при T , близких к температуре плавления.

§10. Тепловая энергия и тепловое давление ядер

Возьмем в качестве исходной зависимость $C_V(T)$ (4.77). Уравнение для $E_{Тя}(T, V)$ найдем интегрированием уравнения $C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V$ при условии, что $E_{Тя} = 0$ при $T = 0$

$$E_{\text{ТЯ}} = \frac{3RT^2}{b(v) + T}. \quad (4.78)$$

Подставив $E_{\text{ТЯ}}$ в (4.62), продифференцировав по V и проинтегрировав по T , получим уравнение для давления ядер

$$P_{\text{ТЯ}} = \psi_{\text{я}}(V)T + 3R \frac{db(v)}{dV} \frac{T}{b(v) + T}. \quad (4.79)$$

Найдем теперь уравнение для энтропии ядер. Для этого в уравнение

$$dE_{\text{ТЯ}} = \frac{\partial E_{\text{ТЯ}}}{\partial T} dT + \frac{\partial E_{\text{ТЯ}}}{\partial V} dV$$

подставим производные внутренней энергии ядер

$$\frac{\partial E_{\text{ТЯ}}}{\partial T} = \frac{3RT(2b + T)}{(b + T)^2}, \quad \frac{\partial E_{\text{ТЯ}}}{\partial V} = -\frac{3RT^2}{(b + T)^2} \frac{db}{dV}.$$

Затем полученное уравнение вместе с $P_{\text{ТЯ}}$ подставим в уравнение для энтропии

$$dS_{\text{я}} = \frac{1}{T} dE_{\text{ТЯ}} + \frac{P_{\text{ТЯ}}}{T} dV.$$

В результате получим

$$dS_{\text{я}} = \left(\psi_{\text{я}}(V) + 3R \frac{db}{dV} \frac{1}{b + T} - \frac{3RT}{(b + T)^2} \frac{db}{dV} \right) dV + \frac{3R(2b + T)}{(b + T)^2} dT. \quad (4.80)$$

Частные производные энтропии равны

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \psi_{\text{я}}(V) + 3R \frac{db}{dV} \frac{b}{(b + T)^2}, \quad (4.81)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{3R(2b + T)}{(b + T)^2}. \quad (4.82)$$

Выражение (4.80) является полным дифференциалом, т.к.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T},$$

что легко проверяется дифференцированием (4.81) и (4.82).

Решение уравнения (4.80) имеет вид

$$S_{\text{я}} = 3R \left(\frac{T}{b(V) + T} + \ln \frac{b(V) + T}{b(V)} \right).$$

Это решение получается при условии, что функции $\psi_{\text{я}}(V)$ и $b(V)$ связаны друг с другом уравнением

$$\psi_{\text{я}}(V) = -\frac{3R}{b(V)} \frac{db(V)}{dV}.$$

Подставив $\psi_{\text{я}}(V)$ в (4.79), получим выражение для $P_{\text{Тя}}$

$$P_{\text{Тя}} = -3R \frac{db(V)}{dV} \frac{T^2}{b(b+T)}.$$

Поскольку давление ядер > 0 , то функция $b(V)$ должна удовлетворять условию

$$\frac{db(V)}{dV} < 0.$$

Коэффициент пропорциональности $\Gamma_{\text{я}}$ между $P_{\text{Тя}}$ и $E_{\text{Тя}}$

$$\Gamma_{\text{я}} = -\frac{d \ln b(V)}{d \ln V} \quad (4.83)$$

часто называют **функцией Грюнайзена**.

Из сравнения (4.83) с (4.38) видно, что

$$b(V) = \theta_{\text{D}}(V), \quad (4.84)$$

то есть равна температуре Дебая.

Теория твердого тела Слейтера-Ландау рекомендует для $\Gamma_{\text{я}}$ уравнение

$$\Gamma_{\text{я}} = -K - \frac{1}{2} \frac{d}{d \ln V} \left(\ln \frac{-dP_{\text{x}}(V)V^{\alpha}}{dV} \right),$$

где $K = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$. Поскольку K можно представить в виде

$$K = \frac{d \ln V^K}{d \ln V},$$

а множитель $0,5$ можно внести под знак дифференцирования, то $\Gamma_{\text{я}}$ принимает вид

$$\Gamma_{\text{я}} = - \frac{d}{d \ln V} \left(\ln CV^{\kappa} \sqrt{-\frac{dV^{\alpha} P_x}{dV}} \right), \quad (4.85)$$

где $C = \text{const}$. Сравнивая (4.83) и (4.85), получим уравнение для определения $b(V)$

$$b(V) = CV^{\kappa} \sqrt{-\frac{dV^{\alpha} P_x}{dV}}. \quad (4.86)$$

Теории твердого тела, в основу которых положены иные гипотезы, (теория свободного объема или теория Дугдэйла-Макдональда) дают похожие зависимости $b(V)$.

Из (4.86) и (4.84) получается уравнение для температуры Дебая θ_D

$$\theta_D(V) = CV^{\kappa} \sqrt{-\frac{dV^{\alpha} P_x}{dV}}. \quad (4.87)$$

§11. Тепловая энергия и тепловое давление электронов

Рассмотрим простейшую квантовую модель электронов для металлов, согласно которой электроны образуют свободный электронный газ, который целиком заполняет объем, и подчиняются квантовой статистике Ферми-Дирака (вырожденный газ). Металл для свободных электронов является как-бы потенциальной ямой, выход из которой требует работы по преодолению сил связи, удерживающих электроны в металле. При повышении температуры металла тепловому возбуждению подвергается часть электронов, наиболее удаленных от ядра. Число термически возбужденных электронов ΔN пропорционально числу электронов N и энергии кванта KT . Приближенное уравнение имеет вид

$$\frac{\Delta N}{N} \approx \frac{1}{2} \frac{KT}{E_F},$$

где E_F – энергия Ферми – максимальная кинетическая энергия, которой может обладать электрон при абсолютном нуле температуры. Каждый термически

возбуждаемый электрон поглощает энергию порядка kT . Энергия электронного газа равна произведению kT на число термически возбужденных электронов ΔN

$$E_{Te} \approx \frac{N(kT)^2}{2E_F}$$

Поскольку энергия Ферми зависит от плотности ρ , то энергия электронного газа может быть записана в виде

$$E_{Te} \approx \varphi_e(V)T^2, \quad (4.88)$$

где $\varphi(V) \approx \frac{NK^2}{2E_F(V)}$. Т.о. тепловая энергия электронов является функцией с разделяющимися переменными. Рассмотрим эту зависимость в самом общем виде

$$E_{Te} = f(V)F(T). \quad (4.89)$$

Из (4.62) и (4.89) следует

$$P_{Te} = \psi_e(V) \cdot T + T \frac{df(V)}{dV} \int \frac{F(T)}{T^2} dT. \quad (4.90)$$

Чтобы в (4.90) не было интеграла, возьмем $F(T)$ в виде

$$F(T) = T^2 \frac{d\Omega(T)}{dT}.$$

Тогда (4.89), (4.90) и выражение для C_V примут вид

$$E_{Te} = f(V) \cdot T^2 \frac{d\Omega(T)}{dT}, \quad (4.91)$$

$$P_{Te} = \psi_e(V) \cdot T + \frac{df(V)}{dV} \Omega(T)T,$$

$$C_{ve} = \left(\frac{\partial E_{Te}}{\partial T} \right)_V = f(V) \left(T^2 \frac{d^2\Omega(T)}{dT^2} + 2T \frac{d\Omega}{dT} \right).$$

В основное термодинамическое уравнение

$$dS = \frac{1}{T} dE + \frac{P}{T} dV$$

подставим dE , полученное после дифференцирования (4.91)

$$dE_{Te} = \left(\frac{df(V)}{dV} T^2 \frac{d\Omega(T)}{dT} \right) dV + f(V) \left(T \frac{d\Omega(T)}{dT} + T \frac{d}{dT} \left(T \frac{d\Omega(T)}{dT} \right) \right) dT.$$

В результате получим

$$dS_e = \left(\frac{df}{\partial V} T \frac{d\Omega}{dT} + \psi_e(V) + \frac{df}{dV} \Omega \right) dV + f \left(\frac{d\Omega}{dT} + \frac{d}{dT} \left(T \frac{d\Omega}{dT} \right) \right) dT. \quad (4.92)$$

Выражение для dS_e является полным дифференциалом, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial T} \left\{ T \frac{df}{dV} \frac{d\Omega}{dT} + \psi_e(V) + \Omega \frac{df}{dV} \right\} = \frac{\partial}{\partial V} \left(f \frac{d\Omega}{dT} + f \frac{d}{dT} \left(T \frac{d\Omega}{dT} \right) \right).$$

Решение уравнения (4.92) имеет вид

$$S_e = f(V)\Omega(T) + f(V)T \frac{d\Omega(T)}{dT} + \int \psi_e(V) dV. \quad (4.93)$$

Поскольку согласно теореме Нернста $S_e = 0$ при $T = 0$, то для того, чтобы исчез третий член в (4.93), функция $\Omega(T)$ должна иметь вид

$$\Omega(T) = K_1 + M(T),$$

где $K_1 = \text{const}$. В этом случае необходимое условие выполнения теоремы Нернста имеет вид

$$\psi_e(V) = -K_1 \frac{df(V)}{dV}.$$

Поскольку преобразования проводились только для электронных компонентов P_{Te} и E_{Te} , то функции $f(V)$ и $M(T)$ должны иметь индекс "e". Окончательно величины, характеризующие тепловые электронные компоненты, имеют вид

$$E_{Te} = f_e(V) T^2 \frac{dM_e(T)}{dT}, \quad (4.94)$$

$$P_{Te} = \frac{df_e(V)}{dV} M_e(T) T,$$

$$C_{Ve} = f_e(V) \frac{d}{dT} T^2 \frac{dM_e(T)}{dT},$$

$$S_e = f_e(V) \frac{d}{dT} (TM_e(T)).$$

Выражение для E_{Te} (4.94) совпадает с (4.88) при условии, что функции $f_e(V)$ и $M_e(T)$ удовлетворяют условиям

$$M_e = K^2 T, \quad f_e(V) = \frac{\varphi_e(V)}{K^2}.$$

Окончательно для термодинамических функций, описывающих свойства электронов, получаются уравнения

$$P_{Te} = \frac{d\varphi_e}{dV} T^2, \quad (4.95)$$

$$C_{ve} = \varphi_e(V) 2T,$$

$$S_e = \varphi_e(V) 2T,$$

$$E_{Te} = \varphi_e(V) T^2. \quad (4.96)$$

Часто предполагают, что давление и внутренняя энергия пропорциональны

$$P_e V = \Gamma_e E_e.$$

Подставив сюда E_e и P_e из (4.96), (4.95), получим

$$\Gamma_e = \frac{d\varphi_e(V)}{dV} \frac{V}{\varphi_e(V)} = \frac{d \ln \varphi_e(V)}{d \ln V}.$$

Следовательно, для электронов коэффициент пропорциональности E_{Te} и P_{Te} зависит только от удельного объема и не зависит от температуры.

§12. Уравнение состояния конденсированного вещества

Из (4.78) для $E_{Td}(V, T)$ видно, что $\dim b = T$. В то же время из (4.86) и (4.87) следует, что

$$\dim T = \dim C \cdot \dim \rho^{\left(1 - \frac{\alpha}{2} - \kappa\right)} \cdot \dim U,$$

где U – скорость, имеющая размерность Lt^{-1} . Из соотношения размерностей следует

$$\dim C = \dim T \cdot \dim \rho^{-\left(1-\frac{\alpha}{2}-k\right)} \cdot \dim U^{-1}.$$

Выше уже были введены две фундаментальные константы ρ_{0k} и C_{0k} . Кроме того, из (4.63) следует, что

$$\dim T = \dim U^2 \cdot \dim R^{-1},$$

где R – универсальная газовая постоянная. Соотношение размерностей будет выполнено, если C взять в виде

$$C = \gamma_0 \frac{C_{0k}}{R} \rho_{0k}^{-\left(1-\frac{\alpha}{2}-k\right)}, \quad (4.97)$$

где γ_0 – безразмерная постоянная. Из (4.97) и (4.87) следует уравнение для дебаевской температуры

$$\theta_D(\delta) = \gamma_0 \frac{C_{0k}^2}{R} \delta^{-k} \sqrt{-\frac{d(\delta^{-\alpha} \Pi_x(\delta))}{d(1/\delta)}},$$

где $\delta = \rho/\rho_{0k}$ – безразмерная плотность, $\Pi_x = P_x/\rho_{0k} C_{0k}^2$ – безразмерное холодное давление.

Можно ввести функцию Грюнайзена для тепловых давления и энергии

$$\Gamma = \frac{P_T V}{E_T}. \quad (4.98)$$

Подставив сюда $P_T = P_{Tя} + P_{Te}$, $E_T = E_{Tя} + E_{Te}$, получим

$$\Gamma = \frac{\Gamma_я E_{Tя} + \Gamma_e E_{Te}}{E_{Tя} + E_{Te}}.$$

При $P = 10^{-4}$ ГПа и $0 \leq T \leq 10^3$ К $E_{Te} \ll E_{Tя}$. В этом диапазоне P и T $\Gamma \approx \Gamma_я$.

Функция $\Gamma_я(V, T)$ – может быть выражена через величины, которые измеряются

экспериментально. Продифференцируем (4.98) по T при постоянном V в предположении, что $\Gamma \approx \Gamma_{\text{я}}$, $E_T = E_{T\text{я}}$

$$E_{T\text{я}} \left(\frac{\partial \Gamma_{\text{я}}}{\partial T} \right)_V + \Gamma_{\text{я}} \left(\frac{\partial E_{T\text{я}}}{\partial T} \right)_V = V \left(\frac{\partial P_{T\text{я}}}{\partial T} \right)_V. \quad (4.99)$$

В рассмотренном выше уравнении состояния $\left(\frac{\partial \Gamma_{\text{я}}}{\partial T} \right)_V = 0$, т.к. в силу (4.83) $\Gamma_{\text{я}}$ зависит только от V . Таким образом, вместо (4.99) получим уравнение

$$\Gamma_{\text{я}} \left(\frac{\partial E_{T\text{я}}}{\partial T} \right)_V = V \left(\frac{\partial P_{T\text{я}}}{\partial T} \right)_V.$$

Используя термодинамическое уравнение

$$\left(\frac{\partial P_T}{\partial T} \right)_V = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T,$$

и приняв во внимание, что $\left(\frac{\partial P_T}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$, $\alpha = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$, получим

$$\Gamma_{\text{я}} C_V = -\alpha V^2 \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T. \quad (4.100)$$

Используем уравнение

$$\frac{C_P}{C_V} = \frac{(\partial S / \partial T)_P}{(\partial S / \partial T)_V}.$$

Производные энтропии по T заменим с помощью уравнений

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_S \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_T + 1 = 0, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_T + 1 = 0$$

производными по V . В результате получим

$$C_P \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = C_V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S.$$

С помощью этого уравнения заменим C_V на C_P в (4.100). В результате получим широко известную формулу

$$\Gamma_{\text{я}} = \frac{\alpha C^2}{C_p},$$

где C – скорость звука, C_p – теплоемкость и α – коэффициент объемного сжатия

$$\alpha = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

зависят от T при постоянном давлении. Все эти величины надежно определяются экспериментально.

Окончательно уравнение состояния после подстановки ядерных и электронных компонентов, принимает вид

$$P_T = -3R \frac{d\theta_D(V)}{dV} \frac{T^2}{\theta_D(V)(\theta_D(V)+T)} + \frac{d\varphi_e}{dV} T^2, \quad (4.101)$$

$$E_T = \frac{3RT^2}{\theta_D(V)+T} + \varphi_e(V)T^2, \quad (4.102)$$

$$C_V = \frac{3RT(2\theta_D(V)-T)}{(\theta_D(V)+T)^2} + 2\varphi_e(V)T, \quad (4.103)$$

$$S = 3R \left(\frac{T}{\theta_D(V)+T} + \ln \frac{\theta_D(V)+T}{\theta_D(V)} \right) + 2\varphi_e(V)T. \quad (4.104)$$

Условие широкодиапазонности тепловых членов уравнения состояния сформулируем так:

1. при $T \rightarrow 0$ должно быть $S \rightarrow 0$, $E_T \rightarrow 0$, $P_T \rightarrow 0$, $C_V \rightarrow 0$;
2. при $T \rightarrow \infty$ должно быть $S \rightarrow \infty$, $E_T \rightarrow \infty$, $P_T \rightarrow \infty$.

Уравнения (4.101) – (4.104) этим условиям удовлетворяют.

Глава 5. Ударные волны. Слабые и контактные разрывы

§1. О возможности перехода непрерывного решения в разрывное

При изучении уравнения состояния было показано, что скорость звука зависит от плотности так, что C растет с ростом ρ при движении вдоль изэнтропы. В этом случае возмущения будут распространяться, меняя свою форму в отличие от акустического случая (§12, гл. 2). При этом крутизна фронта волны сжатия может неограниченно возрастать, в результате чего непрерывное решение может стать разрывным. Проиллюстрируем эту принципиальную возможность специально подобранным примером.

Рассмотрим уравнения идеальной среды в характеристической форме, полученные в §11 гл. 2:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dP}{dt}\right)_{1,2} \pm \rho C \left(\frac{dU}{dt}\right)_{1,2} &= 0, & \left(\frac{dx}{dt}\right)_{1,2} &= U \pm C, \\ \left(\frac{dP}{dt}\right)_3 - C^2 \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_3 &= 0, & \left(\frac{dx}{dt}\right)_3 &= U. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Пусть уравнение состояния имеет вид

$$P = f(S)\rho^\gamma + B,$$

где $\gamma = 3$, $B = \text{const}$. Течение будем предполагать изоэнтропическим. Эти предположения позволяют преобразовать первое из уравнений (5.1) к виду

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_{1,2} \pm \left(\frac{dC}{dt}\right)_{1,2} = 0. \tag{5.2}$$

Уравнение (5.2) интегрируется

$$U \pm C = U_0(x, t_0) \pm C_0(x, t_0) = \text{const.} \quad (5.3)$$

Подставляя (5.3) во второе уравнение (5.1), получим, что характеристики первого и второго семейств есть прямые линии, наклон которых зависит от значений U_0 и C_0 в момент t_0

$$x = (U_0 \pm C_0) t + x_0.$$

Рассмотрим задачу Коши с начальными данными вида

$$U_0 = 0, \quad C_0 = 1 \quad \text{при } t = 0, \quad 1 \leq x_0 < +\infty,$$

$$U_0 = 1, \quad C_0 = 2 \quad \text{при } t = 0, \quad -\infty < x_0 \leq 0,$$

$$U_0 = 1 - x_0, \quad C_0 = 2 - x_0 \quad \text{при } t = 0, \quad 0 \leq x_0 \leq 1.$$

Характеристики, выходящие из точек с координатами

$$t = 0, \quad x_0 \geq 1,$$

имеют вид

$$U + C = 1, \quad x = x_0 + t, \quad (5.4)$$

$$U - C = -1, \quad x = x_0 - t. \quad (5.5)$$

Характеристики же, выходящие из точек с координатами $t_0 = 0, x_0 \leq 0$, имеют вид

$$U + C = 3, \quad x = x_0 + 3t, \quad (5.6)$$

$$U - C = -1, \quad x = x_0 - t. \quad (5.7)$$

Наклоны характеристик первого и второго семейства, выходящих из произвольной точки x_0 области $0 \leq x_0 \leq 1$, равны соответственно

$$\frac{dx}{dt} = U + C = 3 - 2x_0, \quad \frac{dx}{dt} = U - C = -1.$$

Таким образом, все характеристики 2^ю семейства имеют одинаковый наклон, а характеристики 1^ю семейства сближаются, т.к. их уравнение имеет вид

$$U + C = 3 - 2x_0, \quad x = x_0 + t(3 - 2x_0). \quad (5.8)$$

Решение в области, лежащей правее характеристики первого семейства

$$x = 1 + t, \quad (5.9)$$

выходящей из точки $t_0 = 0, x_0 = 1$, получается из (5.4) и (5.5)

$$U = 0, C = 1.$$

Аналогично, из (5.6), (5.7) получается решение в области, лежащей левее характеристики первого семейства

$$x = 3t, \tag{5.10}$$

выходящей из точки $t_0 = 0, x_0 = 0$, в которой $U = 1, C = 2$.

Определим теперь решение в области, лежащей между характеристиками (5.9) и (5.10). Решение в этой области определяется системой уравнений

$$U + C = 3 - 2x_0, \quad U - C = -1, \quad x = x_0 + t(3 - 2x_0),$$

откуда следует

$$U = \frac{1 - x + t}{1 - 2t}, \quad C = \frac{2 - x - t}{1 - 2t}.$$

При фиксированном t это линейные зависимости от x , имеющие одинаковый наклон

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{1 - 2t}, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{1}{1 - 2t}. \tag{5.11}$$

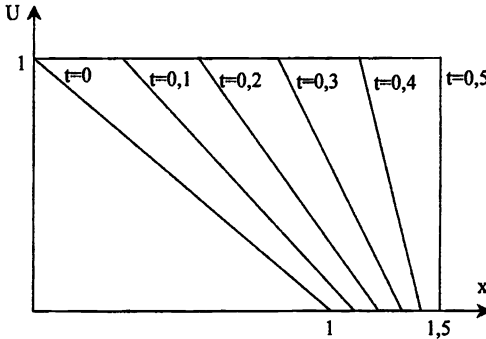


Рис.5.1. Постепенное нарастание крутизны волны и образование сильного разрыва.

Из (5.11) следует, что этот наклон не зависит от x и возрастает с увеличением t , обращаясь в ∞ при $t = 0,5$. В этот момент характеристики (5.8) пересекаются в точке $x = 1,5$ и решение становится неединственным. С другой стороны, в этой

точке решение претерпевает разрыв (Рис. 5.1) и, следовательно, дифференциальные уравнения газодинамики становятся неприменимыми. Законы сохранения должны быть записаны не в виде дифференциальных уравнений, а в виде условий на разрыве.

§2. Условия на сильных разрывах

С математической точки зрения поверхность сильного разрыва есть предельный случай очень больших градиентов величин, когда ширина области, в которой происходит конечное изменение этих величин, стремится к нулю. Напишем уравнения, которые связывают величины по обе стороны от поверхности сильного разрыва. Будем считать, что поверхность разрыва в пространстве x, y, z ориентирована произвольно и возьмем на ней элемент поверхности

$$d\bar{S} = \bar{n}dS.$$

Скорость движения вещества относительно разрыва, движущегося со скоростью \bar{N} , обозначим через $\bar{\theta}$, где

$$\bar{\theta} = \bar{U} - \bar{N}. \quad (5.12)$$

Обозначим величины, втекающие в поверхность разрыва, индексом “-“ (перед разрывом), а вытекающие из него индексом “+“ (за разрывом).

За время dt через площадку $d\bar{S}$ на поверхности разрыва втекает масса

$$dM_- = \rho_- \bar{\theta}_- d\bar{S} dt.$$

Соответственно, масса, вытекающая из поверхности разрыва, имеет вид

$$dM_+ = \rho_+ \bar{\theta}_+ d\bar{S} dt.$$

Поскольку $\bar{\theta} = \theta_n \bar{n} + \theta_t \bar{\tau}$, $d\bar{S} = \bar{n}dS$, где θ_n , θ_t нормальная и касательная к площадке $d\bar{S}$ компоненты вектора $\bar{\theta}$, а dM_+ и dM_- содержат скалярные произведения этих векторов, то они могут быть записаны в виде

$$dM_- = \rho_- \theta_{n-} dSdt, \quad dM_+ = \rho_+ \theta_{n+} dSdt.$$

Приравняв эти массы и сократив на $dSdt$, получим закон сохранения массы на поверхности сильного разрыва

$$\rho_- \theta_{n-} = \rho_+ \theta_{n+}. \quad (5.13)$$

Количества движения масс dM_- и dM_+ имеют вид

$$d\bar{K}_- = \bar{\theta}_- dM_-, \quad d\bar{K}_+ = \bar{\theta}_+ dM_+.$$

Следовательно, изменение количества движения массы $dM = dM_+ = dM_-$ при переходе через поверхность разрыва равно

$$\Delta\bar{K} = \bar{\theta}_+ dM_+ - \bar{\theta}_- dM_-.$$

Это изменение количества движения определяется тем, что перед разрывом на вещество действует сила P_- , а за разрывом – сила P_+ . Таким образом, разность импульсов, приложенных к веществу с массой dM , равна

$$\Delta\bar{J} = (P_- - P_+) d\bar{S}dt.$$

Приравняв изменение количества движения разности импульсов и сократив на $d\bar{S}dt$, получим

$$\rho_+ \theta_{n+} \bar{\theta}_+ - \rho_- \theta_{n-} \bar{\theta}_- = (P_- - P_+) \bar{n}.$$

Это векторное уравнение содержит два скалярных уравнения вдоль нормали и касательной к поверхности разрыва

$$\rho_- \theta_{n-} (\theta_{n+} - \theta_{n-}) = P_- - P_+, \quad (5.14)$$

$$\rho_- \theta_{n-} (\theta_{t+} - \theta_{t-}) = 0. \quad (5.15)$$

Из (5.15) следует, что касательная к поверхности сильного разрыва компонента вектора скорости непрерывна.

Приравняем изменение энергии при переходе через поверхность сильного разрыва

$$\Delta Q = \varepsilon_+ dM_+ - \varepsilon_- dM_-$$

работе сил давления

$$\Delta A = (P_- \bar{\theta}_- - P_+ \bar{\theta}_+) d\bar{S} dt.$$

После сокращения на $d\bar{S} dt$ получим закон сохранения энергии на сильном разрыве

$$\rho_- \theta_{n-} (\varepsilon_+ - \varepsilon_-) = P_- \theta_{n-} - P_+ \theta_{n+}. \quad (5.16)$$

В уравнении (5.16) удельная полная энергия равна

$$\varepsilon = E + \frac{1}{2} \theta^2. \quad (5.17)$$

В уравнениях (5.13)-(5.15) перейдем с помощью (5.12) от относительной скорости $\bar{\theta}$ к скорости \bar{U} . Тогда они примут вид

$$\rho_+ (N - U_{n+}) = \rho_- (N - U_{n-}), \quad (5.18)$$

$$\rho_- (N - U_{n-})(U_{n+} - U_{n-}) = P_+ - P_-, \quad (5.19)$$

$$U_{\tau+} = U_{\tau-}. \quad (5.20)$$

Совершая такой же переход в (5.16), следует принимать во внимание (5.17). Тогда уравнение энергии примет вид

$$\rho_- (N - U_{n-}) \left(E_+ - E_- + \frac{1}{2} U_{n+}^2 - \frac{1}{2} U_{n-}^2 \right) = P_+ U_{n+} - P_- U_{n-}. \quad (5.21)$$

Уравнения (5.18)-(5.21) содержат 11 величин. Естественно, что одно из состояний должно быть известно, например, состояние перед поверхностью сильного разрыва (P_- , ρ_- , E_- , \bar{U}_-). Если одна из величин за фронтом ударной волны известна, то из (5.18)-(5.21) и из уравнения состояния находятся все остальные величины со значком “+”.

Уравнения (5.18)-(5.21) содержат величину N , которая называется **скоростью перемещения сильного разрыва**. Это скорость, с которой поверхность разрыва перемещается из одной точки пространства в другую. Вещество, по которому распространяется ударная волна, может двигаться в пространстве. Величина, характеризующая как быстро ударная волна переходит от одной частички вещества к другой, называется **скоростью распространения**.

В лагранжевых координатах, когда в качестве координаты выбрана масса, скорость распространения W связана с N уравнениями

$$W = \rho_+(N - U_{n+}) = \rho_-(N - U_{n-}). \quad (5.22)$$

Уравнения (5.18), (5.19), (5.21) и (5.22) не содержат касательной к поверхности разрыва компоненты вектора скорости. Поэтому индекс « n » у нормальной компоненты вектора скорости можно опустить. Однако следует помнить, что эти уравнения справедливы вдоль нормали к поверхности сильного разрыва. Далее (5.18), (5.19) и (5.21) будем рассматривать в виде

$$\rho_+(N - U_+) = \rho_-(N - U_-), \quad (5.23)$$

$$\rho_-(N - U_-)(U_+ - U_-) = P_+ - P_-, \quad (5.24)$$

$$\rho_-(N - U_-)(E_+ - E_- + \frac{1}{2}U_+^2 - \frac{1}{2}U_-^2) = P_+U_+ - P_-U_-. \quad (5.25)$$

После введения скорости распространения W и исключения N в (5.23)–(5.25) с помощью (5.22) законы сохранения массы, количества движения и энергии на поверхности сильного разрыва принимают вид

$$(V_+ - V_-)W = -(U_+ - U_-), \quad (5.26)$$

$$(U_+ - U_-)W = P_+ - P_-, \quad (5.27)$$

$$(E_+ - E_- + \frac{1}{2}U_+^2 - \frac{1}{2}U_-^2)W = P_+U_+ - P_-U_-. \quad (5.28)$$

Аналогично тому, как были получены следствия законов сохранения в дифференциальной форме, получим следствия системы (5.26)–(5.28). Сначала исключим в первом и втором уравнениях величину $U_+ - U_-$. В результате получим выражение квадрата скорости распространения через скачки P и V

$$W^2 = -\frac{P_+ - P_-}{V_+ - V_-}. \quad (5.29)$$

Далее запишем (5.28) в виде

$$W(E_+ - E_-) + \frac{1}{2}W(U_+ + U_-)(U_+ - U_-) = P_+U_+ - P_-U_-. \quad (5.30)$$

Подставим в (5.30) выражение $U_+ - U_-$, полученное из (5.27), и преобразуем второе слагаемое в (5.30) к виду

$$\frac{1}{2}W(U_+ + U_-) - \frac{1}{W}(P_+ - P_-) = \frac{1}{2}(P_+U_+ + P_+U_- - P_-U_+ - P_-U_-).$$

Перенесем полученное выражение в правую часть (5.30). Проведя несложные преобразования, получим

$$W(E_+ - E_-) = \frac{1}{2}(P_+ + P_-)(U_+ - U_-).$$

Подставив сюда $U_+ - U_-$, выраженное из (5.26), получим

$$E_+ - E_- + \frac{1}{2}(P_+ + P_-)(V_+ - V_-) = 0. \quad (5.31)$$

Уравнения, связывающие величины с разных сторон поверхности сильного разрыва, часто называют **условиями динамической совместности**.

§3. Ударная адиабата

Уравнение (5.31) вместе с уравнением состояния определяют в плоскости P, V кривую возможных состояний за фронтом ударной волны, которая называется **ударной адиабатой** или адиабатой Гюгонио. Адиабатой эта кривая называется потому, что процесс изменения газодинамических величин на фронте ударной волны происходит без притока тепла. Свойства ударной адиабаты отличаются от свойств изэнтропы, т.к. вдоль нее изменяется энтропия. Рассмотрим эти свойства.

Разложим внутреннюю энергию E и давление P в ряды Тейлора в точке P_-, V_-, E_-, S_-

$$E = E_- + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_s (V - V_-) + \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_v (S - S_-) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\right)_s (V - V_-)^2 + \\ + \frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S} (V - V_-)(S - S_-) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2}\right)_v (S - S_-)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 E}{\partial V^3}\right)_s (V - V_-)^3 + \dots, \quad (5.32)$$

$$P = P_- + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S (V - V_-) + \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V (S - S_-) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S (V - V_-)^2 + \dots \quad (5.33)$$

Подставив разложения Е (5.32) и Р (5.33) в (5.31), получим

$$S - S_- = -\frac{1}{12T} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S (V - V_-)^3 + \dots \quad (5.34)$$

Воспользуемся простым соображением, что конечным давлением вещество нельзя сжать бесконечно сильно так, чтобы стало $V = 0$. Это значит, что и вдоль изэнтропы, и вдоль ударной адиабаты должны выполняться условия

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_H > 0. \quad (5.35)$$

Разделим обе части (5.34) на $V - V_-$.

$$\frac{S - S_-}{V - V_-} = -\frac{1}{12T} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_S (V - V_-)^2 + \dots \quad (5.36)$$

Из (5.35) и (5.36) следует, что

$$\frac{S - S_-}{V - V_-} < 0. \quad (5.37)$$

Ударная адиабата, определяемая уравнением (5.31) и уравнением состояния

$$P = P(V, E),$$

не совпадает с изэнтропой. Поскольку вдоль ударной адиабаты $S - S_- > 0$, то из (5.37) следует, что

$$V - V_- < 0. \quad (5.38)$$

Введем следующие обозначения

$$\Lambda_H = \left(\frac{dP}{dV}\right)_H, \quad \Lambda_S = \left(\frac{dP}{dV}\right)_S, \quad \Lambda_\Lambda = \frac{P - P_-}{V - V_-}.$$

Уравнения (3.40) и (5.29) $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = -a^2$, $\frac{P - P_-}{V - V_-} = -W^2$ определяют знаки Λ_Λ и Λ_S

$$\Lambda_\Lambda = -W^2 < 0, \quad \Lambda_S = -a^2 < 0. \quad (5.39)$$

Величина Λ_H может быть записана следующим образом

$$\Lambda_H = \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_E + \left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_V \left(\frac{dE}{dV} \right)_H. \quad (5.40)$$

Величина $\left(\frac{dE}{dV} \right)_H$ определяется дифференцированием (5.31)

$$\left(\frac{dE}{dV} \right)_H = -\frac{V - V_-}{2} \Lambda_H - \frac{P + P_-}{2}. \quad (5.41)$$

Поскольку значения P , V , E берутся на ударной адиабате и определяют состояние за фронтом ударной волны, индексы “+” в этом параграфе будем опускать.

Подставляя (5.41) в (5.40), получим

$$\Lambda_H = \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_E - P \left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_V + \left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_V \left[\frac{P - P_-}{2} - \frac{V - V_-}{2} \Lambda_H \right]. \quad (5.42)$$

Наклон изэнтропы может быть записан также в виде

$$\Lambda_S = \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_E - P \left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_V. \quad (5.43)$$

Из (5.42) и (5.43) следует зависимость между Λ_H , Λ_S , Λ_Λ

$$\Lambda_H - \Lambda_S = \frac{V - V_-}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_V (\Lambda_\Lambda - \Lambda_H). \quad (5.44)$$

Эта зависимость может быть записана также в виде

$$\Lambda_\Lambda - \Lambda_S = \left[1 + \frac{V - V_-}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_V \right] (\Lambda_\Lambda - \Lambda_H). \quad (5.45)$$

Уравнения (5.44), (5.45) при полученных ранее условиях, которым удовлетворяют величины V , V_- , $\left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_V$, позволяют устанавливать системы неравенств, которым удовлетворяют Λ_H , Λ_S и Λ_Λ .

Анализ ударной адиабаты начнем с точки А (Рис.5.2), соответствующей состоянию перед фронтом ударной волны $P = P_-$, $V = V_-$, $E = E_-$. Точка В, в которой луч ВА пересекается с ударной адиабатой ВНА, соответствует

состоянию за ударной волной. Рассмотрим бесконечно слабую ударную волну, которая получается в пределе при $V_B \rightarrow V_A$. в этом случае из (5.44) следует

$$\Lambda_H(V_-) = \Lambda_S(V_-).$$

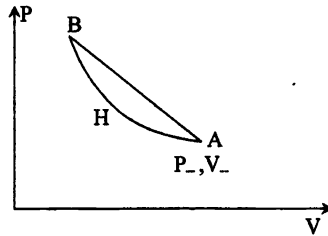


Рис. 5.2. Схематическое изображение ударной адиабаты и луча.

Подставим $S - S_-$ из (5.34) в (5.33.) и запишем полученное уравнение в виде

$$\Lambda_A = \Lambda_S(V_-) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_S (V - V_-) + O(\Delta V^2). \quad (5.46)$$

Из (5.35) и (5.46) следует, что при $V = V_-$ выполняется равенство

$$\Lambda_A(V_-) = \Lambda_S(V_-).$$

Таким образом, ударная адиабата и луч касаются изэнтропы, проходящей через точку A, и это свойство не зависит от уравнения состояния. Это означает, что скорость распространения в лагранжевых координатах бесконечно слабых ударных волн равна жесткости вещества перед фронтом

$$W = \pm a_-.$$

Формула (5.46) справедлива лишь в малом промежутке $V - V_-$, т.к. в ней выделен только главный член ряда Тэйлора. Тем не менее, даже в малом промежутке $V - V_-$ из нее следует важное заключение, что при $V < V_-$

$$\Lambda_A < \Lambda_S(V_-).$$

Перейдем теперь к детальному рассмотрению точки B на ударной адиабате, в которой $V < V_-$. Из второго неравенства (5.35) следует, что ударная адиабата

обращена выпуклостью вниз и при $V_B < V < V_-$ она лежит ниже луча, соединяющего точку А с точкой В (Рис. 5.2). Но это означает, что в точке В

$$\Lambda_H < \Lambda_A < \Lambda_{H-}. \quad (5.47)$$

Из (3.82), (5.38), (5.44), (5.45) и (5.47) следует, что при

$$1 + \frac{V - V_-}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_V > 0$$

выполняется система неравенств

$$\Lambda_H < \Lambda_S < \Lambda_A < \Lambda_{S-}.$$

Подставляя (5.39) в эти неравенства, получим

$$a_+^2 > W^2 > a_-^2. \quad (5.48)$$

§4. Ударные волны в идеальном газе

Особенно простой вид условия на фронте ударной волны и ударная адиабата приобретают в случае идеального газа

$$P = (\gamma - 1)\rho E. \quad (5.49)$$

Идеальный газ удовлетворяет условиям (3.79) и (3.82)

$$\left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_V = (\gamma - 1)\rho > 0, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_V = \frac{P}{C_V} > 0,$$

а его изэнтропы обращены выпуклостью книзу $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_S > 0$. Следовательно, в

идеальном газе возможны только ударные волны сжатия, на фронте которых выполняются неравенства (5.48).

Система уравнений (5.26), (5.27), (5.31) и (5.49) содержит четыре величины P_-, V_-, E_-, U_- , характеризующих состояние перед разрывом, четыре величины P_+, V_+, E_+, U_+ , характеризующих состояние за разрывом, и скорость разрыва W . Как правило, величины перед разрывом известны. Таким образом, система уравнений (5.26), (5.27), (5.31) и (5.49) содержит пять величин, которые требуется

определить. Одна из этих величин должна быть параметром, от которого зависят все остальные.

