Дальневосточный математический журнал. 2001. Том 2. № 2.

УДК 519.63
MSC 2000 76L05

© В.Ф. Куропатенко*

Методы расчета ударных волн

Проведен сравнительный анализ известных методов расчета ударных волн. Исследованы диссипативные свойства, дистракция и монотонность разностных схем, предложенных авторами методов. Показано место этих методов при переходе от лагранжевых координат к эйлеровым. Обсуждаются приемы подавления осцилляций.

Введение

Законы сохранения массы, количества движения и энергии, записанные в виде системы дифференциальных уравнений с частными производными, в случае идеальной среды без теплопроводности после соответствующих преобразований приводят к следствию, согласно которому энтропия сохраняется вдоль траектории частицы.

Законы сохранения на поверхности сильного разрыва имеют вид алгебраических уравнений, из которых следует, что на ударной волне энтропия возрастает. В этом заключается одно из принципиальных различий между ударной волной и непрерывным решением.

Ограничимся рассмотрением методов расчета ударных волн, в которых сильный разрыв заменяется слоем конечной ширины, сравнимой с размером сеточной ячейки (дистракция). Поскольку состояние за разрывом связано с состоянием перед разрывом ударной адиабатой, то в области дистракции сильного разрыва должен действовать механизм, обеспечивающий возрастание энтропии. Принципиально отличающихся друг от друга механизмов диссипации энергии в области дистракции известно всего четыре [1–4]. Рассмотрим четыре метода расчета ударных волн — по количеству механизмов диссипации энергии. Разностных схем, реализующих эти методы, много. Ограничимся рассмотрением только тех разностных схем, которые были предложены авторами методов расчета ударных волн [1–4]. Первая попытка сравнительного анализа этих методов была предпринята Б.Л. Рождественским и Н.Н. Яненко в [5]. Авторы подробно рассмотрели вопросы аппроксимации и устойчивости. В данной работе для каждого метода находится уравнение диссипации энергии, определяется дистракция разрывов и исследуются условия монотонности.

1. Метод Неймана-Рихтмайера

Главная идея метода Неймана-Рихтмайера [1] заключается во введении в дифференциальные уравнения движения и энергии искусственной вязкости, обеспечивающей диссипацию энергии и дистракцию сильного разрыва до величины, сравнимой с размером нескольких сеточных ячеек.

В [1] предложена конкретная форма псевдовязкости

* Российский Федеральный ядерный центр – ВНИИ Технической физики, 456770 Снежинск, Челябинская область, Россия, п.я. 245. Электронная почта: V.F.Kuropatenko@vniitf.ru

$$q = -\frac{C^2 \Delta x_0^2}{V} \frac{\partial U}{\partial x_0} \left| \frac{\partial U}{\partial x_0} \right| \tag{1}$$

и конкретная разностная схема, несколько измененная в [6]. Идея введения псевдовязкости может быть реализована в виде различных разностных схем. Выражение для псевдовязкости также может быть разным [7], [8]. Разностные схемы могут быть явными или неявными. Но если в уравнения вводится псевдовязкость, то все такие разностные схемы являются реализацией метода Неймана-Рихтмайера.

В разностной схеме, предложенной Нейманом и Рихтмайером в [1], термодинамические величины определяются в серединах сеточных интервалов по m, скорости и координаты — в узлах сеточных ячеек. Разностные уравнения из [6] имеют вид:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \frac{P_{i+0,5}^n + q_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n - q_{i-0,5}^n}{h} = 0,$$

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \tau U_i^{n+1}, \quad V_{i+0,5}^{n+1} = \frac{x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1}}{h}, \quad h = \frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{V_{i+0,5}^n},$$

$$q_{i+0,5}^{n+1} = \begin{cases} \dfrac{k}{V_{i+0,5}^{n+1}} \left(U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}\right)^2 & \text{при} \quad U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1} < 0, \\ 0 \quad \text{при} \quad U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1} \geqslant 0, \end{cases}$$

$$E_{i+0,5}^{n+1} - E_{i+0,5}^n + \left(\frac{P_{i+0,5}^{n+1} + P_{i+0,5}^n}{2} + q_{i+0,5}^{n+1} \right) \left(V_{i+0,5}^{n+1} - V_{i+0,5}^n \right) = 0, \tag{2}$$

$$P_{i+0,5}^{n+1} = P\left(V_{i+0,5}^{n+1}, E_{i+0,5}^{n+1}\right). \tag{3}$$

Уравнение энергии (2) и уравнение состояния УРС (3) образуют систему нелинейных уравнений относительно P^{n+1}, E^{n+1}.

Метод условно устойчив. Соотношение шагов по времени и по пространству $\varkappa = a\tau/h$ зависит от эмпирической константы k и реальное условие устойчивости имеет согласно [6], вид

$$\varkappa \leq 0,25.$$

В [1] предложен метод исследования дистракции разрыва. Для этого в дифференциальные законы сохранения аддитивно с P вводится "псевдовязкость" q (1) и делается переход к автомодельной переменной

$$\xi = m - Wt,$$

в результате чего эти уравнения принимают вид

$$WV' + U' = 0, \tag{4}$$

$$WU' - (P + q)' = 0, \tag{5}$$

$$E' + (P + q)V' = 0, \tag{6}$$

где штрих означает дифференцирование по ξ.

Для идеального газа

$$PV = (\gamma - 1)E \tag{7}$$

и конкретного выражения для q

$$q = \frac{k^2 h^2 W^2}{V} \left(V'\right)^2 \tag{8}$$

система уравнений (4)–(8) сводится к одному уравнению для определения V

$$2k^2h^2\left(\frac{dV}{d\xi}\right)^2+(\gamma+1)\left(V-V_0\right)^2+2V_0\left(V-V_0\right)=0. \tag{9}$$

Решение (9) имеет вид

$$\xi=\pm kh\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}\arcsin\left(\gamma-(\gamma+1)\frac{V}{V_0}\right).$$

При $V=V_0$, $\xi=\xi_0=\frac{3kh\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$, при $V=V_1$, соответственно $\xi=\xi_1=-kh\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}\arcsin\left(\gamma-(\gamma+1)\frac{V_1}{V_0}\right)$. На бесконечно сильной ударной волне с $P_0=0$ достигается предельное сжатие $V_1=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}V_0$. В этом случае $\xi_1=-\frac{kh\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$. Т.о. ширина ударного слоя $\Delta\xi$ и дистракция D сильной ударной волны в методе Неймана-Рихтмайера равны

$$\Delta\xi=\xi_0-\xi_1=2kh\pi\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}},\qquad D_{HP}=\frac{\Delta\xi}{h}=2k\pi\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}.$$

