АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ОТДЕЛЕНИЕ МЕХАНИКИ
И ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

*информационный бюллетень*

Том 1, №: 6
1970

НОВОСИБИРСК

В.Ф.КУРОПАТЕНКО

## ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ВЕЛИЧИН ЗА ФРОНТОМ УДАРНОЙ ВОЛНЫ.

При численном решении задач газодинамики с помощью неоднородных разностных методов, которые выделяют сильные и слабые разрывы, возникает необходимость решать систему уравнений, связывающих величины по обе стороны фронта ударной волны. Такими уравнениями являются условия динамической совместности

$$(V - V_0)W + (u - u_0) = 0, \qquad (1)$$

$$(u - u_0)W - (P - P_0) = 0, \qquad (2)$$

$$E - E_0 + 0.5(P + P_0)(V - V_0) = 0, \qquad (3)$$

а также уравнение состояния

$$P = f(V, E). \qquad (4)$$

Величины без индексов характеризуют состояние вещества за фронтом ударной волны, с индексом "0" перед фронтом. На фронте детонационной волны условия (1), (2) сохраняются, а в правой части уравнения (3) появляется член, характеризующий энерговыделение ВВ. Состояние вещества перед фронтом предполагается известным. Кроме того, в момент $t = t_n$ предполагается известной амплитуда ударной волны и распределение всех величин за фронтом. Задача заключается в определении всех величин на фронте ударной волны в момент $t = t_n + \tau$.

Легко заметить, что система четырех уравнений (1)-(4) содержит пять неизвестных величин

$$P, V, E, u, W. \qquad (5)$$

Следовательно, для решения задачи необходимо к указанным четырем уравнениям добавить пятое уравнение. Это вспомогательное уравнение можно написать в различной форме исходя из различных соображений. В настоящей работе рассматривается один из возможных видов этого уравнения и исследуется вопрос об условиях сходимости итерационного процесса для решения полученной системы.

Полные производные давления $p$ и скорости $u$ по времени $t$ в направлении траектории фронта $\frac{dm}{dt} = W$ имеют вид

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} W,$$
$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial m} W. \qquad (6)$$

Здесь $m$ – Лагранжева координата $dm = \rho(dr - u dt)$. Воспользовавшись дифференциальными уравнениями газодинамики с учетом адиабатичности движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial m}, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -a^2\left(\frac{\partial u}{\partial m} + \frac{(\alpha-1)uV}{r}\right), \qquad (8)$$

где $a^2 = -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s$, запишем (6) в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -a^2\left[\frac{\partial u}{\partial m} + \frac{(\alpha-1)uV}{r}\right] + \frac{\partial p}{\partial m} W, \qquad (9)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial m} + \frac{\partial u}{\partial m} W.$$

Исключая из (9), например $\frac{\partial u}{\partial m}$, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{a^2}{W}\frac{du}{dt} - \frac{(\alpha-1)uVa^2}{r} - \frac{a^2 - W^2}{W}\frac{\partial p}{\partial m}, \qquad (10)$$

которое преобразуем, прибавляя и вычитая $\frac{dp_0}{dt}$ и $\frac{a}{W}\frac{du_0}{dt}$ к виду

$$\frac{d\Delta p}{dt} = -\frac{a^2}{W}\frac{d\Delta u}{dt} - A, \qquad (11)$$

где

$$A = \frac{(\alpha-1)uVa^2}{r} + \frac{a^2-W^2}{W}\frac{\partial p}{\partial m} + \frac{dp_0}{dt} + \frac{a^2}{W}\frac{du_0}{dt} . \qquad (12)$$

Рассмотрим далее выражение для скорости перемещения ударной волны в Лагранжевых координатах

$$W = \frac{dm}{dt} = \frac{\Delta p}{\Delta u} , \qquad (13)$$

получаемое из (2). Здесь и в (11) $\Delta p = p - p_0$, $\Delta u = u - u_0$.
Дифференцируя (13) по $t$ вдоль фронта, получим

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\Delta u}\left(\frac{d\Delta p}{dt} - W\frac{d\Delta u}{dt}\right). \qquad (14)$$

Из (11) и (14) следует

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{\Delta u}\left[\left(\frac{a^2}{W} + W\right)\frac{d\Delta u}{dt} + A\right]. \qquad (15)$$

Это и есть искомое пятое уравнение системы.