Рассмотрим случай, когда параметром является величина W . Выбор W в качестве параметра во многих случаях объясняется тем, что в опытах с хорошей точностью может быть найдено N , и при известных p_- и U_- W просто выражается через них

$$W = p_-(N - U_-).$$

Выразим все величины за фронтом P_+ , V_+ , E_+ , U_+ через W . Для этого предварительно из (5.31) и (5.49) исключим E . Полученная в результате этого зависимость между P_+ и V_+ есть ударная адиабата идеального газа. Она имеет вид

$$P_+ = P_- \frac{(\gamma + 1)V_- - (\gamma - 1)V_+}{(\gamma + 1)V_+ - (\gamma - 1)V_-}. \quad (5.50)$$

Из (5.50) видно, что когда ударная волна становится очень сильной и отношение давлений $\frac{P_+}{P_-}$ стремится к ∞ , то отношение удельных объемов $\sigma = \frac{V_+}{V_-}$ стремится к

предельному значению $\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$. Исключим далее из (5.26) и (5.27) скачок скорости

$$(V_+ - V_-)W^2 + (P_+ - P_-) = 0. \quad (5.51)$$

Подставляя P_+ из (5.26) в (5.31), получим

$$V_+ = \frac{1}{\gamma + 1} \left[(\gamma - 1)V_- + \frac{2\gamma P_-}{W^2} \right]. \quad (5.52)$$

Зависимости остальных величин от W получаются из (5.26), (5.31), (5.51) и (5.52)

$$U_+ = U_- - \frac{2\gamma P_-}{(\gamma + 1)W} + \frac{2}{\gamma + 1} W V_-, \quad P_+ = \frac{2}{\gamma + 1} (W^2 V_- - \gamma P_-), \quad (5.53)$$

$$E_+ = E_- + \frac{2}{(\gamma + 1)^2} \left(V_-^2 W^2 - \frac{\gamma P_-^2}{W^2} - (\gamma - 1) P_- V_- \right).$$

Уравнения (5.52), (5.53) используются для определения P_+ , V_+ , U_+ , E_+ по измеренному значению W в тех случаях, когда применима модель идеального газа, т.е. при больших давлениях и температурах.

Во многих опытах с хорошей точностью может быть определена скорость вещества за фронтом ударной волны U_+ . Выберем в качестве параметра скачок скорости на фронте $\Delta U = U_+ - U_-$ и выразим через него все остальные величины. Исключим W из (5.26) и (5.27)

$$(P_+ - P_-)(V_+ - V_-) + (U_+ - U_-)^2 = 0. \quad (5.54)$$

Подставив в (5.54) V_+ , выраженное с помощью (5.50) через P_+ , получим квадратное уравнение

$$\Delta P^2 - \frac{\gamma+1}{2} \frac{\Delta U^2}{V_-} \Delta P + \frac{\gamma P_-}{V_-} \Delta U^2 = 0,$$

где $\Delta P = P_+ - P_-$, $\Delta U = U_+ - U_-$. Решение этого уравнения дает нужную зависимость ΔP от ΔU

$$\Delta P = \frac{\gamma+1}{4} \frac{1}{V_-} \Delta U^2 + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4} \frac{1}{V_-} \Delta U^2\right)^2 + \frac{\gamma P_-}{V_-} \Delta U^2}. \quad (5.55)$$

Знак плюс перед корнем выбран из условия, что на ударной волне сжатия в идеальном газе $\Delta P > 0$. Из (5.54) и (5.55) находится V_+ как функция U_+

$$V_+ = V_- - \frac{\Delta U^2}{\frac{\gamma+1}{4} \frac{1}{V_-} \Delta U^2 + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4} \frac{1}{V_-} \Delta U^2\right)^2 + \frac{\gamma P_-}{V_-} \Delta U^2}}. \quad (5.56)$$

Подставляя (5.55), (5.56) в (5.31), получим выражение для E_+

$$E_+ = E_- + \frac{\gamma-1}{4\gamma} \Delta U^2 + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4\gamma} \Delta U^2\right)^2 + \frac{P_- V_-}{\gamma} \Delta U^2}.$$

Из (5.27) и (5.55) следует выражение для W

$$W = \frac{(\gamma + 1)\Delta U}{4V_-} \pm \sqrt{\left(\frac{(\gamma + 1)\Delta U}{4V_-}\right)^2 + \frac{\gamma P_-}{V_-}}.$$

В этой формуле знак “+” перед корнем берется при $W > 0$ и знак “-” при $W < 0$. Это необходимо делать для того, чтобы произведение $W\Delta U$, равное $P_+ - P_-$, было бы всегда положительным.

Для определения скачка энтропии идеального газа на разрыве воспользуемся уравнением изэнтропы

$$P = e^{\frac{S}{C_V}} \rho^\gamma.$$

Выразив S через P и V

$$S = C_V \ln(PV^\gamma),$$

получим скачок энтропии в виде

$$S_+ - S_- = C_V \ln \left[\left(\frac{V_+}{V_-} \right)^\gamma \frac{P_+}{P_-} \right]. \quad (5.57)$$

Из термодинамики (глава 3) известно, что $S \geq 0$, $C_V \geq 0$. Эти условия определяют область применимости уравнения состояния идеального газа $PV^\gamma \geq 1$. С помощью ударной адиабаты (5.50) заменим отношение давлений $\frac{P_+}{P_-}$ в (5.57) функцией от V

$$S_+ - S_- = C_V \ln \left[\left(\frac{V_+}{V_-} \right)^\gamma \frac{(\gamma + 1)V_- - (\gamma - 1)V_+}{(\gamma + 1)V_+ - (\gamma - 1)V_-} \right].$$

Таким образом, при $P_- V_-^\gamma > 1$ энтропия идеального газа за фронтом ударной волны возрастает при увеличении его сжатия и $S_+ \rightarrow \infty$ при $\frac{V_-}{V_+} \rightarrow \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$.

Возрастание энтропии указывает на то, что в ударной волне происходят необратимые диссипативные процессы. Поскольку в уравнениях идеальной сплошной среды, рассматриваемых нами, диссипативные члены (вязкость,

теплопроводность и др.) не принимаются во внимание, то фронт ударной волны необходимо рассматривать, как разрыв (скачок), ибо при непрерывном изменении состояния вещества энтропия каждой частички сохраняется. Если же в уравнения механики сплошной среды внести диссипативные члены, то переход вещества из состояния перед фронтом в состояние за фронтом может происходить непрерывно за некоторое конечное время в некотором слое конечной толщины. Величины по обе стороны этого слоя определяются исключительно законами сохранения массы, количества движения и энергии. От механизма диссипации зависит лишь толщина разрыва и градиенты всех газодинамических величин в нем – крутизна фронта. Вопрос о структуре фронта ударной волны в вязком газе будет рассмотрен в §8.

В заключение покажем, что в идеальном газе выполняются неравенства (5.48). Для этого запишем (5.52) в виде

$$V_+ - V_- = \frac{1-h}{h} V_- + \frac{(h+1)P_-}{W^2}. \quad (5.58)$$

где $h = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$. Поскольку $\frac{\gamma P_-}{V_-} = a_-^2$, то из (5.58) следует

$$V_+ - V_- = \frac{2}{\gamma + 1} V_- \left(\frac{a_-^2}{W^2} - 1 \right)$$

и при $V_+ \leq V_-$ получаем

$$a_-^2 \leq W^2. \quad (5.59)$$

Далее рассмотрим выражение для квадрата жесткости $a_+^2 = \frac{\gamma P_+}{V_+}$. Отнимем от правой и левой частей этой формулы W^2 и вместо P_+ подставим его выражение через W^2 (5.53). В результате получим

$$a_+^2 - W^2 = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{V_-}{V_+} (W^2 - a_-^2).$$

Из этого уравнения и (5.59) следует

$$a_+^2 \geq W^2.$$

§5. Ударные волны в конденсированном веществе

Рассмотрим изменения величин на фронте ударной волны в конденсированном веществе с простейшим уравнением состояния

$$P = (\gamma - 1) \rho E + C_{0K}^2 (\rho - \rho_{0K}). \quad (5.60)$$

Ударная адиабата этого вещества в переменных P , V получается после исключения E с помощью (5.60) из уравнения (5.31) в виде

$$P_+ = \frac{P_- \left((\gamma + 1) V_- - (\gamma - 1) V_+ \right) - 2\rho_{0K} C_{0K}^2 (V_+ - V_-)}{(\gamma + 1) V_+ - (\gamma - 1) V_-}. \quad (5.61)$$

Два оставшихся условия на фронте после исключения W дают

$$(P_+ - P_-) (V_+ - V_-) + (U_+ - U_-)^2 = 0. \quad (5.62)$$

Исключая V_+ из (5.61) и (5.62), получим зависимость $\Delta P = P_+ - P_-$ от $\Delta U = U_+ - U_-$ в виде уравнения второго порядка

$$\Delta P^2 - \frac{\gamma + 1}{2} \Delta P \frac{\Delta U^2}{V_-} - \frac{\Delta U^2}{V_-} (\gamma P_- + \rho_{0K} C_{0K}^2) = 0.$$

Решение этого уравнения есть искомая зависимость P от U

$$P_+ = P_- + \frac{\gamma + 1}{4} \frac{\Delta U^2}{V_-} + \sqrt{\left[\frac{\gamma + 1}{4} \frac{\Delta U^2}{V_-} \right]^2 + (\gamma P_- + \rho_{0K} C_{0K}^2) \frac{\Delta U^2}{V_-}}. \quad (5.63)$$

Для выбранного нами простейшего уравнения состояния конденсированного вещества

$$a^2 = \frac{\gamma P + \rho_{0K} C_{0K}^2}{V}.$$

Подставляя это соотношение в (5.63), получим окончательно

$$P_+ = P_- + \frac{\gamma + 1}{4} \frac{\Delta U^2}{V_-} + \sqrt{\left[\frac{\gamma + 1}{4} \frac{\Delta U^2}{V_-} \right]^2 + a_-^2 \Delta U^2}. \quad (5.64)$$

Поскольку $P_+ - P_- - W\Delta U = 0$, то из (5.64) получается зависимость W от ΔU

$$W = \frac{\gamma+1}{4} \frac{\Delta U}{V_-} \pm \sqrt{\left[\frac{\gamma+1}{4} \frac{\Delta U}{V_-} \right]^2 + a_-^2}. \quad (5.65)$$

Уравнения (5.64), (5.65) допускают два предельных случая:

1. Ударная волна очень сильная

$$\left| \frac{\gamma+1}{4} \frac{\Delta U}{V_-} \right| \gg a_- ,$$

и тогда формулы (5.64), (5.65) принимают вид

$$P_+ = P_- + \frac{\gamma+1}{2} \frac{\Delta U^2}{V_-}, \quad W = \frac{\gamma+1}{2} \frac{\Delta U}{V_-}.$$

2. Ударная волна очень слабая

$$\left| \frac{\gamma+1}{4} \frac{\Delta U}{V_-} \right| \ll a_- .$$

В этом случае

$$P_+ = P_- \pm a_- \Delta U, \quad W = \pm a_- . \quad (5.66)$$

Если для исследования ударных волн используются формулы (5.66), то говорят, что ударные волны рассматриваются в акустическом приближении.

Зависимость P_+ от U_+ вида (5.64) можно построить лишь для некоторых простых уравнений состояния. Например, уже для уравнения состояния конденсированного вещества с несогласованными p и γ такую зависимость в явном виде построить не удастся. Поэтому в случае сложных уравнений состояния кривая $P(U)$ определяется в результате численного решения системы уравнений (5.26), (5.27), (5.31) и уравнения состояния $P = f(V, E)$.

§6. О взаимном расположении в плоскости x, t фронта ударной волны сжатия и характеристик

На фронте ударной волны сжатия выполняются неравенства (5.48). Применим эти неравенства, чтобы определить взаимное расположение характеристик трех семейств и ударного фронта в плоскости x, t .

Вначале рассмотрим течение за фронтом ударной волны, где выполняется соотношение (5.49). Вычтем W^2 из a_+^2 и разложим полученную разность на множители

$$(a_+ - W)(a_+ + W) > 0.$$

В случае, когда $W > 0$, $a_+ + W > 0$ и, следовательно, $a_+ > W > 0 > -W$. В случае, когда $W < 0$, $a_+ - W > 0$ и, следовательно, $W > -a_+$. Иными словами, справедливы две системы неравенств

$$a_+ > W > 0 \text{ и } 0 > W > -a_+.$$

Используя выражения для W и a_+

$$W = \rho_+ (N - U_+), \quad a_+ = \rho_+ C_+,$$

запишем эти неравенства в виде

$$U_+ + C_+ > N > U_+ - C_+. \quad (5.67)$$

Характеристики первого и второго семейств описываются уравнениями

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_{1,2} = U \pm C.$$

Таким образом, неравенства (5.67) устанавливают расположение этих характеристик относительно фронта ударной волны (за фронтом)

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_1 > N > \left(\frac{dx}{dt} \right)_2.$$

Расположение третьей характеристики относительно фронта определяется с помощью выражения $W = \rho_+ (N - U_+)$ и зависит от знака W

$$N > U_+ \quad \text{при } W > 0,$$

$$N < U_+ \quad \text{при } W < 0.$$

Рассмотрим далее течение перед фронтом ударной волны. Основным здесь является одно из неравенств (5.48)

$$a_-^2 < W^2.$$

Перенесем a_-^2 в правую часть и разложим на множители

$$(W - a_-)(W + a_-) > 0. \quad (5.68)$$

В случае, когда $W > 0$, из (5.68) следует

$$W > a_- > 0. \quad (5.69)$$

Если же $W < 0$, то из (5.68) следует

$$W < -a_- < 0. \quad (5.70)$$

Подставляя в (5.69) и (5.70) выражения для W и a получим

$$N > U_- + C_-, \quad N > U_- \quad \text{при } W > 0,$$

$$N < U_- - C_-, \quad N < U_- \quad \text{при } W < 0.$$

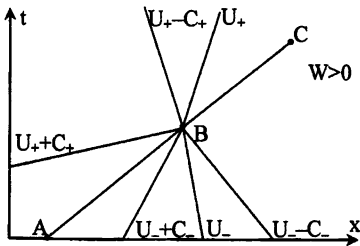


Рис.5.3.

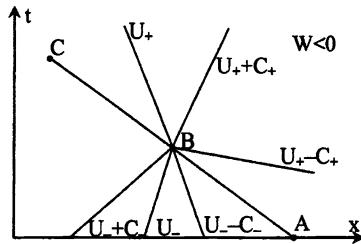


Рис.5.4.

На Рис. 5.3 и Рис. 5.4 показано взаимное расположение ударного фронта ABC и характеристик, проходящих через точку B в плоскости x, t при $W > 0$, $W < 0$.

§7. Структура фронта ударной волны в вязком газе

Из условий динамической совместности (5.18), (5.19)-(5.21) следует, что на фронте ударной волны терпят разрыв лишь нормальные к фронту компоненты векторных величин и скалярные величины. Поэтому, если предположить, что в силу диссипативных процессов фронт имеет конечную толщину, то можно рассматривать непрерывное изменение всех величин в таком фронте лишь в одном направлении – по нормали к фронту.

В одномерном плоском течении производные по y и z равны нулю, а компоненты скорости U_y , U_z постоянны. Кроме того, должны быть постоянными компоненты σ_{xy} и σ_{zx} вязкого тензора σ . Непостоянство этих компонент породило бы нестационарное движение в плоскости y , z и течение перестало бы быть одномерным. Таким образом, законы сохранения для вязкой среды в случае одного пространственного переменного в лагранжевых координатах принимают вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial m} = 0, \quad (5.71)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial m} = 0, \quad (5.72)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \Pi U}{\partial m} = 0, \quad (5.73)$$

где

$$\Pi = P - \sigma.$$

Значком σ обозначена для простоты компонента σ_{xx} вязкого тензора

$$\sigma = \frac{4}{3} \eta \rho_0 \frac{\partial U}{\partial m}. \quad (5.74)$$

Из уравнений состояния возьмем наиболее простое уравнение конденсированного вещества

$$P = (\gamma - 1) \frac{E}{V} + C_{0k}^2 \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_{0k}} \right). \quad (5.75)$$

Рассмотрим ударную волну постоянной амплитуды, распространяющуюся по постоянному фону P_0 , V_0 , E_0 , U_0 . Поскольку скачки всех величин на фронте постоянны, то величина W также оказывается постоянной. Перейдем к новой системе координат, связанной с фронтом ударной волны

$$\xi = m - Wt.$$

Заменяем дифференцирование по t и по m дифференцированием по ξ

$$\frac{\partial}{\partial t} = -W \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial m} = \frac{d}{d\xi}.$$

Обозначим производную по ξ штрихом. Тогда (5.71)-(5.73) принимают вид

$$WV' + U' = 0, \quad (5.76)$$

$$WU' - \Pi = 0, \quad (5.77)$$

$$W\varepsilon' - (\Pi U)' = 0. \quad (5.78)$$

Проинтегрируем (5.76)-(5.78). Постоянные интегрирования найдем, удовлетворяя заданным условиям перед ударной волной. Таким образом, получим уравнения

$$U + WV = U_0 + WV_0, \quad (5.79)$$

$$\Pi - WU = P_0 - WU_0, \quad (5.80)$$

$$\varepsilon - \frac{1}{W} \Pi U = \varepsilon_0 - \frac{1}{W} P_0 U_0. \quad (5.81)$$

Подставим в (5.81) выражение полной энергии $\varepsilon = E + 0.5U^2$ и с помощью уравнения состояния (5.75) исключим E . В результате получим

$$\frac{PV - P_0 V_0}{\gamma - 1} + \frac{C_{0k}^2 (V - V_0)}{(\gamma - 1) V_{0k}} + \frac{1}{2} (U^2 - U_0^2) - \frac{1}{W} (\Pi U - P_0 U_0) = 0.$$

Исключим в этом уравнении U , Π и P с помощью (5.79), (5.80)

$$\sigma V = (V_0 - V) \left(\gamma P_0 - \frac{\gamma - 1}{2} W^2 (V - V_0) + \frac{C_{0k}^2}{V_{0k}} W^2 V \right). \quad (5.82)$$

Для уравнения состояния (5.75) в состоянии перед ударной волной квадрат скорости звука в лагранжевых координатах a_0^2 выражается через V_0 и P_0

$$a_0^2 V_0 = \gamma P_0 + \rho_{0k} C_{0k}^2. \quad (5.83)$$

Подставив (5.83) в (5.82), получим

$$\sigma V = (V_0 - V) \left(a_0^2 V_0 - \frac{\gamma - 1}{2} W^2 (V - V_0) - W^2 V \right). \quad (5.84)$$

Поскольку ударная волна стационарна, то при $V = V_1$ должно быть $\sigma_1 = 0$. Это возможно, если равен нулю второй сомножитель в правой части (5.84)

$$a_0^2 V_0 - \frac{\gamma - 1}{2} W^2 (V_1 - V_0) - W^2 V_1 = 0. \quad (5.85)$$

Из (5.85) выразим V_1

$$V_1 = V_0 \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2a_0^2}{(\gamma + 1)W^2} \right). \quad (5.86)$$

Вернемся теперь к выражению (5.74) для σ . Перейдем от m к ξ и заменим U' на $-WV'$ с помощью (5.76)

$$\sigma = -\frac{4}{3} \eta \rho_0 W V'. \quad (5.87)$$

Подставив (5.86) и (5.87) в (5.84), получим

$$\frac{8\eta\rho_0 V}{3W(\gamma+1)} V' = (V_0 - V)(V - V_1). \quad (5.88)$$

Запишем это уравнение в виде

$$\frac{8\eta\rho_0}{3W(\gamma+1)} \int_V \frac{VdV}{(V_0 - V)(V - V_1)} = \xi.$$

После интегрирования, зависимость $\xi(V)$ имеет вид

$$\xi = \frac{8\eta\rho_0}{3W(\gamma+1)(V_0 - V_1)} (V_1 \ln(V - V_1) - V_0 \ln(V_0 - V)) + \text{const}. \quad (5.89)$$

Чтобы определить постоянную интегрирования, поместим начало координат $\xi = 0$ в точку, где модуль производной V' достигает наибольшего значения.

Дифференцируя (5.88) по ξ и приравнявая нулю V'' , найдем значение V , при котором V' достигает максимального значения

$$V_M = 0,5(V_0 + V_1).$$

После определения постоянной интегрирования уравнение (5.89) принимает вид

$$\xi = \frac{8\eta\rho_0}{3W(\gamma+1)(V_0 - V_1)} \left(V_1 \ln \frac{2(V - V_1)}{(V_0 - V_1)} - V_0 \ln \frac{2(V_0 - V)}{(V_0 - V_1)} \right). \quad (5.90)$$

Из полученного решения видно, что

$$\xi \rightarrow +\infty \text{ при } V \rightarrow V_0, \quad \xi \rightarrow -\infty \text{ при } V \rightarrow V_1.$$

Замена сильного разрыва слоем, в котором величины меняются непрерывно, называется дистракцией. Т.о. включение в законы сохранения вязкости σ , т.е. переход к неидеальной жидкости, приводит к бесконечной дистракции разрыва. На практике используют понятие эффективной ширины ударного слоя. Для этого в точке $\xi = 0$ проводится касательная к кривой (5.90). Наклон этой касательной определяется из (5.88) при $V = 0,5(V_0 + V_1)$

$$V'_M = \frac{3W(\gamma+1)}{16\eta\rho_0(V_0 + V_1)} (V_0 - V_1)^2.$$

Прямая $V = \frac{1}{2}(V_0 + V_1) + V'_M \xi$ пересекается с прямыми $V = V_0$ и $V = V_1$ в точках

$$\xi_0 = \frac{8\eta\rho_0(V_0 + V_1)}{3(\gamma+1)W(V_0 - V_1)},$$

$$\xi_1 = -\frac{8\eta\rho_0(V_0 + V_1)}{3(\gamma+1)W(V_0 - V_1)}.$$

Разность $\xi_0 - \xi_1$ назовем эффективной шириной фронта ударной волны. После вычитания ξ_1 из ξ_0 и деления на ρ_0 получим

$$\Delta x_{\text{эф}} = \frac{16\eta(V_0 + V_1)}{3(\gamma+1)W(V_0 - V_1)}. \quad (5.91)$$

Уравнение (5.91) содержит две величины, характеризующих состояние за сильным разрывом. С помощью (5.86) исключим V_1 , заменив его зависимостью от W . В результате получим

$$\Delta x_{\text{эф}} = \frac{16\eta(\gamma W^2 + a_0^2)}{3(\gamma + 1)W(W^2 - a_0^2)}.$$

Величину $\frac{W}{a_0}$ можно условно назвать "силой" ударной волны. Если ударная

волна слабая, $\frac{W}{a_0} \rightarrow 1$, то $\Delta x_{\text{эф}} \rightarrow \infty$. В случае бесконечно сильной ударной

волны

$$\frac{a_0}{W} \rightarrow 0 \text{ и } \Delta x_{\text{эф}} \rightarrow \frac{16\eta\gamma}{3W(\gamma + 1)}.$$

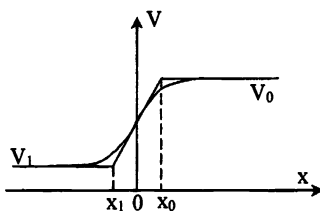


Рис. 5.5. Профиль удельного объема внутри стационарного слоя волны в вязкой среде.

Оценим эту минимальную ширину ударного слоя для алюминия и воздуха с параметрами:

$$\text{Алюминий: } \gamma \approx 3, \quad a_0 \approx 7,5 \cdot 10^5 \frac{\text{г}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}}, \quad W \approx 7,5 \cdot 10^6 \frac{\text{г}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}}, \quad \eta \approx 2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}},$$

$$\text{Воздух: } \gamma \approx 1,4, \quad a_0 \approx 0,375 \cdot 10^2 \frac{\text{г}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}}, \quad W \approx 0,375 \cdot 10^3 \frac{\text{г}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}}, \quad \eta \approx 2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}}.$$

Подставляя эти параметры в (5.73), получим $\Delta x_{\text{алюминий}} \approx 1,1 \cdot 10^{-8}$ см, $\Delta x_{\text{воздух}} \approx 1,6 \cdot 10^{-6}$ см. Эти величины сравнимы со средним пробегом молекул в воздухе и с межатомным расстоянием в алюминии. Качественная картина

изменения удельного объема внутри стационарного ударного слоя приведена на Рис. 5.5.

§8. Условия на слабых разрывах

В предыдущих параграфах были рассмотрены условия на поверхности сильного разрыва – разрыва самих газодинамических величин. Кроме сильных разрывов имеются также слабые разрывы – разрывы производных газодинамических величин. Сами величины при этом остаются непрерывными.

Рассмотрим в плоскости m, t некоторую кривую с уравнением $\frac{dm}{dt} = W$, на которой терпят разрыв производные $\frac{\partial U}{\partial t}$ и $\frac{\partial U}{\partial m}$. Запишем полные производные функции U вдоль этой кривой

$$\begin{aligned} \frac{dU_+}{dt} &= \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_+ + \left(\frac{\partial U}{\partial m}\right)_+ \frac{dm}{dt}, \\ \frac{dU_-}{dt} &= \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_- + \left(\frac{\partial U}{\partial m}\right)_- \frac{dm}{dt}. \end{aligned}$$

Вычитая нижнее уравнение из верхнего, и принимая во внимание, что $U_+ = U_-$, получим

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_+ - \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_- + W \left[\left(\frac{\partial U}{\partial m}\right)_+ - \left(\frac{\partial U}{\partial m}\right)_- \right] = 0. \quad (5.92)$$

Будем обозначать разность производных с обеих сторон разрыва следующим образом

$$\left[\frac{\partial U}{\partial t} \right] = \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_+ - \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_-.$$

После введения скачка производной уравнение (5.92) примет вид

$$\left[\frac{\partial U}{\partial t} \right] + W \left[\frac{\partial U}{\partial m} \right] = 0.$$

Аналогично могут быть записаны уравнения и для остальных газодинамических величин. Исключив из них W , получим систему уравнений

$$\frac{\left[\frac{\partial V}{\partial t} \right]}{\left[\frac{\partial V}{\partial m} \right]} = \frac{\left[\frac{\partial P}{\partial t} \right]}{\left[\frac{\partial P}{\partial m} \right]} = \frac{\left[\frac{\partial E}{\partial t} \right]}{\left[\frac{\partial E}{\partial m} \right]} = \frac{\left[\frac{\partial U}{\partial t} \right]}{\left[\frac{\partial U}{\partial m} \right]} = -W. \quad (5.93)$$

Уравнения (5.93), связывающие производные по обе стороны поверхности слабого разрыва, называются условиями кинематической совместности.

Поскольку слабый разрыв может рассматриваться как сильный разрыв нулевой амплитуды, то в соответствии с выводом о скорости бесконечно слабой ударной волны, сделанном в §3 гл.3, можно написать

$$W = \pm a.$$

Запишем условие кинематической совместности (5.93) в эйлеровых координатах. При переходе от лагранжевых координат к эйлеровым все частные производные по t становятся субстанциональными производными, а производные по m легко заменяются производными по x

$$\left[\frac{\partial U}{\partial t} \right]_{\Lambda} = \left[\frac{\partial U}{\partial t} \right]_{\Theta} + U \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right], \quad \left[\frac{\partial U}{\partial m} \right]_{\Lambda} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right]. \quad (5.94)$$

Записав для всех производных, входящих в (5.93), выражения, аналогичные (5.94), подставляя их в (5.93), сокращая на ρ и перенося U вправо, получим

$$\frac{\left[\frac{\partial V}{\partial t} \right]}{\left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]} = \frac{\left[\frac{\partial P}{\partial t} \right]}{\left[\frac{\partial P}{\partial x} \right]} = \frac{\left[\frac{\partial E}{\partial t} \right]}{\left[\frac{\partial E}{\partial x} \right]} = \frac{\left[\frac{\partial U}{\partial t} \right]}{\left[\frac{\partial U}{\partial x} \right]} = -(U \pm C).$$

Таким образом, в эйлеровых координатах слабые разрывы перемещаются вдоль линий

$$\frac{dx}{dt} = U \pm C,$$

которые являются характеристиками уравнений газовой динамики.

§9. Условия на контактных разрывах

В предыдущих параграфах были рассмотрены устойчивые сильные и слабые разрывы, то есть такие разрывы, которые сами по себе не приводят к появлению новых разрывов. Величины по обе стороны устойчивых разрывов удовлетворяют условиям (5.26)-(5.28), либо условиям (5.93). Скорость распространения разрыва W , как видно из этих условий, может принимать различные значения. Рассмотрим случай, когда скорость распространения W равна нулю. Скорость перемещения таких разрывов определяется из выражения, связывающего W и N

$$W = \rho_- (N_- - U_-).$$

Отсюда следует, что при $W = 0$ скорость перемещения равна скорости среды. Такие разрывы называются контактными разрывами или контактными границами.

Из условий (5.26)-(5.28) при $W = 0$ следуют условия на контактном разрыве

$$[U] = 0, \quad [P] = 0. \quad (5.95)$$

Иными словами, скорость и давление на контактном разрыве непрерывны, все же остальные величины могут быть разрывны. При выводе условий (5.93) на слабом разрыве предполагалась непрерывность всех величин. Поскольку на контактном разрыве непрерывны только скорость и давление, то из (5.93) следует при $W = 0$

$$\left[\frac{\partial P}{\partial t} \right] = 0, \quad \left[\frac{\partial U}{\partial t} \right] = 0. \quad (5.96)$$

Дифференцируя P по t вдоль траектории и принимая во внимание постоянство энтропии вдоль траектории, получим

$$\frac{dP}{dt} = -a^2 \frac{dV}{dt} = -a^2 \frac{\partial U}{\partial m}. \quad (5.97)$$

Из уравнений (5.96), (5.97) и (2.36) следует в одномерном приближении

$$\left[\frac{\partial P}{\partial m} \right] = 0, \quad \left[a^2 \frac{\partial U}{\partial m} \right] = 0. \quad (5.98)$$

Условия (5.95), (5.96) и (5.98) позволяют утверждать, что в лагранжевых координатах на контактной границе давление P непрерывно вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial t}$ и $\frac{\partial P}{\partial m}$, а скорость U непрерывна только вместе с производной $\frac{\partial U}{\partial t}$. Производная же $\frac{\partial U}{\partial m}$ терпит разрыв на контактной границе.

При переходе к эйлеровым координатам условия (5.95) не изменяются, а условия (5.96) и (5.98) примут вид

$$\left[\frac{\partial P}{\partial t} \right] + U \left[\frac{\partial P}{\partial x} \right] = 0, \quad \left[\frac{\partial U}{\partial t} \right] + U \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right] = 0, \quad (5.99)$$

$$\left[V \frac{\partial P}{\partial x} \right] = 0, \quad \left[a^2 V \frac{\partial U}{\partial x} \right] = 0. \quad (5.100)$$

Из (5.99)-(5.100) следует, что в эйлеровых координатах на контактной границе производные $\frac{\partial P}{\partial t}$, $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial t}$, $\frac{\partial U}{\partial x}$ терпят разрыв. Этот разрыв производных исчезает лишь в некоторых частных случаях: $U = 0$, $[V] = 0$, $[a^2 V] = 0$.

§10. Произвольные разрывы

В предыдущей главе были рассмотрены сильные, слабые и контактные разрывы. Условия на них являются следствиями законов сохранения в интегральной форме в случае разрывов самих газодинамических величин или же следствием непрерывности последних. Возникнув в среде, эти разрывы перемещаются, подчиняясь вполне определенным законам, причем сами по себе, без каких-либо посторонних причин, они не приводят к образованию новых разрывов, т.е. являются устойчивыми разрывами^{*)}. В противоположность им, все разрывы, не удовлетворяющие полученным выше условиям на сильном, слабом и контактном разрыве, являются неустойчивыми. Возникнув в среде в какой-то

^{*)} В случае уравнений состояния с аномалиями возможно расщепление как сильных, так и слабых разрывов без взаимодействия их с другими разрывами.

момент времени, они мгновенно распадаются на устойчивые разрывы. Произвольные разрывы возникают в среде, например, при выходе ударной волны на контактную границу, при взаимодействии двух ударных волн, при столкновении пластин и в ряде других случаев. Для определения характера устойчивых разрывов, возникающих при распаде произвольного разрыва, необходимо решать задачу о распаде произвольного разрыва.

Решение этой задачи заключается в отыскании такой совокупности разрывов, чтобы с помощью условий на них связать значения газодинамических величин справа и слева от поверхности произвольного разрыва. В системе устойчивых разрывов, образованных после распада произвольного разрыва, обязательно присутствует контактная граница, разделяющая вещества, находящиеся первоначально по разные стороны произвольного разрыва. Давление и скорость на контактной границе принимают определенные значения P_k, U_k . Чтобы обеспечить непрерывность P и U на контактной границе нужно, чтобы правое вещество претерпело изменение от P_n, U_n до P_k, U_k и, соответственно, левое вещество – от P_l, U_l до P_k, U_k .

Скорость распространения возмущений, идущих от контактной границы в правое вещество, положительна, если ось направлена вправо. В этом случае скорость распространения возмущений, идущих от контактной границы в левое вещество – отрицательна. Эти рассуждения о знаке скорости распространения возмущений позволяют однозначно провести кривую возможных состояний правого и левого вещества после распада разрыва.

Вещество может быть приведено в состояние, характеризуемое величинами P_k, U_k , либо скачком (сильный разрыв), либо непрерывно (система слабых разрывов). В случае сильного разрыва всегда можно найти аналитически или численно зависимость P_+ от U_+ . В §4 и §5 главы 5 такая зависимость была получена для идеального газа и для конденсированного вещества. Когда вещество непрерывно переводится из одного состояния в другое, связь между P и

U в конечном состоянии вещества получается после интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения вдоль характеристики

$$dU \pm \frac{1}{a} dP = 0. \quad (5.101)$$

Давление и скорость на контактном разрыве P_k и U_k определяются как координаты точки пересечения двух кривых в плоскости P, U , проходящих через точки, характеризующие начальное правое и начальное левое состояния вещества до распада разрыва.

§11. Зависимость P от U для волны разрежения в идеальном газе

В волне разрежения в лагранжевых координатах m, t зависимость P от U устанавливается уравнением (5.101), справедливым вдоль характеристик

$$\frac{dm}{dt} = \pm a. \text{ Как и в случае ударных волн, состояние газа перед волной разрежения}$$

обозначим индексом "минус". Это исходное состояние газа. Оно характеризуется величинами $P_-, V_-, E_-, S_-, U_-, a_-, \dots$. Будем считать, что в исходном состоянии энтропия постоянна, и возьмем уравнение состояния идеального газа в виде

$$P = f(S) V^{-\gamma}. \quad (5.102)$$

Вообще говоря, энтропия может зависеть от лагранжевой координаты m , но т.к. задача о распаде произвольного разрыва не имеет протяженности по времени, а значит и по пространству, то эту зависимость можно не учитывать. Для постоянной энтропии зависимость (5.102) запишем в виде

$$P = P_- \left(\frac{V_-}{V} \right)^\gamma. \quad (5.103)$$

Дифференцируя P по V , получим выражение для a

$$a^2 = \frac{\gamma P_-}{V_-} \left(\frac{V_-}{V} \right)^{\gamma+1}. \quad (5.104)$$

Выразим V через P из (5.103) и подставим в (5.104)

$$a = a_- \left(\frac{P}{P_-} \right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}. \quad (5.105)$$

Подставив (5.105) в (5.101) и проинтегрировав, получим

$$U - U_- \pm \frac{2a_- V_-}{\gamma - 1} \left(\left(\frac{P}{P_-} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right) = 0. \quad (5.106)$$

Зависимость $P(U)$ в волне разрежения получается из (5.106) и имеет вид

$$P = P_- \left(1 \mp \frac{(\gamma-1)}{2a_- V_-} (U - U_-) \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \quad (5.107)$$

Для волны разрежения, идущей вправо от произвольного разрыва в (5.107) нужно брать знак плюс, а для волны разрежения, идущей влево, знак минус.

Предельное значение истечения газа в вакуум получается из (5.107) при $P = 0$. Оно равно

$$U_{\text{пр}} = U_- \mp \frac{2a_- V_-}{\gamma - 1},$$

или, что то же самое,

$$U_{\text{пр}} = U_- \mp \frac{2\gamma P_-}{(\gamma-1)a_-}.$$

§12. Зависимость P от U для волны разрежения в конденсированном веществе

В волне разрежения, рассматриваемой в плоскости m, t (m – лагранжева координата $dm = \rho dx$), зависимость P от U устанавливается характеристическим уравнением (5.101).

Получим зависимость между P и U для простейшего уравнения состояния конденсированного вещества

$$P = (\gamma - 1)\rho E + C_{\text{ок}}^2 (\rho - \rho_{\text{ок}}).$$

Зависимость давления от плотности и энтропии для этого уравнения состояния имеет вид

$$P = \frac{\rho_{0K} C_{0K}^2}{\gamma} [f(S) \delta^\gamma - 1], \quad (5.108)$$

где $\delta = \frac{\rho}{\rho_0}$. Поскольку при распаде разрыва переход из исходного состояния P_- , ρ_- , S_- в состояние P , ρ , S происходит мгновенно, то энтропия S оказывается равной S_- . На основании этого можно, написав уравнение (5.108) для исходного состояния, исключить энтропию

$$\frac{\gamma P + \rho_{0K} C_{0K}^2}{\gamma P_- + \rho_{0K} C_{0K}^2} = \frac{\rho^\gamma}{\rho_-^\gamma}.$$

Отсюда легко можно выразить плотность ρ через давление P

$$\rho = \rho_- \left(\frac{\gamma P + \rho_{0K} C_{0K}^2}{\gamma P_- + \rho_{0K} C_{0K}^2} \right)^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (5.109)$$

Поскольку для избранного нами уравнения состояния

$$a^2 = (\gamma P + \rho_{0K} C_{0K}^2) \rho, \quad (5.110)$$

то уравнение (5.101) можно переписать, используя (5.109) и (5.110)

$$dU \pm \frac{(\gamma P_- + \rho_{0K} C_{0K}^2)^{\frac{1}{2\gamma}}}{\rho_-^{0.5} (\gamma P + \rho_{0K} C_{0K}^2)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}} dP = 0. \quad (5.111)$$

После интегрирования (5.111) и определения постоянной интегрирования при $U = U_-$, $P = P_-$ получим искомую связь между P и U в волне разрежения

$$U - U_- \pm \frac{2}{(\gamma - 1) \rho_-} \left[\left(\frac{\gamma P + \rho_{0K} C_{0K}^2}{\gamma P_- + \rho_{0K} C_{0K}^2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right] = 0. \quad (5.112)$$

Зависимость $P(U)$ следует из (5.112) и имеет вид

$$P = \left(P_- + \frac{\rho_{0k} C_{0k}^2}{\gamma} \right) \left(1 \mp \frac{(\gamma-1)\rho_-}{2a_-} (U - U_-) \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} - \frac{\rho_{0k} C_{0k}^2}{\gamma}. \quad (5.113)$$

Предполагая, что

$$\frac{\gamma(P - P_-)}{\gamma P_- + \rho_{0k} C_{0k}^2} < 1,$$

и пользуясь разложением в ряд, вместо (5.113) получим уравнение

$$P = P_- \pm a_- (U - U_-). \quad (5.114)$$

В плоскости P, U это прямая линия. Приближенным уравнением (5.114) можно пользоваться при решении задач о распаде произвольного разрыва в случае слабых волн разрежения, точно так же, как акустическими формулами можно пользоваться лишь в случае слабых ударных волн.