Для определения эффективной дистракции $D_{HP}^{Э}$ находится расстояние между точками пересечения прямой линии $V(\xi)$, имеющей максимальный наклон

$$V_M'(\xi)=\frac{V_0}{kh\sqrt{2(\gamma+1)}},$$

со значениями V_0 и V_1

$$\Delta\xi=\frac{V_0-V_1}{V_M'}. \tag{10}$$

Подставив сюда V_M' и значение минимального удельного объема

$$V_1=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}V_0,$$

получим после деления на h

$$D_{HP}^{Э}=2k\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}.$$

Согласно [9] в разностных схемах с независимой ω_7 уравнение производства энтропии имеет вид

$$T\frac{\partial S}{\partial t}=\omega_7.$$

Представив все величины, входящие в (2), в виде рядов Тейлора в точке $m_{i+0.5}$, t^{n+1}, найдем ω_7, после чего уравнение производства энтропии примет вид

$$T\frac{\partial S}{\partial t}=-\left(\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^2P}{\partial V^2}\right)_S+\frac{kh^2}{V}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^3+O\left(\tau^3,h^3\right).$$

Т.о. скорость диссипации энергии зависит от эмпирической постоянной k.

2. Метод Лакса

Идея, лежащая в основе предложенного Лаксом [2] метода расчета ударных волн, заключается в том, чтобы необходимая диссипация энергии обеспечивалась главными членами погрешностей аппроксимации. Позднее этот метод стали называть методом аппроксимационной вязкости.

Разностные уравнения получаются после интегрирования законов сохранения по контуру сеточной ячейки и применения теоремы о среднем в виде

$$\frac{V_{i+0,5}^{n+1}-V_{i+0,5}^{n}}{\tau}-\frac{U_{i+1}^{*}-U_{i}^{*}}{h}=0, \tag{11}$$

$$\frac{U_{i+0,5}^{n+1}-U_{i+0,5}^{n}}{\tau}+\frac{P_{i+1}^{*}-P_{i}^{*}}{h}=0, \tag{12}$$

$$\frac{\varepsilon_{i+0,5}^{n+1}-\varepsilon_{i+0,5}^{n}}{\tau}+\frac{(PU)_{i+1}^{*}-(PU)_{i}^{*}}{h}=0, \tag{13}$$

$$E_{i+0,5}^{n+1}=\varepsilon_{i+0,5}^{n+1}-0,5\left(U_{i+0,5}^{n+1}\right)^{2}, \tag{14}$$

где сеточные значения искомых функций $V_{i+0.5}^n$, $P_{i+0.5}^n$, $U_{i+0.5}^n$, $E_{i+0.5}^n$, $\varepsilon_{i+0.5}^n$ определены в серединах сеточных интервалов по m в моменты времени t^n, а величины P_i^*, U_i^*, $(PU)_i^*$, играющие вспомогательную роль, определены в серединах шагов τ по времени на гранях сеточных ячеек с координатами m_i.

Вообще говоря, уравнения (11)–(14) являются общими до тех пор, пока не конкретизированы уравнения для определения вспомогательных величин U_i^*, P_i^*, $(PU)_i^*$. В [2] предложена разностная схема, в которой вспомогательные величины U_i^*, P_i^* и на ударных волнах, и на непрерывных решениях определяются уравнениями

$$U_{i}^{*}=\frac{1}{2}\left(U_{i+0,5}^{n}+U_{i-0,5}^{n}\right)+\frac{h}{2\tau}\left(V_{i+0,5}^{n}-V_{i-0,5}^{n}\right), \tag{15}$$

$$P_{i}^{*}=\frac{1}{2}\left(P_{i+0,5}^{n}+P_{i-0,5}^{n}\right)-\frac{h}{2\tau}\left(U_{i+0,5}^{n}-U_{i-0,5}^{n}\right), \tag{16}$$

$$(PU)_{i}^{*}=\frac{1}{2}\left((PU)_{i+0,5}^{n}+(PU)_{i-0,5}^{n}\right)-\frac{h}{2\tau}\left(\varepsilon_{i+0,5}^{n}-\varepsilon_{i-0,5}^{n}\right). \tag{17}$$

Разностные уравнения (11)–(13) вместе с уравнениями для вспомогательных величин (15)–(17) аппроксимируют дифференциальные законы сохранения с погрешностями аппроксимации

$$\omega_{1}=-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^{2}V}{\partial t^{2}}\tau+\frac{1}{2}\,\frac{\partial^{2}V}{\partial m^{2}}\frac{h^{2}}{\tau}+O\left(\tau^{2},h^{2}\right), \tag{18}$$

$$\omega_{2}=-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^{2}U}{\partial t^{2}}\tau+\frac{1}{2}\,\frac{\partial^{2}U}{\partial m^{2}}\frac{h^{2}}{\tau}+O\left(\tau^{2},h^{2}\right), \tag{19}$$

$$\omega_{3}=-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^{2}\varepsilon}{\partial t^{2}}\tau+\frac{1}{2}\,\frac{\partial^{2}\varepsilon}{\partial m^{2}}\frac{h^{2}}{\tau}+O\left(\tau^{2},h^{2}\right). \tag{20}$$

При $h\to 0$ и $\tau=const$ соответствующие слагаемые в уравнениях (18)–(20) стремятся к нулю. Однако, с τ дело обстоит сложнее. При $\tau\to 0$ члены, пропорциональные $\frac{h^2}{\tau}$ в (18)–(20), стремятся к 0 лишь в том случае, если $\lim\limits_{\substack{\tau\to 0\\ h\to 0}}\frac{h^2}{\tau}=0$. Если это условие не выполнено, то сходимость уравнений (11)–(13) к исходным дифференциальным уравнениям отсутствует, т.к. уменьшение τ при постоянном h приводит к увеличению погрешности. Согласно [9] уравнение производства энтропии для разностных схем с независимыми ω_1, ω_2, ω_3, имеет вид

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \omega_3 - U\omega_2 + P\omega_1. \tag{21}$$

Подставим (18)–(20) в (21) и с помощью дифференциальных уравнений заменим в (21) вторые производные по t производными по m. Предполагая еще, что $\frac{\partial S}{\partial m} \approx 0$, получим уравнение производства энтропии в виде

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{h}{2a}\frac{\left(1-\varkappa^2\right)}{\varkappa}\left(a^2\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2\right) + \ldots$$

При $\varkappa = \frac{\tau a}{h} \to 0$ скорость производства энтропии стремится к бесконечности. Т.о. разностная схема Лакса, согласно [8], является сильно диссипативной.