Аппроксимируем (15) разностным уравнением

$$\frac{W - W_n}{\tau} = -\frac{1}{\Delta u_n}\left[\left(\frac{a_n^2}{W_n} + W_n\right)\frac{\Delta u - \Delta u_n}{\tau} + A_n\right], \qquad (16)$$

в котором все коэффициенты вычисляются в момент $t_n$. Легко показать, что погрешность такой аппроксимации есть величина $O(\tau)$. Введем безразмерные переменные $\zeta = \frac{W}{W_n}$, $\eta = \frac{\Delta u}{\Delta u_n}$. После перехода от $W, \Delta u$ к $\zeta, \eta$ (16) принимает вид

$$\zeta = \Omega - \left[1 + \left(\frac{a_n}{W_n}\right)^2\right]\eta , \qquad (17)$$

где

$$\Omega = 2 + \left(\frac{a_n}{W_n}\right)^2 - \frac{A_n \tau}{W_n \Delta u_n} . \qquad (18)$$

Таким образом, $\zeta$ линейно зависит от $\eta$.

Преобразуем систему (1) – (4)

$$p = p_0 + \frac{\Delta u^2}{V_0 - V} , \qquad (19)$$

$$E = E_0 + 0{,}5\Delta u^2 + p_0(V_0 - V),\ p = f(V, E). \qquad (20)$$

Эту систему можно решить, если одну из величин без индексов предположить известной. Будем считать известной величину скачка скорости $\Delta u$ на фронте, а в качестве итерационного параметра возьмем $V$. Точка пересечения двух кривых (I9) и (20) находится итерациями по методу хорд. После нахождения значений $p$ и $V$, удовлетворяющих при заданном $\Delta u$ системе (I9), (20), вычисляется величина

$$W = \frac{\Delta p}{\Delta V}. \qquad (21)$$

В результате при фиксированных $P_0, \rho_0, E_0$ находится связь между $W$ и $\Delta u$. Для идеального газа такая связь может быть написана в явном виде

$$W = \frac{\gamma+1}{4}\rho_0 \Delta u \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\rho_0\frac{\Delta u_n}{W_n}\eta\right)^2 + \frac{\gamma p_0 \rho_0}{W_n}}. \qquad (22)$$

В безразмерных переменных $\zeta$ и $\eta$ уравнение (22) записывается следующим образом

$$\zeta = \frac{\gamma+1}{4}\rho_0\frac{\Delta u_n}{W_n}\eta \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\rho_0\frac{\Delta u_n}{W_n}\eta\right)^2 + \frac{\gamma p_0 \rho_0}{W_n}}. \qquad (23)$$

Значения $\zeta$, полученные по этой формуле, будем обозначать $\bar{\zeta}$. Выясним условия существования решения задачи. Очевидно, такими условиями будут условия, при которых прямая (I7) пересекается с кривой типа (23). Легко заметить, что наклоны указанных кривых $\frac{d\zeta}{d\eta}$ имеют разные знаки. Следовательно, кривые пересекутся, если при $\eta = 1$ будет $\zeta > \bar{\zeta}$.

Очевидно, когда скачок скорости на фронте ударной волны стремится к нулю, волна становится бесконечно слабой и ее скорость перемещения стремится к скорости звука перед фронтом. Таким образом,

$$\bar{\zeta}(0) = \sqrt{\frac{a_0^2}{W_n^2}}.$$

В то же время значение $\zeta(0)$ , полученное по формуле (I7), равно

$$\zeta(0) = \Omega .$$

Очевидно, кривые (I7) и (23) пересекутся, если

$$\zeta(0) > \bar{\zeta}(0) .$$

Это условие существования решения может быть записано в виде:

$$2 + \left(\frac{a_n}{W_n}\right)^2 - \frac{A_n \tau}{\Delta u_n W_n} > \left|\frac{a_0}{W_n}\right| . \qquad (24)$$

Условие (24) можно несколько упростить сделав его более сильным. Известно, что $|W_n| > a_0$. Заменив $\left|\frac{a_0}{W_n}\right|$ на I, получим новое условие

$$1 + \left(\frac{a_n}{W_n}\right)^2 \geqslant \frac{A_n \tau}{\Delta u_n W_n} \qquad (25)$$

В этом неравенстве левая часть положительна, произведение $\Delta u_n W_n > 0$ , $\tau > 0$ , а величина $A_n$ может быть и положительной , и отрицательной.

В случае неположительных $A$ , неравенство (25) выполняется при любых $\tau > 0$ . Если $\alpha = 1$ (течение плоское) и фон перед фронтом ударной волны постоянен, то $A \leqslant 0$ будет при $W_n \frac{\partial p}{\partial m} \leqslant 0$ . Следовательно, без ограничений на промежуток времени $\tau$ считаются:

а) стационарные ударные волны ( $\frac{\partial p}{\partial m} = 0$ ) ,

б) усиливающиеся со временем ударные волны, $W < 0$ , $\frac{\partial p}{\partial m} > 0$ или $W > 0$ , $\frac{\partial p}{\partial m} < 0$ ).