§13. Некоторые задачи о распаде произвольного разрыва

Прежде чем приступить к обсуждению конкретных задач о распаде разрыва, рассмотрим несколько соображений, облегчающих нахождение конфигурации устойчивых разрывов и отыскание давления и скорости на контактной границе. Вообще говоря, поверхность \bar{S} произвольного разрыва может быть любой в пространстве x, y, z, t . Решая задачу о распаде произвольного разрыва, мы будем рассматривать точку на поверхности S . Поскольку сам распад произвольного разрыва происходит мгновенно ($\Delta t = 0$), то можно рассматривать все процессы вдоль нормали к \bar{S} . Условимся вещество, находящееся с одной стороны поверхности S , называть правым, с другой – левым. Поместим начало координат в рассматриваемую точку и будем считать, что t растет в направлении нормали (вправо). Тогда возмущения, исходящие от контактной границы, будут распространяться по правому веществу с положительной скоростью. Следовательно, кривая, описывающая возможные состояния правого вещества, имеет везде положительный наклон

$$\left(\frac{dP}{dU}\right)_{\Pi} > 0,$$

и тот ее участок, который лежит выше точки Π , описывает ударные волны, а тот участок, который лежит ниже – волны разрежения (предполагается, что уравнение состояния не имеет аномалий).

Вещество, находящееся в момент распада произвольного разрыва слева от него, назовем левым (L). Поскольку возмущения, исходящие от контактной границы, распространяются в левом веществе с отрицательной скоростью, то кривая $P(U)$, проходящая через точку L , имеет всюду отрицательный наклон

$$\left(\frac{dP}{dU}\right)_L < 0.$$

Две кривые Π и L , имеющие всюду в плоскости P, U наклоны противоположных знаков, обязательно пересекутся в некоторой точке, координатами которой являются значения давления и скорости на контактной границе P_K и U_K . При этом, если $P_K < P_L$, то влево распространяется волна разрежения; если $P_K > P_L$, то ударная волна. Совершенно аналогично, при $P_K < P_{\Pi}$ – вправо распространяется волна разрежения, при $P_K > P_{\Pi}$ – ударная волна.

1. Задача о поршне. В полупространстве, ограниченном слева поршнем, находится вещество, характеризующееся величинами $U_0 = 0, P_0, \rho_0, E_0$. В момент $t = 0$ поршень рывком начинает двигаться с постоянной скоростью U_{Π} . Определить конфигурацию устойчивых разрывов и величины на контактной границе. На плоскости P, U вещество в состоянии P_0, U_0 изображается точкой Π на оси ординат. На Рис. 5.6 изображены кривые нагрузки (5.55) или (5.63) и разгрузки (5.107) или (5.113) в зависимости от того, какое вещество задано. В этой задаче поверхность поршня является контактной границей и $U_{\Pi} = U_K$. Если скорость поршня положительна $U_K > 0$, то вертикальная прямая, проходящая через точку $U_K, P = 0$ пересечет кривую $P(U)$ в точке A при $P_A > P_{\Pi}$. Это означает,

что в вещество от поршня будет распространяться ударная волна, на фронте которой будет

$$U = U_A = U_K, \quad P = P_A.$$

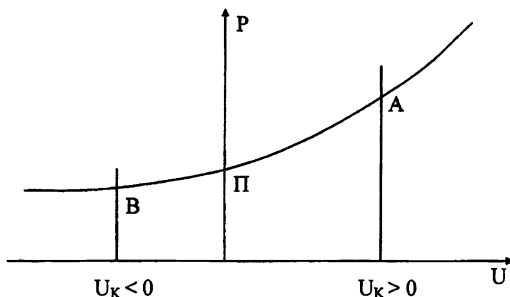


Рис. 5.6. Ударная адиабата (ПA) и изэнтропа разгрузки (ПB) в веществе справа от поршня в задаче о поршне.

При отрицательном значении скорости поршня $U_K < 0$ в вещество от поршня будет распространяться волна разрежения, переводящая его из состояния P_0, U_0 в состояние P_B, U_B .

Пусть скорость поршня равна 500 м/сек, а вещество, находящееся правее поршня – воздух (идеальный газ) с параметрами:

$$P_0 = 1,013 \text{ бар}, \quad \rho_0 = 1,29 \text{ кг/м}^3, \quad E_0 = 1,97 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}, \quad \gamma = 1,4.$$

Подставляя эти значения в (5.55), получим $P_K = 5,8 \text{ бар}$, $W = 970 \text{ кг/м}^2 \text{ сек}$.

Скорость перемещения ударной волны, вычисляющаяся по формуле $N = V_0 W$, оказывается равна $N = 750 \text{ м/сек}$. Сжатие на фронте ударной волны определяется из условия на фронте

$$(V_+ - V_-)W + (U_+ - U_-) = 0,$$

которое после простых преобразований принимает вид

$$\sigma = \frac{N}{N - U_K}.$$

Подставляя сюда N и U_K , получим $\sigma = 3$ и $\rho_+ = 3,86 \text{ кг/м}^3$. Удельная внутренняя энергия за фронтом может быть найдена из уравнения состояния

$$P_K = (\gamma - 1)\rho_+ E_+$$

Она оказывается равной $E_+ = 3,75 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Если же вещество, находящееся правее поршня, будет не газом, а металлом, например, алюминием, то, при скорости поршня 500 м/сек, величины на контактной границе и фронте ударной волны будут совершенно иными. Пусть

$$P_0 = 1,013 \text{ бар}, \quad \rho_0 = 2700 \text{ кг/м}^3, \quad C_{0K} = 5,1 \text{ км/с},$$

$$E_0 = 1.88 \text{ Дж/кг}, \quad \gamma = 3, \quad U_0 = 0.$$

Подставляя эти значения в (5.63) и (5.65), получим при $U_K = 500$ м/сек :

$$P_K = 7 \cdot 10^4 \text{ бар}, \quad W = 1,4 \cdot 10^7 \text{ кг/м}^2 \text{ сек}, \quad N = 5200 \text{ м/сек},$$

$$\sigma = 1,1, \quad \rho_+ = 3000 \text{ кг/м}^3, \quad E_+ = 1,29 \cdot 10^4 \text{ Дж/кг}.$$

Сравним значения P_K для воздуха и алюминия. При одной и той же скорости U_K давление на поршне в алюминии оказывается более, чем в 10^4 раз выше, чем в воздухе. Это объясняется тем, что кривая $P(U)$ для алюминия, как для более жесткого материала, проходит намного круче, чем кривая $P(U)$ для воздуха.

2. Задача о столкновении пластин. Рассмотрим две пластины из одного и того же материала, одна из которых покоится $U_{01} = 0$, а другая приближается к первой с постоянной скоростью $U_{02} > 0$. Термодинамические величины и в той, и в другой пластине одинаковы $P_0 = 0$, ρ_0 , $E_0 = 0$, C_{0K} , γ , ρ_{0K} .

Чтобы течение было одномерным, поверхности пластин должны быть строго параллельны. В момент столкновения пластин на контактной границе возникают давление P_K и скорость U_K , а от контактной границы в обе пластины пойдут возмущения. Кривые $P(U)$, проходящие через точку П и Л (Рис. 5.7), должны быть симметричны относительно вертикальной прямой, проходящей через точку с абсциссой $0,5U_{02}$, так как все параметры, входящие в (5.63) и (5.65) у них одинаковы, и сами кривые различаются только знаком W . (У кривой $P(U)$, проходящей через точку П, $W > 0$, а у кривой, проходящей через точку Л, $W < 0$).

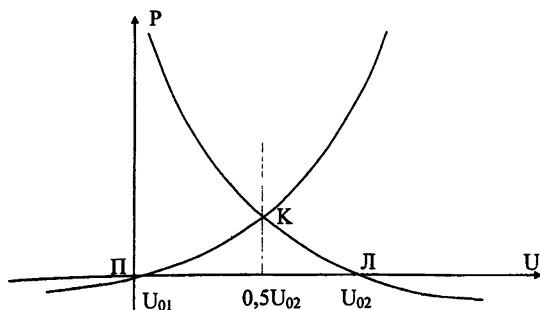


Рис. 5.7. Ударные адиабаты в задаче о столкновении двух пластин:
 ПК – для правого вещества, ЛК – для левого вещества.

Поскольку обе кривые симметричны относительно $U_K = 0,5U_L$, то они пересекаются именно на этой прямой. Таким образом, скорость на контактной границе оказывается равной половине скорости подлетевшей пластины. Давление на контактной границе определится из уравнения (5.63). Из рисунка видно, что $P_K > P_L$ и $P_K > P_P$, иными словами, и в правую и в левую пластины пойдут ударные волны.

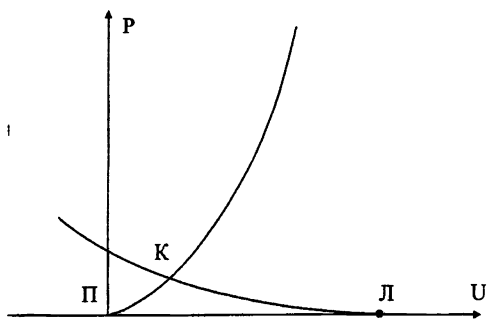


Рис. 5.8. Ударные адиабаты левой (мягкой, ЛК) пластины и правой (жесткой, ПК) пластины.

Если сталкиваются пластины из разных материалов, то кривые $P(U)$ уже не будут симметричными. Для нахождения U_K, P_K в этом случае необходимо решать систему двух уравнений (5.63). На Рис. 5.8 изображен случай, когда подлетевшая

“мягкая” пластина (Л), сталкивается с первоначально покоящейся жесткой пластиной (П).

3. Задача о перегородке. Имеется два покоящихся вещества, разделенных бесконечно тонкой перегородкой и нагретых до разных температур. Вещества характеризуются параметрами

$$\text{П: } P_{0П}, \rho_{0П}, E_{0П}, U_{0П} = 0, \quad \text{Л: } P_{0Л}, \rho_{0Л}, E_{0Л}, U_{0Л} = 0.$$

В момент $t = 0$ перегородка убирается. Поскольку величины справа и слева от перегородки не удовлетворяют, вообще говоря, условиям на устойчивых разрывах, происходит распад разрыва. В случае, когда $P_{0П} > P_{0Л}$, изображенном на Рис. 5.9, в правом веществе от контактной границы будет распространяться волна разрежения ($P_K < P_{0П}$), а в левом – ударная волна ($P_K > P_{0Л}$). Сама контактная граница будет двигаться влево ($U_K < 0$).

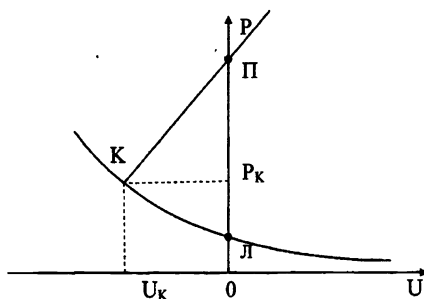


Рис. 5.9. Ударная адиабата (ЛК) левого вещества и изэнтропа разгрузки (ПК) правого вещества в задаче о перегородке с $P_{0П} > P_{0Л}$.

Если $P_{0Л} > P_{0П}$, то после распада разрыва в правом веществе будет распространяться ударная волна, а в левом – волна разрежения (Рис. 5.10). Контактная граница в этом случае будет двигаться вправо ($U_K > 0$).

И в том, и в другом случае предполагалось, что правое вещество более жесткое, поэтому кривая $P(U)$ для правого вещества на Рис. 5.9 и Рис. 5.10 проходит более круто, чем для левого.

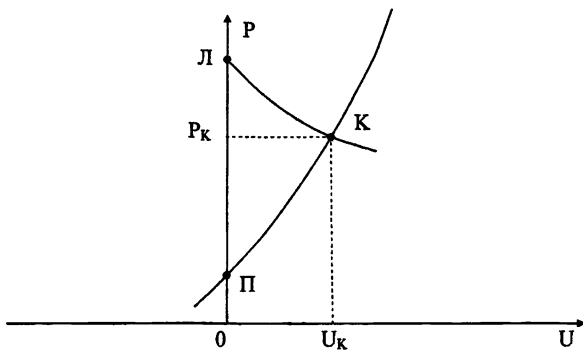


Рис. 5.10. Ударная адиабата (ПК) правого вещества и изэнтропа разгрузки (ЛК) левого вещества в задаче о перегородке с $P_{\Pi} < P_L$.

Глава 6. Установившиеся течения

§1. Уравнение Бернулли

Стационарным или установившимся называют такое течение, в котором все величины, зависят только от пространственных координат x, y, z и не зависят от времени. Иными словами, в любой произвольно выбранной точке x_0, y_0, z_0 величины с течением времени не изменяются и, таким образом, все частные производные по времени равны нулю. Рассмотрим законы сохранения для идеальной сплошной среды в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \bar{U} = 0, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{U}}{\partial t} + \bar{U}(\nabla \rho \bar{U}) + \rho(\bar{U} \nabla) \bar{U} + \nabla P = 0, \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \nabla(\rho \varepsilon \bar{U} + P \bar{U}) = 0. \quad (6.3)$$

Ограничимся рассмотрением стационарных течений, в которых по определению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho \bar{U}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} = 0.$$

В результате уравнения (6.1)-(6.3) принимают вид

$$\operatorname{div} \rho \bar{U} = 0, \quad (6.4)$$

$$\bar{U} \operatorname{div} \rho \bar{U} + \rho \left(U_x \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + U_y \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + U_z \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) + \operatorname{grad} P = 0, \quad (6.5)$$

$$\operatorname{div} \bar{U} \left(\varepsilon + \frac{P}{\rho} \right) = 0. \quad (6.6)$$

Введем новую величину, равную сумме удельной энтальпии $E + PV$ и удельной кинетической энергии $0,5\bar{U}^2$

$$J = E + \frac{P}{\rho} + 0,5\bar{U}^2. \quad (6.7)$$

Запишем уравнение (6.6) в виде

$$J \operatorname{div} \bar{U} + \rho \left(U_x \frac{\partial J}{\partial x} + U_y \frac{\partial J}{\partial y} + U_z \frac{\partial J}{\partial z} \right) = 0. \quad (6.8)$$

Подставив (6.4) в (6.8), получим

$$U_x \frac{\partial J}{\partial x} + U_y \frac{\partial J}{\partial y} + U_z \frac{\partial J}{\partial z} = 0. \quad (6.9)$$

Добавив в левую часть (6.9) $\frac{\partial J}{\partial t} = 0$ и воспользовавшись определением субстанциональной производной, получим уравнение

$$\frac{dJ}{dt} = 0, \quad (6.10)$$

справедливое вдоль линии тока. Проинтегрировав (6.10), получим **уравнение Бернулли**

$$J = \text{const}, \quad (6.11)$$

или, что тоже самое,

$$E + \frac{U^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \text{const}. \quad (6.12)$$

Величина J , вообще говоря, меняется при переходе от одной линии тока к другой. Если величина J одна и та же для всех линий тока, то такое стационарное течение называется **изоэнергетическим**.

Уравнение Бернулли (6.12) справедливо для любого вещества независимо от уравнения состояния. В случае идеального газа

$$E = \frac{P}{(\gamma-1)\rho} \quad (6.13)$$

уравнение (6.12) принимает вид

$$\frac{U^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = \text{const.} \quad (6.14)$$

Поскольку в идеальном газе

$$\frac{\gamma P}{\rho} = C^2,$$

то уравнение (6.14) принимает вид

$$\frac{U^2}{2} + \frac{C^2}{\gamma-1} = \text{const.} \quad (6.15)$$

Постоянную в правой части уравнения (6.15) можно определять по разному. Рассмотрим, например, случай, когда $U = C$. Значение скорости U , совпадающее со значением скорости звука в той же точке потока, называется критическим. После введения $U_* = U_{\text{кр}}$, уравнение (6.15) можно записать так

$$\frac{U^2}{2} + \frac{C^2}{\gamma-1} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} U_*^2. \quad (6.16)$$

Можно рассмотреть также предельный случай установившегося течения, когда скорость звука C обращается в нуль. Такое предельное значение скорости $U_{\text{пр}}$ достигается на свободной границе при истечении газа в вакуум. В этом случае уравнение (6.15) принимает вид

$$\frac{U^2}{2} + \frac{C^2}{\gamma-1} = \frac{1}{2} U_{\text{пр}}^2. \quad (6.17)$$

Критическое и предельное значения скорости для каждого газа определяются экспериментально.

Легко показать, что для конденсированного вещества с уравнением состояния

$$P = (\gamma-1)\rho E + C_{\text{ок}}^2 (\rho - \rho_{\text{ок}})$$

уравнение Бернулли записывается также в форме (6.15).

Постоянная интегрирования, входящая в правую часть уравнения Бернулли, не изменяется при переходе через фронт ударной волны. Рассмотрим условия на фронте ударной волны (5.19), (5.21), (5.22) и (5.23). Разделим (5.23) на (5.19) так, что $P_{-}\theta_{-}$ разделится на $\rho_{-}\theta_{-}$, а $P_{+}\theta_{+}$ на $\rho_{+}\theta_{+}$. В результате получим уравнение энергии в виде

$$E_{+} + 0,5\theta_{+}^2 + P_{+}V_{+} = E_{-} + 0,5\theta_{-}^2 + P_{-}V_{-}.$$

Таким образом, в системе координат, связанной с разрывом, полная энтальпия (6.7) не терпит скачка при переходе частицы через фронт ударной волны.

§ 2. Зависимость давления от скорости в установившемся течении

Воспользуемся иной формой уравнения состояния идеального газа

$$P = f(S) \rho^{\gamma}. \quad (6.18)$$

Вдоль линии тока (траектории частицы) $f(S) = \text{const}$, и, следовательно, (6.18) можно записать в виде

$$P = P_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma}, \quad (6.19)$$

где P_0, ρ_0 некоторые известные величины на рассматриваемой траектории. Из (6.19) выразим плотность через давление

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (6.20)$$

Запишем (6.19) и (6.20) в виде

$$\frac{P}{P_0} = \frac{P_0}{\rho_0} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (6.21)$$

и подставим P/ρ в (6.14). В результате получим зависимость давления от скорости

$$\frac{P}{P_0} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2C_0^2}(U^2 - U_0^2)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (6.22)$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$\Pi = \frac{P}{P_0}, \quad M = \frac{U}{C_0}. \quad (6.23)$$

В результате получим уравнение

$$\Pi = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2}(M^2 - M_0^2)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (6.24)$$

которое связывает безразмерное давление с безразмерной скоростью установившегося потока газа.

В конденсированном веществе с простейшим уравнением состояния

$$P = (\gamma - 1)\rho E + C_0^2(\rho - \rho_0), \quad P = \frac{\rho_0 C_0^2}{\gamma}(f(S)\delta^\gamma - 1) \quad (6.25)$$

зависимость между M и Π получается из (6.12) и (6.25) после исключения ρ и E в виде

$$\Pi = \frac{1}{\gamma} \left((\gamma \Pi_0 + 1) \left(1 - \frac{(\gamma-1)\delta_0}{2(\gamma \Pi_0 + 1)} (M^2 - M_0^2) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right), \quad (6.26)$$

где безразмерные величины выбираются не так, как для идеального газа, а по формулам

$$\Pi = \frac{P}{\rho_{0k} C_{0k}^2}, \quad M = \frac{U}{C_{0k}}. \quad (6.27)$$

Зависимость $\Pi(M)$ (6.24) позволяет определить изменение давления на поверхности вращающегося цилиндра, обтекаемого однородным потоком идеального газа, в котором $\Pi = \Pi_0$, $M = M_0$ (Рис. 6.1). В верхней точке цилиндра A относительная безразмерная скорость потока равна $M_A = M_0 + \frac{\omega R}{C_0}$, где R -

радиус, ω – угловая скорость цилиндра. В нижней точке В $M_B = M_0 - \frac{\omega R}{C_0}$. Из

(6.24) следует

$$P_A = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{C_0 R}{C_0} \left(2M_0 + \left(\frac{\omega R}{C_0} \right)^2 \right) \right) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \quad (6.28)$$

$$P_B = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \left(-2M_0 \frac{\omega R}{C_0} + \left(\frac{\omega R}{C_0} \right)^2 \right) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (6.29)$$

Если $\omega > 0$ (вращение против часовой стрелки), то $P_A < P_B$ и цилиндр поднимается, если же $\omega < 0$, то $P_A > P_B$ и цилиндр опускается. Это явление получило название эффекта Магнуса.

§ 3. Ударная поляра

Когда линия тока ортогональна фронту ударной волны ($U_{\tau-} = 0$), то ударная волна называется прямой. Из (5.22) следует, что за фронтом прямой ударной волны траектория остается ортогональной фронту. Если же $U_{\tau-} \neq 0$, то ударная волна называется косой. Непрерывность U_{τ} и разрывность U_n приводит к тому, что на фронте косой ударной волны линия тока изламывается, вследствие чего поток поворачивается на некоторый угол. Зависимость между компонентами вектора скорости за фронтом ударной волны называется **ударной полярой**.

Рассмотрим ударную поляру идеального газа. Из (5.13) и (5.54) для идеального газа получим уравнение

$$\frac{\theta_{n2}}{\theta_{n1}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{hP_1 + P_2}{P_1 + hP_2}, \quad (6.30)$$

где $h = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$, индексом 1 обозначены величины перед разрывом, а индексом 2 – за разрывом. Исключим отсюда P_2 с помощью (5.14)

$$\frac{\theta_{n2}}{\theta_{n1}} = \frac{(h + 1)P_1 - \rho_1 \theta_{n1} (\theta_{n2} - \theta_{n1})}{(h + 1)P_1 - h\rho_1 \theta_{n1} (\theta_{n2} - \theta_{n1})}. \quad (6.31)$$

Вводя величины

$$C_1^2 = \frac{\gamma P_1}{\rho_1}, \quad M_1 = \frac{\theta_{n1}}{C_1}, \quad X = \frac{\theta_{n2}}{\theta_{n1}}, \quad (6.32)$$

запишем (6.31) в виде

$$(\gamma + 1)M_1^2 x^2 - 2x(1 + \gamma M_1^2) + 2 + (\gamma - 1)M_1^2 = 0. \quad (6.33)$$

Корни этого квадратного уравнения находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{1 + \gamma M_1^2 \pm (1 - M_1^2)}{(\gamma + 1)M_1^2}. \quad (6.34)$$

Второй корень $x_2 = 1$ означает, что разрыв нормальной компоненты отсутствует. Таким образом, интерес представляет лишь первый корень x_1 . Возвращаясь к отношению компонент скорости (6.32), получим

$$\frac{\theta_{n2}}{\theta_{n1}} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2}. \quad (6.35)$$

Перейдём далее к компонентам скорости θ_x и θ_y . Предполагая для простоты, что $\theta_{x1} = \theta_1$ и, следовательно, $\theta_{y1} = 0$, и обозначая через φ угол между линией тока и касательной к фронту ударной волны, можем записать следующие соотношения

$$\theta_{n1} = \theta_1 \sin \varphi, \quad (6.36)$$

$$\theta_{t1} = \theta_1 \cos \varphi, \quad (6.37)$$

$$\theta_{t2} = \theta_{x2} \cos \varphi + \theta_{y2} \sin \varphi, \quad (6.38)$$

$$\theta_{n2} = \theta_{x2} \sin \varphi - \theta_{y2} \cos \varphi. \quad (6.39)$$

Из (6.37), (6.38) и (6.16) следует

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\theta_1 - \theta_{x2}}{\theta_{x2}}. \quad (6.40)$$

Получим далее связь между θ_{x2} и θ_{y2} , то есть собственно уравнение ударной поляры. Для этого вначале из (6.35) и (6.39) исключим θ_{n2} , а затем из полученного уравнения с помощью (6.40) исключим φ . В результате получим

$$\frac{\theta_{x2}}{\theta_1} - \frac{\theta_{y2}^2}{\theta_1(\theta_1 - \theta_{x2})} = \frac{1}{h} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{C_1^2}{\theta_1^2} \left(1 + \frac{\theta_{y2}^2}{(\theta_1 - \theta_2)^2} \right). \quad (6.41)$$

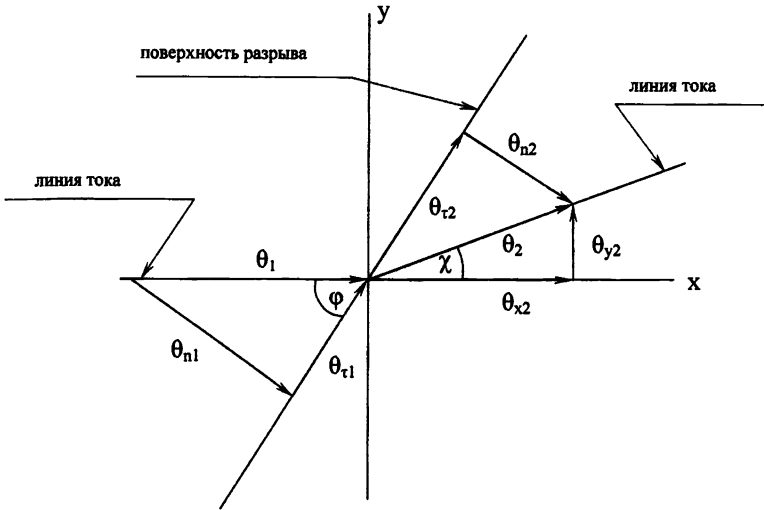


Рис. 6.1.

Если с помощью уравнения Бернулли

$$\frac{\theta_1^2}{2} + \frac{C_1^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} C_*^2 \quad (6.42)$$

выразить C_1 через C_* и θ_1 и подставить в (6.41), то оно примет вид

$$\theta_{y2}^2 = \frac{(\theta_{x2}\theta_1 - C_*^2)(\theta_1 - \theta_{x2})^2}{C_*^2 - \theta_1\theta_{x2} + \frac{2}{\gamma + 1}\theta_1^2}. \quad (6.43)$$

В плоскости θ_x, θ_y при фиксированных θ_1, C_*, γ уравнение (6.43) представляет кривую, симметричную относительно оси Ox , пересекающую её в точках $\theta_x = \theta_1$,

$\theta_y = 0$ и $\theta_x = \frac{C_*^2}{\theta_1}, \theta_y = 0$ и имеющую в качестве асимптоты прямую

$$\theta_x = \frac{2}{\gamma + 1}\theta_1 + \frac{C_*^2}{\theta_1}.$$

Эта кривая называется ударной полярой и имеет вид, изображенный на Рис. 6.2.

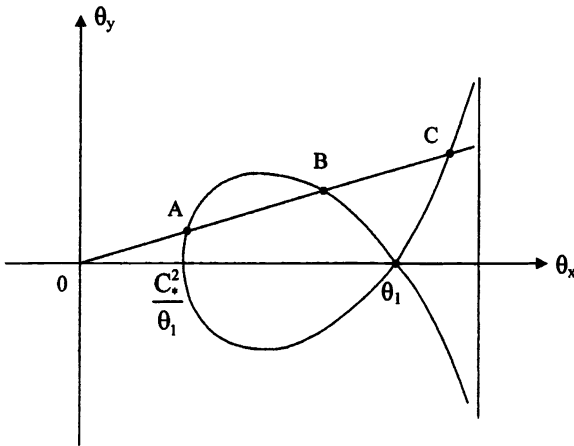


Рис. 6.2. Ударная поляра.

Если скорость перед фронтом ударной волны известна и равна θ_1 , то конец вектора скорости $\bar{\theta}_2$ должен лежать на кривой (6.43). Когда угол поворота потока известен, то с помощью ударной поляры определяется величина вектора $\bar{\theta}_2$. Также может быть решена и обратная задача определения угла поворота потока по заданной величине $\bar{\theta}_2$.

Ударная поляра позволяет также найти направление поверхности разрыва по углу поворота потока. В самом деле проекции векторов $\bar{\theta}_1$ и $\bar{\theta}_2$ на поверхность разрыва должны быть одинаковы и равны θ_{x1} и θ_{x2} . Проведя через точки A и B (Рис. 6.3) прямую и опустив на неё перпендикуляр из начала координат точки O, получим направление поверхности разрыва, определяемое соотношением (6.40) при известных θ_{x2} и θ_{y2} .

Выразим угол φ непосредственно через угол χ . Из Рис. 6.1 следует, что

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{\theta_{y2}}{\theta_{x2}}. \quad (6.44)$$

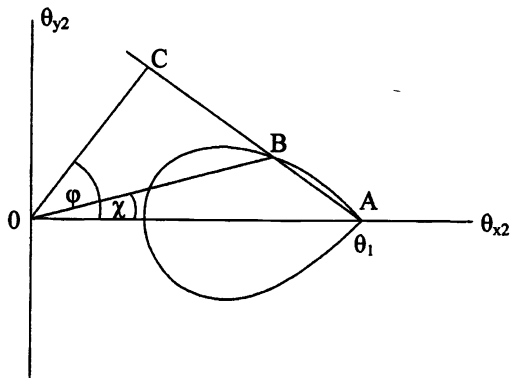


Рис. 6.3.

Умножим (6.44) на (6.40)

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\chi = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_{x2}}. \quad (6.45)$$

Далее из (6.43) и (6.40) получим

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{\theta_{x2}\theta_1 - C_*^2}{C_*^2 - \theta_1\theta_{x2} + \frac{2}{\gamma+1}\theta_1^2}. \quad (6.46)$$

Отсюда

$$\theta_{x2} = \frac{C_*^2}{\theta_1} + \frac{2}{\gamma+1}\theta_1 \cos^2\varphi. \quad (6.47)$$

Исключим θ_{x2} из (6.47) и (6.45)

$$\operatorname{tg}\chi = \operatorname{ctg}\varphi \frac{\theta_1 \left(1 - \frac{2}{\gamma+1} \cos^2\varphi\right) - \frac{C_*^2}{\theta_1}}{\frac{C_*^2}{\theta_1} + \frac{2}{\gamma+1}\theta_1 \cos^2\varphi}. \quad (6.48)$$

Это уравнение позволяет найти направление ударной волны, если известен угол поворота потока χ и, наоборот, определить χ по известному φ .

Отметим, что всякий луч, выходящий из точки O (Рис.6.2), пересечёт ударную поляру в трёх точках A, B, C. Точка "C" не имеет реального физического

смысла, поскольку в ней требуется уменьшение плотности за фронтом ударной волны (в идеальном газе возможны только ударные волны сжатия). Действительно, из (6.31), (6.40) и предположения, что $\theta_{x2} > \theta_1$, следует

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\theta_{n2}}{\theta_{n1}} = \frac{\theta_{x2} - \theta_{y2} \operatorname{ctg} \varphi}{\theta_1} > 1 + \frac{\theta_{y2}^2}{\theta_1(\theta_{x2} - \theta_1)} > 1.$$

Точка "А" относится к случаю, когда течение за фронтом дозвуковое, точка "В" – течение сверхзвуковое. Эксперимент показывает, что из двух возможных режимов осуществляется сверхзвуковой (точка "В"). Строгого математического доказательства этого факта в настоящее время нет.

§ 4. Сверхзвуковой поток возле стенки

Задача 1. Пусть вдоль жёсткой стенки движется однородный поток газа с параметрами $\theta_{x1} > C_*$, $\theta_{y1} = 0$, P_1 , ρ_1 , E_1 , γ . В точке О на Рис. 6.4 стенка претерпевает излом. Соответственно, на участке ОВ поток также должен двигаться вдоль стенки, но для этого он должен повернуться на угол χ . Поток поворачивается на поверхности ОС, являющейся фронтом ударной волны. Направление линии разрыва, то есть угол φ , находится из уравнения (6.48). Далее определяется θ_{x2} из (6.47), затем θ_{y2} из (6.43). Значения θ_{n1} и θ_{n2} находятся из (6.36) и (6.39), а P_2 и ρ_2 из (6.37). Значение внутренней энергии вычисляется с помощью уравнения состояния через P_2 и ρ_2 .

Необходимо отметить, что задача допускает решение, рассмотренное выше, лишь в случае, если угол не слишком велик и не превосходит предельное значение χ_{\max} , при котором луч, проведенный из начала координат, касается ударной поляры. Имеется также критический угол поворота потока χ_* , при котором луч, проведенный из начала координат, пересекает ударную поляру в точке, где

$$\theta_2 = C_* \tag{6.49}$$

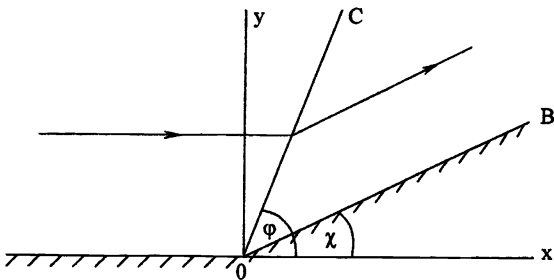


Рис. 6.4.

Таким образом, если $\chi < \chi_*$, течение за фронтом ударной волны остается сверхзвуковым, при $\chi_{\max} > \chi > \chi_*$ течение за фронтом становится дозвуковым. Если же угол $\chi > \chi_{\max}$, то решения указанного типа не существует.

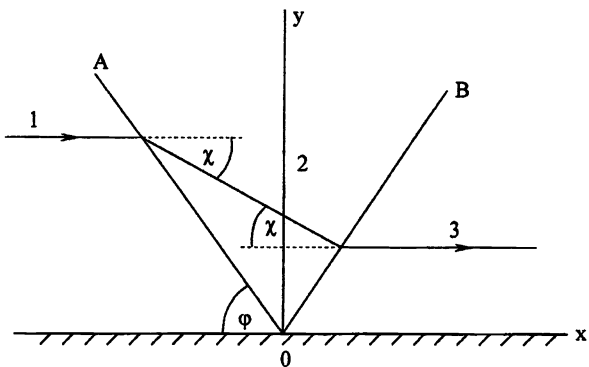


Рис. 6.5. Регулярное отражение косо́й ударной волны от жесткой стенки.

Задача 2. Падение косо́й ударной волны на жёсткую стенку. В системе координат, в которой точка "O" (Рис. 6.5) неподвижна, сверхзвуковой поток за фронтом ударной волны OA поворачивает к стенке. Но так как далее поток должен быть снова параллелен стенке, то необходимо существование ещё одной ударной волны, которая поворачивала бы поток вторично.

Рассмотрим решение задачи лишь схематично. По заданному углу φ из

(6.48) определим угол χ и, как в задаче 1, найдём θ_{x2} , θ_{y2} , P_2 , ρ_2 , E_2 . В плоскости θ_{x2} , θ_{y2} решение определяет точку В. Поскольку для отраженной ударной волны все величины с индексом "2" характеризуют состояние перед фронтом и известно, что на фронте этой волны поток поворачивает на угол $-\chi$, то уравнение (6.48) позволит найти угол φ_2 между касательной к фронту и осью Ох. При этом все индексы величин в формуле (6.48) должны быть соответственно изменены. Построив новую ударную поляру на отрезке ОВ, равном θ_2 , и, найдя её точку пересечения с осью $O\theta_{x2}$, получим значение θ_3 . Все остальные величины находятся так же, как и за фронтом падающей ударной волны. Такое отражение ударной волны, когда с помощью двухволновой конфигурации поток становится вновь параллельным стенке, называется регулярным.

Может, однако, оказаться, что вторая ударная поляра, построенная на луче ОВ (Рис.6.6), не пересекает горизонтальную ось. В этом случае имеет место нерегулярное или Маховское отражение ударной волны от стенки, сопровождающееся появлением третьей ударной волны (Рис. 6.7).

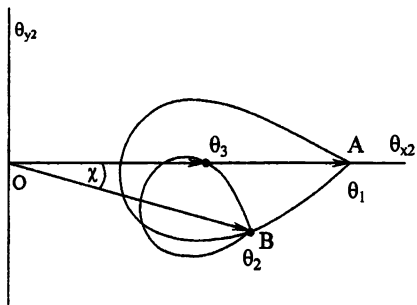


Рис. 6.6. Две ударных поляры. 1 построена на отрезке ОА, равном θ_1 , и 2 построена на отрезке ОВ, равном θ_2 .

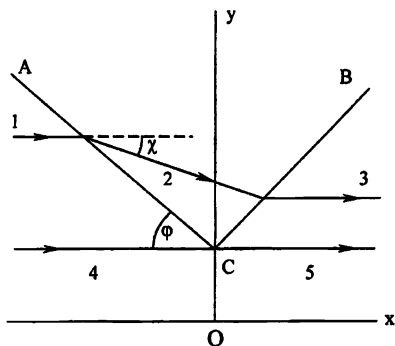


Рис. 6.7. Нерегулярное отражение ударной волны от жесткой стенки.