Рассмотрим дистракцию стационарного разрыва в методе Лакса. Для этого запишем разностные уравнения (11)–(13) в дифференциальной форме с погрешностями аппроксимации (18)–(20) и перейдем к переменной $\xi = m - Wt$. В результате получим

$$\begin{gathered}
WV' + U' + \frac{h^2}{2\tau}\left(1-\varkappa^2\right)V'' + O\left(\tau^2, h^2\right) = 0,\\
WU' - P' + \frac{h^2}{2\tau}\left(1-\varkappa^2\right)U'' + O\left(\tau^2, h^2\right) = 0,\\
W\varepsilon' - (PU)' + \frac{h^2}{2\tau}\left(1-\varkappa^2\right)\varepsilon'' + O\left(\tau^2, h^2\right) = 0.
\end{gathered}$$

Проинтегрируем эти уравнения по ξ. Постоянные интегрирования найдем при $\xi = +\infty$, где $U = U_0$, $V = V_0$, $P = P_0$, $E = E_0$, $\varepsilon = \frac{1}{2}U_0^2 + E_0$, $V' = 0$, $U' = 0$, $P' = 0$, $\varepsilon' = 0$. В результате получим

$$\begin{gathered}
WV + U + AV' - WV_0 - U_0 + O\left(\tau^2, h^2\right) = 0,\\
WU - WU_0 - P + P_0 + AU' + O\left(\tau^2, h^2\right) = 0,\\
W\varepsilon - W\varepsilon_0 - PU + A\varepsilon' + P_0U_0 + O\left(\tau^2, h^2\right) = 0,
\end{gathered} \tag{22}$$

где $A = \frac{h^2}{2\tau}\left(1-\varkappa^2\right)$. Подставим в (22) уравнение состояния идеального газа. Затем все величины выразим через V, а производные через V'. В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение, определяющее профиль $V(\xi)$

$$\frac{4AV}{W(\gamma+1)}\frac{dV}{d\xi} + \frac{(V_0 - V)(V - V_1)}{V} = O\left(\tau^2, h^2\right), \tag{23}$$

где

$$V_1 = V_0\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(\frac{a_0}{W}\right)^2\right).$$

Решение этого уравнения после отбрасывания членов второго порядка малости имеет вид

$$\xi = \frac{2h^2\left(1-\varkappa^2\right)}{\tau W(\gamma+1)(V_0 - V_1)}\left(V_1\ln(V - V_1) - V_0\ln(V_0 - V)\right). \tag{24}$$

Из (24) следует, что $\xi = \xi_0 = +\infty$ при $V = V_0$ и $\xi = \xi_1 = -\infty$ при $V = V_1$. Таким образом, дистракция сильного разрыва в методе Лакса бесконечна

$$D_{\text{Л}} = \infty.$$

Для определения эффективной дистракции продифференцируем (23) и найдем V_M и максимальное значение V'_M, которые достигаются при $V'' = 0$

$$V_M = \sqrt{V_0 V}, \quad V'_M = \frac{(\gamma + 1)\varkappa}{2h\left(1 - \varkappa^2\right)}\left(\sqrt{V_0} - \sqrt{V_1}\right)^2. \tag{25}$$

Из (23) и (10) получим

$$D_{\text{Л}}^{\text{Э}} = \frac{2\left(1 - \varkappa^2\right)}{(\gamma + 1)\varkappa}\left(\frac{\sqrt{V_0} + \sqrt{V_1}}{\sqrt{V_0} - \sqrt{V_1}}\right). \tag{26}$$

Из (26) видно, что эффективное значение $D_{\text{Л}}^{\text{Э}} \to 0$ при $\varkappa \to 1$, и $D_{\text{Л}}^{\text{Э}} \to \infty$ при $\varkappa \to 0$ или $V_1 \to V_0$.

Наконец определим, монотонна ли разностная схема Лакса. Для этого от P и U перейдем к инвариантам

$$\alpha = P + aU, \qquad \beta = P - aU.$$

Выразим P и U через α и β

$$P = 0,5\left(\alpha + \beta\right), \ \mathrm{U} = 0,5\left(\alpha - \beta\right)/a. \tag{27}$$

Для вещества с УРС

$$P = a^2\left(V_0 - V\right) \tag{28}$$

заменим V через P в уравнении (11). В результате получим

$$P_{i+0.5}^{n+1} = 0,5\left(P_{i+1.5}^{n} + P_{i-0.5}^{n}\right) - 0,5\frac{\tau a^2}{h}\left(U_{i+1.5}^{n} - U_{i-0.5}^{n}\right). \tag{29}$$

Подставив (27) в (29) и (12), получим

$$\begin{aligned} \alpha_{i+0.5}^{n+1} + \beta_{i+0.5}^{n+1} = {} & 0,5\cdot\alpha_{i-0.5}^{n}\left(1 + \varkappa\right) + 0,5\cdot\alpha_{i+1.5}^{n}\left(1 - \varkappa\right) + \\ & + 0,5\cdot\beta_{i-0.5}^{n}\left(1 - \varkappa\right) + 0,5\cdot\beta_{i+1.5}^{n}\left(1 + \varkappa\right), \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{i+0.5}^{n+1} - \beta_{i+0.5}^{n+1} = {} & 0,5\cdot\alpha_{i-0.5}^{n}\left(1 + \varkappa\right) + 0,5\cdot\alpha_{i+1.5}^{n}\left(1 - \varkappa\right) + \\ & + 0,5\cdot\beta_{i-0.5}^{n}\left(1 - \varkappa\right) - 0,5\cdot\beta_{i+1.5}^{n}\left(1 + \varkappa\right). \end{aligned} \tag{31}$$

Сложим (30) и (31), а затем вычтем (31) из (30)

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{i+0.5}^{n+1} &= 0,5\left(1 - \varkappa\right)\alpha_{i+1.5}^{n} + 0,5\left(1 + \varkappa\right)\alpha_{i-0.5}^{n}, \\ \beta_{i+0.5}^{n+1} &= 0,5\left(1 + \varkappa\right)\beta_{i+1.5}^{n} + 0,5\left(1 - \varkappa\right)\beta_{i-0.5}^{n}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Из (32) следует, что при $0 \le \varkappa \le 1$ все коэффициенты перед значениями инвариантов в правых частях неотрицательны и т.о. разностная схема Лакса, согласно теореме С.К. Годунова, монотонна.