Когда же $A > 0$ , решение задачи существует лишь при значениях $\tau$ , удовлетворяющих условию:

$$\tau \leqslant \frac{\Delta p_n \left[1 + \left(\frac{a_n}{W_n}\right)^2\right]}{\frac{(\alpha - 1) V_n u_n a_n^2}{r_n} + \frac{a_n^2 - W_n^2}{W_n}\left(\frac{\partial p}{\partial m}\right)_n + \frac{dp_0}{dt} + \frac{a_n^2}{W_n}\frac{du_0}{dt}} \qquad (26)$$

Иными словами, все затухающие со временем ударные волны, могут рассчитываться с помощью изложенного метода лишь в моменты времени $t=t_n+\tau$ близкие к $t_n$ такие, что $\tau$ удовлетворяет условию (26).

Изложенный здесь алгоритм расчета величин за фронтом ударной волны применялся нами в качестве блока в программе РАНД (расчет адиабатических нестационарных движений). По этой программе решались различные задачи, в частности задача о точечном или неточечном взрыве, задача о затухании ударных волн в различных конденсированных веществах, задача о распространении детонации и ряд других. Там, где это было возможно, результаты расчетов сравнивались с адиабатическими решениями. Результаты сравнения всегда указывали на хорошую точность применяемого нами алгоритма. В качестве иллюстрации ниже приводится сравнение с точными решениями: а) в таблице I – с точным решением из [I] задачи о цилиндрически симметричной сходящейся детонационной волне, б) на рис. I – с автомодельным движением газа из [2] при начальном давлении, заданном в виде степенной зависимости от $m$.

Таблица I.

| $\frac{r}{r_0}$ | точное $\frac{\rho}{\rho_0}$ | счет $\frac{\rho}{\rho_0}$ |
|---|---|---|
| I | I | I |
| 0,8 | I,05 | I,04 |
| 0,6 | I,II | I,II |
| 0,4 | I,24 | I,25 |
| 0,2 | I,54 | I,56 |
| 0,I5 | I,7I | I,73 |
| 0,I0 | 2,0I | 2,00 |
| 0,08 | 2,20 | 2,I9 |
| 0,06 | 2,49 | 2,49 |

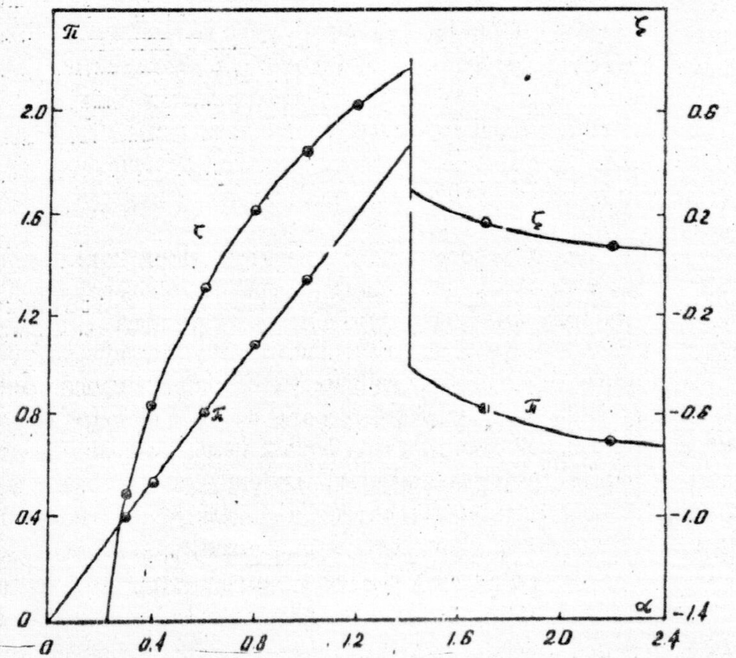


Рис.I.

— - расчет

⊙ - аналитическое решение

$\pi$ - безразмерное давление

$\zeta$ - безразмерная скорость

Литература.


I. Я.Б.Зельдович. "Сходящаяся цилиндрическая детонационная волна", ЖЭТФ, т.36, вып.3, 1959, 782.

2. В.Е.Неуважаев. "Движение газа при заданном пространственном распределении давления", ПММ, т.34, вып.I, 1970, 17.