**§ 5. Уравнения газовой динамики в характеристической форме для
двумерного случая**

Рассмотрим уравнения газодинамики в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{U} = 0, \quad (6.50)$$

$$\rho \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \rho (\bar{U} \nabla) \bar{U} + \operatorname{grad} P = 0, \quad (6.51)$$

$$P = f(S) \rho^\gamma. \quad (6.52)$$

Здесь x, y – независимые переменные, P, ρ, S, U_x, U_y – искомые функции. Будем рассматривать лишь стационарные течения газа с постоянной энтропией, в которых

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial U_x}{\partial t} = \frac{\partial U_y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial y} = 0. \quad (6.53)$$

Запишем (6.50), (6.51) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho U_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho U_y) = 0, \quad (6.54)$$

$$\rho U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + \rho U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + C^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (6.55)$$

$$\rho U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + \rho U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} + C^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0. \quad (6.56)$$

Эти три уравнения описывают двумерное установившееся течение. Умножим (6.54) на C^2 , а (6.55) на U_x и вычтем их друг из друга

$$\rho (U_x^2 - C^2) \frac{\partial U_x}{\partial x} + \rho U_x U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} - \rho C^2 \frac{\partial U_y}{\partial y} - C^2 U_y \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0. \quad (6.57)$$

Умножим (6.54) на U_y и сложим с (6.57). После сокращения на $\rho \neq 0$ получим

$$(U_x^2 - C^2) \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_x U_y \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) + (U_y^2 - C^2) \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0. \quad (6.58)$$

Это уравнение содержит производные только от компонент скорости, а

коэффициенты при производных также зависят только от компонент скорости, поскольку скорость звука C заменяется на U с помощью уравнения Бернулли

$$0,5U^2 + \frac{C^2}{\gamma-1} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}C^2.$$

В гл.1 отмечалось, что течения могут быть вихревыми, либо потенциальными. Ниже мы будем рассматривать лишь потенциальные течения. Это предположение позволяет добавить к (6.58) второе уравнение, являющееся условием существования потенциальной функции J

$$U_x = \frac{\partial J}{\partial x}, \quad U_y = \frac{\partial J}{\partial y},$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial x} = 0.$$

Таким образом, имеется система двух дифференциальных уравнений, из которых первое – нелинейное. Однако, это уравнение обладает той особенностью, что его коэффициенты зависят только от искомым функций и не зависят от независимых переменных x, y . Такое уравнение с помощью преобразования годографа может быть сделано линейным. Суть метода состоит в том, что в качестве новых независимых переменных выбираются старые искомые функции, а старые независимые переменные становятся новыми искомыми функциями. Выпишем уравнения, необходимые для такого преобразования

$$dU_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} dx + \frac{\partial U_x}{\partial y} dy, \quad (6.59)$$

$$dU_y = \frac{\partial U_y}{\partial x} dx + \frac{\partial U_y}{\partial y} dy, \quad (6.60)$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial U_x} dU_x + \frac{\partial x}{\partial U_y} dU_y, \quad (6.61)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial U_x} dU_x + \frac{\partial y}{\partial U_y} dU_y. \quad (6.62)$$

Из (6.61) и (6.62) получим dU_x и сравним с (6.59)

$$\frac{\partial y}{\partial U_y} dx - \frac{\partial x}{\partial U_y} dy = D dU_x. \quad (6.63)$$

Здесь

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial U_x} & \frac{\partial x}{\partial U_y} \\ \frac{\partial y}{\partial U_x} & \frac{\partial y}{\partial U_y} \end{vmatrix}.$$

Сравнивая (6.63) и (6.59), приходим к выводу, что

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{1}{D} \frac{\partial y}{\partial U_y}, \quad (6.64)$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial y} = -\frac{1}{D} \frac{\partial x}{\partial U_y}. \quad (6.65)$$

Далее из (6.61) и (6.62) исключим dU_x

$$\frac{\partial y}{\partial U_x} dx - \frac{\partial x}{\partial U_x} dy = -D dU_y. \quad (6.66)$$

Сравнивая (6.60) и (6.66) получаем, что

$$\frac{\partial U_y}{\partial x} = -\frac{1}{D} \frac{\partial y}{\partial U_x}, \quad (6.67)$$

$$\frac{\partial U_y}{\partial y} = \frac{1}{D} \frac{\partial x}{\partial U_x}. \quad (6.68)$$

Теперь (6.64), (6.65), (6.67) и (6.68) подставим в (6.63) и (6.59)

$$\frac{\partial x}{\partial U_y} - \frac{\partial y}{\partial U_x} = 0, \quad (6.69)$$

$$(U_x^2 - C^2) \frac{\partial y}{\partial U_y} - 2U_x U_y \frac{\partial x}{\partial U_y} + (U_y^2 - C^2) \frac{\partial x}{\partial U_x} = 0. \quad (6.70)$$

Полученные уравнения есть линейные уравнения первого порядка с переменными коэффициентами. Необходимо заметить, что такое преобразование

годографа возможно, если $D \neq 0$. В случае, если $D = 0$, преобразование годографа невозможно, но при этом само условие $D = 0$ является дополнительным уравнением, позволяющим упростить решение. Решение при этом называется вырожденным.

Запишем (6.69) и (6.70) в характеристической форме. Для этого умножим (6.69) на λ и сложим с (6.70)

$$(U_y^2 - C^2) \frac{\partial x}{\partial U_x} + (\lambda - 2U_x U_y) \frac{\partial x}{\partial U_y} - \lambda \frac{\partial y}{\partial U_x} + (U_x^2 - C^2) \frac{\partial y}{\partial U_y} = 0. \quad (6.71)$$

Уравнение (6.71) содержит операторы дифференцирования функций x и y по некоторым направлениям, определяемым коэффициентами операторов. Для того, чтобы эти направления совпадали, должно быть выполнено условие

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda - 2U_x U_y}{U_y^2 - C^2} = -\frac{U_x^2 - C^2}{\lambda}. \quad (6.72)$$

Корни этого квадратного относительно λ уравнения имеют вид

$$\lambda_{1,2} = U_x U_y \pm C \sqrt{U^2 - C^2}, \quad (6.73)$$

где

$$U^2 = U_x^2 + U_y^2.$$

Таким образом, можно утверждать, что в сверхзвуковом движении, при $U^2 > C^2$, имеется два характеристических направления, а уравнения (6.69) и (6.70) относятся к гиперболическому типу. В звуковом движении, при $U^2 = C^2$, оба характеристических направления сливаются, а тип уравнений меняется на параболический. В дозвуковом течении $U^2 < C^2$, поэтому корни уравнения (6.72) являются мнимыми. Такое течение описывается уравнениями эллиптического типа. В дозвуковом течении отсутствуют вещественные характеристики. Разные типы уравнений требуют разных методов их решения.

Ниже мы рассмотрим только сверхзвуковое течение. Подставим (6.73) в (6.71)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial U_y} + \frac{\partial y}{\partial U_x} \frac{dU_x}{dU_y} \right) + \frac{U_x U_y \mp C \sqrt{U^2 - C^2}}{C^2 - U_x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial U_y} + \frac{\partial x}{\partial U_x} \frac{dU_x}{dU_y} \right) = 0,$$

где

$$\frac{dU_x}{dU_y} = \frac{U_x U_y \pm C \sqrt{U^2 - C^2}}{C^2 - U_x^2}.$$

Выражения, стоящие в скобках, есть не что иное, как полные производные $\frac{dy}{dU_y}$ и

$\frac{dx}{dU_y}$ вдоль характеристик. Таким образом, окончательно получаем: -

1. Уравнения характеристик

$$\left(\frac{dU_x}{dU_y} \right)_{1,2} = \frac{U_x U_y \pm C \sqrt{U^2 - C^2}}{C^2 - U_x^2}. \quad (6.74)$$

2. Уравнения вдоль характеристик

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{1,2} = - \frac{U_x U_y \mp C \sqrt{U^2 - C^2}}{C^2 - U_x^2}. \quad (6.75)$$

§ 6. Инварианты

При изучении одномерных течений идеального газа оказалось возможным проинтегрировать характеристические уравнения, в результате чего были получены комбинации искомых функций, сохраняющие своё значение вдоль характеристики. Преобразуем уравнения (6.74), (6.75) так, чтобы они также допускали интегрирование. Для этого в плоскости годографа перейдём к полярным координатам U, β , где

$$U = \sqrt{U_x^2 + U_y^2},$$

β есть угол между горизонтальной осью OU_x и направлением вектора \vec{U} .

Следовательно,

$$U_x = U \cos \beta, \quad U_y = U \sin \beta. \quad (6.76)$$

В то же время вдоль линии тока справедливы соотношения

$$dx = U_x dt, \quad dy = U_y dt, \quad (6.77)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{U_y}{U_x} = \operatorname{tg}\beta. \quad (6.78)$$

Обозначим правую часть в (6.75) через Φ

$$\Phi_{1,2} = \frac{U_x U_y \mp C\sqrt{U^2 - C^2}}{U_x^2 - C^2}, \quad (6.79)$$

а углы наклона характеристик к оси Ox через β_1 и β_2 . Тогда

$$\operatorname{tg}\beta_{1,2} = \Phi_{1,2}. \quad (6.80)$$

Сложим β_1 и β_2

$$\beta_1 + \beta_2 = \operatorname{arctg}\Phi_1 + \operatorname{arctg}\Phi_2.$$

Эта сумма может быть записана в виде

$$\beta_1 + \beta_2 = \operatorname{arctg}\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{1 - \Phi_1\Phi_2}, \quad (6.81)$$

но

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \frac{2U_x U_y}{U_x^2 - C^2}, \quad (6.82)$$

$$1 - \Phi_1\Phi_2 = \frac{U_x^2 - U_y^2}{U_x^2 - C^2}. \quad (6.83)$$

Из (6.81), (6.82) и (6.83) следует

$$\beta_1 + \beta_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\beta}\right) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}2\beta). \quad (6.84)$$

Окончательно получаем

$$\beta = 0,5(\beta_1 + \beta_2). \quad (6.85)$$

Этот результат означает, что линия тока направлена вдоль биссектрисы угла, образованного двумя характеристиками (Рис. 6.8).

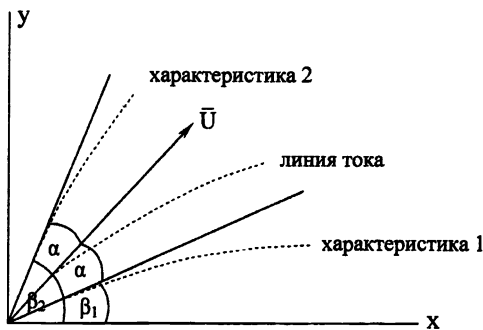


Рис. 6.8.

Введем угол α , равный

$$\alpha = 0,5 (\beta_2 - \beta_1). \quad (6.86)$$

Из (6.79) и (6.80) следует

$$2\alpha = \text{arctg}\Phi_2 - \text{arctg}\Phi_1 = \text{arctg} \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{1 + \Phi_1\Phi_2}. \quad (6.87)$$

Числитель и знаменатель под знаком arctg легко определяются

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \frac{2C\sqrt{U^2 - C^2}}{U_x^2 - C^2},$$

$$1 + \Phi_1\Phi_2 = \frac{U^2 - 2C^2}{U_x^2 - C^2}.$$

Если ввести обозначение $M = \frac{U}{C}$, то (6.87) примет вид

$$2\alpha = \text{arctg} \frac{2\sqrt{M^2 - 1}}{M^2 - 2}. \quad (6.88)$$

Возводя обе части в квадрат, получим биквадратное относительно M уравнение

$$M^4 - \frac{4M^2}{\sin^2 2\alpha} + \frac{4}{\sin^2 2\alpha} = 0.$$

Из четырех корней этого уравнения выбираем те, которые удовлетворяют (6.88)

$$M = \pm \frac{1}{\sin \alpha}. \quad (6.89)$$

Угол α между линией тока и характеристикой называется углом Маха. Угол Маха уменьшается при увеличении M и, наоборот, увеличивается при уменьшении M .

Из (6.88) следует, что $\alpha = \frac{\pi}{4}$ при $M = \sqrt{2}$.

Перейдем теперь к уравнению характеристик в полярных координатах. Для этого в начале подставим (6.76) в (6.75)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{M^2-1} - M^2 \cos\beta \sin\beta}{1 - M^2 \cos^2\beta}.$$

С помощью (6.89) заменим M через $\sin\alpha$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{\pm \sin\alpha \cos\alpha - \sin\beta \cos\beta}{\sin^2\alpha - \cos^2\beta} = \frac{\sin 2\beta \mp \sin 2\alpha}{\cos 2\beta + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}(\beta \mp \alpha). \quad (6.90)$$

Таким образом,

$$\beta_{1,2} = \beta \mp \alpha. \quad (6.91)$$

Подставим (6.76) в (6.74)

$$d(U \cos\beta) = \frac{M^2 \sin\beta \cos\beta \pm \sqrt{M^2-1}}{1 - M^2 \cos^2\beta} d(U \sin\beta).$$

С помощью (6.89) преобразуем это уравнение к виду

$$d\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha \frac{dU}{U} = 0. \quad (6.92)$$

Выразим с помощью (6.89) $\operatorname{ctg}\alpha$ через $M = \frac{U}{C}$, а затем с помощью уравнения

Бернулли (6.16) при $U = C$, выразим C через U и C_* . После подстановки полученного выражения $\operatorname{ctg}\alpha$ в (6.92), оно примет вид

$$\frac{U}{C_*} \sqrt{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(\frac{U}{C_*}\right)^2} d\beta \pm \sqrt{\left(\frac{U}{C_*}\right)^2 - 1} \cdot d\left(\frac{U}{C_*}\right) = 0. \quad (6.93)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися

переменными. Его решение имеет вид

$$\beta \pm \xi \left(\frac{U}{C_*} \right) = \text{const}, \quad (6.94)$$

где

$$\xi \left(\frac{U}{C_*} \right) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(\gamma-1) \left[\left(\frac{U}{C_*} \right)^2 - 1 \right]}{(\gamma+1) \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(\frac{U}{C_*} \right)^2 \right]}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\left(\frac{U}{C_*} \right)^2 - 1}{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(\frac{U}{C_*} \right)^2}}. \quad (6.95)$$

Постоянную интегрирования для характеристик первого семейства обозначим 2λ , для второго 2μ . Таким образом, (6.94) окончательно имеет вид

$$\beta + \xi \left(\frac{U}{C_*} \right) = 2\lambda, \quad \beta - \xi \left(\frac{U}{C_*} \right) = 2\mu. \quad (6.96)$$

Комбинации из угла β и модуля скорости U , стоящие в левых частях (6.96), остаются постоянными вдоль характеристик первого и второго семейств. Величины λ и μ называются инвариантами. Из (6.96) следует, что

$$\beta = \lambda + \mu, \quad \xi \left(\frac{U}{C_*} \right) = \lambda - \mu. \quad (6.97)$$

Инварианты λ и μ , вообще говоря, меняются при переходе от одной характеристики к другой того же семейства. Однако, в некоторых случаях инвариант не меняется при переходе от одной характеристики к другой. Решения, в которых один из инвариантов тождественно постоянен, называются простыми решениями.

В плоскости годографа характеристики, определяемые уравнениями (6.94), являются эпициклоидами, начинающимися в точках окружности радиуса $U = C_*$ и заканчивающимися на окружности радиуса $U = U_{\text{пр}}$ (Рис.6.9). Из каждой точки внутренней окружности выходит две эпициклоиды (первого и второго семейства). Если течение стационарное и изэнтропическое, то эти характеристики одни и те

же для всех задач, в которых газ имеет одно и то же γ . Для практического использования построены подробные сетки эпициклоид для разных γ .

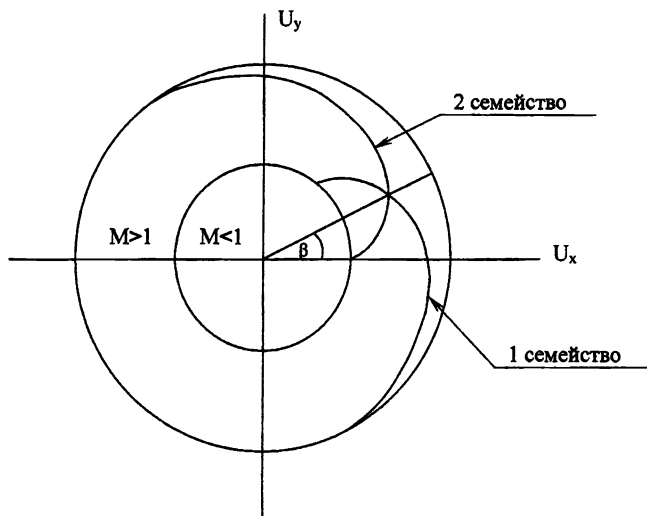


Рис. 6.9. Характеристики в плоскости годографа.

§ 7. Простые волны. Движение газа возле криволинейной поверхности

Рассмотрим несколько примеров движения газа со сверхзвуковой скоростью. Начнём с задачи о движении газа вдоль искривленной стенки, выпуклость которой всегда направлена в сторону газа. Будем предполагать, что касательная к поверхности везде непрерывна, а поток влево от точки O и вверх вдоль оси Oy безграничен и имеет постоянную скорость U_1 ($U_y = 0, U_x = U_1$).

Изучаемое течение является типичным примером простой волны, поскольку в области 1

$$\lambda = \lambda_1 = \xi \left(\frac{U_1}{C} \right) \equiv \text{const}, \quad \mu = \mu_1 = -\xi \left(\frac{U_1}{C} \right) \equiv \text{const}. \quad (6.98)$$

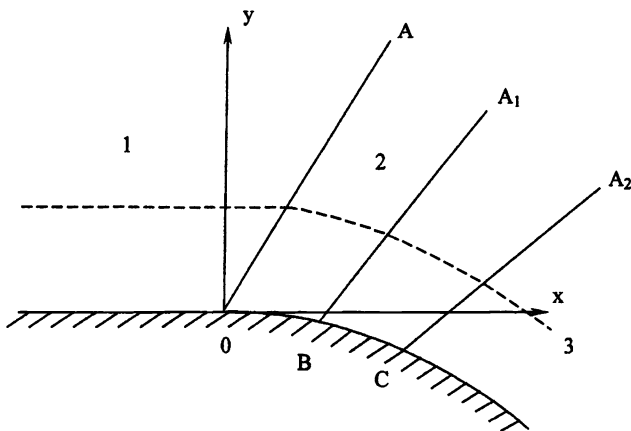


Рис. 6.10. Обтекание искривлённой стенки. Пунктиром показана одна из линий тока.

Характеристики первого семейства, попадая из области 1 в область 2 и далее, несут постоянное значение инварианта λ_1 . Вследствие этого угол β наклона линии тока к оси Ox и скорость U оказываются постоянными на характеристике второго семейства

$$\beta = \lambda_1 + \mu, \quad \xi \left(\frac{U}{C_*} \right) = \lambda_1 - \mu. \quad (6.99)$$

Но это значит, что в плоскости годографа характеристика второго семейства вырождается в точку. В плоскости же x, y характеристики второго семейства представляют собой прямые линии

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_2 = \operatorname{tg} \left[\beta + \arcsin \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} \frac{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(\frac{U}{C_*} \right)^2}{\left(\frac{U}{C_*} \right)^2}} \right], \quad (6.100)$$

поскольку вдоль них β_1 и U постоянны.

Вычислим наклон поверхности к оси Ox в некоторой точке В. Обозначим угол наклона в этой точке через β_B . Поскольку газ обтекает поверхность без

отрыва от нее, то поверхность является одновременно линией тока и, таким образом, угол β_B характеризует наклон линии тока в точке В. Подставляя β_B в (6.96), найдем U_B из уравнения

$$\xi \left(\frac{U_B}{C_*} \right) = 2\lambda_1 - \beta_B. \quad (6.101)$$

Подставляя U_B и β_B в (6.100), найдем наклон характеристики второго семейства, проходящей через точку В, на которой $\beta = \beta_B$ и $U = U_B$. Таким образом, находится решение в любой точке плоскости x, y .

Рассмотрим теперь задачу об обтекании угла. Пусть стенка определяется уравнениями

$$\begin{aligned} y &= 0 && \text{при } x < 0, \\ y &= -\operatorname{tg} \beta_0 x && \text{при } x > 0, \end{aligned}$$

а поток при $x < 0$ имеет параметры

$$U_x = U_1, \quad U_y = 0, \quad C^*, \quad \lambda_1, \quad \mu_1.$$

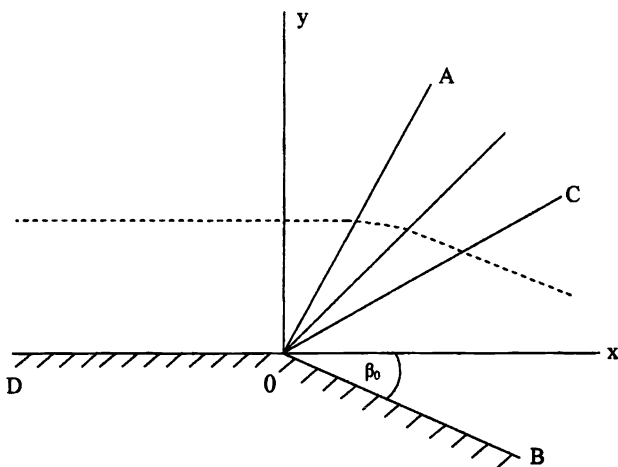


Рис. 6.11. Обтекание угла сверхзвуковым потоком.
Пунктиром показана одна из линий тока.

В областях DOA и SOB (Рис. 6.11) течения характеризуются постоянными параметрами: в области DOA это исходное течение, в области SOB – течение с параметрами

$$\beta = \beta_0, \quad U = U_2,$$

где U_2 находится из уравнения

$$\xi\left(\frac{U_2}{C_*}\right) = 2\lambda_1 - \beta_0. \quad (6.102)$$

В области АОС характеристики первого семейства искривляются, характеристики же второго семейства прямолинейны по тем же причинам, что и в предыдущей задаче. Поскольку $\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = \text{const}$, то (6.100) интегрируется

$$y = x \operatorname{tg}\left(\beta + \arcsin J\left(\frac{U}{C_*}\right)\right), \quad (6.103)$$

где

$$J\left(\frac{U}{C_*}\right) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(\frac{U}{C_*}\right)^2\right)}{\left(\frac{U}{C_*}\right)^2}}.$$

Выберем в области АОС некоторую точку с координатами x_M, y_M . В этой точке пересекаются характеристики (6.102) и (6.96). Исключая β_1 , получим уравнение для определения U в точке M

$$\operatorname{arctg} \frac{y_M}{x_M} = 2\lambda_1 - \xi\left(\frac{U_M}{C_*}\right) + \arcsin J\left(\frac{U_2}{C_*}\right). \quad (6.104)$$

Угол β определяется после вычисления U_B

$$\beta_M = 2\lambda_1 - \xi\left(\frac{U_M}{C_*}\right). \quad (6.105)$$

Необходимо отметить, что для каждого потока имеется предельное значение угла β_0 , при котором справедливо полученное решение. При этом значении β_0 скорость U достигает предельного значения $U_{\text{пр}}$. Эпициклоида первого семейства в плоскости годографа в этом случае выходит на внешнюю

окружность с радиусом $U_{пр}$. При дальнейшем увеличении угла происходит отрыв потока от стенки и между границей потока и стенкой образуется зона вакуума. Из Рис. 6.12 следует, что чем больше скорость U_1 , тем при меньших углах β_0 наступает отрыв потока от стенки, ибо характеристики в плоскости годографа быстрее выходят на внешнюю окружность.

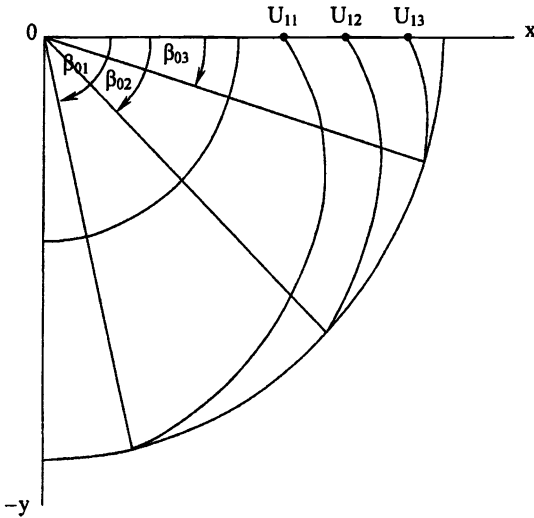


Рис. 6.12. Изменение предельного значения угла β_0 в зависимости от начальной скорости U_1 .

Глава 7. Элементы теории подобия

§1. Размерные и безразмерные величины

В практической деятельности зачастую возникает необходимость использовать результаты экспериментов для прогнозирования характеристик процессов, которые экспериментально не измерялись. Это можно сделать, представив результаты опытов в виде соотношений между безразмерными величинами. Выбор безразмерных величин осуществляется с помощью методов теории размерности и подобия.

Законы подобия явлений могут быть выведены на основании анализа размерностей величин, описывающих эти явления. Размерными величинами называются такие величины, численные значения которых зависят от выбранной системы единиц измерения и, соответственно, безразмерными – величины, не зависящие от выбранной системы единиц. Такие величины как скорость, время, температура, длина являются размерными, а, например, отношение теплоемкостей $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ – величина безразмерная.

В механике принято разделять все величины на основные и производные. Основными величинами часто считают длину, массу и время. Для выражения численных значений физических величин вводятся единицы измерения, которые также делятся на основные единицы измерения и производные.

Выражение производной единицы измерения через основные называется размерностью. Размерность записывается в виде формулы, в которой символ единицы длины обозначается буквой L, символ единицы массы – буквой M, символ единицы времени – буквой T. Для обозначения размерности какой-либо величины a используется введенный Максвеллом символ $[a]$ или приставка \dim . Так, например, размерность силы записывается в виде

$$\dim P = [P] = \frac{M}{LT^2}.$$

В таблице 7.1 приводятся некоторые величины, встречающиеся в механике, и их размерности.

Таблица 7.1

Размерности физических величин.

Название величины	Обозначения	Размерность
1. Длина	λ	L
2. Масса	m, M	M
3. Время	t	T
4. Площадь	S	L ²
5. Объем	θ, Ω	L ³
6. Плотность	ρ	ML ⁻³
7. Давление	P	ML ⁻¹ T ⁻²
8. Энергия	Q	ML ² T ⁻²
9. Удельная внутренняя энергия $I_{гр}$	E	L ² T ⁻²
10. Скорость	U	LT ⁻¹
11. Ускорение	g	LT ⁻²
12. Температура	T	ML ² T ⁻²

Размерность производной величины может быть выражена через размерности основных величин формулой, которая носит название формулы размерности. Эту формулу можно рассматривать как краткое определение и характеристику природы производной величины.

Если a_1, a_2, \dots, a_k – размерности основных величин, то формула размерности для производной величины J в общем случае имеет вид

$$\dim J = [J] = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}.$$

Такая структура формулы размерности производной величины получается из условия, что отношение двух численных значений величины не зависит от системы единиц измерения. Так, отношение двух площадей не зависит от того, измерены ли эти площади в гектарах или квадратных метрах.

Принципиальная возможность перехода от зависимости между размерными величинами к зависимости между безразмерными величинами в формулах, имеющих физический смысл, устанавливается П-теоремой, которая формулируется следующим образом.

П-теорема. Если уравнение $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, связывающее n -размерных величин x_j , сохраняет свою форму при изменении единиц измерения этих величин, то его можно привести к виду:

$$F(y_1, y_2, \dots, y_\lambda) = 0,$$

где y_ν – безразмерные комбинации размерных величин x_j . Число таких безразмерных комбинаций равно $\lambda = n - k$, где k – число величин с независимыми размерностями.

Поскольку во всех интересующих нас случаях число основных единиц измерения равно трем, то $k \leq 3$.

Говорят, что физическая величина A имеет размерность, независимую от размерностей других величин, если формула ее размерности

$$[A] = M^n L^{n_2} T^{n_3}$$

не может быть представлена в виде произведения одночленов размерностей других величин. Например, размерность плотности $[\rho] = ML^{-3}$ и размерность скорости $[U] = LT^{-1}$ независимы, ибо одна из них не может быть выражена через другую. В самом деле, для любых $n \neq 0$ имеет место неравенство

$$(ML^{-3})^1 (LT^{-1})^n \neq 1.$$

Однако, если к этим двум размерностям добавить еще размерность давления, то полученные три размерности оказываются зависимыми. Иными словами, найдутся такие $n_1 \neq 0$, $n_2 \neq 0$, при которых будет

$$(ML^{-3})^1 (LT^{-1})^{n_1} (ML^{-1}T^{-2})^{n_2} = 1.$$

Из П-теоремы следует, что всякое соотношение между размерными величинами можно сформулировать как соотношение между безразмерными величинами. В этом заключается источник полезных приложений теории размерности к исследованию задач механики.

§2. Характеристики и определяющие параметры

Качественные и количественные изменения, происходящие в каждом конкретном явлении, характеризуются конкретными размерными или безразмерными величинами, называемыми характеристиками явления или просто характеристиками. Выбор характеристик явления – это результат его схематизации и выбора модели явления.

Кроме характеристик, функциональные связи, управляющие явлением, содержат ряд величин, определяющих свойства тел, участвующих в явлении, а также количественные значения характеристик. Такие величины называются определяющими параметрами.

Таблицу определяющих параметров легко выписать, если задача сформулирована математически. Для этого нужно выписать все размерные и безразмерные величины, которые необходимо и достаточно задать, чтобы определить количественные значения характеристик.

Рассмотрим в качестве примера задачу о нахождении решения системы законов сохранения для идеальной среды в одномерной постановке

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial m} &= 0, & \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial m} &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t} &= 0, & P &= (\gamma - 1) \frac{E}{V}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Пусть начальные и краевые условия имеют вид:

$$P = P^0(m), V = V^0(m), E = E^0(m), U = U^0(m) \text{ при } t = 0, 0 \leq m \leq \lambda,$$

$$U = U_0(t) \text{ при } m = 0, t > 0, P = P_\lambda(t) \text{ при } m = \lambda, t > 0.$$

К характеристикам явления относятся функции P, V, E, U , входящие в уравнения (7.1). К определяющим параметрам относится величина γ из уравнения состояния, функции $P^0(m), V^0(m), E^0(m), U^0(m)$, заданные в начальный момент времени, и граничные условия $P_\lambda(t), U_0(t)$, заданные на границах области определения решения. Если же математическая постановка задачи отсутствует, то для составления списка определяющих параметров следует установить все те факторы, которые влияют на величину искомым характеристик и знание которых достаточно для определения характеристик хотя бы экспериментально.

§3. Физическое подобие и моделирование явлений

В эпоху бурного развития вычислительной техники и математического моделирования практически любое явление, допускающее создание соответствующей математической модели, может быть промоделировано на ЭВМ. Однако, при создании модели изучаемого явления используются имеющиеся знания об этом явлении. Поскольку знания всегда не полны, то имеется элемент неадекватности модели физическому процессу. В жизни каждой физико-математической модели наступает период ее верификации, для чего неизбежно требуется информация, полученная экспериментальным путем. Успех эксперимента часто зависит от возможности моделирования процесса в лабораторных условиях.

Моделирование – это замена изучения явления в натуре изучением аналогичного явления на модели меньшего или большего масштаба. Основной

задачей моделирования является получение характеристик явления в натуре по результатам опытов с моделями.

Моделирование основывается на рассмотрении физически подобных явлений. Два явления называются физически подобными, если по заданным характеристикам одного можно получить характеристики другого простым пересчетом (умножением на постоянные множители), аналогичным переходу от одной системы единиц измерения к другой. Поскольку переход от одной системы единиц измерения к другой не сказывается на безразмерных комбинациях из определяющих параметров и безразмерных характеристиках, то, следовательно, необходимым и достаточным условием подобия двух явлений будет равенство их соответствующих безразмерных параметров, которые называются критериями подобия.

В литературе наиболее часто встречаются следующие критерии подобия:

1. Критерий Фруда $Fr = \frac{g\ell}{U^2}$ характеризует отношение сил тяжести к силам инерции. Используется в случае, когда силы тяжести играют основную роль в движении вещества.

2. Критерий Рейнольдса $Re = \frac{\rho U \ell}{\mu}$ характеризует отношение сил инерции к силам вязкого трения. Используется, когда силы вязкого трения играют основную роль в движении вещества. Здесь μ – коэффициент вязкости.

3. Критерий Маха $M = \frac{U}{C}$ характеризует отношение скорости вещества к скорости звука.

Имеются также другие критерии подобия (критерий Нуссельта – Nu , критерий Прандтля – Pr , критерий Пекле – Pe и др.). Выбор того или иного критерия подобия зависит от рассматриваемой задачи (системы уравнений, краевых условий, начальных данных).

§ 4. Приведение некоторых уравнений к безразмерному виду

Рассмотрим простейшее уравнение состояния конденсированного вещества

$$P = (\gamma - 1) \rho E + C_{0k}^2 (\rho - \rho_{0k}). \quad (7.2)$$

Переход от размерных величин P , ρ , E , C_{0k} , ρ_{0k} к безразмерным совершается следующим образом. Составляется произведение всех величин, входящих в уравнение (7.2), причем каждая из них входит в это произведение со своей степенью

$$P^{n_1} \rho^{n_2} E^{n_3} C_{0k}^{n_4} \rho_{0k}^{n_5} = A. \quad (7.3)$$

Далее требуется, чтобы это произведение было безразмерным, т.е. имело бы нулевую размерность относительно основных единиц измерения

$$[P]^{n_1} [\rho]^{n_2} [E]^{n_3} [C_{0k}]^{n_4} [\rho_{0k}]^{n_5} = 1.$$

Подставляя вместо размерности каждой из величин ее выражение через основные размерности, получим

$$(ML^{-1}T^{-2})^{n_1} (ML^{-3})^{n_2} (L^2T^{-2})^{n_3} (LT^{-1})^{n_4} (ML^{-3})^{n_5} = M^0L^0T^0.$$

Приравнявая степени при M , L , и T в правой и левой частях, приходим к системе трех уравнений с пятью неизвестными

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + 0 + 0 + n_5 &= 0, \\ -n_1 - 3n_2 + 2n_3 + n_4 - 3n_5 &= 0, \\ -2n_1 + 0 - 2n_3 - n_4 + 0 &= 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Выразим три неизвестных n_3 , n_4 , n_5 через n_1 , n_2 – показатели степеней величин P и ρ , входящих в уравнения. Тогда система (7.4) примет вид

$$\begin{aligned} n_5 &= -n_1 - n_2, \\ 2n_3 + n_4 - 3n_5 &= n_1 + 3n_2, \\ 2n_3 + n_4 &= -2n_1. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Определитель системы уравнений (7.5) равен нулю и, следовательно, одно из уравнений является следствием двух других. Предполагая еще известным n_3 , найдем n_4 и n_5

$$n_4 = -2n_1 - 2n_3,$$

$$n_5 = -n_1 - n_2.$$

Подставим n_4 и n_5 в (7.3) и соберем вместе величины с одинаковыми степенями

$$\left(\frac{P}{\rho_{0k} C_{0k}^2}\right)^{n_1} \left(\frac{E}{C_{0k}^2}\right)^{n_3} \left(\frac{\rho}{\rho_{0k}}\right)^{n_2} = A. \quad (7.6)$$

Уравнение (7.6) содержит безразмерные характеристики уравнения (7.2):

1) безразмерное давление $\Pi = \frac{P}{\rho_{0k} C_{0k}^2},$

2) сжатие $\delta = \frac{\rho}{\rho_{0k}},$

3) безразмерную удельную внутреннюю энергию $J = \frac{E}{C_{0k}^2}.$

После перехода к безразмерным характеристикам Π , δ и J уравнение (7.2) примет вид

$$\Pi = (\gamma - 1)\delta J + \delta - 1. \quad (7.7)$$

Уравнение состояния (7.7) не содержит размерных величин и называется **приведенным уравнением состояния**. Оно одинаково справедливо для всех веществ, подчиняющихся уравнению состояния (7.2).

Состояния веществ, в которых Π , δ и J принимают одинаковые значения, называются **соответственными состояниями**.

Рассмотрим далее зависимость между скачком давления и скачком скорости на фронте ударной волны в веществе, подчиняющемся уравнению состояния (7.2)

$$\Delta P = \frac{\gamma + 1}{4} \rho_0 \Delta U^2 + \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4} \rho_0 \Delta U^2\right)^2 + \rho_0^2 C_0^2 \Delta U^2}, \quad (7.8)$$

$$\text{где } \Delta P = P_+ - P_-, \quad \Delta U = U_+ - U_-, \quad \rho_- C_-^2 = \gamma P_- + \rho_{0k} C_{0k}^2.$$

Произведение всех размерных функций и постоянных, входящих в (7.8), имеет вид

$$P^{n_1} \rho^{n_2} U^{n_3} C^{n_4} \rho_{0k}^{n_5} C_{0k}^{n_6} = A. \quad (7.9)$$

Требую, чтобы A была безразмерной, получим систему уравнений относительно n_i

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + 0 + 0 + n_5 + 0 &= 0, \\ -n_1 - 3n_2 + n_3 + n_4 - 3n_5 + n_6 &= 0, \\ 2n_1 + 0 + n_3 + n_4 + 0 + n_6 &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку уравнений три, а неизвестных шесть, то три из них могут быть выбраны произвольно. Как и раньше, в качестве таких произвольных величин возьмем показатели степеней искомых функций: n_1, n_2, n_3 . Система уравнений относительно оставшихся n_i имеет вид

$$\begin{aligned} 0 + n_5 + 0 &= -n_1 - n_2, \\ n_4 - 3n_5 + n_6 &= n_1 + 3n_2 - n_3, \\ n_4 + 0 + n_6 &= -2n_1 - n_3. \end{aligned}$$

Определитель этой системы равен нулю и, следовательно, одно из этих уравнений является следствием двух других. Добавив к произвольным n_1, n_2, n_3 еще и n_4 и решив оставшуюся систему уравнений, получим

$$\begin{aligned} n_5 &= -n_1 - n_2, \\ n_6 &= -2n_1 - n_3 - n_4. \end{aligned}$$

После того, как n_5 и n_6 подставим в (7.9) и соберем все члены с одинаковыми степенями, получим

$$\left(\frac{P}{\rho_{0k} C_{0k}^2} \right)^{n_1} \left(\frac{\rho}{\rho_{0k}} \right)^{n_2} \left(\frac{U}{C_{0k}} \right)^{n_3} \left(\frac{C}{C_{0k}} \right)^{n_4} = A.$$

Таким образом, кроме уже известных безразмерных характеристик Π, δ и J появились еще и безразмерные скорость и скорость звука

$$M = \frac{U}{C_{0k}}, \quad Z = \frac{C}{C_{0k}}.$$

После деления правой и левой части уравнения (7.8) на $\rho_{0k} C_{0k}^2$, получим уравнение

$$P_+ - P_- = \frac{\gamma+1}{4} \delta_- (M_+ - M_-)^2 + \sqrt{\left[\frac{\gamma+1}{4} \delta_- (M_+ - M_-)^2 \right]^2 + \delta_-^2 Z_-^2 (M_+ - M_-)^2}, \quad (7.10)$$

не содержащее размерных величин. Уравнение (7.10) называется **приведенной ударной адиабатой**.