3. Метод Годунова

В методе Годунова все величины, характеризующие поведение среды под действием нагрузок, определяются в серединах сеточных интервалов по m. Координаты x_i определяются в узлах сетки. Разностные уравнения имеют вид (11)–(13). Вспомогательные значения P_i^*, U_i^* определяются следующим образом. Все табличные функции в момент t^n предполагаются кусочно-постоянными. Следовательно, в узлах сетки возникают произвольные разрывы. При $t > t^n$ они распадаются. Значения давления и скорости на контактном разрыве принимаются в качестве вспомогательных величин. Если произвольный разрыв таков, что вправо от x_i распространяется ударная волна, а влево волна разрежения, то уравнения для величин на контактном разрыве имеют вид

$$P_i^* + a_{i-0.5}^n U_i^* = P_{i-0.5}^n + a_{i-0.5}^n U_{i-0.5}^n,$$
$$P_i^* - W_{i+0.5} U_i^* = P_{i+0.5}^n - W_{i+0.5} U_{i+0.5}^n.$$

В общем случае $W_{i+0.5}$ зависит от P_i^* и U_i^*, поскольку задача о распаде произвольного разрыва является нелинейной. Однако, в случае слабой ударной волны при $W_{i+0.5} = a + O(h)$, $a_{i-0.5} = a + O(h)$ выражения P_i^*, U_i^* принимают вид

$$P_i^* = 0,5(P_{i+0.5}^n + P_{i-0.5}^n) - 0,5a(U_{i+0.5}^n - U_{i-0.5}^n) \tag{33}$$
$$U_i^* = 0,5(U_{i+0.5}^n + U_{i-0.5}^n) - 0,5(P_{i+0.5}^n - P_{i-0.5}^n)/a. \tag{34}$$

Запишем разностные уравнения (11)–(13), (33), (34) в дифференциальной форме. Погрешности аппроксимации ω_1, ω_2, ω_3, имеют вид

$$\omega_1 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{h}{2a}\frac{\partial^2 P}{\partial m^2} + O\left(\tau^2, h^2\right),$$
$$\omega_2 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{ah}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial m^2} + O\left(\tau^2, h^2\right),$$
$$\omega_3 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \frac{ah}{2}U\frac{\partial^2 U}{\partial m^2} + \frac{ah}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial m}\right)^2 + \frac{h}{2a}\left(\frac{\partial P}{\partial m}\right)^2 + \frac{h}{2a}P\frac{\partial^2 P}{\partial m^2} + O\left(\tau^2, h^2\right).$$

Поскольку ω_1, ω_2, ω_3, являются независимыми, то согласно [9], правая часть уравнения производства энтропии имеет вид (21). Подставим ω_1, ω_2,ω_3, в (21). Затем с помощью дифференциальных законов сохранения и производных от них заменим производные по t производными по m. В результате получим уравнение производства энтропии

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{h}{2W}(1-\varkappa)\left(\left(\frac{\partial P}{\partial m}\right)^2 + W^2\left(\frac{\partial U}{\partial m}\right)^2\right) + O\left(\tau^2, h^2\right).$$

Следовательно рассмотренная разностная схема, являющаяся акустическим приближением к схеме Годунова, сильно диссипативна. Поскольку главный член в правой части этого уравнения неотрицателен, то энтропия растет и на ударных волнах и на волнах разрежения. Скорость роста энтропии ограничена и достигает максимума при $\varkappa = 0$

$$T\frac{\partial S}{\partial t} < \frac{h}{2W}\left(\left(\frac{\partial P}{\partial m}\right)^2 + W^2\left(\frac{\partial U}{\partial m}\right)^2\right).$$

Исследуем дистракцию ударной волны в разностной схеме Годунова. Для этого перейдем к автомодельной переменной $\xi = m - Wt$ и запишем разностные уравнения в дифференциальной форме

$$WV' + U' - \frac{\tau W^2}{2}V'' - \frac{h}{2W}P'' + O\left(\tau^2, h^2\right) = 0,$$
$$WU' - P' - \frac{\tau W^2}{2}U'' + \frac{hW}{2}U'' + O\left(\tau^2, h^2\right) = 0,$$
$$W\varepsilon' - (PU)' - \frac{\tau W^2}{2}\varepsilon'' + \frac{hW}{2}\left(UU'\right)' + \frac{h}{2W}\left(PP'\right)' + O\left(\tau^2, h^2\right) = 0.$$

Проинтегрировав эти уравнения по ξ и исключив P, U, ε, P', U', ε', получим для идеального газа уравнение для $V(\xi)$

$$\frac{2h(1-\varkappa)}{(\gamma+1)} \cdot \frac{dV}{d\xi} + \frac{(V - V_0)(V - V_1)}{V} + O\left(\tau^2, h^2\right) = 0, \tag{35}$$

решение которого имеет вид

$$\xi = \frac{2h\,(1-\varkappa)}{(\gamma+1)\,(V_0-V_1)}\,(V_1\ln(V-V_1) - V_0\ln(V_0-V))\,.$$

Из этого уравнения следует, что

$$\begin{aligned}\xi = \xi_0 = +\infty \text{ при } V = V_0,\\ \xi = \xi_1 = -\infty \text{ при } V = V_1.\end{aligned}$$

Таким образом, дистракция разрыва в методе Годунова при $\varkappa<1$ бесконечна

$$D_\Gamma = \infty,$$

а при $\varkappa = 1$ дистракция $D_\Gamma = 0$.

Эффективное значение дистракции получается таким же образом, как в методе Лакса, и имеет вид

$$D_\Gamma^\text{Э} = \frac{2}{(\gamma+1)}\,(1-\varkappa)\left(\frac{\sqrt{V_0}+\sqrt{V_1}}{\sqrt{V_0}-\sqrt{V_1}}\right).$$

Для определения немонотонности разностной схемы Годунова перейдем к инвариантам. Выразим P и U через α и β и для уравнения состояния (28) заменим V на P в уравнении (11). В результате при $a = W$ получим

$$\alpha_{i+0.5}^{n+1} + \beta_{i+0.5}^{n+1} = \alpha_{i+0.5}^{n} + \beta_{i+0.5}^{n} + \varkappa\left(\beta_{i+1.5}^{n} - \alpha_{i+0.5}^{n} - \beta_{i+0.5}^{n} + \alpha_{i-0.5}^{n}\right), \tag{36}$$

$$\alpha_{i+0.5}^{n+1} - \beta_{i+0.5}^{n+1} = \alpha_{i+0.5}^{n} - \beta_{i+0.5}^{n} + \varkappa\left(-\beta_{i+1.5}^{n} - \alpha_{i+0.5}^{n} + \beta_{i+0.5}^{n} + \alpha_{i-0.5}^{n}\right). \tag{37}$$

Сложив (36) и (37), а затем отняв (37) от (36), получим уравнения для α и β инвариантов

$$\begin{aligned}\alpha_{i+0.5}^{n+1} = \alpha_{i+0.5}^{n}(1-\varkappa) + \alpha_{i-0.5}^{n}\varkappa,\\ \beta_{i+0.5}^{n+1} = \beta_{i+0.5}^{n}(1-\varkappa) + \beta_{i-0.5}^{n}\varkappa.\end{aligned}$$

При $0 \le \varkappa \le 1$ все множители при значениях α и β неотрицательны и согласно теореме Годунова разностная схема, являющаяся акустическим вариантом схемы Годунова, монотонна.