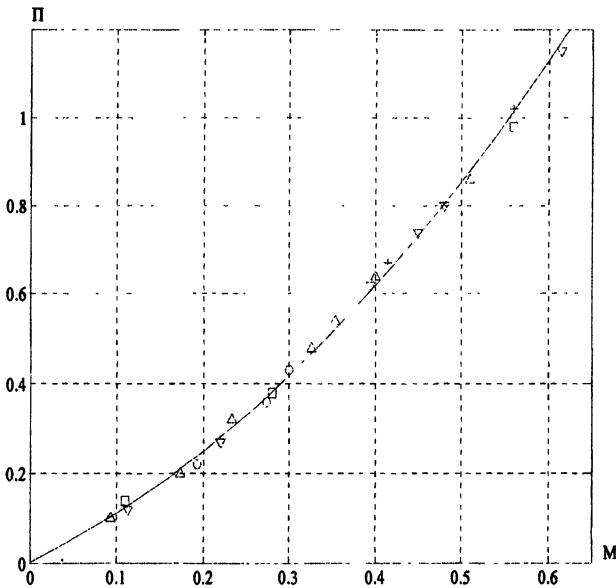


Рис 7.1. Приведенная ударная адиабата $P_+(M_+)$. Сплошная линия – кривая (7.11) с $\gamma = 3.5$. Точки соответствуют веществам с параметрами из таблицы 7.2.

Если предположить, что ударная волна распространяется по невозмущенному веществу

$$P_- = 0, \quad M_- = 0, \quad \delta_- = 1, \quad Z_- = 1,$$

то уравнение (7.10) упростится

$$P_+ = \frac{\gamma+1}{4} M_*^2 + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4} M_*^2\right)^2 + M_*^2}. \quad (7.11)$$

Уравнения (7.10) и (7.11) содержат лишь одну безразмерную постоянную γ . Для ее определения могут использоваться экспериментальные данные. Действительно, экспериментальные точки, например, в плоскости Π , M располагаются в окрестности некоторой кривой, так что коэффициент γ может быть найден. Из Рис. 7.1 видно, что кривая (7.11) при $\gamma = 3,5$ удовлетворительно проходит через экспериментальные точки ряда веществ.

Таблица 7.2 -

Значения плотности и скорости звука в нормальном состоянии для веществ, приведенных на Рис. 7.1.

Название	мрамор	кварц	NaCl	туф розовый	Cu
обозначение	Δ	δ	∇	Ω	+
ρ_0 , г/см ³	2,75	2,70	2,20	1,94	9,08
C_0 , км/сек	3,81	3,70	3,318	1,95	3,98

Рассмотрим также ударную адиабату в переменных P, ρ для конденсированного вещества, подчиняющегося уравнению состояния (7.2). С этой целью предварительно исключим E_+ и E_- из (7.2) и третьего условия на фронте ударной волны

$$E_+ - E_- + 0.5(P_+ + P_-) \left(\frac{1}{\rho_+} - \frac{1}{\rho_-} \right) = 0.$$

В результате, получим ударную адиабату в виде

$$P_+ = \frac{P_- ((\gamma+1)\rho_+ - (\gamma-1)\rho_-) + 2\rho_{ок} C_{ок}^2 (\rho_+ - \rho_-)}{(\gamma+1)\rho_- - (\gamma-1)\rho_+}. \quad (7.12)$$

Заменяем далее все размерные величины в (7.12) безразмерными Π и δ , которые были получены ранее. Тогда ударная адиабата запишется так

$$\Pi_+ = \frac{\Pi_- ((\gamma+1)\delta_+ - (\gamma-1)\delta_-) + 2(\delta_+ - \delta_-)}{(\gamma+1)\delta_- - (\gamma-1)\delta_+}. \quad (7.13)$$

В случае, когда $\Pi_- = 0$, $\delta_- = 1$, уравнение (7.13) упрощается

$$\Pi_+ = \frac{2(\delta_+ - 1)}{\gamma + 1 - (\gamma - 1)\delta_+}. \quad (7.14)$$

Из приведенной ударной адиабаты (7.14) по значениям Π_+ легко определяются значения δ_+ . На основании проделанных сравнений можно надеяться, что приведенное уравнение состояния (7.7) удовлетворительно описывает поведение многих веществ в диапазоне давлений Π до 2 и сжатий δ до 1,5, что соответствует $P \approx 0,5 + 1,5$ Мбар.

§5. Применение теории размерности к задаче о движущемся поршне

Предположим, что в полубесконечной трубе, закрытой с одной стороны поршнем, находится покоящийся идеальный газ с уравнением состояния (4.24). Начальные данные и краевые условия (определяющие параметры) возьмем в виде

$$\rho = \rho_0 = \text{const}, \quad E = E_0 = \text{const}, \quad U = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < \infty, \quad t = 0. \quad (7.15)$$

На поршне при $t \geq 0$ зададим скорость $U = U_{\text{п}} = f(t)$. Значение P_0 выражается через ρ_0 , E_0 из уравнения состояния. Если $f(0) \neq 0$, то в точке $t = 0$, $x = 0$ находится произвольный разрыв. После распада произвольного разрыва при $f(0) > 0$ в газ пойдет ударная волна, при $f(0) < 0$ – волна разрежения. Вначале рассмотрим случай $f(0) < 0$, когда поршень рывком выдвигается из трубы.

Рассмотрим уравнения одномерного, плоского движения газа

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial U}{\partial x} &= 0, & \rho \frac{\partial U}{\partial t} + \rho U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + U \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) &= 0, & P &= (\gamma - 1) \rho E. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Предположим, что течение, описываемое уравнениями (7.16), изэнтропическое. Тогда для идеального газа

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{C}{C_0} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad P = \frac{\rho_0 C_0^2}{\gamma} \left(\frac{C}{C_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}.$$

Подставив P и ρ в (7.16), получим систему двух уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2C}{\gamma-1} \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{2} C \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (7.17)$$

Соответственно изменяются и начальные данные (7.15): $C = C_0$, $U_0 = 0$ при $0 \leq x < \infty$, $t = 0$. Напишем, как и ранее, произведение из размерных характеристик U , C , и отличных от нуля определяющих параметров: скорости звука C_0 и скорости U_n

$$U^{n_1} C^{n_2} C_0^{n_3} U_n^{n_4} = A.$$

Для показателей n_i получается одно независимое уравнение

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 0.$$

Следовательно, из четырех значений n_i три являются независимыми. Взяв в качестве независимых n_1, n_2, n_4 , придем к следующим безразмерным характеристикам

$$M = \frac{U}{C_0}, \quad Z = \frac{C}{C_0}, \quad M_n = \frac{U_n}{C_0}. \quad (7.18)$$

Используя (7.18), запишем уравнения (7.17), краевые условия и начальные данные в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial t} + C_0 M \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{2} C_0 Z \frac{\partial M}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial M}{\partial t} + C_0 M \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{2}{\gamma-1} C_0 Z \frac{\partial Z}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (7.19)$$

$M_0 = 0$, $Z_0 = 1$ при $t = 0$, $x > 0$, $M_n = F(t)$ при $t \geq 0$. Чтобы систему (7.19) записать полностью в безразмерной форме, необходимо составить произведение из размерных величин t и x , а также из размерных определяющих параметров задачи и начальных данных.

Рассмотрим один частный случай, когда формула $F(t)$ не имеет размерных постоянных. Чтобы перейти к полностью безразмерному виду в уравнениях (7.19), приравняем единице произведение из оставшихся размерных величин в произвольных степенях $t^n x^{n_2} C_0^{n_3}$. В результате получим одну единственную безразмерную величину

$$\xi = \frac{x}{C_0 t}.$$

Заменяя производные по t и x производными по ξ в (7.19), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} (M - \xi)Z' + \frac{\gamma - 1}{2} ZM' &= 0, \\ (M - \xi)M' + \frac{2}{\gamma - 1} ZZ' &= 0 \end{aligned} \quad (7.20)$$

Начальные данные $M_0 = 0$, $Z_0 = 1$, заданные при $t = 0$, после перехода к безразмерной переменной ξ оказываются заданными на бесконечности при $\xi = +\infty$. Поскольку $F(t)$ не имеет размерных постоянных с независимой размерностью, то в плоскости x, t поршень движется прямолинейно $x_n = U_n \cdot t$ и, таким образом, на поршне $\xi_n = M_n$.

Исключим в (7.20) M' . Тогда вместо двух уравнений (7.20) получим

$$Z'[(M - \xi)^2 - Z^2] = 0. \quad (7.21)$$

Уравнение (7.21) имеет три различных решения

$$\begin{aligned} M - Z &= \xi, & M' - Z' &= 1, \\ M + Z &= \xi, & M' + Z' &= 1, \\ Z' &= 0, & M' &= 0, \end{aligned}$$

которым соответствуют три решения уравнений (7.20)

$$Z = -\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \xi + K_1, \quad M = \frac{2}{\gamma + 1} \xi + K_1, \quad (7.22)$$

$$Z = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\xi + K_2, \quad M = \frac{2}{\gamma+1}\xi - K_2, \quad (7.23)$$

$$Z = K_3, \quad M = K_4, \quad (7.24)$$

где K_1, K_2, K_3, K_4 – постоянные интегрирования. Для построения непрерывных зависимостей $f(\xi)$ и $Z(\xi)$ между поршнем с координатой $\xi = \xi_n$ и начальным состоянием с координатой $\xi = \infty$ необходимо использовать в разных комбинациях решения (7.22)-(7.24). При этом следует учитывать, что решения (7.22), (7.23) применимы лишь в области конечных значений ξ , поскольку M и Z конечны. Таким образом, с начальными данными может быть сопряжено только решение (7.24), которое после определения постоянных интегрирования принимает вид

$$Z = 1, \quad M = 0. \quad (7.25)$$

Определим, при каких значениях ξ решение (7.25) может непрерывно перейти в одно из решений (7.22) или (7.23). Подставив (7.25) в (7.22) и (7.23) получим, что решение (7.23) сопрягается с начальными данными при $\xi_1 = 1$, а решение (7.22) при $\xi_1 = -1$. Поскольку $\xi_1 = 1$ ближе к $\xi = \infty$, чем $\xi_1 = -1$, то именно при значении $\xi_1 = 1$ начальные данные непрерывно переходят в решение (7.23). После определения постоянных интегрирования в точке сопряжения $\xi_1 = 1$ решение (7.23) при $\xi \leq 1$ принимает вид

$$Z = \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{\gamma-1}{2} \xi + 1 \right), \quad M = \frac{2}{\gamma+1} (\xi - 1). \quad (7.26)$$

Из (7.26) следует, что $M < 0, Z < 1$ при $\xi < 1$ и, следовательно, $\rho < \rho_0$. Течение, в котором плотность уменьшается по сравнению с первоначальным значением ρ_0 , называется **волной разрежения**. Если $M_n > 0$, то такое сопряжение невозможно. При $M_n < 0$, точка сопряжения определяется из второго уравнения (7.26)

$$\xi_2 = \frac{\gamma+1}{2} M_n + 1. \quad (7.27)$$

Поскольку $M_n < 0$, то $\xi_2 < \xi_1$ и в области $\xi_2 \leq \xi \leq \xi_1$ находится волна разрежения. Между поршнем с координатой $\xi_n = M_n$ и точкой ξ_2 образуется второе постоянное течение с параметрами

$$M = M_n, \quad Z = \frac{\gamma-1}{2}M_n + 1. \quad (7.28)$$

В точках сопряжения решений ξ_1 и ξ_2 находятся слабые разрывы. В точке $\xi_1 = 1$, $M' = 0$, $Z' = 0$ при $\xi_1 + 0$ и $M' = \frac{2}{\gamma+1}$, $Z' = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ при $\xi_1 - 0$. Слабый разрыв, на котором выполняется условие

$$f(\xi + \Delta\xi) - 2f(\xi) + f(\xi - \Delta\xi) < 0,$$

где под f понимается любая из величин Π , δ , M , J , Z , будем называть слабым разрывом типа 2. В точке ξ_2 производные справа и слева, также различаются:

$$M' = \frac{2}{\gamma+1}, \quad Z' = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad \text{при } \xi = \xi_2 + 0 \quad \text{и} \quad M' = 0, \quad Z' = 0 \quad \text{при } \xi = \xi_2 - 0.$$

Слабый разрыв, на котором выполняется условие

$$f(\xi + \Delta\xi) - 2f(\xi) + f(\xi - \Delta\xi) > 0,$$

будем называть слабым разрывом типа 3.

Из (7.27) видно, что положение слабого разрыва второго типа зависит от скорости поршня $M_n < 0$. Случай, когда $M_n = 0$ приводит к тривиальному течению – покою и не представляет интереса. У каждого газа имеется предельная скорость истечения газа в вакуум, где $Z = 0$. Положив $Z = 0$ в первом уравнении

$$(7.26), \quad \text{получим предельное значение } \xi_3 = -\frac{2}{\gamma-1}. \text{ Рассмотрим три возможных}$$

режима течения.

$$1. \quad -\frac{2}{\gamma-1} < M_n < 0. \quad \text{При таких значениях } M_n \text{ решение состоит из волны}$$

разрежения и двух постоянных течений

$$M = 0, \quad Z = 1 \quad \text{при } \xi_1 \leq \xi < \infty,$$

$$M = \frac{2}{\gamma+1}(\xi-1), \quad Z = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\xi + \frac{2}{\gamma+1}, \quad \text{при } \xi_2 \leq \xi \leq \xi_1,$$

$$M = M_n, \quad Z = \frac{\gamma-1}{2}M_n + 1, \quad \text{при } \xi_n \leq \xi \leq \xi_2.$$

Ширина волны разрежения равна

$$\xi_1 - \xi_2 = -\frac{\gamma+1}{2}M_n,$$

ширина области второго (возле поршня) постоянного течения равна

$$\xi_2 - \xi_n = -\frac{\gamma-1}{2}M_n + 1.$$

Волна разрежения ограничена слабыми разрывами типа 2 в точке ξ_1 и типа 3 в точке ξ_2 .

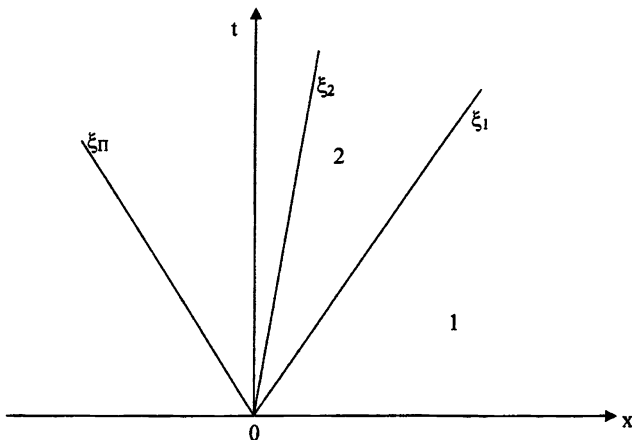


Рис. 7.2. Картина движения слабых разрывов и поршня в плоскости x, t в задаче о поршне, выдвигающемся с постоянной скоростью в случае $-2/(\gamma-1) < M_n < 0$. 1 – область покоя (начальные данные), 2 – область волны разрежения, 3 – область стационарного течения возле поршня, ξ_n – траектория поршня, ξ_1 – траектория слабого разрыва типа 2, ξ_2 – траектория слабого разрыва типа 3.

2. $M_n = -\frac{2}{\gamma-1}$. В этом случае $Z_n = 0$, сам поршень выдвигается со скоростью

истечения вещества в вакуум, второе постоянное течение отсутствует, $\xi_2 - \xi_n = 0$.

Поверхность поршня является одновременно поверхностью слабого разрыва типа 3. В этом случае $\xi_2 = \xi_n = \xi_3$.

3. $M_n < -\frac{2}{\gamma-1}$. В этом случае поршень отрывается от газа и между поршнем и газом образуется полость (вакуум), ширина которой равна

$$\xi_3 - \xi_n = -\frac{2}{\gamma-1} - M_n > 0.$$

Вернемся теперь к случаю $M_n > 0$. Поскольку в этом случае $\xi_n > 1$, то начальные данные $M = 0$, $Z = 1$, $M' = 0$, $Z' = 0$ должны быть сопряжены с решением (7.24), (7.25), в котором $M = M_n = \text{const}$. Такое сопряжение возможно только с помощью уравнений на сильном разрыве. Ударная адиабата в переменных Π , M для идеального газа имеет вид

$$\Pi = \Pi_0 + \frac{\gamma+1}{4} \delta_0 (M - M_0)^2 + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4} \delta_0 (M - M_0)^2\right)^2 + \delta_0^2 Z_0^2 (M - M_0)^2}.$$

Подставив сюда принятые выше значения $M_0 = 0$, $Z_0 = 1$, $\delta_0 = 1$, получим при $M = M_n$

$$\Pi_n = \frac{\gamma+1}{4} M_n^2 + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4} M_n^2\right)^2 + M_n^2}.$$

Безразмерное положение разрыва определяется через безразмерную скорость разрыва

$$\bar{D} = \frac{\gamma+1}{4} M_n + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4} M_n\right)^2 + 1}$$

и равно $\xi_p = \bar{D}$.

Решение задачи, полученное в безразмерном виде, преобразуется затем к размерному виду по формулам

$$U = M C_0, \quad C = Z C_0, \quad \rho = \delta \rho_0, \quad x = \xi C_0 t.$$

И в этой задаче два различных течения газа называются подобными, если их безразмерные характеристики совпадают. Нужно, однако, отметить, что полученное нами течение подобно самому себе, поскольку распределение размерных величин по x , взятые в различные моменты t , при переходе к безразмерным величинам полностью совпадают. Такие решения называются самоподобными или автомодельными.

Автомодельные решения представляют большой интерес особенно в одномерном случае, когда дифференциальные уравнения в частных производных сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В связи с этим, важно уметь определять возможность построения автомодельного решения в конкретной задаче.

В рассмотренной задаче о поршне,двигающемся с постоянной скоростью, система размерных определяющих параметров ρ_0, E_0, U_n содержит лишь две постоянных величины с независимыми размерностями ρ_0 и U_n . В этом случае, как было показано выше, автомодельное решение существует.

Можно утверждать, что для автомодельности задачи достаточно, чтобы система размерных определяющих параметров, задаваемая уравнениями, начальными и краевыми условиями, содержала не более двух постоянных с независимыми размерностями, отличными от длины и времени.

Рассмотрим случай, когда поршень движется равномерно ускоренно (или замедленно). Тогда система определяющих параметров имеет вид ρ_0, E_0, U_{n0}, g . В этом случае имеется три постоянных величины с независимыми размерностями

$$[\rho_0] = ML^{-3}, \quad [U_{n0}] = LT^{-1}, \quad [g] = LT^{-2}$$

и построить автомодельное решение не удастся.

В общем случае для двух постоянных величин a и b с независимыми размерностями могут быть справедливы формулы

$$[a] = ML^k T^s, \quad [b] = LT^{-n},$$

где K, S – произвольные постоянные, а $n = \text{const} \neq 0$. При таком выборе произвольных постоянных a и b одномерные автомодельные решения будут зависеть только от одной безразмерной переменной

$$\xi = \frac{x}{bt^n}.$$

Величина n может быть равна единице, как это было в рассмотренной выше задаче.

§6. Одномерные автомодельные движения

В предыдущем параграфе было показано, что при отыскании автомодельного решения безразмерные функции M – скорость, Π – давление, δ – плотность и другие, зависящие от них, находятся после интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Размерные же величины в каждый конкретный момент времени получаются умножением безразмерных функций на масштабные множители, зависящие от времени. Таким образом, P, ρ, U, E и ε могут быть записаны в виде

$$P = \alpha_P(t) \Pi(\xi), \quad \rho = \alpha_\rho(t) \delta(\xi), \quad U = \alpha_U(t) M(\xi), \quad (7.29)$$

$$E = \alpha_E(t) J(\xi), \quad \varepsilon = \alpha_\varepsilon(t) Q(\xi), \quad Q(\xi) = J(\xi) + 0,5M^2(\xi),$$

где

$$\xi = \frac{r}{bt^n}. \quad (7.30)$$

Пространственную координату обозначим через r , так как будем изучать плоские, цилиндрически и сферически симметричные течения. Поскольку P, ρ, U – величины с зависимыми размерностями, то очевидно, что α_P, α_ρ и α_U также зависимы

$$\alpha_P = \alpha_\rho \alpha_U^2. \quad (7.31)$$

Аналогично, $\alpha_E = \alpha_U^2$.

Законы сохранения идеальной среды возьмем в виде

$$r^{\nu-1} \frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial r}(r^{\nu-1} \rho U) = 0, \quad (7.32)$$

$$r^{\nu-1} \frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \frac{\partial}{\partial r}(r^{\nu-1} \rho U^2) + r^{\nu-1} \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \quad (7.33)$$

$$r^{\nu-1} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial r}[r^{\nu-1} U(P + \rho \varepsilon)] = 0, \quad (7.34)$$

где

$$\varepsilon = E + 0,5U^2 \quad \text{и} \quad \nu = 1, 2, 3.$$

Подставим в (7.32)-(7.34) величины (7.29), а затем заменим производные по t и r производными по t и ξ согласно формулам

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\xi + \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_r, \quad \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_t = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\right)_t,$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_r = -\frac{n\xi}{t}, \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\right)_t = \frac{1}{bt^n}.$$

Дифференцирование по ξ будем обозначать штрихом. Тогда уравнения (7.32)-(7.34) примут вид

$$\varphi_1 \xi^{\nu-1} \delta - \omega_1 \xi^\nu \delta' + (\xi^{\nu-1} \delta M)' = 0, \quad (7.35)$$

$$\varphi_2 \delta M \xi^{\nu-1} - \omega_2 \xi^\nu (\delta M)' + \xi^{\nu-1} \Pi' + (\xi^{\nu-1} \delta M^2)' = 0, \quad (7.36)$$

$$\varphi_3 \xi^{\nu-1} \delta Q - \omega_3 \xi^\nu (\delta Q)' + (\xi^{\nu-1} M(\Pi + \delta Q))' = 0, \quad (7.37)$$

где

$$\varphi_1 = \frac{bt^n}{\alpha_\rho \alpha_U} \frac{d\alpha_\rho}{dt}, \quad \omega_1 = \frac{nbt^{n-1}}{\alpha_U}, \quad (7.38)$$

$$\varphi_2 = \frac{bt^n}{\alpha_\rho \alpha_U^2} \frac{d\alpha_\rho \alpha_U}{dt}, \quad \omega_2 = \frac{nbt^{n-1}}{\alpha_U}, \quad (7.39)$$

$$\varphi_3 = \frac{bt^n}{\alpha_\rho \alpha_U^3} \frac{d}{dt} \alpha_\rho \alpha_U^2, \quad \omega_3 = \frac{nbt^{n-1}}{\alpha_U}. \quad (7.40)$$

Полученные уравнения должны разделиться, с одной стороны, на уравнения, содержащие α_p , α_U , зависящие только от t , а с другой стороны, на уравнения, содержащие M , Π , δ , J , зависящие только от ξ . Именно в случае такого разделения уравнений имеет смысл говорить о представлении искомых величин в виде (7.29). Для разделения уравнений необходимо и достаточно, чтобы было

$$\varphi_i = \text{const}, \quad \omega_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Поскольку $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$, то $\alpha_U(t)$ определяется из второго уравнения (7.38) в виде

$$\alpha_U = \frac{nb}{\omega_1} t^{n-1}. \quad (7.41)$$

Зная $\alpha_U(t)$, из первого уравнения (7.38) найдем $\alpha_p(t)$

$$\alpha_p = K_1 t^{\frac{nb}{\omega_1}}, \quad (7.42)$$

где K_1 – постоянная интегрирования. Подставив (7.41) и (7.42) в выражения для φ_2 и φ_3 (7.39) и (7.40), получим

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{n-1}{n} \omega_1, \quad \varphi_3 = \varphi_1 + \frac{2(n-1)}{n} \omega_1. \quad (7.43)$$

Таким образом, уравнения (7.35)-(7.37) для величин, зависящих от ξ , и уравнения (7.41), (7.42) для α_p , α_U , зависящих от t , содержат 5 независимых постоянных пока еще произвольных величин φ_1 , ω_1 , n , b , K_1 . В конкретных задачах они должны определяться из начальных и граничных условий. Чаще всего система трёх обыкновенных дифференциальных уравнений (7.35)-(7.37) вместе с приведенным уравнением состояния $\Pi = \Pi(\delta, J)$ может быть проинтегрирована лишь численно. Интегрирование возможно при задании соответствующих краевых условий и начальных данных.

Возможны два типа автомодельных решений. Решения первого типа обладают тем свойством, что постоянная n , которая называется показателем автомодельности, а вместе с ней и постоянная b , определяются на основе анализа системы определяющих параметров. В автомодельных задачах второго типа

показатель автомодельности может быть найден лишь при интегрировании уравнений для безразмерных функций при некоторых требованиях, предъявляемых к интегральным кривым.

§7. Задача о точечном взрыве

Аналитическое решение задачи о точечном взрыве было получено Л.И. Седовым в 1946 г. и независимо от него Г.И. Тэйлором в 1947 г. Задача формулируется следующим образом. Пусть в момент времени $t = 0$ в точке $r = 0$ выделилась конечная энергия Q_0 . Будем считать, что в этот момент все величины в газе с уравнением состояния

$$P = (\gamma - 1) \rho E \quad (7.44)$$

постоянны и равны $P_0, \rho_0, E_0, U_0 = 0$. Поскольку в точке $r = 0, t = 0$ находится разрыв, не удовлетворяющий условиям на сильном, слабом или контактном разрыве, то при $t > 0$ произойдет распад этого разрыва с образованием ударной волны, распространяющейся по газу. Полная энергия Q_0 выделилась в нулевом объёме. Значит, удельная энергия равна $+\infty$. Это позволяет на первоначальной стадии взрыва пренебречь энергией E_0 и давлением P_0 перед фронтом ударной волны по сравнению с этими же величинами за фронтом. Условия на фронте в этом случае запишутся в виде

$$\rho_1 (D - U_1) - \rho_0 D = 0, \quad \rho_0 D U_1 - P_1 = 0, \quad E_1 + 0,5 P_1 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0} \right) = 0. \quad (7.45)$$

С помощью уравнения состояния (7.44) исключим E_1 из (7.45) и выразим P_1, ρ_1, U_1 через D и ρ_0

$$P_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 D^2, \quad U_1 = \frac{2}{\gamma + 1} D, \quad \rho_1 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0. \quad (7.46)$$

Подставив в (7.46) соотношения (7.29) и (7.31) и положив предварительно $\delta_0 = 1$, перейдем от P_1, U_1, ρ_1 к безразмерным характеристикам

$$\Pi_1 = \frac{2}{\gamma+1} K^2, \quad M_1 = \frac{2}{\gamma+1} K, \quad \delta_1 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad (7.47)$$

где K – безразмерная скорость ударной волны, связанная с D уравнением

$$D = \alpha_U(t)K(\xi). \quad (7.48)$$

Безразмерную независимую переменную ξ найдём, как в предыдущих параграфах, составляя комбинации из размерных постоянных ρ_0 и Q_0 и координат r, t . Отметим при этом, что размерности ρ_0 и Q_0 равны следующим выражениям

$$[\rho_0] = ML^{-\nu}, \quad [Q_0] = ML^2T^{-2},$$

где $\nu = 1, 2, 3$ соответственно для плоской, цилиндрической и сферической симметрии. Единственно возможная безразмерная комбинация указанных величин имеет вид

$$\xi = \left(\frac{K_0 \rho_0}{Q_0} \right)^{\frac{1}{\nu+2}} r t^{-\frac{2}{\nu+2}}, \quad (7.49)$$

где K_0 – безразмерная постоянная величина. Из (7.30) и (7.49) следует

$$b = \left(\frac{Q_0}{K_0 \rho_0} \right)^{\frac{1}{\nu+2}}, \quad n = \frac{2}{\nu+2}. \quad (7.50)$$

Выразим из (7.49) координату r

$$r = b \xi t^{\frac{2}{\nu+2}}. \quad (7.51)$$

Будем считать, что на фронте ударной волны $\xi = \xi_1 = \text{const}$. Дифференцируя (7.51) по t при $\xi = \xi_1$, получим скорость ударной волны

$$D = \frac{2}{\nu+2} b \xi_1 t^{-\frac{\nu}{\nu+2}}. \quad (7.52)$$

Приравняв два выражения D (7.48) и (7.52), получим

$$\alpha_U(t)K(\xi) = \frac{2}{\nu+2} b \xi_1 t^{-\frac{\nu}{\nu+2}}. \quad (7.53)$$

Поскольку ξ_1 и $K(\xi_1)$ произвольны, то потребуем, чтобы на ударной волне было $K = 1$, $\xi_1 = 1$. В этом случае из (7.53) получается конкретная зависимость $\alpha_U(t)$

$$\alpha_U(t) = \frac{2}{v+2} bt^{-\frac{v}{v+2}}. \quad (7.54)$$

В соответствии с (7.50) постоянная b содержит постоянную K_0 , которая пока не определена. Получим ω_1 , подставив (7.50) и (7.54) в (7.38)

$$\omega_1 = 1. \quad (7.55)$$

Поскольку на ударной волне $K = 1$, то из (7.47) сразу же определяются

$$\Pi_1 = \frac{2}{\gamma+1}, \quad M_1 = \frac{2}{\gamma+1}, \quad \delta_1 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}. \quad (7.56)$$

Известно, что на фронте бесконечно сильной ударной волны в идеальном газе достигается предельное сжатие

$$\rho_1 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_0. \quad (7.57)$$

Запишем второе уравнение (7.29) на ударной волне в виде

$$\rho_1 = \alpha_p(t) \delta_1. \quad (7.58)$$

Поскольку фон перед ударной волной постоянный и $\rho_0 = 1$, то из (7.56)-(7.58) следует

$$\alpha_p = 1. \quad (7.59)$$

Из (7.42) и (7.59) определяются величины

$$\frac{n\varphi_1}{\omega_1} = 0, \quad K_1 = 1.$$

Показатель автомодельности n не может быть равен нулю, следовательно

$$\varphi_1 = 0. \quad (7.60)$$

Таким образом, все входящие в уравнения (7.35)-(7.37) постоянные величины φ_1 , ω_1 , b , n , кроме K_0 , определены уравнениями (7.50), (7.55), (7.60). Зависимые постоянные φ_2 и φ_3 определяются из (7.43), (7.50), (7.55) и (7.60)

$$\varphi_2 = -0,5v, \quad \varphi_3 = -v. \quad (7.61)$$

После подстановки значений ω_i (7.55), φ_1 (7.60), φ_2 , φ_3 (7.61) уравнения (7.35)-(7.37) упрощаются

$$\xi^v \delta' - (\xi^{v-1} \delta M)' = 0, \quad (7.62)$$

$$0,5v \delta M \xi^{v-1} + \xi^v (\delta M)' - \xi^{v-1} \Pi' - (\xi^{v-1} \delta M^2)' = 0, \quad (7.63)$$

$$\left(\xi^v \left(\frac{\Pi}{\gamma-1} + 0,5 \delta M^2 \right) \right)' - \left(\xi^{v-1} M \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \Pi + 0,5 \delta M^2 \right) \right)' = 0. \quad (7.64)$$

Уравнение (7.64) интегрируется. Постоянную интегрирования определим в точке $\xi = 1$, Π_1 , δ_1 , M_1 . В результате получим первый интеграл системы законов сохранения

$$0,5 \delta M^2 (M - \xi) + \Pi \left(M + \frac{M - \xi}{\gamma - 1} \right) = 0. \quad (7.65)$$

Получим далее ещё один интеграл системы (7.62)-(7.64). С этой целью преобразуем уравнение (7.63) к виду

$$\Pi' + (M - \xi) \delta M' - 0,5v \delta M = 0. \quad (7.66)$$

Продифференцируем (7.65) по ξ и вычтем (7.66), умноженное на M

$$\Pi M' + \frac{((M - \xi) \Pi)'}{\gamma - 1} + 0,5 M^2 (M - \xi) \delta' + 0,5 M^2 \delta (M - \xi)' + 0,5v \delta M^2 = 0. \quad (7.67)$$

В третье, четвертое и пятое слагаемые уравнения (7.67) подставим комбинации функций, образованные из (7.65). В результате получим уравнение

$$\Pi M' + \frac{1}{\gamma - 1} (\Pi (M - \xi))' - \Pi \left(M + \frac{M - \xi}{\gamma - 1} \right) \left(\frac{(M - \xi)'}{M - \xi} + \frac{\delta'}{\delta} + \frac{v}{M - \xi} \right) = 0. \quad (7.68)$$

Преобразуем теперь уравнение (7.62) к виду

$$\frac{(M - \xi)'}{M - \xi} + \frac{\delta'}{\delta} + \frac{v}{M - \xi} = -\frac{v - 1}{\xi}. \quad (7.69)$$

Подставим левую часть этого выражения в последний член (7.68), почленно продифференцируем второй член и разделим полученный результат на $\Pi(M - \xi)$

$$\frac{M'}{M-\xi} + \frac{(v-1)M}{\xi(M-\xi)} + \frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{(M-\xi)'}{M-\xi} + \frac{\Pi'}{\Pi} + \frac{v-1}{\xi} \right) = 0. \quad (7.70)$$

Преобразуем далее (7.69) так, чтобы его левая часть содержала первый и второй члены уравнения (7.70)

$$\frac{M'}{M-\xi} + \frac{v-1}{\xi} \frac{M}{M-\xi} = -\frac{\delta'}{\delta}. \quad (7.71)$$

Вычтем (7.71) из (7.70) и умножим полученное уравнение на $(\gamma-1)$. В результате всех проделанных преобразований получается уравнение

$$\frac{(M-\xi)'}{M-\xi} + \frac{\Pi'}{\Pi} + \frac{v-1}{\xi} - (\gamma-1) \frac{\delta'}{\delta} = 0. \quad (7.72)$$

В результате интегрирования уравнения (7.72) получается зависимость между M , Π и δ

$$\frac{(M-\xi)\Pi\xi^{v-1}}{\delta^{\gamma-1}} = C_2 = \text{const.}$$

Постоянная интегрирования C_2 находится из условий (7.56) на фронте ударной волны при $\xi = 1$

$$C_2 = -\frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^\gamma.$$

Таким образом, второй интеграл системы уравнений (7.62)-(7.64) имеет вид

$$\Pi(M-\xi)\xi^{v-1} + \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^\gamma \delta^{\gamma-1} = 0. \quad (7.73)$$

Уравнение (7.70) содержит производные M' и Π' . Из уравнения (7.66) выразим Π' через M , δ и M' , а из уравнения (7.65) выразим Π через M и δ . Разделив Π' на Π , получим

$$\frac{\Pi'}{\Pi} = \frac{(\gamma M - \xi)((M-\xi)M' - 0,5vM)}{0,5(\gamma-1)M^2(M-\xi)}.$$

Подставив это отношение в (7.70), после несложных преобразований получим обыкновенное дифференциальное уравнение для М

$$M' = -\frac{M}{\xi} \frac{\frac{(\gamma-1)\gamma(v-1)\left(\frac{M}{\xi}\right)^2 - v(2\gamma-1)\left(\frac{M}{\xi}\right) + v}{(\gamma+1)\gamma\left(\frac{M}{\xi}\right)^2 - (\gamma+1)\left(\frac{M}{\xi}\right) + 1}}{\xi}. \quad (7.74)$$

Если сделать подстановку

$$\frac{\gamma+1}{2} \frac{M}{\xi} = F,$$

то уравнение (7.74) приводится к виду

$$\frac{d\xi}{\xi} = \left[-\frac{2}{v+2} \frac{1}{F} - \frac{\beta_1}{F-\alpha_1} + \frac{\beta_2}{F-\alpha_2} \right] dF, \quad (7.75)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{(v+2)(\gamma+1)}{2(\gamma v - v + 2)}, \quad \alpha_2 = \frac{\gamma+1}{2\gamma},$$

$$\beta_1 = \beta_2 + \frac{\gamma+1}{\gamma v - v + 2} - \frac{2}{v+2}, \quad \beta_2 = \frac{\gamma-1}{2\gamma-2+v}.$$

Уравнение (7.75) интегрируется

$$\xi = C_3 F^{-\frac{2}{v+2}} (F - \alpha_1)^{-\beta_1} (F - \alpha_2)^{\beta_2}.$$

Постоянная интегрирования C_3 находится из условий на фронте ударной волны (7.56) при $\xi = 1$

$$C_3 = (1 - \alpha_1)^{\beta_1} (1 - \alpha_2)^{-\beta_2}.$$

Окончательно, для определения зависимости М от ξ получается следующее алгебраическое уравнение

$$\xi^{\frac{(\gamma-1)(v-1)}{\gamma v - v + 2}} \left(\frac{\gamma+1}{2} M \right)^{\frac{2}{v+2}} \left(\frac{(\gamma+1)M - 2\alpha_1 \xi}{2(1-\alpha_1)} \right)^{\beta_1} - \left(\frac{(\gamma+1)M - 2\alpha_2 \xi}{2(1-\alpha_2)} \right)^{\beta_2} = 0.$$

Исключив Π из (7.65) и (7.73), получим уравнение, позволяющее вычислить зависимость $\delta(\xi)$, при условии, что зависимость $M(\xi)$ уже найдена. Зависимость $\Pi(\xi)$ находится либо из (7.65), либо из (7.73). Зависимость безразмерной внутренней энергии J от ξ получается из приведенного уравнения состояния идеального газа

$$\Pi(\xi) = (\gamma - 1)\delta(\xi)J(\xi)$$

по уже найденным $\Pi(\xi)$ и $\delta(\xi)$.

На втором этапе построения аналитического решения нужно перейти от безразмерных величин к размерным с помощью уравнений (7.29). При этом возникает необходимость определить постоянную величину K_0 в (7.52). Поскольку решение самоподобно, то при любом конечном радиусе ударной волны r_1 при $\xi_1 = 1$ распределения $\Pi(\xi)$, $\delta(\xi)$, $M(\xi)$, $J(\xi)$ неизменны. Т.о. заданная энергия Q_0 при $t = 0$ должна иметь такую же структуру, как и в любой конечный момент времени t . Зависящие от времени источники энергии или приток энергии извне в задаче отсутствуют, поэтому энергия Q_0 должна равняться полной энергии газа в области между точкой выделения энергии и фронтом ударной волны

$$Q_0 = \ell_v \int_0^{\xi_1} \left[\frac{\rho U^2}{2} + \frac{P}{\gamma - 1} \right] r^{v-1} dr, \quad (7.76)$$

где $\ell_v = 2(v-1)\pi + (v-2)(v-3)$. При $v = 1$ нужно помнить, что ударная волна распространяется и в положительном, и в отрицательном направлениях.

С помощью соотношений между размерными и безразмерными величинами (7.29) перейдем в (7.76) к интегрированию по ξ

$$Q_0 = \ell_v \alpha_\rho \alpha_U^2 b^v t^{\frac{2v-1}{v+2}} \int_0^1 \left(0,5\delta M^2 + \frac{\Pi}{\gamma - 1} \right) \xi^{v-1} d\xi. \quad (7.77)$$

Подставим сюда выражения для α_p (7.59), $\alpha_U(t)$ (7.53) и b (7.50). В результате этого уравнение (7.77) с учетом того, что было принято $\rho_0 = 1$, дает уравнение для определения постоянной K_0

$$K_0 = \ell_v \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^2 \int_0^1 \xi^{v-1} \left(\frac{\Pi}{\gamma - 1} + 0.5\delta M^2 \right) d\xi.$$

Подставляя сюда зависимости Π , δ , M от ξ и интегрируя численно, определим значение K_0 для фиксированных γ и v . В таблице 7.3 приводится ряд численных значений $K_0(\gamma, v)$.

Таблица 7.3

Зависимость K_0 от γ и v .

$\gamma \backslash v$	1,2	1,3	1,4	1,667
1	2,240	1,468	1,077	0,606
2	2,024	1,331	0,983	0,551
3	1,727	1,167	0,851	0,487

Размерные величины на фронте ударной волны определяются уравнениями (7.29), (7.51), (7.54), (7.56) и (7.59) и имеют вид зависимостей от положения ударной волны r_1

$$P_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{2}{v + 1} \right)^2 \frac{Q_0}{K_0 \rho_0 r_1^v}, \quad (7.76)$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0, \quad U_1 = \frac{4}{(\gamma + 1)(v + 2)} \left(\frac{Q_0}{K_0 \rho_0 r_1^v} \right)^{0.5}, \quad (7.77)$$

$$E_1 = \frac{8}{(\gamma + 1)^2 (v + 2)^2} \frac{Q_0}{K_0 \rho_0 r_1^v},$$

$$D_1 = \frac{2}{v + 2} \left(\frac{Q_0}{K_0 \rho_0 r_1^v} \right)^{0.5}.$$

В заключение определим характер решения в окрестности фронта ударной волны $\xi = 1$. Для этого подставим (7.56) в (7.74) при $\xi = 1$

$$M' = \frac{4\gamma + 3\nu - \gamma\nu}{(\gamma + 1)^2}.$$

Из (7.56), (7.66) и (7.71) при $\xi = 1$ следует

$$\Pi' = \frac{4\gamma^2 + 6\gamma\nu - 4\gamma - 2\nu}{(\gamma + 1)^2(\gamma - 1)}, \quad \delta' = \frac{5\nu + 2\gamma - 2 + \gamma\nu}{(\gamma - 1)^2}.$$

Переходя к размерным величинам, получим из (7.76), (7.77) при $r = r_1$ значения производных P , U и ρ по r при постоянном t на фронте ударной волны

$$\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)_t = \frac{P_1(2\gamma^2 + 3\gamma\nu - 2\gamma - \nu)}{(\gamma^2 - 1)r_1},$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_t = \frac{U_1(4\gamma + 3\nu - \gamma\nu)}{2(\gamma + 1)r_1},$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)_t = \frac{\rho_1(5\nu + 2(\gamma - 1) + \gamma\nu)}{(\gamma - 1)^2 r_1}.$$

Определим коэффициент затухания ударной волны

$$\beta = \frac{d \ln P_1}{d \ln r_1}.$$

Для этого продифференцируем (7.76) по r_1

$$\frac{dP_1}{dr_1} = -\frac{\nu P_1}{r_1}.$$

Следовательно

$$\beta = -\nu.$$

Иными словами, коэффициент затухания ударной волны не зависит ни от энергии взрыва, ни от параметра уравнения состояния γ , а определяется исключительно типом симметрии задачи.

Глава 8. Детонация и горение

§1. Взрывчатые вещества

Взрывчатые вещества (ВВ) – это химические соединения или механические смеси, способные в результате внешних воздействий (удар, нагревание и др.) быстро разлагаться с выделением большого количества энергии. Начальное состояние ВВ может быть твердым, жидким или газообразным. ВВ имеют слабые внутримолекулярные связи и такое количество кислорода в своем составе, которое при определенных условиях обеспечивает их взрывчатое разложение и превращение малоустойчивой молекулярной системы в смесь устойчивых конечных продуктов реакции. В качестве примера возьмем одно из самых мощных ВВ – гексоген. Это кристаллический порошок с плотностью до $1,8 \text{ г/см}^3$ и химическим составом $\text{C}_3\text{H}_6\text{N}_6\text{O}_6$. Он получается путем нитрации уротропина. Энергия образования гексогена, как и любого другого ВВ, затраченная в процессе его приготовления, в ходе химических реакций высвобождается так, что внутренняя энергия компонентов возрастает. В зависимости от роста внутренней энергии часть компонентов разогревается настолько, что переходит в состояние сильно разогретого газа с высоким давлением. Таким образом, теплота реакции или калорийность является одной из важнейших характеристик ВВ.

Если реакция разложения ВВ протекает быстро, то происходит взрыв и в окружающую среду распространяется ударная волна. При малой скорости реакции разложения продукты реакции успевают расшириться до ее окончания. В

таком случае взрыва может и не быть даже при большом количестве выделившейся энергии.

Химическая реакция, как правило, может начинаться в каком-либо месте, а затем распространяться по всему ВВ. Поверхность, разделяющую невозмущенное ВВ от частиц ВВ, вступивших в реакцию, называют фронтом реакции. В зависимости от разных факторов фронт реакции может распространяться с различной скоростью.

Разработка теории взрывного дела началась в 16 веке. Уже в 1552 году при взятии Казани войсками Ивана Грозного были рассчитаны и взорваны подкрепостными стенами четыре заряда от 1 тонны до 6 тонн весом. Основы физики взрыва впервые в истории науки были заложены в работе М.В.Ломоносова, посланной в 1748 г. в Берлинскую Академию наук на конкурс на лучшее объяснение происхождения и состава селитры.

В 1846 г. профессор Н.Н. Зинин и артиллерист В.Ф. Петрушевский начали выпускать в больших количествах нитроглицерин и предложили перейти к его использованию в боевых целях. Случайно с этим работами ознакомился А. Нобель. В 1860 г. В.Ф. Петрушевский изготовил более 2,5 тонн динамита. В период с 1863 г. по 1868 г. в Кронштадте были проведены многочисленные опыты по подрыванию рельсов, брони, скальных пород динамитом Петрушевского. Будучи знаком с работами Н.Н. Зинина, А. Нобель в 1863 г. предложил Главному инженерному управлению России свой сорт динамита. Получив отказ в России, он купил патент в Швеции и в 1865 г. начал строительство заводов по производству динамита в Гамбурге и Стокгольме.

В работе «Сила ВВ на основе термодинамики» (1883 г.) французские химики М. Бертло и П. Вьель впервые сформулировали понятие детонации как установившегося процесса, распространяющегося с постоянной скоростью, характерной для каждого типа ВВ. При этом они опирались на тепловую теорию распространения детонации (зависимость скорости детонации от

теплопроводности и химической кинетики). Основоположником современной гидродинамической теории детонации является русский физик В.А. Михельсон, который в 1889 г. разработал основные положения теории детонации: по ВВ распространяется ударная волна, создающая условия для его быстрого химического разложения. Несколько позднее аналогичные результаты были получены Д.Л. Чепменом (1899 г.) и Э. Жуге (1904 г.), которых принято считать основоположниками термодинамической теории детонации.

По характеру и скорости распространения фронта реакции взрывные процессы можно разделить на детонацию и дефлаграцию (горение). Реакция горения протекает сравнительно медленно, фронт реакции горения распространяется со скоростью порядка нескольких сантиметров в секунду и его распространение определяется теплопроводностью. При горении удельный объем продуктов горения, как правило, больше удельного объема исходного ВВ.

Детонация существенно отличается от горения. Скорость фронта реакции измеряется здесь тысячами метров в секунду и в процессе реакции вещество сжимается. Некоторые характеристики ВВ приведены в таблице 8.1.

Таблица 8.1.

Плотность, калорийность и скорость нормальной детонации ТЭНа и тротила.

Вещество	Плотность ρ (г/см ³)	Калорийность Q (ккал/кг)	Скорость детонации N (км/сек)
Тротил	1,52	1010	6,600
Тэн	1,55	1400	7,800

Рассмотрим простейшую модель поведения ВВ и продуктов его химического разложения – продуктов взрыва (ПВ), в которой они являются сплошной средой без выделения компонентов.

Поскольку уравнения неразрывности и движения не зависят от химических реакций, то они сохраняют вид (2.13) и (2.18). В уравнении же энергии (2.34) появляется дополнительный член, описывающий выделение энергии в процессе

химической реакции. Это уравнение при отсутствии теплопроводности принимает вид

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (8.1)$$

где $\frac{\partial q}{\partial t}$ – скорость выделения удельной энергии. Процессы распада ВВ подчиняются общим закономерностям химической кинетики, одним из основных законов которой является закон действующих масс. Для реакции вида $AB \rightarrow A+B$ этот закон имеет вид

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = K(1 - \xi), \quad (8.2)$$

где ξ – массовая концентрация вещества, разложившегося к данному моменту времени, K – некоторая величина, зависящая от температуры T . Умножив правую и левую части (8.2) на Q , получим

$$\frac{\partial q}{\partial t} = K(Q - q), \quad (8.3)$$

где Q – энергия, выделяющаяся при полном химическом разложении одного грамма вещества. Интегрируя (8.3) при $T = \text{const}$ получим

$$q = Q(1 - e^{-K(t-t_0)}), \quad (8.4)$$

откуда следует, что $q \rightarrow Q$ при $t \rightarrow \infty$. Величина K часто определяется уравнением

$$K = Z e^{-\frac{E_a}{RT}},$$

где E_a – энергия активации ВВ, T – температура, R – газовая постоянная, Z – постоянная величина.

Согласно Аррениусу, в реакцию могут вступать только активные частицы ВВ, энергия которых превосходит энергию активации. В случае реакций более сложных, чем $AB \rightarrow A+B$, закон действующих масс приводит к уравнению более сложному, чем (8.3).

§2. Гидродинамическая теория детонации

Согласно гидродинамической теории, передача детонации вызвана распространением по ВВ ударной волны, достаточно сильной для того, чтобы вызвать интенсивную химическую реакцию. Иными словами, детонационная волна – это ударная волна, на фронте которой происходит химическая реакция. Такой подход позволяет не только качественно объяснить особенности детонации, но и дает возможность вычислить параметры вещества за фронтом детонационной волны.

Если предположить, что вся энергия ВВ выделяется мгновенно на фронте детонационной волны, то условия на фронте принимают вид

$$\left. \begin{aligned} (V - V_-)W &= -(U - U_-), \\ (U - U_-)W &= P - P_-, \\ E - E_- + \frac{1}{2}(P + P_-)(V - V_-) &= Q, \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

где величины без индексов характеризуют состояние за фронтом. Величина Q , стоящая в правой части третьего уравнения (8.5), характеризует изменение внутренней энергии за счет теплоты реакции. Уравнения (8.5) вместе с уравнением состояния описывают в плоскости P, V ударную адиабату детонационной волны – адиабату Жуге. Поскольку внутренняя энергия продуктов детонации на величину Q больше, чем внутренняя энергия ударно сжатого ВВ, то эта адиабата лежит выше, чем адиабата Гюгонио, проведенная из исходного состояния ВВ P_-, V_-, U_-, E_- . Теоретическая адиабата Жуге изображена на Рис. 8.1 линией CBDK. В точке В, лежащей на адиабате Жуге, внутренняя энергия отличается от E_- на величину Q . Теоретической будем называть линию CBDK потому, что не все ее отрезки имеют физический смысл.

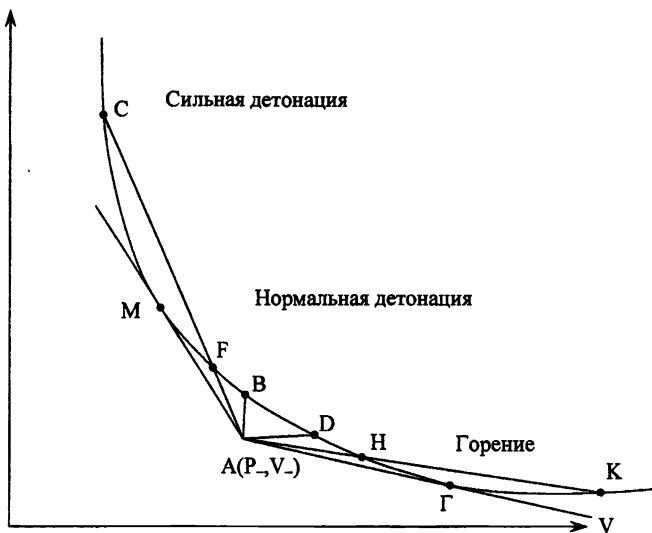


Рис. 8.1. Теоретическая адиабата Жуге. Точка М – режим нормальной детонации, точка Г – режим нормальной детонации с $P_+ > P_M$. Отрезок МС – сильная детонация с $P_+ > P_M$.

Проанализируем свойства адиабаты Жуге. Рассмотрим две производных

$$\Lambda_{\text{ж}} = \left(\frac{dP}{dV} \right)_{\text{ж}}, \quad \Lambda_{\text{с}} = \left(\frac{dP}{dV} \right)_{\text{с}} \quad (8.6)$$

и наклон луча, проведенного из точки $A(P_-, V_-, E_-)$

$$\Lambda_{\Lambda} = \frac{P - P_-}{V - V_-}. \quad (8.7)$$

Из (8.5) следует выражение W^2 через скачки P и V

$$W^2 = - \frac{P - P_-}{V - V_-}. \quad (8.8)$$

Прежде чем приступить к анализу свойств адиабаты Жуге, выпишем уравнения, связывающие Λ_{Λ} , $\Lambda_{\text{с}}$, $\Lambda_{\text{ж}}$. Поскольку $Q = \text{const}$, то из (8.5) по аналогии с (5.42) и (5.43) получим

$$\Lambda_{\text{ж}} - \Lambda_{\text{с}} = 0,5 \left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_V (P - P_- - (V - V_-) \Lambda_{\text{ж}}). \quad (8.9)$$

С помощью (8.7) и (8.8) преобразуем (8.9) к виду, выражающему разность $\Lambda_{\text{ж}} - \Lambda_{\text{с}}$ через разность $\Lambda_{\text{л}} - \Lambda_{\text{ж}}$

$$\Lambda_{\text{ж}} - \Lambda_{\text{с}} = A (\Lambda_{\text{л}} - \Lambda_{\text{ж}}), \quad (8.10)$$

где

$$A = 0,5(V - V_-) \left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_V. \quad (8.11)$$

Поскольку в соответствии с (3.82) $\left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_V > 0$, то $A < 0$ при $V < V_-$. С помощью тождественных преобразований (8.10) выразим разность $\Lambda_{\text{с}} - \Lambda_{\text{л}}$ через разность $\Lambda_{\text{л}} - \Lambda_{\text{ж}}$

$$\Lambda_{\text{л}} - \Lambda_{\text{с}} = (1 + A)(\Lambda_{\text{л}} - \Lambda_{\text{ж}}). \quad (8.12)$$

Относительно знака величины $1 + A$ можно сказать следующее. При $V = V_-$ $A = 0$ и $1 + A > 0$. В малой окрестности V_- знак этой величины не изменяется. Будем рассматривать только такой диапазон изменения V , в котором

$$1 + A > 0. \quad (8.13)$$

Случай нарушения этого неравенства требуют специального анализа.

Анализ теоретической адиабаты Жуге начнем с анализа отрезка, лежащего между точками В и D. Если луч, проведенный из исходного состояния P_- , V_- (точка А) пересекает адиабату Жуге на этом отрезке ($P > P_-$, $V > V_-$), то в соответствии с (8.8) оказывается

$$W^2 < 0.$$

Поскольку скорость перемещения сильного разрыва не может быть мнимой величиной, то состояние продуктов взрыва (ПВ) на отрезке BD противоречит физическому смыслу. Вследствие этого в дальнейшем область BD исключается из рассмотрения.

Перейдем к рассмотрению состояний ПВ, соответствующих верхней ветви адиабаты Жуге ($P > P_B$). Будем менять угол наклона Λ_Λ луча, выходящего из точки А. Из Рис. 8.1 видно, что Λ_Λ принимает минимальное значение при $V = V_B = V_-$, где $\Lambda_\Lambda = -\infty$. Максимальное значение Λ_Λ достигается в точке М, где луч касается адиабаты Жуге. Обозначим это значение через Λ_{LM} . Лучи, проведенные из точки А и удовлетворяющие условиям

$$-\infty < \Lambda_\Lambda < \Lambda_{LM},$$

пересекают теоретическую адиабату Жуге в двух точках С и F так, что $P_C > P_M$ и $P_F < P_M$. При этом, естественно, возникает вопрос, какой из этих двух формально-разрешенных режимов является устойчивым.

В точке В при $V = V_-$ и $P \neq P_-$ уравнение (8.9) принимает вид

$$\Lambda_{Ж} - \Lambda_S = 0,5(P_B - P_-) \left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_V. \quad (8.14)$$

Поскольку $P_B > P_-$ и $\left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_V > 0$ в соответствии с (3.82), то из (8.14) следует неравенство

$$\Lambda_{Ж} > \Lambda_S, \quad (8.15)$$

справедливое при $V = V_B$.

Рассмотрим теперь точку М, в которой луч касается адиабаты Жуге

$$\Lambda_\Lambda = \Lambda_{Ж} \quad \text{при} \quad V = V_M. \quad (8.16)$$

Из (8.10) и (8.12) следует, что при $V = V_M$

$$\Lambda_\Lambda = \Lambda_{Ж} = \Lambda_S. \quad (8.17)$$

Рассмотрим далее точку С. Из Рис. 8.1 видно, что при $V = V_C$

$$\Lambda_{Ж} < \Lambda_\Lambda. \quad (8.18)$$

Поскольку $V_C < V_-$ и $A < 0$, то из (8.10), (8.11) и (8.18) следует, что при $V < V_M$

$$\Lambda_{Ж} < \Lambda_S < \Lambda_\Lambda. \quad (8.19)$$

Введем функцию $F(V) = \Lambda_{Ж} - \Lambda_S$. Качественно ее поведение изображено на Рис. 8.2.

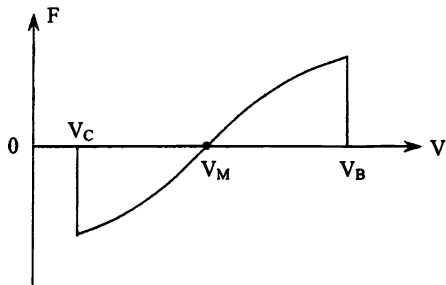


Рис. 8.2. Зависимость разности $F(V) = \Lambda_{\text{ж}} - \Lambda_{\text{с}}$ от удельного объема вдоль теоретической адиабаты Жуге.

В точке $V_{\text{В}}$ $F(V_{\text{В}}) > 0$. Функция $F = 0$ только в точке касания луча и адиабаты Жуге. В точке $V = V_{\text{С}}$ $F(V_{\text{С}}) < 0$. Из сказанного и из (8.10), (8.12) следует, что на участке $V_{\text{М}} < V \leq V_{\text{В}}$

$$\Lambda_{\text{ж}} > \Lambda_{\text{с}} > \Lambda_{\text{л}}. \quad (8.20)$$

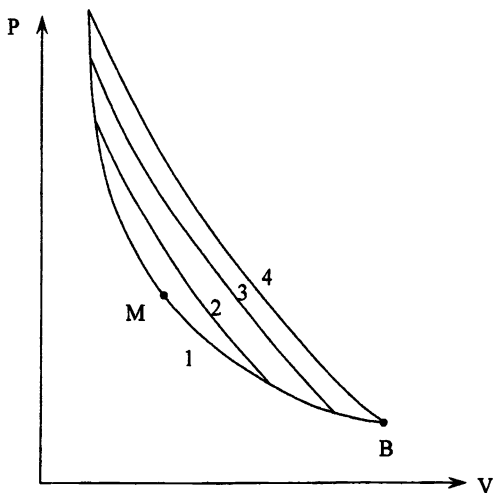


Рис. 8.3. Взаимное расположение теоретической адиабаты Жуге – 1 и изэнтроп – 2, 3, 4 в плоскости P, V .

Таким образом, при уменьшении V изэнтропы выходят из точек адиабаты Жуге, лежащих между точками B и M и входят в адиабату Жуге выше точки M (Рис. 8.3).

Из приведенного рисунка видно, что при уменьшении удельного объема V на участке (V_M, V_B) энтропия на теоретической адиабате Жуге уменьшается, так как она пересекается со все более низкими изэнтропами. Покажем это строго. Вдоль адиабаты Жуге изменение энтропии определяется уравнением

$$\left(\frac{dS}{dV}\right)_Ж = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E + \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V \left(\frac{dE}{dV}\right)_Ж. \quad (8.21)$$

Продифференцировав третье уравнение (8.5) вдоль адиабаты Жуге, получим

$$\left(\frac{dE}{dV}\right)_Ж = \frac{V - V_-}{2} \left(\frac{dP}{dV}\right)_Ж + \frac{P + P_-}{2}. \quad (8.22)$$

С помощью (8.6), (8.7) и (8.22) преобразуем (8.21) к виду

$$\left(\frac{dS}{dV}\right)_Ж = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E - P \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V + \frac{V - V_-}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V (\Lambda_\Lambda - \Lambda_Ж). \quad (8.23)$$

Производную любой функции f , зависящей от V и E вдоль изэнтропы, можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_S = \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_E - P \left(\frac{\partial f}{\partial E}\right)_V.$$

Если $f = S$, то $\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_S = 0$. Таким образом, (8.23) принимает вид

$$\left(\frac{dS}{dV}\right)_Ж = \frac{V - V_-}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V (\Lambda_\Lambda - \Lambda_Ж). \quad (8.24)$$

Поскольку $\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V = \frac{1}{T} > 0$, $V < V_-$ и $\Lambda_\Lambda - \Lambda_Ж < 0$, то из (8.24) следует, что

$$\left(\frac{dS}{dV}\right)_Ж > 0 \quad \text{при} \quad V_M < V \leq V_B. \quad (8.25)$$

Это значит, что энтропия уменьшается при уменьшении удельного объема. Но это противоречит принципу максимума энтропии, так как при увеличении амплитуды сильного разрыва энтропия должна возрастать и не может убывать. Вторым аргументом в подтверждение нефизичности участка BM теоретической адиабаты

Жуге является экспериментальный факт распространения детонационной волны с постоянной скоростью $\pm W_M$. Из (8.6), (8.7) и неравенства (8.20) следует, что $W^2 > a^2$ при $V_M < V \leq V_B$. Это означает, что акустические возмущения не могут догнать фронт детонационной волны, распространяющейся со скоростью $W < W_M$, что противоречит экспериментальной информации. Таким образом, участок адиабаты Жуге $V_M < V \leq V_B$ также следует исключить из рассмотрения.

С постоянной скоростью может распространяться детонационная волна, соответствующая точке М ($P = P_M$, $V = V_M$, $E = E_M$), в которой выполняется условие

$$W^2 = a_M^2. \quad (8.26)$$

Рассмотрим, наконец, область сильной детонации с $P > P_M$ и $V < V_M$. В этой области $F < 0$ и, таким образом,

$$\Lambda_J < \Lambda_S. \quad (8.27)$$

Из (8.10), (8.12) и (8.27) следует, что

$$\Lambda_A > \Lambda_S. \quad (8.28)$$

Последнее неравенство с учетом (8.6)-(8.8) принимает вид

$$W^2 < a^2, \quad (8.29)$$

то есть акустические возмущения догоняют фронт детонационной волны. Она может существовать сколь угодно долго лишь в случае стационарного течения за ее фронтом. Если же за фронтом сильной детонационной волны следует волна разрежения, ее амплитуда с течением времени затухает, и она в конце концов вырождается в нормальную детонационную волну.

Поскольку на сильной детонационной волне $\Lambda_A < \Lambda_{AM}$, то скорость ее распространения больше, чем скорость распространения нормальной детонации

$$W^2 > W_M^2. \quad (8.30)$$

§3. Формулы для расчета параметров нормальной детонационной волны

Система законов сохранения на фронте детонационной волны (8.5) вместе с уравнением состояния продуктов взрыва не является замкнутой, так как число искоемых функций больше числа уравнений. Условие касания луча, адиабаты Жуге и изэнтропы (8.17), записанное в виде

$$W^2 = a^2, \quad (8.31)$$

делает ее замкнутой. При этом предполагается, что состояние перед сильным разрывом P_- , V_- , E_- , U_- задано, задана калорийность ВВ Q и уравнение состояния продуктов взрыва (ПВ).

Рассмотрим случай простейшего уравнения состояния продуктов взрыва

$$P = (n - 1)\rho E. \quad (8.32)$$

Выразим все величины в точке Жуге через Q . Прежде всего исключим $\Delta U = U - U_-$ из первого и второго уравнений (8.5)

$$\Delta P = -W^2 \Delta V, \quad (8.33)$$

где $\Delta P = P - P_-$, $\Delta V = V - V_-$. Подставим в (8.33) выражение W^2 , полученное из (8.31) для УРС (8.32)

$$W^2 = \frac{nP_- + n\Delta P}{V_- + \Delta V}. \quad (8.34)$$

В результате получим

$$(n + 1) \Delta P \Delta V + V_- \Delta P + n P_- \Delta V = 0. \quad (8.35)$$

Выразив E через P и V из (8.32) и подставив в третье уравнение (8.5), получим

$$(n + 1) \Delta V \Delta P + 2n P_- \Delta V + 2V_- \Delta P - 2A = 0, \quad (8.36)$$

где $A = (n - 1)(E_- + Q) - P_- V_-$. Выразим далее ΔP через ΔV из (8.35) и подставим в (8.36). В результате получим уравнение второго порядка относительно ΔV

$$nP_- \Delta V^2 - 2A \Delta V - \frac{2V_- A}{n + 1} = 0. \quad (8.37)$$

Решение уравнения (8.37) имеет вид

$$\Delta V = \frac{1}{nP_-} \left(A - \sqrt{A^2 + \frac{2n}{n+1} P_- V_- A} \right). \quad (8.38)$$

Все величины в точке Жуге выражаются через ΔV следующим образом

$$V = V_- + \Delta V, \quad (8.39)$$

$$P = P_- \frac{V_- + \Delta V}{V_- + (n+1)\Delta V}, \quad (8.40)$$

$$E = \frac{P_- (V_- + \Delta V)^2}{(n-1)(V_- + (n+1)\Delta V)}, \quad (8.41)$$

$$(U - U_-)^2 = \frac{nP_- (\Delta V)^2}{V_- + (n+1)\Delta V}, \quad (8.42)$$

$$W^2 = \frac{nP_-}{V_- + (n+1)\Delta V}. \quad (8.43)$$

В случае, если $P_- = P$ и можно принять, что $P_- = 0$, $E_- = 0$, из (8.37) следует

$$\Delta V = -\frac{V_-}{n+1} \quad (8.44)$$

или

$$V = \frac{n}{n+1} V_-. \quad (8.45)$$

Из (8.36) при $P_- = 0$ и $A = (n-1)Q$ получается выражение для P

$$P = \frac{2(n-1)Q}{V_-}. \quad (8.46)$$

Из (8.44), (8.46) и (8.34) следует выражение для W^2

$$W^2 = \frac{2(n^2-1)Q}{V_-^2}. \quad (8.47)$$

Из первого уравнения (8.5) следует

$$(U - U_-)^2 = \frac{2n(n-1)Q}{n+1}. \quad (8.48)$$

Наконец, из (8.32), (8.45) и (8.46) получается выражение для удельной внутренней энергии в точке Жуге

$$E = \frac{2nQ}{n+1}. \quad (8.49)$$

Следует обратить внимание, что при выводе уравнений (8.38)-(8.49) не потребовалась информация об уравнении состояния ВВ.

В случае сильной детонационной волны выполняется условие (8.29), вследствие чего система уравнений на фронте детонационной волны становится не замкнутой. Все параметры за фронтом сильной детонационной волны приходится вычислять так же, как на фронте ударной волны с внутренней энергией, увеличенной на величину калорийности Q . Для уравнения состояния (8.32) из (8.5) следует зависимость $P(U)$ на фронте сильной детонационной волны в виде

$$P = P_- + \frac{n+1}{4} \rho_- \Delta U^2 + \frac{n-1}{2} \rho_- Q + \sqrt{\left(\frac{n+1}{4} \rho_- \Delta U^2 + \frac{n-1}{2} \rho_- Q\right)^2 + nP_- \rho_- \Delta U^2}. \quad (8.50)$$

Для уравнений состояния более сложных, чем (8.32), зависимости между величинами на фронте детонационной волны получаются численно.

В экспериментах по исследованию детонации ВВ чаще всего измеряется скорость перемещения нормальной детонационной волны

$$\frac{dx}{dt} = D. \quad (8.51)$$

Зависимости всех остальных величин за фронтом нормальной детонационной волны от D получаются точно так же, как и уравнения (8.38)-(8.49), и при $P_- \neq 0$, $E_- \neq 0$ для уравнения состояния (8.32) имеют вид

$$W^2 = \left(\frac{D - U_-}{V_-} \right)^2, \quad (8.52)$$

$$V = \frac{n}{n+1} \left(V_- + \frac{P_-}{W^2} \right), \quad (8.53)$$

$$P = \frac{P_- + W^2 V_-}{n+1}, \quad (8.54)$$

$$Q = \frac{(P_- + W^2 V_-)^2 + P_-^2 (n^2 - 1)}{2(n^2 - 1)W^2} - E_-, \quad (8.55)$$

$$E = \frac{n(P_- + W^2 V_-)^2}{(n+1)(n^2 - 1)W^2}, \quad (8.56)$$

$$U - U_- = \frac{W^2 V_- - nP_-}{(n+1)W}. \quad (8.57)$$

Если в экспериментах одновременно измеряются D и U , то из (8.57) можно найти значение n

$$n = \frac{(D - U_-)(D - U)}{P_- V_- + (D - U_-)(U - U_-)}. \quad (8.58)$$

Если $P_- \approx 0$, $U_- = 0$, то формула для определения n заметно упрощается

$$n = \frac{D - U}{U}. \quad (8.59)$$

§4. Структура фронта нормальной детонационной волны

Гидродинамическая теория детонации основана на предположении, что на сильном разрыве все химические реакции разложения ВВ происходят мгновенно за время $\tau_p = 0$. На самом деле химические реакции протекают за конечное время $\tau_p \neq 0$, и при $\Delta t < \tau_p$ в продуктах взрыва выделится только часть энергии (см. §1). Таким образом, фронт детонационной волны имеет сложную структуру. Рассмотрим структуру фронта нормальной детонационной волны, распространяющейся со скоростью $W_M = \text{const}$. Будем считать, что время ударного сжатия вещества бесконечно мало по сравнению с τ_p . Вначале по ВВ со скоростью W_M распространяется ударная волна, на фронте которой нет химических реакций. Состояние за фронтом этой волны определяется

координатами точки пересечения луча с наклоном $\Lambda_\Lambda = -W_M^2$ с ударной адиабатой ВВ (точка В на Рис. 8.4). За фронтом ударной волны энергия больше энергии активации, поэтому в точке В начинаются реакции химического

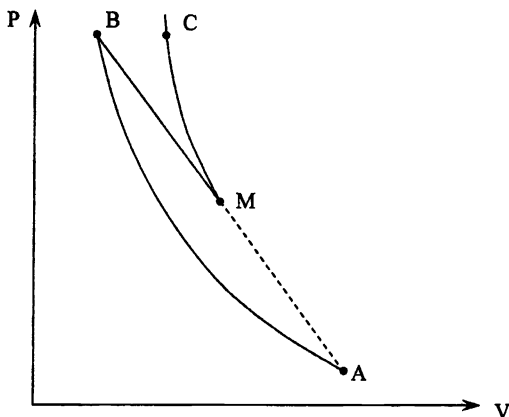


Рис. 8.4. Схематическое изображение ударной адиабаты в ВВ (линия АВ), луча Михельсона (ВМ) и адиабаты Жуге (МС).

разложения ВВ. В этой области между точками В и М на Рис. 8.4 разрывов нет и поведение ВВ-ПВ описывается системой законов сохранения в дифференциальной форме. В случае плоского одномерного течения уравнения возьмем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial m} = 0, \quad (8.60)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial m} = 0, \quad (8.61)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (8.62)$$

где энерговыделение $\frac{\partial q}{\partial t}$ определяется уравнением типа (8.3). Рассмотрим стационарную детонационную волну, распространяющуюся со скоростью $W_M > 0$, перейдем к автомодельной переменной

$$\xi = m - W_M t. \quad (8.63)$$

В результате (8.30)-(8.62) примут вид обыкновенных дифференциальных уравнений

$$W_M V' + U' = 0, \quad (8.64)$$

$$W_M U' - P' = 0, \quad (8.65)$$

$$E' + PV' - q' = 0, \quad (8.66)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по ξ . Исключим U' из (8.64) и (8.65)

$$W_M^2 V' + P' = 0. \quad (8.67)$$

Умножим (8.67) на V и сложим с (8.66). В результате получим уравнение

$$E' + \frac{W_M^2}{2} (V^2)' + (PV)' - q' = 0. \quad (8.68)$$

Проинтегрировав (8.67) и (8.68), получим

$$W_M^2 V + P = C_1, \quad (8.69)$$

$$E + \frac{1}{2} W_M^2 V^2 + PV - q = C_2. \quad (8.70)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдем на ударной волне, распространяющейся по ВВ со скоростью W_M , где все величины принимают значения $P_1, V_1, E_1, q_1 = 0$. Таким образом

$$C_1 = P_1 + W_M^2 V_1, \quad C_2 = E_1 + P_1 V_1 + 0,5 W_M^2 V_1^2. \quad (8.71)$$

Уравнение (8.70) содержит три термодинамических величины P, V , и E . Давление P можно выразить через V с помощью (8.69). Однако, чтобы выразить E через P и V , нужно добавить уравнение состояния. Будем считать, что уравнение состояния продуктов взрыва и сжатого ударной волной исходного ВВ совпадают и имеют вид уравнения состояния идеального газа

$$PV = (n - 1)E. \quad (8.72)$$

Из (8.69), (8.70), и (8.72) получим уравнение, связывающее V и q

$$(n+1)W_M^2 V^2 - 2nC_1 V + 2(n-1)(q+C_2) = 0. \quad (8.73)$$

Его решение имеет вид

$$V = \frac{nC_1 - \sqrt{n^2 C_1^2 - 2(n^2 - 1)W_M^2 (q + C_2)}}{(n+1)W_M^2}. \quad (8.74)$$

Реакции химического разложения ВВ начинаются на фронте ударной волны. Скорость этих реакций определяется величиной q , которая меняется от нуля до Q . При возрастании q подкоренное выражение уменьшается и удельный объем растет. Покажем, что при $q = Q$ V принимает значения V_M . Для этого воспользуемся условиями на фронте ударной волны

$$P_1 = P_0 - W_M^2 (V_1 - V_0), \quad (8.75)$$

$$E_1 = E_0 - P_0 (V_1 - V_0) + 0,5 W_M^2 (V_1 - V_0)^2. \quad (8.76)$$

С помощью (8.75), (8.76) выразим C_1 и C_2 через величины, характеризующие исходное состояние ВВ

$$C_1 = P_0 + W_M^2 V_0, \quad C_2 = E_0 + P_0 V_0 + 0,5 W_M^2 V_0^2.$$

Ограничимся случаем $P_0 \ll P_1$, $E_0 \ll E_1$. Тогда

$$C_1 = W_M^2 V_0, \quad C_2 = 0,5 W_M^2 V_0^2 \quad (8.77)$$

и решение уравнения (8.73) имеет вид

$$V = \frac{n}{n+1} V_0 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{n^2 - 1}{n^2} \left(1 + \frac{2q}{V_0^2 W_M^2} \right)} \right). \quad (8.78)$$

Действительно, из (8.78) при $q = 0$ следует значение V_1 на фронте ударной волны

$$V_1 = \frac{n-1}{n+1} V_0, \text{ а в конце химической реакции при } q = Q \text{ из (8.78) и (8.47) получается}$$

$V = V_M = \frac{n}{n+1} V_0$. Остается построить зависимость V от ξ в зоне горения ВМ на

луче АМВ (Рис.8.4). Для этого достаточно в выражении $q(t)$ перейти к зависимости $q(\xi)$. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial t} = -W_M \frac{d}{d\xi},$$

то зависимость $q(t)$ принимает вид

$$\frac{dq}{d\xi} = -\frac{K}{W_M}(Q-q). \quad (8.79)$$

После интегрирования (8.79) по ξ при условии, что $q = 0$ при $\xi = 0$ (на фронте ударной волны), получаем зависимость $q(\xi)$ в виде

$$q(\xi) = Q \left(1 - e^{-\frac{K}{W_M} \xi} \right). \quad (8.80)$$

Эта зависимость справедлива в области $-\infty < \xi \leq 0$. На ударной волне, где $q = 0$ и

$V = \frac{n-1}{n+1} V_0$, производная $\frac{dq}{d\xi}$ минимальна

$$\left(\frac{dq}{d\xi} \right)_1 = -\frac{K}{W_M} Q. \quad (8.81)$$

Из (8.80) видно, что $q \rightarrow Q$ при $\xi \rightarrow -\infty$ и т.о. точка Жуге, в которой $q = Q$,

$V = \frac{n}{n+1} V_0$ не достигается при конечном ξ . Это значит, что конечный отрезок луча ВМ, на котором происходят химические реакции по закону Аррениуса (8.2), по времени является бесконечным (Рис. 8.5).

Иные, чем (8.2), законы химической кинетики, могут описать полное разложение ВВ за конечный промежуток времени.

Профиль давления $P(\xi)$ в зоне химических реакций типа (8.2) получается из (8.69), (8.77), (8.78) и (8.80) в виде

$$P = \frac{1}{n+1} W_M^2 V_0 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2(n^2-1)q(\xi)}{V_0^2 W_M^2}} \right). \quad (8.82)$$

Зависимость $P(\xi)$ схематически изображена на Рис.8.6.