4. Метод Куропатенко [4]

Все сеточные интервалы (основные и вспомогательные) относятся к одному из двух типов в зависимости от решения: сжатие или разрежение.

Диссипация энергии происходит только в сжимающемся интервале. Основная идея метода заключается в том, что для описания роста энтропии используется тот же механизм, что и на ударных волнах. С этой целью вспомогательные величины находятся из системы законов сохранения на поверхности сильного разрыва.

$$P_1 - P_0 - W(U_1 - U_0) = 0, \tag{38}$$

$$U_1 - U_0 + W(V_1 - V_0) = 0, \tag{39}$$

$$P_1U_1 - P_0U_0 - W(E_1 - E_0) - \frac{W}{2}(U_1^2 - U_0^2) = 0. \tag{40}$$

Состояние перед разрывом (P_0, V_0, E_0, U_0) отождествляется с решением в сеточном интервале в момент t^n, а в качестве величины за разрывом берется одна из сеточных величин либо на границе интервала, либо в соседнем интервале. После этого из (38)–(40) и уравнения состояния находятся остальные величины за разрывом. Они и выбираются в качестве вспомогательных. Так например, если задать U_1 [4], то из (38)–(40) находятся P_1, V_1, E_1, W, если же задать P_1 [10], [11], [12], то находятся V_1, E_1, U_1, W.

Метод допускает реализацию на разных сетках [4], [9], [10], [11], [12], [13], [14]. Рассмотрим две разностные схемы, реализующие этот метод.

4.1. Недивергентная разностная схема.

Принятые в [4] сетки для скорости и для термодинамических величин различаются. Значения P, V, E определяются в серединах сеточных интервалов по массе, значения скорости — в узлах сетки t^n, m_i.

На волнах сжатия разностные уравнения имеют вид

$$\frac{U_i^{n+1}-U_i^n}{\tau}+\frac{\overline{P}^n_{i+0.5}-\overline{P}^n_{i-0.5}}{h}=0, \tag{41}$$

$$x_i^{n+1}=x_i^n+\tau U_i^{n+1}, \tag{42}$$

$$V^{n+1}_{i+0,5}=\frac{x^{n+1}_{i+1}-x^{n+1}_i}{h}, \qquad h=\frac{x^n_{i+1}-x^n_i}{V^n_{i+0,5}}, \tag{43}$$

$$E^{n+1}_{i+0.5}-E^n_{i+0.5}+0,5\left(\overline{P}^{n+1}_{i+0.5}+\overline{P}^n_{i+0.5}\right)\left(V^{n+1}_{i+0.5}-V^n_{i+0.5}\right)=0. \tag{44}$$

Динамическое давление $\overline{P}$ является решением уравнений на сильном разрыве. В качестве величин перед сильным разрывом берутся величины в сеточном интервале в момент t^n

$$V_0=V^n_{i+0,5},\quad P_0=P^n_{i+0,5},\quad E_0=E^n_{i+0,5},$$

а в качестве скачка скорости берется разность сеточных значений U в момент t^{n+1}

$$\Delta U=|U_1-U_0|=\left|U^{n+1}_{i+1}-U^{n+1}_i\right|.$$

Подставив эти значения в уравнения на сильном разрыве, получим

$$\overline{P}^{n+1}_{i+0.5}=P^n_{i+0.5}-W\left(U^{n+1}_{i+1}-U^{n+1}_i\right), \tag{45}$$

где W зависит от P_0, V_0 , E_0 и ΔU.

Для простейшего уравнения состояния конденсированного вещества

$$P=(\gamma-1)\rho E+C^2_{0k}(\rho-\rho_{0k})$$

уравнение (45) принимает вид

$$\bar{P}^{n+1}_{i+0,5}=P^n_{i+0,5}+b\Delta U^2+\sqrt{(b\Delta U^2)^2+\left(a^n_{i+0,5}\right)^2\Delta U^2}, \tag{46}$$

где $b=\frac{\gamma+1}{4}\rho^n_{i+0,5}$. Уравнение (46) имеет две асимптотики [10]:
1. Ударная волна слабая, $b\Delta U\ll a^n_{i+0.5}$. В этом случае выражение для динамического давления линейно зависит от ΔU

$$\bar{P}^{n+1}_{i+0,5}\approx P^n_{i+0,5}+a^n_{i+0,5}\Delta U. \tag{47}$$

2. Ударная волна сильная, $b\Delta U\gg a^n_{i+0.5}$. В этом случае получается квадратичная зависимость

$$\bar{P}^{n+1}_{i+0,5}\approx P^n_{i+0,5}+\frac{\gamma+1}{2}\rho^n_{i+0,5}\Delta U^2. \tag{48}$$

Опираясь на эти асимптотики, М. Уилкинс использовал для расчета ударных волн, комбинированную линейно-квадратичную псевдовязкость [8].

Заменив в уравнениях (41)–(44) все величины рядами Тэйлора, получим независимые погрешности аппроксимации

$$\omega_2 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + hW\frac{\partial^2 U}{\partial m^2} + \tau\frac{\partial^2 P}{\partial t \partial m} + O\left(\tau^2, h^2\right), \tag{49}$$

$$\omega_4 = \frac{\tau}{2}\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + O\left(\tau^3\right), \tag{50}$$

$$\omega_5 = -\frac{h^2}{24}\frac{\partial^3 x}{\partial m^3} + O\left(h^3\right), \tag{51}$$

$$\omega_7 = -\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial t} + P\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right) + hW\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial m} + O\left(\tau^2, h^2, \tau h\right). \tag{52}$$

Продифференцируем (42), (43) по t и по m и, используя уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial t} + a^2\frac{\partial U}{\partial m} = \omega_{10},$$

преобразуем ω_7 к виду

$$\omega_7 = hW\left(1 - \varkappa\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{W}}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + O\left(\tau^2, h^2\right).$$

Поскольку ω_7 является независимой погрешностью аппроксимации, то уравнение производства энтропии при $W = a + O(\tau, h)$ имеет вид

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = hW(1-\varkappa)\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + O(\tau^2, h^2).$$

Рассмотрим далее дистракцию недивергентной разностной схемы. Как и ранее, перейдем к автомодельной переменной $\xi = m - Wt$. Дифференциальные законы сохранения с погрешностями аппроксимации (50), (51), (49), (52) примут вид

$$WU' - P' - \frac{\tau W^2}{2}U'' + hWU'' - \tau WP'' + O\left(\tau^2, h^2\right) = 0, \tag{53}$$

$$Wx' + U - \frac{\tau W}{2}U' + O\left(\tau^2\right) = 0, \tag{54}$$

$$x' - V + O\left(\tau^2\right) = 0, \tag{55}$$

$$E' + PV' - \frac{\tau W}{2}\left(E'' - P'V' + PV''\right) - hWV'U' + O\left(\tau^2, h^2\right) = 0. \tag{56}$$

Дифференцируя (53)–(56), исключая x', E'', U', P' и интегрируя полученные уравнения по ξ, получим дифференциальное уравнение для $V(\xi)$, совпадающее с аналогичным уравнением в разностной схеме Годунова. Следовательно, первое дифференциальное приближение недивергентной РС Куропатенко имеет ту же дистракцию, что и ДП-1 разностной схемы Годунова.