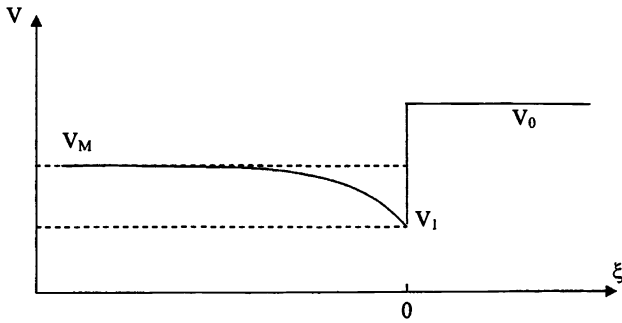


Рис. 8.5. Схематическое изображение профиля $V(\xi)$: $\xi = 0$ – положение ударной волны,

$V_1 = \frac{n-1}{n+1} V_0$, $\xi > 0$ – удельный объем ВВ $V = V_0$, $\xi < 0$ – зависимость $V(\xi)$ в области химических реакций за фронтом ударной волны.

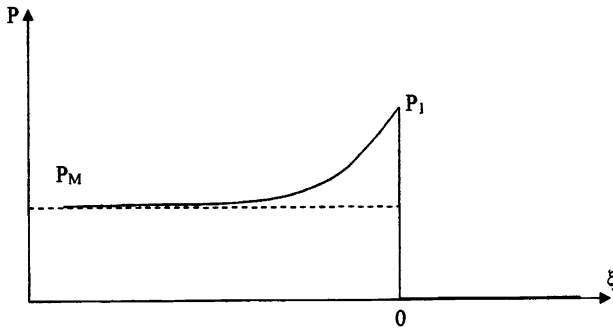


Рис. 8.6. Схематическое изображение профиля $P(\xi)$: $\xi = 0$ – положение ударной волны,

$P_1 = \frac{2}{n+1} W_M^2 V_0$, $\xi > 0$ – начальное давление в ВВ, $\xi < 0$ – зависимость $P(\xi)$ в области химических реакций за фронтом ударной волны.

§5. Гидродинамическая модель горения

Горение определяется нижним участком теоретической адиабаты Жуге (отрезок ДНГК на Рис. 8.1). Поскольку в точке D давление $P_D = P_-$, то удельный объем V находится из уравнения состояния продуктов взрыва и третьего уравнения (8.5) в виде

$$E = E_- - P_-(V_+ - V_-) + Q. \quad (8.83)$$

Если поведение ПВ описывается уравнением состояния типа идеального газа

$$P = (n - 1)\rho E,$$

то значение удельного объема в точке D определяется уравнением

$$V_D = V_- + \frac{(n-1)(E_- + Q) - P_- V_-}{nP_-}.$$

В случае $P_D = P_-$, $V_D > V_-$, $\Lambda_{Ж} < 0$ из (8.9) получим, что в точке D (Рис. 8.1) $\Lambda_{Ж} - \Lambda_S > 0$. В точке касания луча и теоретической адиабаты Жуге (точка Г на Рис. 8.1) выполняется условие $\Lambda_L = \Lambda_{Ж}$. В этом случае из (8.10) следует $\Lambda_{Ж} = \Lambda_S$. Рассмотрим функцию $F(V) = \Lambda_{Ж} - \Lambda_S$. В точке D она положительна, в точке Г равна нулю и при $V > V_{\Gamma}$ отрицательна. Поведение $F(V)$ схематически изображено на Рис. 8.7.

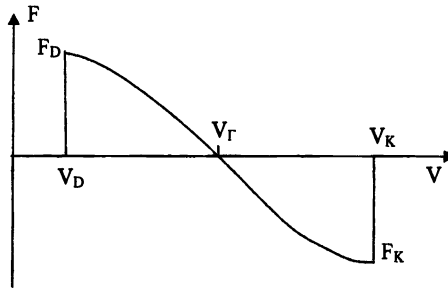


Рис. 8.7. Схематическое изображение функции $F = \Lambda_{Ж} - \Lambda_S$ в области горения.

Из (8.10) следует, что на участке (V_D, V_{Γ}) при $\Lambda_{Ж} - \Lambda_S > 0$ будет $\Lambda_L > \Lambda_{Ж}$, а это означает, что

$$\Lambda_L > \Lambda_{Ж} > \Lambda_S. \quad (8.84)$$

Из (8.24) следует, что при $\Lambda_L - \Lambda_{Ж} > 0$ на участке $V_D < V < V_{\Gamma}$

$$\left(\frac{dS}{dV} \right)_{Ж} > 0.$$

Это означает, что энтропия возрастает при увеличении амплитуды волны горения, что согласуется с принципом максимума энтропии.

Проведя аналогичное рассмотрение для участка ГК теоретической адиабаты Жуге, приходим к выводу, что поведение ПВ на нем противоречит принципу максимума энтропии и его следует исключить из рассмотрения.

§6. Детонация конденсированных ВВ

Современная техника экспериментальных измерений позволяет с хорошей точностью измерить скорость D нормальной детонационной волны и массовую скорость U за ее фронтом. Если предположить, что уравнение состояния ПВ имеет вид (8.32), то по D и U однозначно определяется значение n по формуле (8.59). Однако, такие же измерения в том же ВВ, но с другой начальной плотностью дают значение n , отличное от предыдущего. Кроме того, известно, что если за детонационной волной следует волна разрежения, то в ней вместе с ρ меняется и n . Таким образом, можно считать, что уравнение состояния (8.32) при $n = \text{const}$ справедливо лишь в малой окрестности точки Жуге.

Несколько большую область применимости имеет уравнение состояния ПВ, в котором упругие и тепловые составляющие давления и энергии разделены, то есть кроме теплового давления и энергии учитываются также и потенциальное взаимодействие частиц (молекул, атомов)

$$P = P_y(V) + P_T(V, T). \quad (8.85)$$

Учет потенциального взаимодействия молекул в продуктах взрыва конденсированных ВВ можно обосновать также и тем, что даже в волне разрежения из точки Жуге плотность продуктов взрыва остается выше начальной плотности ВВ. Поэтому достаточно оправданным является предположение, что в упругом (потенциальном) давлении силы отталкивания намного больше сил притяжения, и, таким образом, $P_y(V)$ можно взять в виде

$$P_y = AV^{-n}, \quad (8.86)$$

где $A = \text{const}$. Такой вид упругого давления является достаточно хорошей аппроксимацией физических результатов. Тепловая компонента давления может быть взята в виде

$$P_T = AT/V. \quad (8.87)$$

Решая уравнение для упругих P_y и E_y

$$dE_y + P_y dV = 0,$$

получим

$$E_y = \frac{A}{n-1} V^{1-n}. \quad (8.88)$$

Из (8.86) и (8.88) следует связь P_y и E_y

$$P_y = (n-1)E_y/V. \quad (8.89)$$

Предположив, что тепловая энергия не зависит от V и, таким образом,

$$E_T = bT, \quad (8.90)$$

где $b = \text{const}$, после интегрирования уравнения

$$dE_T + P_T dV = T dS$$

приходим к следующим выражениям

$$\left. \begin{aligned} P_T &= f(S) V^{-\gamma}, & E_T &= \frac{f(S)}{\gamma-1} V^{1-\gamma}, \\ P_T &= \frac{(\gamma-1)E_T}{V}. \end{aligned} \right\} \quad (8.91)$$

Сложим теперь упругие и тепловые компоненты в P и E

$$\left. \begin{aligned} P &= AV^{-n} + f(S) V^{-\gamma}, \\ E &= \frac{A}{n-1} V^{1-n} + \frac{f(S)}{\gamma-1} V^{1-\gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (8.92)$$

Исключив $f(S)$, получим уравнение состояния в виде

$$P = (\gamma-1)\rho E + \frac{n-\gamma}{n-1} A \rho^n, \quad (8.93)$$

где $\rho = 1/V$. Исключив E из (8.93) и из (8.5), получим, в предположении, что $P_- = 0$, $E_- = 0$, ударную адиабату детонационной волны в виде

$$P = \frac{2(\gamma-1)Q + \frac{2(n-\gamma)}{n-1}AV^{1-n}}{(\gamma+1)V - (\gamma-1)V_-}. \quad (8.94)$$

Из (8.94) легко получается выражение для W^2

$$W^2 = \frac{2(\gamma-1)Q + \frac{2(n-\gamma)}{n-1}AV^{1-n}}{((\gamma+1)V - (\gamma-1)V_)(V_- - V)}. \quad (8.95)$$

Постоянные величины A , γ , n определяются по трем экспериментальным точкам следующим образом. В эксперименте измеряются скорость нормальной детонационной волны и скорость за ее фронтом для трех различных начальных плотностей $ВВ$. Зная D , найдем $W = \rho_0 D$, а из уравнения

$$(V - V_-)W = U \quad (8.96)$$

(при $U_- = 0$, $P_- = 0$, $E_- = 0$) найдем V . Подставляя V и W^2 в (8.95) получим одно уравнение с тремя неизвестными A , n , γ . Измеряя экспериментально D и U для другого значения ρ_- , получим еще одно уравнение с тремя неизвестными. Аналогично получается и третье уравнение. Решая полученную систему трех уравнений с тремя неизвестными, найдем численные значения коэффициентов A , n и γ .

Уравнение (8.93) называется уравнением состояния с несогласованными n и γ . Если же n и γ согласованы, то есть $n = \gamma$, то (8.92) и (8.93) принимают вид

$$P = F(S)\rho^n, \quad E = \frac{F(S)}{n-1}\rho^{n-1}, \quad (8.97)$$

$$P = (n-1)\rho E,$$

где $F(S) = A + f(S)$. Все результаты для этого уравнения изложены в предыдущих параграфах. Определяемая с помощью эксперимента величина n для многих конденсированных $ВВ$ оказывается близка к 3.

(при $U_- = 0$, $P_- = 0$, $E_- = 0$) найдем V . Подставляя V и W^2 в (8.95) получим одно уравнение с тремя неизвестными A , n , γ . Измеряя экспериментально D и U для другого значения ρ , получим еще одно уравнение с тремя неизвестными. Аналогично получается и третье уравнение. Решая полученную систему трех уравнений с тремя неизвестными, найдем численные значения коэффициентов A , n и γ .

Уравнение (8.93) называется уравнением состояния с несогласованными n и γ . Если же n и γ согласованы, то есть $n = \gamma$, то (8.92) и (8.93) принимают вид

$$\begin{aligned} P &= F(S)\rho^n, & E &= \frac{F(S)}{n-1}\rho^{n-1}, \\ P &= (n-1)\rho E, \end{aligned} \quad (8.97)$$

где $F(S) = A + f(S)$. Все результаты для этого уравнения изложены в предыдущих параграфах. Определяемая с помощью эксперимента величина n для многих конденсированных ВВ оказывается близка к 3.

§7. Энергия детонатора и иницирование ВВ

Химическая реакция в ВВ начинается лишь при определенных условиях. Такие условия создаются чаще всего с помощью специальных иницирующих устройств-детонаторов. Для иницирования детонации в ВВ детонатор должен обладать некоторой энергией. Энергия может быть кинетической, тепловой или смешанной. Мы не будем рассматривать физическую природу происхождения энергии детонатора. Для определения процессов, возникающих в ВВ после взаимодействия с детонатором, достаточно знать начальное давление P_D и скорость U_D в детонаторе и его уравнение состояния.

Примем следующую модель возникновения детонации в ВВ. После взаимодействия с детонатором в ВВ распространяется ударная волна. Если на фронте этой волны удельная внутренняя энергия E меньше энергии активации ВВ ($E < E_a$), то реакции химического разложения ВВ не начинаются. В этом случае по ВВ будет распространяться ударная волна. Для определения величин на ее фронте

необходимо знание уравнения состояния ВВ. Если же на ударной волне в ВВ станет $E \geq E_a$, то будем считать, что реакции разложения происходят за бесконечно малое время (мгновенно) и в ВВ возникает нормальная или сильная детонационная волна.

В рамках принятой нами модели явления детонации, основным пунктом которой является предположение о мгновенном выделении энергии на фронте детонационной волны, рассмотрим вопрос о величине энергии детонатора, при которой в ВВ возникает детонационная волна. Будем считать, что детонатор и ВВ взаимодействуют вдоль плоской поверхности и все процессы происходят по нормали к этой поверхности, то есть вдоль оси Ox . Поместим контактную границу в начало координат. Пусть ВВ находится в области $x > 0$, а детонатор – в области $x < 0$. Такое их взаимное расположение означает, что в переменных P, U ударная адиабата, адиабата Жуге и изэнтропа разгрузки ПВ имеют положительный наклон, а ударная адиабата и изэнтропа разгрузки детонатора – отрицательный.

Вначале рассмотрим случай инициирования ВВ «горячим» детонатором, когда детонатор неподвижен и в начальный момент времени $t=0$ в нем выделяется энергия E_D , создающая давление P_D (точки D_i на Рис. 8.8). Таким образом, на границе между ВВ и детонатором создается произвольный разрыв, который распадается. Исследуем, как зависит конфигурация разрывов, полученных после распада этого произвольного разрыва, от начального давления P_D . Будем считать, что в ВВ $P_- = 0, E_- = 0, U_- = 0$. В переменных P, U ударная адиабата ВВ на Рис. 8.8 обрывается в точке A , где $E_{ВВ} = E_a$. В случае простейшего уравнения состояния ВВ (5.65), рассматриваемого как идеальное конденсированное вещество, ударная адиабата (5.68) при $P_- = 0, U_- = 0$ принимает вид

$$P = \frac{\gamma + 1}{4} \frac{U^2}{V_-} + \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4} \frac{U^2}{V_-}\right)^2 + \rho_{0k} C_{0k}^2 \frac{U^2}{V_-}}. \quad (8.98)$$

Удельная внутренняя энергия на ударной адиабате ВВ определяется уравнением

$$E = 0,5 U^2. \quad (8.99)$$

В точке А (Рис. 8.8) $E = E_a$. Как только становится $E > E_a$, то на ударной волне мгновенно выделяется энергия и вместо ударной адиабаты ВВ нужно рассматривать адиабату Жуге (линия МС на Рис. 8.8), и не всю адиабату Жуге, а только ту ее часть, которая лежит выше точки Жуге ($P > P_M$) и определяется уравнением

$$P = \left(\frac{n+1}{2} U^2 + (n-1)Q \right) \rho_-. \quad (8.100)$$

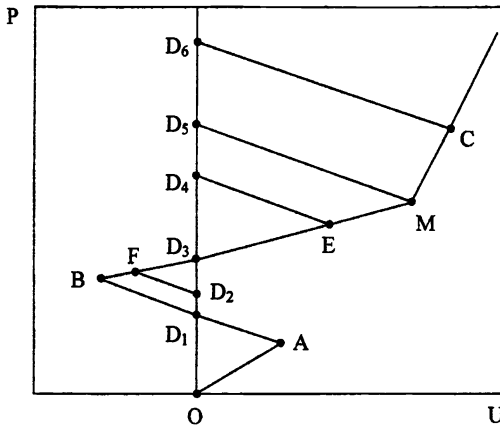


Рис. 8.8. Схематическое изображение ударной адиабаты ВВ (линия ОА), адиабаты Жуге (линия МС), ударной адиабаты детонатора (линия D_2F), изэнтроп разгрузки детонатора (линии D_1A , D_4E , D_3M , D_6C) и изэнтропы разгрузки ПВ (линия MB).

Из сказанного выше следуют возможные конфигурации разрывов:

А. Если $P_D \leq P_{D1}$, то в ВВ будет распространяться ударная волна, а в детонатор – волна разрежения.

Б. В случае, если $P_{D1} < P_D \leq P_{D3}$, то в ВВ будет распространяться нормальная детонационная волна (P_M, U_M), за которой следует волна разрежения (линия $MEFB$). В детонатор пойдет ударная волна (линия D_2F на Рис. 8.8). Скорость контактной границы $U_F < 0$.

В. Если $P_D = P_{D3}$, то параметры детонатора не изменятся ($P_D = P_{D3}$, $U_D = 0$), а в ВВ будет распространяться нормальная детонационная волна (P_M, U_M), за которой будет следовать волна разрежения (M, D_3). Скорость контактной границы останется равной нулю.

Г. Если $P_{D3} < P_D < P_{D5}$, то в детонаторе будет распространяться волна разрежения (изэнтропа разгрузки – линия D_4E), в ВВ – нормальная детонационная волна (P_M, U_M) и волна разрежения (изэнтропа разгрузки ME).

Д. Если $P_D = P_{D5}$, то в детонаторе образуется волна разрежения (изэнтропа разгрузки D_5M), а в ВВ – только нормальная детонационная волна с параметрами P_M, U_M .

Е. Если $P_D > P_{D5}$, то в детонаторе образуется волна разрежения, а в ВВ будет распространяться сильная детонационная волна с параметрами P_C, U_C .

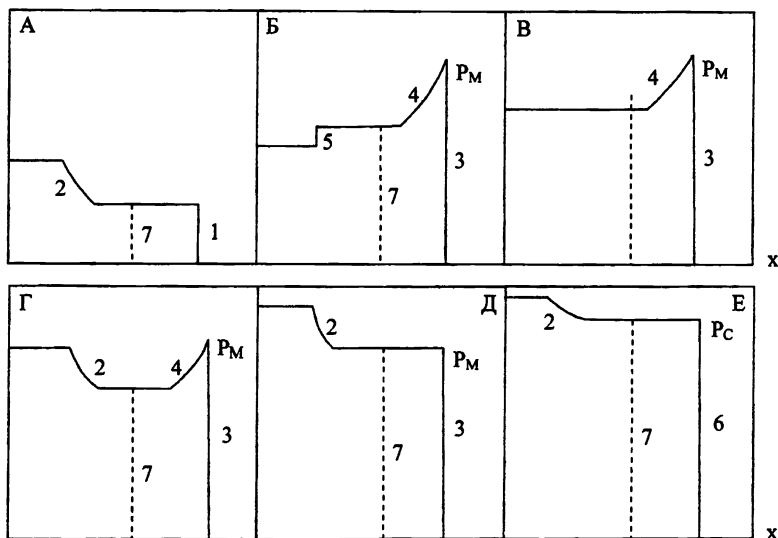


Рис. 8.9. Схематическое изображение профилей $P(x)$, возникающих после инициирования ВВ «горячим» детонатором: 1 – ударная волна в ВВ, 2 – волна разрежения в детонаторе, 3 – нормальная детонационная волна, 4 – волна разрежения в ПВ, 5 – ударная волна в детонаторе, 6 – сильная детонационная волна, 7 – контактная граница.

Профили давления после распада произвольного разрыва схематически изображены на Рис. 8.9.

Рассмотрим второй предельный случай, когда детонация ВВ инициируется «холодным» детонатором. Название «холодный» означает, что энергия детонатора является кинетической. Потенциальная и тепловая составляющие внутренней энергии детонатора равны нулю. Проще всего представить «холодный» детонатор в виде пластинки, движущейся с некоторой скоростью U_D и в момент $t = 0$ ударяющей по поверхности ВВ. Как и в предыдущем случае, будем считать, что ВВ находится справа от плоскости соударения, а детонатор слева. Все возможные типы течения А–D изображены в переменных P,U на Рис. 8.10.

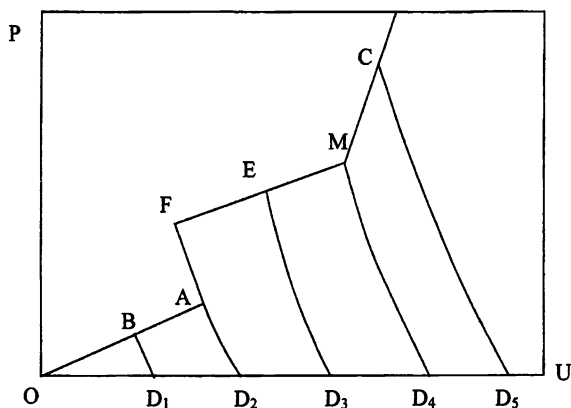


Рис. 8.10. Схематическое изображение в переменных P,U ударной адиабаты ВВ (ОВА), адиабаты Жуге (линия МС), изэнтропы разгрузки ПВ (MF), ударных адиабат «холодного» детонатора (D_1B , D_2F , D_3E , D_4M , D_5C).

А. Если $0 < U_D < U_{D_2}$, то в ВВ распространяется ударная волна (ударная адиабата ОВ), а в детонаторе тоже ударная волна (ударная адиабата D_1B).

По мере увеличения скорости детонатора U_D возрастают давление и энергия на ударной волне в ВВ. В момент, когда станет $E = E_a$, скачком возникает нормальная детонационная волна (адиабата Жуге МС).

Б. Если $U_D = U_{D2}$, то в ВВ распространяется нормальная детонационная волна с параметрами P_M, U_M , за которой следует волна разрежения (изэнтропа разгрузки MF). В детонатор распространяется ударная волна D_2F .

В. Если $U_{D2} < U_D < U_{D4}$, то конфигурация разрывов такая же, как в случае Б, только давление P_E на ударной волне в детонаторе возрастает с ростом U_D от значения P_F до значения P_M .

Г. При $U_D = U_{D4}$ в ВВ распространяется нормальная детонационная волна, а в детонатор – ударная волна. Между фронтами этих волн – течение с постоянными P_M и U_M .

Д. При $U_{D4} < U_D$ в ВВ распространяется сильная детонационная волна (точка С на Рис. 8.10), а в детонатор – ударная волна.

Профили $P(x)$ для описанных выше конфигураций разрывов А–Д изображены на Рис. 8.11.

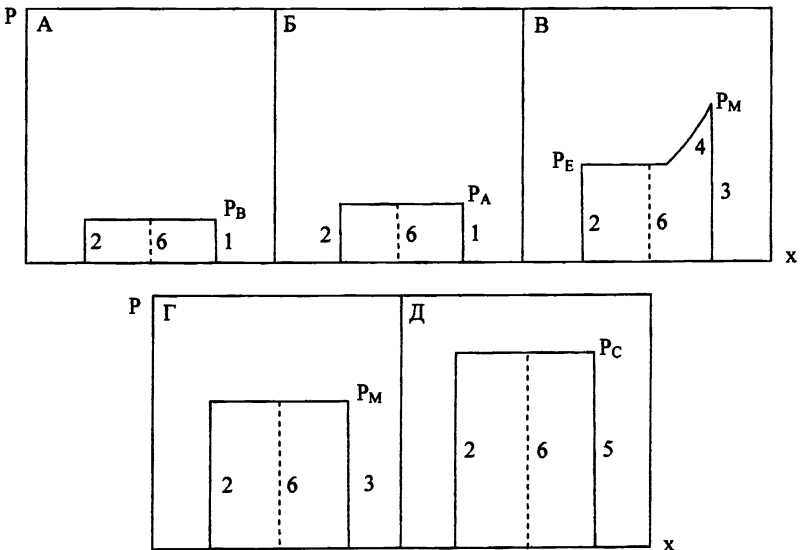


Рис. 8.11. Схематическое изображение профилей $P(x)$ при инициировании ВВ «сколодным» детонатором. 1 – ударная волна в ВВ, 2 – ударная волна в детонаторе, 3 – нормальная детонационная волна, 4 – волна разрежения в ПВ, 5 – сильная детонационная волна, 6 – контактная граница.

В общем случае в детонаторе могут быть отличными от нуля и кинетическая и внутренняя энергия, то есть в плоскости P, U состояние детонатора определится некоторой точкой. Рассмотрим вопрос, при каком состоянии детонатора $ВВ$ не взорвется, то есть по нему пойдет лишь ударная волна, на фронте которой $E < E_a$. Ограничимся рассмотрением состояния детонатора с $U_D \geq 0$. Формально можно рассматривать состояния и с $U_D < 0$, но такие состояния реализовать практически невозможно. Схематически область «безопасных» воздействий на $ВВ$ изображена на Рис. 8.12. Это четырехугольник OD_1AD_2 . Линия OA – ударная адиабата $ВВ$ с начальными значениями $P = 0, U = 0$. В точке A внутренняя энергия равна энергии активации $E = E_a$. Линия D_2A – ударная адиабата в детонаторе, линия D_1A – изэнтропа разгрузки детонатора. Все начальные состояния детонатора, лежащие вне области OD_1AD_2 , приводят к детонации $ВВ$.

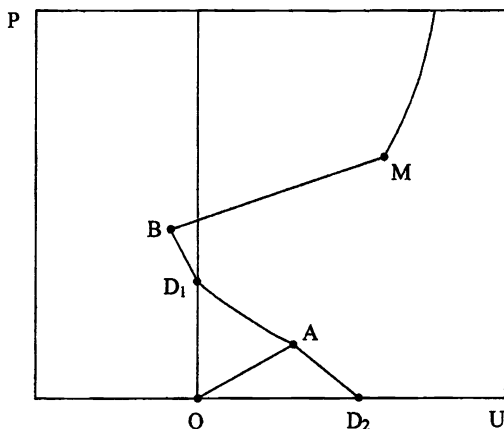


Рис. 8.12. Схематическое изображение области «безопасных» воздействий на $ВВ$.

§8. Движение продуктов взрыва после инициирования ВВ подвижным поршнем

Рассмотренная в §7 задача об иницировании ВВ может быть формализована. Во-первых, вместо детонатора будем задавать скорость U_K границы ВВ. Во-вторых, будем считать, что детонационная волна распространяется по ВВ независимо от значения $U_K = \text{const}$. При этих предположениях отпадает необходимость рассматривать течения типа А и Б, перечисленные в §7. Течения типа Г и Д не будем рассматривать из-за их простоты. Сделанные ограничения определяют верхнюю границу возможных значений $U_K < U_M$, где U_M – скорость за фронтом нормальной детонационной волны. В свете сказанного в §7 об области «безопасных» воздействий на ВВ можно определить и нижнюю границу возможных значений U_K , как скорость в точке пересечения изэнтропы разгрузки ПВ МВ с ударной адиабатой D_2A в детонаторе на Рис. 8.12.

В случае плоской симметрии запишем законы сохранения продуктов взрыва с уравнением состояния (8.32) в характеристической форме и проинтегрируем их. В результате получим, что вдоль характеристики

$$\frac{dx}{dt} = U + C \quad (8.101)$$

сохраняется α инвариант

$$\alpha = U + \frac{2}{n-1} C = \text{const}, \quad (8.102)$$

а вдоль характеристики

$$\frac{dx}{dt} = U - C \quad (8.103)$$

сохраняется β инвариант

$$\beta = U - \frac{2}{n-1} C = \text{const}. \quad (8.104)$$

Фронт детонационной волны при $t=0$ находится в точке $x=0$ и при $t>0$ распространяется с постоянной скоростью D . Все β характеристики начинаются на фронте нормальной детонационной волны, что позволяет найти значение β

$$\beta = U_M - \frac{2}{n-1} C_M. \quad (8.105)$$

Поскольку U_M и C_M постоянны, то, следовательно, для всех характеристик второго семейства β инвариант одинаков.

Перейдем к рассмотрению волны разрежения. Все α характеристики выходят из одной точки $x=0$, $t=0$. Выразим U и C через α и β . Для этого сложим (8.102) и (8.104), а затем вычтем их друг из друга. В результате получим выражения

$$U = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad C = \frac{n-1}{4}(\alpha - \beta). \quad (8.106)$$

Подставим U и C из (8.106) в уравнение α характеристики (8.101) и β характеристики (8.103)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{n+1}{4}\alpha + \frac{3-n}{4}\beta, \quad (8.107)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3-n}{4}\alpha + \frac{n+1}{4}\beta. \quad (8.108)$$

В уравнении (8.107) вдоль α характеристики $\alpha = \text{const}$, а $\beta = \text{const}$ в силу сказанного выше. Это означает, что $\left(\frac{dx}{dt}\right)_\alpha = \text{const}$ и можно проинтегрировать (8.107) при $x_0 = 0$, $t_0 = 0$

$$x = \left(\frac{n+1}{4}\alpha + \frac{3-n}{4}\beta\right)t. \quad (8.109)$$

Поскольку $\beta = \beta_H = \text{const}$ во всей области течения ПВ, то уравнение (8.109) определяет зависимость α от x и t

$$\alpha = \frac{4}{n+1} \left(\frac{x}{t} + \frac{3-n}{4} U_M - \frac{n-3}{2(n-1)} C_M \right). \quad (8.110)$$

Из (8.105), (8.106) и (8.110) следуют зависимости U и C от x и t

$$U = \frac{1}{n+1} \left(\frac{2x}{t} + (n-1)U_M - 2C_M \right), \quad (8.111)$$

$$C = \frac{n-1}{n+1} \left(\frac{x}{t} - U_M + \frac{2}{n-1} C_M \right). \quad (8.112)$$

Из (8.111), (8.112) видно, что при фиксированном t скорость U и скорость звука C линейно зависят от x . Для уравнения состояния (8.32) плотность, давление и удельная внутренняя энергия выражаются через C

$$\rho = \rho_M \left(\frac{C}{C_M} \right)^{\frac{2}{n-1}}, \quad P = P_M \left(\frac{C}{C_M} \right)^{\frac{2n}{n-1}}, \quad E = E_M \left(\frac{C}{C_M} \right)^2. \quad (8.113)$$

Из (8.112) и (8.113) следуют зависимости $P(x,t)$, $\rho(x,t)$, $E(x,t)$

$$P(x,t) = P_M \left(\frac{n-1}{n+1} \left(\frac{x}{C_M t} - \frac{U_M}{C_M} + \frac{2}{n-1} \right) \right)^{\frac{2n}{n-1}}, \quad (8.114)$$

$$\rho(x,t) = \rho_M \left(\frac{n-1}{n+1} \left(\frac{x}{C_M t} - \frac{U_M}{C_M} + \frac{2}{n-1} \right) \right)^{\frac{2}{n-1}}, \quad (8.115)$$

$$E(x,t) = E_M \left(\frac{n-1}{n+1} \left(\frac{x}{C_M t} - \frac{U_M}{C_M} + \frac{2}{n-1} \right) \right)^2. \quad (8.116)$$

В случае, когда перед фронтом детонационной волны $U_- = 0$, $P_- = 0$, $E_- = 0$, скорость U_M и скорость звука C_M для уравнения состояния (8.32) выражаются через скорость детонационной волны D

$$U_M = \frac{1}{n+1} D, \quad C_M = \frac{n}{n+1} D. \quad (8.117)$$

В этом случае выражения (8.111), (8.112), (8.114)-(8.116) упрощаются

$$U = \frac{2}{n+1} \left(\frac{x}{t} - \frac{D}{2} \right), \quad C = \frac{n-1}{n+1} \left(\frac{x}{t} + \frac{D}{n-1} \right), \quad (8.118)$$

$$P(x,t) = \frac{\rho_- D^2}{n+1} \left(\frac{n-1}{n} \frac{x}{Dt} + \frac{1}{n} \right)^{\frac{2n}{n-1}}, \quad (8.119)$$

$$\rho(x,t) = \frac{(n+1)\rho_-}{n} \left(\frac{n-1}{n} \frac{x}{Dt} + \frac{1}{n} \right)^{\frac{2}{n-1}}, \quad (8.120)$$

$$E(x,t) = \frac{nD^2}{(n+1)^2(n-1)} \left(\frac{n-1}{n} \frac{x}{Dt} + \frac{1}{n} \right)^2. \quad (8.121)$$

Рассмотрим структуру течения в случае, когда $U_K = 0$. Из (8.118) получим уравнение линии, на которой $U = 0$

$$x = \frac{1}{2} Dt. \quad (8.122)$$

Значения C , P , ρ и E в области между левой границей и линией (8.122) постоянны. Они определяются из (8.118)-(8.122) и имеют вид

$$C = 0,5D, \quad P = \frac{\rho_- D^2}{n+1} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^{\frac{2n}{n-1}}, \quad \rho = \frac{(n+1)\rho_-}{n} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^{\frac{2}{n-1}}, \quad (8.123)$$

$$E = \frac{nD^2}{(n+1)^2(n-1)} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2. \quad (8.124)$$

Значение скорости в области течения, примыкающей к поршню, равно скорости поршня, то есть $U = 0$.

Рассмотрим еще один предельный случай инициирования ВВ, когда на левой границе давление равно нулю. Экспериментально этот случай реализуется, когда детонация возбуждается излучением. Из (8.118)-(8.121) следует, что при $P = 0$ на свободной границе будет $\rho = 0$, $E = 0$, $C = 0$ и $U = -D$. Между фронтом нормальной детонационной волны и свободной границей все величины определяются уравнениями (8.118)-(8.121).

§9. Уравнение состояния продуктов детонации плотных ВВ

В рассмотренном в §7 уравнении состояния (8.93) продуктов взрыва величины n , γ и A постоянны. В §10 гл.4 было показано, что коэффициент Грюнайзена для ядер $\Gamma = \gamma - 1$ зависит от плотности. Поэтому рассмотрим уравнение состояния продуктов детонации (ПД) в виде

$$P = (\gamma(\rho) - 1)\rho E + \varphi(\rho). \quad (8.125)$$

Физический эксперимент позволяет определить зависимость скорости D нормальной детонационной волны, массовой скорости U за фронтом волны и калорийности $ВВ$ Q от начальной плотности ρ_0 $ВВ$ перед фронтом детонационной волны. Эти зависимости будем использовать для установления вида функций $\gamma(\rho)$ и $\varphi(\rho)$ и определения численных значений входящих в них параметров.

Законы сохранения на фронте нормальной детонационной волны имеют вид (8.5). Если рассматривать ρ_0 как параметр, то система (8.5), (8.26) и (8.125) определяет линию точек Жуге, на которой все термодинамические величины и скорости зависят от ρ_0 . Введем понятие кристаллической или максимально возможной в нормальных условиях плотности $ВВ$ ρ_{0k} и скорости нормальной детонационной волны D_k в $ВВ$ с этой плотностью. Используем ρ_{0k} и D_k для перехода к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} \Delta &= \rho_0 / \rho_{0k}, & \delta &= \rho / \rho_{0k}, & W &= D / D_k, \\ M &= U / D_k, & Z &= c / D_k, & \Pi &= P / \rho_{0k} D_k^2, \\ \Phi &= \varphi / \rho_{0k} D_k^2, & J &= E / D_k^2, & K &= Q / D_k^2. \end{aligned} \quad (8.126)$$

Для простоты будем считать, что в (8.5) $U_0 = 0$, $P_0 = 0$, $E_0 = 0$. После перехода к безразмерным величинам (8.126) уравнения (8.5) примут вид

$$\begin{aligned} \delta &= W\Delta / (W - M), & \Pi &= WM\Delta, \\ J &= 0,5M^2 + K, & W &= M + Z, & Z^2 &= \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \delta} \right)_s. \end{aligned} \quad (8.127)$$

Запишем (8.125) в безразмерных переменных

$$\Pi = (\gamma - 1)\delta J + \Phi. \quad (8.128)$$

Система шести уравнений (8.127), (8.128) содержит девять функций от Δ : Π , δ , J , W , M , K , Z , γ , Φ . Система становится определенной, если любые три из девяти указанных функций от Δ заданы, то есть определены без использования (8.127), (8.128).