Рассмотрим немонотонность недивергентной разностной схемы. На волне сжатия для уравнения состояния (28) запишем следствие из уравнений (41)–(44) в виде

$$P^{n+1}_{i+0,5} - P^n_{i+0,5} + \frac{\tau a^2}{h}(U^{n+1}_{i+1} - U^{n+1}_i) = 0. \tag{57}$$

Уравнение (41) после подстановки в него (45) примет вид

$$U^{n+1}_i - U^n_i + \frac{\tau}{h}(P^{n-1}_{i+0,5} - P^{n-1}_{i-0,5}) - \varkappa(U^n_{i+1} - 2U^n_i + U^n_{i-1}) = 0. \tag{58}$$

В (57) и (58) подставим (27)

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} + \beta_{i+0,5}^{n+1} + \varkappa(\alpha_{i+1}^{n+1} - \beta_{i+1}^{n+1}) - \varkappa(\alpha_i^{n+1} - \beta_i^{n+1}) = \alpha_{i+0,5}^n + \beta_{i+0,5}^n, \tag{59}$$

$$\alpha_i^{n+1} - \beta_i^{n+1} = \alpha_i^n - \beta_i^n - \varkappa(\alpha_{i+0,5}^{n-1} + \beta_{i+0,5}^{n-1}) + \varkappa(\alpha_{i-0,5}^{n-1} + \beta_{i-0,5}^{n-1}) +$$
$$+\varkappa(\alpha_{i+1}^n - \beta_{i+1}^n) - 2\varkappa(\alpha_i^n - \beta_i^n) + \varkappa(\alpha_{i-1}^n - \beta_{i-1}^n). \tag{60}$$

Запишем (60) для индекса $i+1$. Умножим полученное уравнение на -$\varkappa$, уравнение (60) — на $\varkappa$ и сложим их с (59). Ограничившись случаем, когда $\beta = const$, получим

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} = \alpha_{i+0,5}^n + (3\varkappa^2 - \varkappa)(\alpha_{i+1}^n - \alpha_i^n) - \varkappa^2(\alpha_{i+2}^n - \alpha_{i-1}^n) +$$
$$+\varkappa^2\alpha_{i+1,5}^{n-1} - 2\varkappa^2\alpha_{i+0,5}^{n-1} + \varkappa^2\alpha_{i-0,5}^{n-1}.$$

Разложим все значения α, входящие в правую часть этого уравнения, в ряды Тейлора. В результате получим уравнение

$$\alpha_{i+0,5}^{n+1} = \alpha_{i+0,5}^n - \varkappa h \left(\frac{\partial\alpha}{\partial m}\right)_{i+0,5} + \varkappa^2 h^2 \left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial m^2}\right)_{i+0,5} + O(h^3). \tag{61}$$

Уменьшим индекс на 1 и вычтем из (61). Затем разложим в ряды Тейлора в точке $t^n,\ m_i$ все величины, входящие в правую часть полученного уравнения. В результате получим

$$\Delta_i^{n+1} = \alpha_{i+0,5}^{n+1} - \alpha_{i-0,5}^{n+1} = h\left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial m}\right)_i - \varkappa h\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial m^2}\right)_i\right) + O(h^3). \tag{62}$$

Для рассматриваемого случая β=const волна сжатия распространяется в положительном направлении. Поскольку на тыльной стороне волны сжатия $\alpha' \le 0$, $\alpha'' \le 0$ то при $\tau \approx 0$ ($\varkappa \approx 0$) из (62) следует, что $\Delta_i^n \le 0$. Для того, чтобы Δ_i^n оставалось не положительным, необходимо, чтобы было выполнено условие

$$\left|\frac{\partial\alpha}{\partial m}\right| - \tau a \left|\frac{\partial^2\alpha}{\partial m^2}\right| \geqslant 0.$$

Т.о. рассматриваемая Р.С. является условно монотонной.

4.2. Дивергентная разностная схема [10]

Все термодинамические величины и скорости определены в серединах сеточных интервалов, узлы сетки имеют координаты $t^n,\ m_i$. Разностные уравнения имеют вид (11)–(14). Для определения вспомогательных величин $P_i^*,\ U_i^*$ решение на вспомогательном промежутке $m_{i-0.5} \le m \le m_{i+0.5}$ делится на два типа: разрежение и сжатие.

Рассмотрим дивергентную Р.С. на волне сжатия. Вспомогательные величины вычисляются из уравнений на поверхности сильного разрыва (38)–(40). Величины по обе стороны разрыва задаются следующим образом.

Если $U_{i+0.5}^n - U_{i-0.5}^n < 0$, то

1. $U_1 = U_{i-0.5}^n,\ (P,V,E,U)_0 = (P,V,E,U)_{i+0.5}^n$ при $P_{i-0.5}^n > P_{i+0.5}^n$,

2. $U_1 = U_{i+0.5}^n,\ (P,V,E,U)_0 = (P,V,E,U)_{i-0.5}^n$ при $P_{i-0.5}^n < P_{i+0.5}^n$.