Введем показатель адиабатичности N :

$$N = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_s. \quad (8.129)$$

Переходя к безразмерным величинам и воспользовавшись уравнениями (8.5) и (8.127), получим

$$N = Z^2 \delta / \Pi. \quad (8.130)$$

Исключим в (8.127) и (8.130) Z и M

$$\begin{aligned} \delta &= \Delta(N+1)/N, \quad \Pi = W^2 \Delta / (N+1), \\ J &= \frac{W^2}{2(N+1)^2} + K, \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \delta} \right)_s = \left(\frac{WN}{N+1} \right)^2. \end{aligned} \quad (8.131)$$

Найдем выражение для производной $(\partial \Pi / \partial \delta)_s$. Для этого воспользуемся термодинамическим уравнением

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \delta} \right)_s = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \delta} \right)_J + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial J} \right) \left(\frac{\partial J}{\partial \delta} \right)_s. \quad (8.132)$$

Из основного уравнения термодинамики следует, что вдоль изэнтропы выполняется уравнение

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \delta} \right)_s = \frac{\Pi}{\delta^2}. \quad (8.133)$$

Подставим в (8.132) выражения производных

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \delta} \right)_J = \frac{d\Phi}{d\delta} + (\gamma - 1)J + \delta J \frac{d\gamma}{d\delta}, \quad (8.134)$$

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial J} \right)_\delta = (\gamma - 1)\delta \quad (8.135)$$

и исключим $(\partial J / \partial \delta)_s$ с помощью (8.133)

$$\frac{d\Phi}{d\delta} + (\gamma - 1)J + \delta J \frac{d\gamma}{d\delta} + \frac{(\gamma - 1)\Pi}{\delta} - \left(\frac{WN}{N+1} \right)^2 = 0. \quad (8.136)$$

С помощью (8.128) исключим J в (8.136). В результате получим

$$\frac{d\Phi}{d\delta} - \frac{\Phi}{\delta} + \frac{(\gamma - N)\Pi}{\delta} + \frac{(\Pi - \Phi)}{\gamma - 1} \frac{d\gamma}{d\delta} = 0. \quad (8.137)$$

На линии точек Жуге все величины зависят от Δ . Заменяем в (8.137) дифференцирование по δ дифференцированием по Δ . Для этого продифференцируем предварительно δ по Δ :

$$\frac{d\delta}{d\Delta} = \frac{N+1}{N} - \frac{\Delta}{N^2} \frac{dN}{d\Delta}. \quad (8.138)$$

Умножив (8.137) на $d\delta/d\Delta$, получим

$$\frac{d\Phi}{d\Delta} + \left(\frac{(\gamma - N)\Pi}{\delta} - \frac{\Phi}{\delta} \right) \left(\frac{N+1}{N} - \frac{\Delta}{N^2} \frac{dN}{d\Delta} \right) + \frac{(\Pi - \Phi)}{\gamma - 1} \frac{d\gamma}{d\Delta} = 0. \quad (8.139)$$

С помощью (8.128) и (8.131) выразим Φ через Π , δ , N и K :

$$\Phi = \Pi - \frac{(\gamma - 1)\Delta(W^2 + 2K(N+1)^2)}{2N(N+1)}. \quad (8.140)$$

С помощью (8.138) исключим Φ в (8.137). Для того, чтобы исключить и $d\Phi/d\Delta$, поступим следующим образом. Подставим выражение для Π из (8.131) в (8.140) и продифференцируем полученное уравнение по Δ :

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{d\Delta} = & \frac{W^2}{N+1} - \frac{(\gamma - 1)(W^2 + 2K(N+1)^2)}{2N(N+1)} + \frac{W\Delta(2N - \gamma + 1)}{N(N+1)} \frac{dW}{d\Delta} - \\ & - \frac{(\gamma - 1)(N+1)\Delta}{N} \frac{dK}{d\Delta} + \left(\frac{W^2\Delta(\gamma - 1 - N)}{N(N+1)^2} - \frac{(\gamma - 1)K\Delta(2N+1)}{N^2} \right) \frac{dN}{d\Delta} - \\ & - \frac{\Delta(W^2 + 2K(N+1)^2)}{2N(N+1)} \frac{d\gamma}{d\Delta}. \end{aligned} \quad (8.141)$$

Подставив (8.140), (8.141) в (8.139), получим уравнение линии Жуге

$$W\Delta(2N - \gamma + 1) \frac{dW}{d\Delta} - (\gamma - 1)(N+1)^2 \Delta \frac{dK}{d\Delta} + NW^2(\gamma - N) = 0, \quad (8.142)$$

содержащее три функции от Δ ($W(\Delta)$, $K(\Delta)$, $N(\Delta)$), которые могут быть измерены экспериментально. После аппроксимации этих экспериментальных данных

подходящими зависимостями, выражение (8.142) позволяет найти зависимость $\gamma(\Delta)$

$$\gamma = 1 + \frac{2\Delta NW \frac{dW}{d\Delta} - NW^2(N-1)}{W\Delta \frac{dW}{d\Delta} + (N+1)^2 \Delta \frac{dK}{d\Delta} - NW^2}. \quad (8.143)$$

Из (8.143) следует, что между W , N и K имеются некоторые связи. Поскольку $\gamma \geq 1$, то числитель и знаменатель в (8.143) должны обращаться в нуль одновременно. Для многих ВВ экспериментальные данные $W(\Delta)$ с удовлетворительной точностью описываются зависимостью

$$W = \Delta^\alpha, \quad (8.144)$$

где $\alpha \approx 0,7$. Подставив (8.144) в (8.143) и введя обозначение $\omega = \Delta^{1-2\alpha} dK/d\Delta$, получим

$$\gamma = 1 + \frac{N(N-1-2\alpha)}{N-\alpha-\omega(N+1)^2}. \quad (8.145)$$

Введем еще ряд дополнительных ограничений на характер функций $N(\Delta)$ и $\omega(\Delta)$. Потребуем, чтобы $N \rightarrow \gamma \rightarrow \gamma_0 = \text{const}$ при $\Delta \rightarrow 0$. Для малых ρ рассмотрим уравнение состояния (8.125) при $\gamma = \gamma_0$. Представим P и E в виде суммы тепловой и холодной компонент

$$P = P_T(\rho, T) + P_x(\rho), \quad E = E_T(\rho, T) + E_x(\rho). \quad (8.146)$$

Считаем, что

$$P_T = (\gamma_0 - 1) \rho E_T, \quad E_T = c_v T, \quad c_v = \text{const}. \quad (8.147)$$

Используя (8.146) и (8.147), запишем (8.125) в виде

$$PV = (\gamma_0 - 1) c_v T + f(V), \quad (8.148)$$

где

$$f(V) = V\varphi(V) + (\gamma_0 - 1) E_x(V), \quad V = 1/\rho.$$

Будем считать, что ПД представляют собой смесь газов, находящихся в условиях механического и теплового равновесия и подчиняющихся уравнениям состояния

$$PV_i = (\gamma_{0i} - 1) c_{vi} T + f_i(V_i). \quad (8.149)$$

Используя аддитивность V и E в смеси

$$V = \sum_i \eta_i V_i, \quad E = \sum_i \eta_i E_i \quad (8.150)$$

(η_i – массовая концентрация i-го компонента), запишем (8.147)-(8.149) в виде

$$(\gamma_0 - 1)c_v T + f(V) = \sum_i [(\gamma_{0i} - 1)c_{vi} \eta_i T + \eta_i f_i(V_i)], \quad (8.151)$$

$$c_v T + E_x(V) = \sum_i [\eta_i c_{vi} T + \eta_i E_{xi}(V_i)]. \quad (8.152)$$

При $T = 0$ из (8.151), (8.152) следует связь между холодными составляющими уравнения состояния смеси и компонентов

$$f(V) = \sum_i \eta_i f_i(V_i), \quad E_x(V) = \sum_i \eta_i E_{xi}(V_i). \quad (8.153)$$

Из (8.150)-(8.153) следует, что при любом значении T должно быть

$$(\gamma_0 - 1)c_v = \sum_i (\gamma_{0i} - 1)\eta_i c_{vi}, \quad (8.154)$$

$$c_v = \sum_i \eta_i c_{vi}. \quad (8.155)$$

Таким образом, для определения γ_0 смеси нужно знать x_i , γ_i и c_{vi} каждого компонента. Согласно различным теориям, массовые концентрации компонентов ПД различаются. Поэтому мы ограничились рассмотрением усредненных концентраций. При таком подходе

$$\gamma_0 = 1 + \left(\sum_i (\gamma_{0i} - 1)\eta_i c_{vi} \right) / \left(\sum_i \eta_i c_{vi} \right). \quad (8.156)$$

Для тротила $\gamma_0 = 1,373$, что близко к значению $\gamma_0 = 1,378$ для гексогена. Поскольку эта разница лежит в пределах погрешностей, допущенных при осреднении x_i , то возьмем единое для тротила и гексогена значение $\gamma_0 = 1,375$.

В литературе содержится мало данных о калорийности ВВ. Они так же, как и результаты по $N(\Delta)$, имеют заметный разброс. Представим их в безразмерном виде и аппроксимируем едиными для разных ВВ безразмерными зависимостями

от Δ . Из (8.142) и (8.144) следует, что при $\rho \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow 0$ и $N \rightarrow \gamma \rightarrow \gamma_0$ должно быть

$$\omega \rightarrow \omega_0 = \frac{\alpha}{\gamma_0^2 - 1}. \quad (8.157)$$

Далее из условия конечности γ , то есть из условия одновременного обращения в нуль числителя и знаменателя в (8.145), следует, что должно быть

$$\omega = \omega_* = \frac{1}{4(1+\alpha)} \quad \text{при } N = 1 + 2\alpha. \quad (8.158)$$

Кроме того, потребуем, чтобы ω удовлетворяла еще двум условиям при $\Delta = 1$

$$\int_0^1 \Delta^{2\alpha-1} \omega d\Delta = K_k, \quad \omega = 0, \quad (8.159)$$

где K_k – значение безразмерной калорийности ВВ при $\Delta = 1$. Условия (8.159) напрашиваются после анализа экспериментальных данных по калорийности ВВ. Условия (8.157)-(8.159) и уравнения (8.142) существенно ограничивают класс функций, с помощью которых можно аппроксимировать экспериментальные данные о $K(\Delta)$ и $N(\Delta)$.

Уравнение (8.142) решается численно с соблюдением перечисленных выше ограничений на $\omega(\Delta)$ и $\gamma(\Delta)$. При этом используется оптимальная аппроксимация экспериментальных данных о поведении $N(\Delta)$ и $K(\Delta)$. Полученные табличные зависимости аппроксимируются, в свою очередь, функциями

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_\infty & \text{при } x > 1, \\ \gamma_0 + (\gamma_\infty - \gamma_0)x(3 - 3x + x^2) & \text{при } x \leq 1, \end{cases} \quad (8.160)$$

$$\varphi = \begin{cases} \rho_{ок} D_k^2 A(x-1)^m & \text{при } x > 1, \\ 0 & \text{при } x \leq 1, \end{cases} \quad (8.161)$$

где $x = \delta/\delta_*$, $A = 0,0139$, $\gamma_0 = 1,375$, $\gamma_\infty = 1,667$, $\delta_* = 0,35$, $m = 2,284$.

Для окончательного построения уравнения состояния ПД конкретного плотного ВВ нужно определить параметры ρ_{0k} и D_k . Для смесевых ВВ значения ρ_{0k} и D_k выражаются через ρ_{0ki} и D_{ki} с помощью простых уравнений

$$\rho_{0k} = 1 / \left(\sum_i \eta_i / \rho_{0ki} \right), \quad D_k^2 = \sum_i \eta_i D_{ki}^2,$$

где η_i – массовая концентрация компонента. Значения ρ_{0k} и D_k для некоторых ВВ приведены в таблице 8.2. На рисунке 8.13 приведено сравнение функций $W(\Delta)$, $N(\Delta)$ и $K(\Delta)$ с экспериментальными данными.

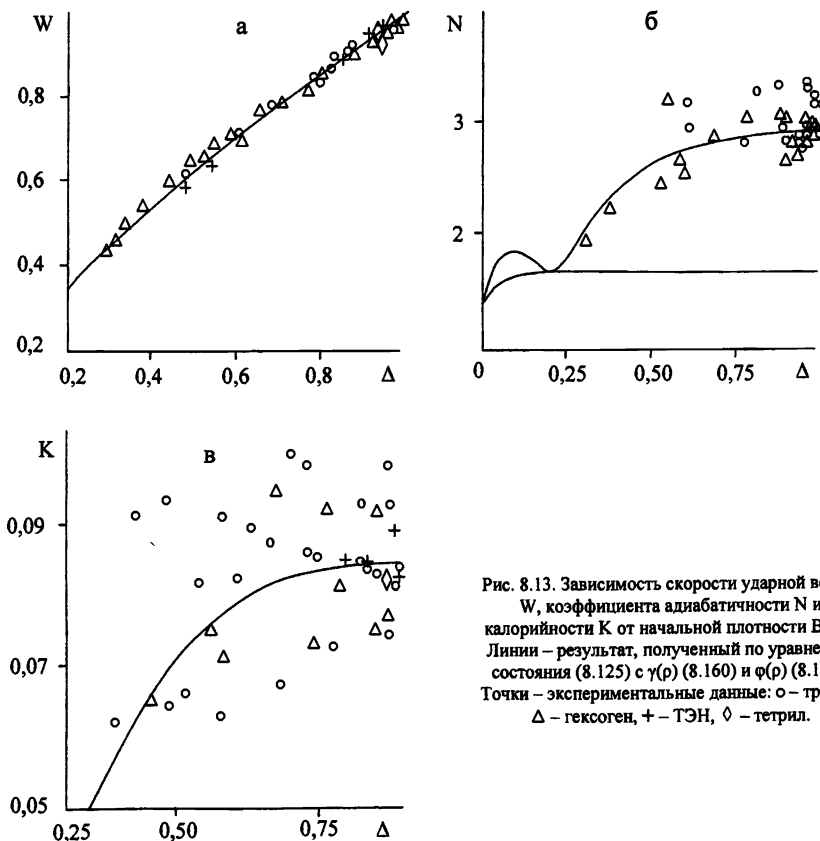


Рис. 8.13. Зависимость скорости ударной волны W , коэффициента адиабатичности N и calorificity K от начальной плотности ВВ Δ . Линии – результат, полученный по уравнению состояния (8.125) с $\gamma(\rho)$ (8.160) и $\phi(\rho)$ (8.161). Точки – экспериментальные данные: \circ – тротил, Δ – гексоген, $+$ – ТЭН, \diamond – тетрил.

Таблица 8.2

ВВ	$\rho_{0к}$, г/см ³	D_k , км/с	ВВ	$\rho_{0к}$, г/см ³	D_k , км/с
Тротил	1,663	7,15	Тэн	1,770	8,35
Тетрил	1,730	7,74	Гексоген	1,820	8,80

Глава 9. Модели многокомпонентных сред

§1. Многокомпонентная среда

Чистых веществ в природе чрезвычайно мало. В основном это многокомпонентные среды. Сплошную среду в малом объеме $d\theta$ называют многокомпонентной, если в этом объеме перемешаны несколько $(N-1)$ веществ. Под такое определение подпадают все известные типы многокомпонентных сред: гомогенные (компоненты перемешаны на молекулярном уровне), гетерогенные (хотя бы один компонент присутствует в виде макрочастиц), коллоидные растворы, которые замещают промежуточное состояние.

Каждый компонент может находиться в одном из известных агрегатных состояний: Т – твердое тело, Ж – жидкость, Г – газ, П – плазма. В смеси возможны комбинации компонентов в любых агрегатных состояниях. Например, в двухкомпонентной смеси возможны следующие типы смесей: Г + Ж – аэрозоль, Г + Т – аэровзвесь, Ж + Г – пузырьковая среда, Ж + Ж – эмульсия, Ж + Т – суспензия, Т + Т – скальные породы, грунты, композиционные материалы, сплавы и т.д. Конкретные агрегатные состояния, в которых находятся компоненты, определяют характер их взаимодействия. Взаимодействие компонентов зависит еще от ряда других характеристик: от размера и формы частиц, взаимных адгезионных свойств, теплоемкости, скорости звука и т.д. Физические процессы, происходящие в многокомпонентной среде, могут привести к изменению агрегатного состояния одного или нескольких компонентов. Это явление называется тиксотропией. При этом изменяется характер взаимодействия

компонентов. В технике встречается настолько большое количество многокомпонентных сред, что дать их полную классификацию очень трудно.

Процессы внутри многокомпонентных сред возникают при любых видах воздействий: механических, тепловых, радиационных, химических, комбинированных. Воздействия приводят к взаимным перемещениям компонентов (перемешиванию или сепарации), к нагреванию и деформациям компонентов, к фазовым переходам и т.о. к смене типа многокомпонентной среды, к химическим реакциям в компонентах.

Если давление P_i (где i -номер компонента), температуры T_i и скорости \bar{U}_i для всех компонентов одинаковы, то смесь называется равновесной. В противном случае многокомпонентная среда неравновесна. Каждый вид неравновесности (механическое при $P_i \neq P_j$, тепловое при $T_i \neq T_j$, кинематическое при $\bar{U}_i \neq \bar{U}_j$) порождает соответствующий релаксационный процесс, приводящий к уменьшению разницы между неравновесными величинами. Времена релаксации τ^U , τ^P , τ^T зависят от свойств взаимодействующих компонентов.

Модели многокомпонентных сред интенсивно развиваются. Это вызвано потребностями очень многих областей человеческой деятельности:

- В энергетике. Моделирование процессов в существующих энергетических установках (тепловые, атомные, гидроэлектростанции), с целью повышения их эффективности и долговечности и создание новых источников энергии (лазерный, газодинамический, магнитный "термояд").
- В добывающей промышленности. Моделирование процессов фильтрации нефти, газа, воды через пористый грунт с целью интенсификации добычи.
- При тушении лесных пожаров. Стволы деревьев, ветки, листва, кустарник, кислород и азот воздуха, вода являются типичными компонентами многокомпонентной среды, по которой распространяется пожар. Моделирование этих процессов может позволить повысить эффективность методов тушения лесных пожаров.

- Выплавка металлов. Моделирование процесса плавки, когда разные компоненты шихты плавятся при разных температурах может повысить чистоту продукта и снизить энергозатраты.
- Горение топлива в рабочих камерах как двигателей внутреннего сгорания, так и в ракетных двигателях.
- Плазма в магнитных полях. Каждый сорт ионов и электроны – это компоненты многокомпонентной среды – плазмы. Каждый компонент имеет свою скорость и по-своему взаимодействует с магнитным полем.
- Взрывы запыленных газов в шахтах.
- Химические технологии разделения или образования новых продуктов.
- Разлет продуктов взрыва. Например, продукты взрыва гексогена состоят из полутора десятка компонентов. Свойства каждого из них определяются индивидуальным уравнением состояния.
- Сепарация, разделение компонентов на центрифугах.
- Нанесение защитных покрытий путем напыления порошков металлов или других веществ двухкомпонентными газовыми струями.
- Эрозия поверхности летательных аппаратов при движении в запыленной атмосфере.
- Движение крови в кровеносных сосудах живых организмов.

Приведенный список является далеко не полным. Но уже из него видно, что потребности в моделях многокомпонентных сред очень велики и их применение может дать существенный эффект.

§2. Механика многоскоростных континуумов

Рассмотрим элемент смеси, имеющий объем $d\theta$ и массу dM . По определению плотность смеси равна

$$\rho = \frac{dM}{d\theta}. \quad (9.1)$$

Смесь в объеме $d\theta$ состоит из компонентов. Каждый из них занимает объем $d\theta_i$ и имеет dM_i . По определению физическая плотность i -го компонента равна

$$\rho_i = \frac{dM_i}{d\theta_i}. \quad (9.2)$$

Объем и масса смеси складываются из объемов и масс компонентов

$$dM = \sum_{i=1}^N dM_i, \quad (9.3)$$

$$d\theta = \sum_{i=1}^N d\theta_i. \quad (9.4)$$

Уравнения (9.3), (9.4) определяют объемную и массовую концентрации i -го компонента

$$\alpha_i = \frac{d\theta_i}{d\theta}, \quad \eta_i = \frac{dM_i}{dM} \quad (9.5)$$

Из (9.3) – (9.5) следует, что

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \quad \sum_{i=1}^N \eta_i = 1. \quad (9.6)$$

Будем считать, что каждый компонент в своем объеме $d\theta_i$ характеризуется физическими величинами P_i – давление, ρ_i – плотность, T_i – температура, E_i – удельная внутренняя энергия, S_i – энтропия, S_{ikl} – компоненты деватора тензора напряжений, \bar{U}_i – скорость и т.д. Термодинамические величины P_i , ρ_i , E_i , T_i , S_i связаны уравнением состояния. В объеме смеси $d\theta$ каждый компонент характеризуется парциальными величинами $\alpha_i P_i$, $\alpha_i \rho_i$, $\eta_i \bar{U}_i$, $\eta_i E_i$ и др., которые получаются из физических величин умножением на α_i или η_i . В соответствии с принятым определением парциальных величин они непрерывны в объеме смеси $d\theta$. Непрерывность парциальных величин позволяет написать для них законы сохранения в частных производных. Такой подход означает, что в каждой точке пространства одновременно находятся все N компонентов.

Получим уравнение, выражающее плотность смеси ρ через парциальные плотности компонентов $\alpha_i \rho_i$. Для этого подставим (9.1) и (9.2) в (9.3). В результате получим

$$\rho d\theta = \sum_{i=1}^N \rho_i d\theta_i. \quad (9.7)$$

После подстановки в (9.7) $d\theta_i$ из (9.5) и сокращения на $d\theta \neq 0$ получаем, что плотность смеси равна сумме парциальных плотностей компонентов

$$\rho = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i. \quad (9.8)$$

Из уравнений (9.1), (9.2) и (9.5) следует уравнение, выражающее парциальную плотность i -го компонента через плотность смеси

$$\alpha_i \rho_i = \rho \eta_i. \quad (9.9)$$

При $t = \text{const}$ кроме законов сохранения масс (9.3) и объемов (9.4) напишем законы сохранения количества движения K и энергии

$$d\bar{K} = \sum_{i=1}^N d\bar{K}_i, \quad (9.10)$$

$$dQ = \sum_{i=1}^N dQ_i. \quad (9.11)$$

По определению

$$d\bar{K} = \bar{U} dM, \quad d\bar{K}_i = \bar{U}_i dM_i. \quad (9.12)$$

Из (9.5), (9.10) и (9.12) следует выражение для скорости смеси

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^N \eta_i \bar{U}_i. \quad (9.13)$$

Скорость смеси, определяемая уравнением (9.13), называется **барицентрической**. Поскольку время t заморожено, то переходы энергии из одного вида в другой отсутствуют. Поэтому уравнение (9.11) можно применить как к удельной внутренней энергии E , так и к удельной полной энергии ϵ

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N \eta_i \varepsilon_i, \quad (9.14)$$

$$E = \sum_{i=1}^N \eta_i E_i. \quad (9.15)$$

Каждый компонент имеет уравнение состояния, а смесь не имеет уравнения состояния. Тем не менее, удельную внутреннюю энергию $E(V, S)$, как и $E_i(V_i, S_i)$, можно рассматривать как термодинамические потенциалы

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S dV + \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V dS, \quad (9.16)$$

$$dE_i = \left(\frac{\partial E_i}{\partial V_i} \right)_{S_i} dV_i + \left(\frac{\partial E_i}{\partial S_i} \right)_{V_i} dS_i. \quad (9.17)$$

По определению

$$P = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S, \quad P_i = - \left(\frac{\partial E_i}{\partial V_i} \right)_{S_i}. \quad (9.18)$$

По аналогии с термодинамикой будем рассматривать изэнтропический процесс при постоянных массовых и объемных концентрациях. Тогда (9.16), (9.17) примут вид

$$dE = -PdV, \quad dE_i = -P_i dV_i. \quad (9.19)$$

Продифференцируем (9.15) при $\eta_i = \text{const}$ и в полученное уравнение подставим (9.19). В результате получим

$$PdV = \sum_{i=1}^N \eta_i P_i dV_i. \quad (9.20)$$

Но при $\eta_i = \text{const}$, $\alpha_i = \text{const}$ из (9.9) следует уравнение

$$\eta_i dV_i = \alpha_i dV. \quad (9.21)$$

Подставив (9.21) в (9.20) и сократив на $dV \neq 0$, получим, что давление смеси равно сумме парциальных давлений компонентов

$$P = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i. \quad (9.22)$$

Это уравнение было получено Дальтоном для смеси идеальных газов, находящихся в тепловом равновесии, и известно, как закон Дальтона.

Далее для простоты изложения будем рассматривать адиабатическое ядро системы законов сохранения i -го компонента с нулевым девиатором тензора напряжений, без теплопроводности, без химических реакций и без воздействия полей излучения. При необходимости физические процессы (вязкость, упругость, пластичность, сухое трение, теплопроводность и др.) добавляются в законы сохранения – уравнения адиабатического ядра.

С учетом сказанного выше, законы сохранения массы, количества движения и энергии i -го компонента запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i) + \nabla(\alpha_i \rho_i \bar{U}_i) = 0, \quad (9.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i \bar{U}_i) + \nabla \alpha_i P_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha_i \rho_i \bar{U}_i U_{ki} + \alpha_i \bar{F}_{ksi}) - \alpha_i \bar{R}_{Si} = 0, \quad (9.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i \varepsilon_i) + \nabla(\alpha_i U_i (P_i + \rho_i \varepsilon_i)) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha_i \bar{F}_{ksi} \bar{U}_i) + \\ + \nabla(\alpha_i \bar{Q}_{Si}) - \alpha_i A_{Si} - \alpha_i \Phi_{Si} = 0, \end{aligned} \quad (9.25)$$

$$\varepsilon_i = E_i + 0,5 \bar{U}_i^2, \quad P_i = P_i(\rho_i, E_i). \quad (9.26)$$

Вектор \bar{R}_{Si} описывает сумму парных обменов количеством движения i -го компонента со всеми остальными компонентами, A_{Si} – работа вектора \bar{R}_{Si} , функция Φ_{Si} описывает сумму парных обменов энергией i -го компонента со всеми остальными компонентами смеси, тензор \bar{F}_{Si} описывает воздействие смеси на i -й компонент в результате кластерного взаимодействия (вектор \bar{F}_{Si} образован элементами k -й строки ($k=1,2,3$) тензора F_{Si}), \bar{Q}_{Si} описывает поток энергии со стороны смеси к i -му компоненту в результате кластерного взаимодействия.

Система уравнений (9.23)–(9.26) не является замкнутой, поскольку к физическим величинам P_i , ρ_i , E_i , ϵ_i , \bar{U}_i добавилась еще объемная концентрация α_i .

§3. Парное взаимодействие компонентов

Предполагается, что два компонента с номерами i и j взаимодействуют друг с другом независимо от остальных компонентов. Интенсивность потока количества движения определяются вектором \bar{R}_{ji} , который, как правило, имеет вид

$$\bar{R}_{ji} = a_{ji}(\bar{U}_j - \bar{U}_i). \quad (9.27)$$

Порядок индексов указывает направление действия. Вектор \bar{R}_{ji} действует со стороны j -го компонента на i -й. Функция a_{ij} удовлетворяет условиям Онзагера $a_{ij} = a_{ji}$. Интенсивность обмена энергией определяется функцией

$$\Phi_{ji} = b_{ij}(P_j - P_i) - c_{ij}(T_j - T_i), \quad (9.28)$$

где b_{ij} , c_{ij} также удовлетворяют условиям взаимности Онзагера

$$b_{ij} = b_{ji}, \quad c_{ij} = c_{ji}. \quad (9.29)$$

Вектор \bar{R}_{ji} и функция Φ_{ji} отличны от нуля только в случае отсутствия равновесия при $\bar{U}_i \neq \bar{U}_j$, $P_i \neq P_j$ или $T_i \neq T_j$. В равновесной смеси $\bar{R}_{ji} = 0$, $\Phi_{ji} = 0$. Следствием условий Онзагера является равенство нулю суммы членов с разным порядком индексов

$$\bar{R}_{ij} + \bar{R}_{ji} = 0, \quad \Phi_{ij} + \Phi_{ji} = 0. \quad (9.30)$$

Условия (9.30) являются важной особенностью парных взаимодействий. Полное действие всех компонентов на i -й компонент получается суммированием по j

$$\bar{R}_{si} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \bar{R}_{ji}, \quad \Phi_{si} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_{ji}. \quad (9.31)$$

Из (9.31) следует еще одно свойство парных взаимодействий

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j \bar{R}_{ji} = 0, \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j \Phi_{ji} = 0. \quad (9.32)$$

Несколько слов следует сказать о выборе функций a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} . Неравновесность по \bar{U} , P и T порождает соответствующий релаксационный процесс. Время релаксации зависит от многих факторов. Так, например, время релаксации скоростей τ_{ij}^U зависит от размеров и формы частиц взаимодействующих компонентов, их адгезионных характеристик, шероховатости частиц и т.д. Функционально τ_{ij}^U зависит от большого числа факторов. Теоретически обосновать эти зависимости трудно. Как правило, для выбора τ_{ij}^U привлекаются результаты экспериментов. Поскольку размерность $\dim a_{ij} = \frac{\rho}{t}$, то с учетом условий Онзагера наиболее простое выражение для a_{ij} можно принять таким

$$a_{ij} = \frac{\rho_i \rho_j (\alpha_i + \alpha_j)}{(\alpha_i \rho_i + \alpha_j \rho_j) \tau_{ij}^U}. \quad (9.33)$$

Аналогичные рассуждения приводят к следующим выражениям для b_{ij} и c_{ij}

$$b_{ij} = \frac{1}{\tau_{ij}^P}, \quad c_{ij} = \frac{\rho_i \rho_j C_{v_i} C_{v_j} (\eta_i + \eta_j) (\alpha_i + \alpha_j)}{(\eta_i C_{v_i} + \eta_j C_{v_j}) (\alpha_i \rho_i + \alpha_j \rho_j) \tau_{ij}^T}, \quad (9.34)$$

где C_v - теплоемкость при постоянном V . Для определения времен релаксации τ_{ij}^P , τ_{ij}^T чаще всего строят изолированную ячейку из компонентов i и j , в которой происходит установление равновесия.

§4. Кластерное взаимодействие

Одновременно с парным взаимодействием в законы сохранения вводятся члены, выражающие кластерное взаимодействие i -го компонента со смесью. Эти члены отличны от нуля только в случае отсутствия равновесия по скоростям. Поскольку скорости компонентов направлены произвольно, то сила их

взаимодействия должна зависеть от ориентации выбранной площадки, т.е. быть тензором. Условия кластерного взаимодействия имеют вид

$$F_S = \sum_{i=1}^N \alpha_i F_{iS} = - \sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{F}_{Si}, \quad (9.35)$$

$$\bar{Q}_S = \sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{Q}_{iS} = - \sum_{i=1}^N \alpha_i Q_{Si}. \quad (9.36)$$

Для ранее введенных характеристик смеси P , ρ , E , \bar{U} , ϵ законы сохранения сплошной среды имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{U}) = 0, \quad (9.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{U}) + \nabla P + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{F}_{ks} + \rho \bar{U} U_k) = 0, \quad (9.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \nabla(\bar{U}(P + \rho \epsilon)) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{U} \bar{F}_{ks}) + \nabla Q_s = 0. \quad (9.39)$$

В рамках принятых ранее гипотез уравнение состояния смеси не существует.

Тензор F_S и поток энергии \bar{Q}_S действуют на смесь со стороны всех компонентов.

Для выбора их функциональной зависимости от остальных функций, входящих в уравнения (9.37)-(9.39), сформулируем два требования:

1. Уравнения (9.37)-(9.39) должны получаться путем суммирования по i соответствующих законов сохранения i -го компонента (9.23)-(9.25).
2. Уравнения (9.23)-(9.25) и (9.37)-(9.39) должны быть инвариантны к преобразованию Галилея.

После выполнения приведенных выше требований получают следующие выражения для \bar{F}_{ksi} и \bar{Q}_{Si}

$$\bar{F}_{ksi} = -0,5\rho_i(\bar{U}_i - \bar{U})(U_{ki} - U_k), \quad (9.40)$$

$$\bar{Q}_{Si} = 0,5\rho_i(\bar{U} - \bar{U}_i)(P_i + \rho E_i). \quad (9.41)$$

§5. Уравнение для объемной концентрации

Из законов сохранения i -го компонента (9.23)-(9.25) с помощью тождественных преобразований получим уравнение для производства энтропии i -го компонента

$$\alpha_i \rho_i T_i \frac{d_i S_i}{dt} - P_i \frac{d_i \alpha_i}{dt} + \alpha_i \left(\bar{R}_{Si} \bar{U}_i - A_{Si} - \Phi_{Si} + \sum_{k=1}^3 \left(\bar{F}_{ksi} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \right) \right) + \nabla \alpha_i \bar{Q}_{Si} = 0. \quad (9.42)$$

Это уравнение содержит субстациональную производную i -го компонента, которая для произвольной функции f имеет вид

$$\frac{d_i f}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \bar{U}_i \nabla f. \quad (9.43)$$

Совершенно аналогично уравнение производства энтропии смеси получим из (9.37)-(9.39) в виде

$$\rho T \frac{dS}{dt} + \frac{\partial \rho H}{\partial t} + \nabla (\rho H \bar{U}) + \sum_{k=1}^3 \left(\bar{F}_{ks} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x_k} \right) + \nabla \bar{Q}_s = 0, \quad (9.44)$$

где

$$\rho H = 0,5 \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i (\bar{U}_i - \bar{U})^2. \quad (9.45)$$

Субстациональная производная вдоль траектории смеси связана с субстациональной производной i -го компонента уравнением

$$\frac{df}{dt} = \frac{d_i f}{dt} + (\bar{U} - \bar{U}_i) \nabla f. \quad (9.46)$$

Потребуем, чтобы производство энтропии смеси было равно суммарному производству энтропии компонентов

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i T_i \frac{dS_i}{dt}. \quad (9.47)$$

Подставив сюда выражения для производства энтропии (9.42) и (9.44) с учетом связи субстациональных производных (9.46) получим уравнение для объемной концентрации

$$P_i \frac{d_i \alpha_i}{dt} - \left(\frac{P_i}{\rho_i} + E_i \right) \nabla (\alpha_i \rho_i (\bar{U} - \bar{U}_i)) + \alpha_i (\Phi_{Si} + A_{Si} - \bar{R}_{Si} \bar{U}) = 0. \quad (9.48)$$

Это уравнение замыкает систему законов сохранения i -го компонента.

Уравнения состояния i -го компонента могут быть сколь угодно сложными.

Их построение подробно изложено в главе 4.

Изложенная в этой главе модель многокомпонентной среды основана на новой кластерной форме взаимодействия компонентов, которая порождает тензор взаимодействий и потоки энергии. Модель позволяет описать едиными уравнениями множество физических процессов в многокомпонентных средах и повысить точность прогнозирования их поведения.

Рекомендованная литература

1. Ландау Л.Д., Станюкович К.П. Об изучении детонации конденсированных ВВ.–Доклады АН СССР, 1945. т. 46.
2. Ломоносов М.В. Dissertatio de generatione et natura nitri. Полное собрание сочинений.–АН СССР, 1948. т. 2.–С. 220-318.
3. Курант Г., Фридрих К.Ф. Сверхзвуковые течения и ударные волны.–М.: Изд-во иностранной литературы, 1950.–426 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред.–М.: Изд-во тех. теор. лит., 1954.–796 с.
5. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике.–М.: Изд-во тех. теор. лит., 1954.–326 с.
6. Кочин Н.Б., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика.–М.: Изд-во тех. теор. лит., ч. 1, 1955.–559 с., ч. 2, 1963.–727 с.
7. Зельдович Я.Б., Компанеец А.С. Теория детонации.–М., 1955.
8. Павлов В.И. Механика. Молекулярная физика.–М.: Изд-во тех. теор. лит., 1955.–355 с.
9. Андреев К.К. Взрыв и взрывчатые вещества.–М.: Воениздат, 1956.
10. Зельдович Я.Б. Теория ударных волн и введение в газодинамику.–М., 1956.
11. Власов О.Е. Основы динамики взрыва.–М., 1957.
12. Баум Ф.А., Станюкович К.П., Шехтер Б.И. Физика взрыва.–М.: Физматгиз, 1959.
13. Киреев В.А. Краткий курс физической химии.–М.: Госхимиздат, 1959.–573 с.
14. Андреев К.К., Беляев А.Ф. Теория взрывчатых веществ.–М., 1960.
15. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести.–М.: Высшая школа, 1961.–512 с.

16. Седов Л.И. Введение в механику сплошных сред.–М.: Физматгиз, 1962.
17. Щелкин К.И., Трошин Я.К. Газодинамика горения.–М.: Изд. АН СССР, 1963.– 255 с.
18. Кикоин И.К., Кикоин А.К. Молекулярная физика.–М.: Физ.-мат.лит., 1963.–498 с.
19. Прагер В. Введение в механику сплошных сред.–М.: Изд-во иностр. лит., 1963.–309 с.
20. Фабрикант Н.Я. Аэродинамика.–М.: Наука, 1964.–814 с.
21. Бенсон С. Основы химической кинетики.–М.: Мир, 1964.–592 с.
22. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости.–М.: Наука, 1965.–202 с.
23. Альтшулер Л.В. Применение ударных волн в физике высших давлений. // УФН.–1965.–т. 85, вып. 2.–С. 197-258.
24. Рахматуллин Х.А., Сагомоян А.Я., Бунимович А.И., Зверев Н.Н. Газовая динамика.–М.: Высшая школа, 1965.–722 с.
25. Цянь Сюэ Сень. Физическая механика.–М.: Мир, 1965.–544 с.
26. Радченко И.В. Молекулярная физика.–М.: Наука, 1965.–479 с.
27. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.–М.: Наука, 1966.–686 с.
28. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности.–М.: Наука, 1966.–231 с.
29. Андреев К.К. Термическое разложение и горение взрывчатых веществ. Изд. 2-е.–М., 1966.
30. Беляев А.Ф. Горение, детонация и работа взрыва конденсированных систем.– М.: Наука, 1968.–255 с.
31. Дейч М.Е., Филиппов Г.А. Газодинамика двухфазных сред.–М.: Энергия, 1968.–423 с.
32. Жарков В.Н., Калинин В.А. Уравнение состояния твердых тел при высоких давлениях и температурах.–М.: Наука, 1968.–310 с.
33. Качанов Л.М.. Основы теории пластичности.–М.: Наука, 1969.–420 с.

34. Похил П.Ф., Мальцев В.М., Зайцев В.М. Методы исследования процессов горения и детонации.–М.: Наука, 1969.–301 с.
35. Лурье А.И. Теория упругости.–М.: Наука, 1970.–932 с.
36. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2.–М.: Наука, 1970.–568 с.
37. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1.–М.: Наука, 1970.–486 с.
38. Станюкович К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды.–М.: Наука, 1971.–850 с.
39. Глушак Б.Л. Куропатенко В.Ф., Новиков С.А. Исследование прочности материалов при динамических нагрузках.–Новосибирск: Наука, 1972.–292 с.
40. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 7-е.–М., 1972.
41. Покровский Г.И. Взрыв.–М.: Недра, 1973.
42. Дерibas А.А. Физика упрочнения и сварки взрывом.–Новосибирск, 1972.
43. Юхансон К., Персон П. Детонация взрывчатых веществ. Пер. с англ.–М., 1973.
44. Дубнов Л.В., Бахаревич Н.С., Романов А.И. Промышленные взрывчатые вещества.–М., 1973.
45. Еремин Е.Н. Основы химической кинетики.–М.: Высшая школа, 1976.–540 с.
46. Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды.–М.: Наука, 1978.–301 с.
47. Иволгин А.И. Созидательные взрывы.–М.: Недра, 1975.–303 с.
48. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред.–М.: Наука, 1978.–336 с.
49. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.–М.: Наука, 1968.–584 с., изд. 2-е. М.: Наука, 1978.–668 с.
50. Яненко Н.Н., Солоухин Р.И., Папырин А.Н., Фомин В.М. Сверхзвуковые течения в условиях скоростной неравновесности частиц.– Новосибирск: Наука, 1980.–160 с.
51. Кутателадзе С.С., Накоряков В.Е. Теплообмен и волны в газо-жидкостных системах.–Новосибирск: Наука, 1984.–301 с.

52. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.–М.: Наука, 1987.–840 с.
53. Работнов Ю.Н.. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988.– 712 с.
54. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика.–М.: Наука, 1988.–733 с.
55. Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортов В.Е. Ударно-волновые явления в конденсированных средах.–М.: Янус– К. 1996.–408 с.
56. Забабахин Е.И., Забабахин И.Е. Явления неограниченной кумуляции.–М.: Наука, 1988.–171 с.
57. Забабахин Е.И. Некоторые вопросы газодинамики взрыва.–Снежинск: изд-во РФЯЦ-ВНИИТФ, 1997.–200 с.
58. Забабахин Е.И. Кумуляция и неустойчивость.–Снежинск: изд-во РФЯЦ-ВНИИТФ, 1998.–110 с.

Научное издание

КУРОПАТЕНКО Валентин Федорович

**МОДЕЛИ МЕХАНИКИ
СПЛОШНЫХ СРЕД**

Редактор Л.В. Попова
Компьютерная верстка Ю.В. Орел

Подписано в печать
Формат 60×84 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 18,9. Уч.-изд. л. 20,8.
Тираж 400 экз. Заказ *994 008*
Цена договорная

Издательство ООО «Геотур»
Челябинская обл., г. Миасс, ул. Жуковского, 7 - 56
Лицензия № 063431 от 25.08.1999

Отпечатано на полиграфической базе
ФГУП «ГРЦ "КБ им. академика В.П. Макеева"»
456300 Челябинская обл., г. Миасс, Тургоякское шоссе, 1