Остальные величины с индексом "1" находятся из (38)–(40). Если ограничиться рассмотрением только случая $W > 0$, то $P_i^*,\ U_i^*$ определятся уравнениями

$$U_i^* = U_{i-0.5}^n, \quad P_i^* = P_{i+0.5}^n - W\left(U_{i+0.5}^n - U_{i-0.5}^n\right). \tag{63}$$

Рассмотрим монотонность этой Р.С. на волне сжатия. Основные уравнения вместе со вспомогательными значениями (63) примут вид

$$P_{i+0.5}^{n+1} = P_{i+0.5}^{n} - \frac{\tau a^2}{h}\left(U_{i+0.5}^{n} - U_{i-0.5}^{n}\right),$$
$$U_{i+0.5}^{n+1} = U_{i+0.5}^{n} - \frac{\tau}{h}\left(P_{i+1.5}^{n} - P_{i+0.5}^{n} - a\left(U_{i+1.5}^{n} - 2U_{i+0.5}^{n} + U_{i-0.5}^{n}\right)\right).$$

Заменим P и U их выражениями через инварианты α и β

$$\alpha_{i+0.5}^{n+1} + \beta_{i+0.5}^{n+1} = \alpha_{i+0.5}^{n} + \beta_{i+0.5}^{n} - \varkappa\left(\alpha_{i+0.5}^{n} - \beta_{i+0.5}^{n} - \alpha_{i-0.5}^{n} + \beta_{i-0.5}^{n}\right),$$
$$\alpha_{i+0.5}^{n+1} - \beta_{i+0.5}^{n+1} = \alpha_{i+0.5}^{n} - \beta_{i+0.5}^{n} - \varkappa\left(\alpha_{i+1.5}^{n} + \beta_{i+1.5}^{n} - \alpha_{i+0.5}^{n} - \beta_{i+0.5}^{n}\right) +$$
$$+\varkappa\left(\alpha_{i+1.5}^{n} - \beta_{i+1.5}^{n} - 2\alpha_{i+0.5}^{n} + 2\beta_{i+0.5}^{n} + \alpha_{i-0.5}^{n} - \beta_{i-0.5}^{n}\right).$$

Сложим эти два уравнения

$$\alpha_{i+0.5}^{n+1} = \alpha_{i+0.5}^{n}\left(1-\varkappa\right) + \varkappa\alpha_{i-0.5}^{n} - \varkappa\beta_{i+1.5}^{n} + 4\varkappa\beta_{i+0.5}^{n} - \varkappa\beta_{i-0.5}^{n}. \tag{64}$$

В случае $\beta = const$ уравнение (64) принимает вид

$$\alpha_{i+0.5}^{n+1} = \alpha_{i+0.5}^{n}\left(1-\varkappa\right) + \alpha_{i-0.5}^{n}\varkappa.$$

Оба коэффициента неотрицательны при $0 \le \varkappa \le 1$ и, таким образом, дивергентная разностная схема [10], [12] на волне сжатия монотонна.

В заключении исследуем дистракцию ударной волны. Для этого разностные законы сохранения (11)–(14) вместе со вспомогательными величинами (63) запишем в дифференциальной форме с погрешностями аппроксимации,

$$\omega_1 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{h}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial m^2} + O\left(\tau^2, h^2\right),$$
$$\omega_2 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - hW\frac{\partial^2 U}{\partial m^2} - \frac{h}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial m^2} + O\left(\tau^2, h^2\right),$$
$$\omega_3 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial m}\left(U\frac{\partial P}{\partial m}\right) + \frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial m}\left(P\frac{\partial U}{\partial m}\right) + hW\frac{\partial}{\partial m}\left(U\frac{\partial U}{\partial m}\right) + O\left(\tau^2, h^2\right).$$

Перейдем к автомодельной переменной $\xi = m - Wt$. Тогда уравнения примут вид

$$WV' + U' - \frac{\tau W^2}{2}V'' - \frac{h}{2}U'' + O\left(\tau^2, h^2\right) = 0, \tag{65}$$
$$WU' - P' - \frac{\tau W^2}{2}U'' - \frac{h}{2}P'' + hWU'' + O\left(\tau^2, h^2\right) = 0, \tag{66}$$
$$W\varepsilon' - (PU)' - \frac{\tau W}{2}PU'' - \frac{h}{2}\left(UP'\right)' + \frac{h}{2}\left(PU'\right)' - hW\left(UU'\right)' + O\left(\tau^2, h^2\right) = 0. \tag{67}$$

Проинтегрировав эти уравнения по ξ, получим

$$WV + U - \frac{\tau W^2}{2}V' - \frac{h}{2}U' = WV_0 + U_0 + O\left(\tau^2, h^2\right) \tag{68}$$
$$WU - P - \frac{\tau W^2}{2}U' - \frac{h}{2}P' + hWU' = W_0U_0 - P_0 + O\left(\tau^2, h^2\right) \tag{69}$$
$$W\varepsilon - PU - \frac{\tau W}{2}(PU)' - \frac{h}{2}UP' + \frac{h}{2}PU' - hWUU' = W\varepsilon_0 - P_0U_0 + O\left(\tau^2, h^2\right) \tag{70}$$

С помощью (65)–(67) заменим в (68)–(70) U' и P' на V'. Затем с помощью (68)–(70) заменим U и P на V. В результате для идеального газа получим уравнение, описывающее профиль $V(\xi)$. Это уравнение совпадает с аналогичным уравнением в Р.С. Годунова (35). Следовательно, дистракция и эффективная дистракция этой разностной схемы совпадают с D_Γ и $D_\Gamma^Э$.

5. Другие разностные схемы

5.1. Разностная схема Лакса, Вендрофа

Схема Лакса, Вендрофа [15], [16] заслуживает внимания поскольку она достаточно широко используется в публикациях. Лакс и Вендроф предложили вспомогательные величины P_i^*, U_i^*, $(PU)_i^*$ в (11)–(13) определять с помощью уравнений

$$P_i^* = P_i^n - \frac{\tau}{2h} (a_i^n)^2 \left(U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n\right) - \frac{B}{4} \left|a_{i+0,5}^n - a_{i-0,5}^n\right| (U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n),$$

$$U_i^* = U_i^n - \frac{\tau}{2h} \left(P_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n\right) - \frac{B}{4\,(a_i^n)^2} \left|a_{i+0.5}^n - a_{i-0.5}^n\right| \left(P_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n\right),$$

$$(PU)_i^* = (PU)_i^n - \Big(P_i^n \left(P_{i+0.5}^n - P_{i-0.5}^n\right) +$$

$$+ (a_i^n)^2 U_i^n \left(U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n\right)\Big) \left(\frac{\tau}{2h} + \frac{B}{4\,(a_i^n)^2} \left|a_{i+0,5}^n - a_{i-0,5}^n\right|\right),$$

где

$$P_i^n = 0.5 \left(P_{i+0,5}^n + P_{i-0,5}^n\right), \qquad a_i^n = 0.5 \left(a_{i+0,5}^n + a_{i-0,5}^n\right),$$

$$U_i^n = 0.5 \left(U_{i+0,5}^n + U_{i-0,5}^n\right), \qquad (PU)_i^n = 0.5 \left((PU)_{i+0,5}^n + (PU)_{i-0,5}^n\right).$$

Использование этих уравнений для расчета ударных волн равносильно введению в дифференциальные уравнения трех псевдовязкостей

$$q_p = -\frac{B}{4} h^2 \left|\frac{\partial a}{\partial m}\right| \frac{\partial U}{\partial m}, \qquad q_u = -\frac{B}{4}\frac{h^2}{a^2} \left|\frac{\partial a}{\partial m}\right| \frac{\partial P}{\partial m},$$

$$q_{pu} = -\frac{B}{4}\frac{h^2}{a^2} \left|\frac{\partial a}{\partial m}\right| \left(P\frac{\partial P}{\partial m} + a^2 U \frac{\partial U}{\partial m}\right).$$

Поскольку эти псевдовязкости не являются аппроксимационными, то Р.С. Лакса-Вендрофа является реализацией метода Неймана-Рихтмайера. Эта разностная схема содержит эмпирическую константу $B \approx 1 \operatorname{div} 2$, которая влияет на границу области устойчивости. Условие устойчивости имеет вид

$$\varkappa(\varkappa + \frac{1}{2}\mathrm{B}) \leqslant 1.$$

Схема немонотонна.

5.2. Разностные схемы в эйлеровых координатах

Такие Р.С. широко применяются для решения задач аэродинамики. Подробный анализ их достоинств и недостатков приведен в [17], [18]. Здесь мы обращаем внимание лишь на то, что любую из таких Р.С. можно рассматривать, как состоящую из двух этапов. На первом этапе сетка рассматривается как Лагранжева и применяется один из методов расчета ударных волн в Лагранжевых координатах. На втором этапе происходит пересчет величин с Лагранжевой сетки на Эйлерову. Наличие решения, полученного на первом этапе, позволяет определить потоки массы, количества движения и энергии через поверхности Эйлеровых ячеек, и применить интерполяции с одновременным выполнением законов сохранения.

5.3. Подавление немонотонности численного решения

Для этого разработаны приемы сглаживания уже полученного решения без нарушения законов сохранения. Эти приемы могут применяться в связке с любым из вышеперечисленных методов расчета ударных волн. Как правило, при разработке таких методов вопросы диссипации энергии и сохранения энтропии на непрерывных решениях не обсуждаются.

Заключение

В заключение приведем сравнительные характеристики рассмотренных методов расчета ударных волн в виде таблицы.

N	Характеристика разностной схемы	Разностные схемы				
		Неймана - Рихтмайера	Лакса	Годунова	Куропатенко	
					недивергентная	дивергентная
1	Дистракция, D	$2k\pi\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$	∞	∞	∞	∞
2	Эффективное значение дистракции, $D^э$	$2k\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$	$\frac{2(1-\varkappa^2)}{\varkappa(\gamma+1)}\left(\frac{\sqrt{V_0}+\sqrt{V_1}}{\sqrt{V_0}-\sqrt{V_1}}\right)^2$	$\frac{2(1-\varkappa)}{(\gamma+1)}\left(\frac{\sqrt{V_0}+\sqrt{V_1}}{\sqrt{V_0}-\sqrt{V_1}}\right)$		
3	Монотонность на ударной волне	нет	есть всегда	есть всегда	условная	есть всегда
4	Наличие эмпирических констант	есть, k	нет	нет	нет	нет
5	Условие устойчивости	$\varkappa \le \frac{\sqrt{\gamma}}{2k}$	$\varkappa \le 1$	$\varkappa \le 1$	$\varkappa \le 1$	$\varkappa \le 1$

Список литературы

[1] *Neumann J., Richtmayer R.* A method for the numerical calculation of hydrodynamical shocks //J. Appl. Phys. 1950, V.21, ♯3 pp. 232–237.

[2] *Lax P.D.* Weak solution of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computations //Comn. Pure and Appl. Math. 1954, V7. pp. 159–193.

[3] *Годунов С.К.* Разностный метод счета разрывных решений уравнений газодинамики //Матем. сб. 1959, № 47(89), вып. 3. С. 271–306.

[4] *Куропатенко В.Ф.* Метод расчета ударных волн //ДАН СССР в.3, № 4, 1960. 771 с.

[5] *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука. 1968. 592 с.

[6] *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач //Мир. 1972. 418 с.

[7] *Самарский А.А., Арсенин В.Я.* О численном решении уравнений газодинамики с различными типами вязкостей. //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. т. 1, № 2. С. 357-380.

[8] *Уилкинс М.Л.* Расчет упругопластических течений //Вычисл. методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С.212-263.

[9] *Куропатенко В.Ф.* Локальная консервативность разностных схем для уравнений газовой динамики //Журнал выч. матем. и матем. физики. М.: т. 25, № 8. 1985. С. 1176–1188.

[10] *Куропатенко В.Ф.* Об одном разностном методе расчета ударных волн //Журнал вычисл. математики и математической физики. Т. 3,№ 1, 1963. С. 201–204.

[11] *Куропатенко В.Ф.* О разностных методах для уравнений гидродинамики //Труды матем. инст. им. В.А.Стеклова т. 74, ч. 1, 1966. С. 107–137.

[12] *Куропатенко В.Ф., Макеева И.Р.* Разностный метод расчета ударных волн с повышенными свойствами монотонности //Препринт ВНИИТФ № 120, 1997г.

[13] *Куропатенко В.Ф.* Метод построения разностных схем для численного интегрирования уравнений газодинамики //Известия ВУЗов сер. Математика, № 3(28), 1962 С. 75–83.

[14] *Куропатенко В.Ф.* Об одной форме псевдовязкости //Изв. СО АН СССР. Сер. технич. 1967, М3, вып. 3, С. 81–82.

[15] *Lax P.D., Wendroff B.* System of Conservation Laws //Comp. Pure Appl. Math. № 13, 1960. p. 217.

[16] *Lax P.D., Wendroff B.* Difference Schemes for Hyperbolic Equation with High Order of Accuracy //Comp. Pure Appl. Math. № 17, 1964, p. 381.

[17] *Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.* Нестационарный метод "крупных частиц"для газдинамических расчетов // Журнал вычисл. математики и математической физики. 11,№ 1, 1971. С. 182–207.

[18] *Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.* Метод "крупных частиц"в газовой динамике //Вычислительный эксперимент/М.: Наука, 1982, 392 с.

Представлено в Дальневосточный математический сборник в окончательной форме 26 октября 2001 г.

V.F. Kuropatenko, Methods of shock wave calculations. Far Eastern Mathematical Journal, 2001. v 2, № 2.

SUMMARY

A comparative analysis of the existing methods of shock wave calculations is presented in the paper. A study is done into dissipative properties, distraction and monotony of the difference schemes proposed by the authors of the methods. The paper shows the role of these methods at the transition from Lagrangian to Eulerian coordinates. The paper discusses the approaches to oscillation suppression.