

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ  
АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ СССР

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИИ  
И ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО АТОМНОЙ НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

# ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

МЕТОДИКИ И ПРОГРАММЫ  
ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Издается с 1978 г.

Выпуск 1

МОСКВА — 1988

УДК 518.12:532.501.32

## МЕТОДИКА "РАПИД" РАСЧЕТА ДВУМЕРНЫХ АДИАБАТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ СЖИМАЕМЫХ СРЕД В ПЕРЕМЕННЫХ ЛАГРАНЖА СО СВОБОДНЫМ СОСЕДСТВОМ ТОЧЕК

Т.Н.Алексеева, В.А.Быченков, В.Ф.Куропатенко

Представлена двумерная разностная методика расчета гидродинамических и упругопластических течений в лагранжевых координатах. Интегрирование уравнений, выражающих законы сохранения, осуществляется по областям соответствия, построенным вокруг лагранжевых точек. Области соответствия служат ячейки Дирихле. Разностная схема явная. Допускается выделение контактных границ. Разностное уравнение неразрывности аппроксимирует закон сохранения массы в дифференциальной форме и адаптируется под решение на каждом временном шаге. Приведен пример численного решения задачи Шульца.

### Введение

Разностные методы широко применяются для решения задач механики сплошной среды. В тех случаях, когда необходимо рассчитать движение контактных границ и реакцию вещества на деформацию в зависимости от истории нагружения (упругопластическое тело, фазовые переходы, разрушение и др.), предпочтение отдается разностным методам, использующим уравнения в лагранжевых координатах. Однако при расчете течений со значительными относительными перемещениями соседних частиц вещества эффективность таких методов падает, поскольку необходимость сохранения соседства ячеек сетки вступает в противоречие с реальными процессами, происходящими в среде.

Описываемая методика основана на принципах свободного соседства частиц-точек, движущихся вместе со средой и несущих дискретную информацию о состоянии физической системы. Видимо, первой методикой, взявшей этот принцип на вооружение, была методика В.Ф.Дьяченко [1], известная под названием "метода свободных точек". Название методики РАПИД раслифровывается так: разностная аппроксимация плоскости с иерархией Дирихле. Тем самым подчеркивается, что построение разностной схемы осуществляется с использованием ячеек Дирихле. Впервые идея использования ячеек Дирихле для аппроксимации плоской области в численных методах была высказана Пастом и Уламом [2] и реализована в методиках

"Медуза" [3], ДМК [4] И.Д.Софроновым, И.Ф.Подливаевым, В.В.Рассказовой, А.В.Нестеренко и др. Методики "Медуза" и ДМК являются квазилагранжевыми. Соседство ячеек Дирихле в них зафиксировано. Принцип свободного соседства точек и соответствующих им ячеек Дирихле был положен в основу методики [5], в которой не выделяются контактные границы и отсутствует локальная аппроксимация уравнения неразрывности.

Методика РАПИД дополняет методику СПРУТ [6]. В начальный момент времени физическая система разбивается на ряд математических областей. Любая из областей может рассматриваться как по методике РАПИД, так и по методике СПРУТ. В области с регулярной сеткой содержится одно вещество. В области с нерегулярной сеткой могут содержаться несколько веществ, а в процессе движения учитывается возникновение новых контактных разрывов. Контур такой области определяется набором граничных точек, соседство которых вдоль контура запоминается и изменяется в процессе движения лишь в исключительных случаях. То есть при необходимости выделяются те или иные контактные разрывы. Все остальные точки могут менять своих соседей. Соседями некоторой точки объявляются точки, имеющие с данной общей ребро ячейки Дирихле. Контур ячейки Дирихле используется для получения разностных формул, аппроксимирующих пространственные производные. Таким образом, ячейки Дирихле не являются, вообще говоря, лагранжевы-

ми. Лагранжевыми являются только выбранные в начальный момент времени точки. Тем не менее с каждой точкой связывается масса определенного вещества. Разностная схема на каждом временном шаге адаптируется под решение так, чтобы обеспечить сохранение массы области.

Следует отметить, что в 1985 г. в США состоялась международная конференция по свободно-лагранжевым методам. Представленные на ней методики Р.А. Кларка [7] и Х.Е.Триса [8] имеют ряд общих черт с методикой РАПИД.

### Определения и обозначения

Пусть  $x_i$  ( $i=1,2,3$ ) — прямоугольная декартова система координат;  $Z, R$  — прямоугольная декартова система координат на плоскости. Ось абсцисс  $Z$  совпадает с осью симметрии в задачах, имеющих осевую симметрию движения (показатель симметрии  $\alpha=1$ ). Плоскость  $Z, R$  совпадает с плоскостью симметрии в задачах с плоской симметрией движения ( $\alpha=0$ ). При  $\alpha=1$  азимутальную координату обозначим  $\theta$ .

В плоскости  $Z, R$  рассмотрим односвязную область  $D$  с граничным контуром, образованным отрезками прямых, соединяющих пары соседних точек из множества  $\{M_k\}$  ( $k=1,2,\dots,N$ ). Дополним множество  $\{M_k\}$  конечным набором точек, расположенных внутри  $D$ . Считаем, что в полученном множестве точек  $\{M_k\}$  ( $k=1,2,\dots,N$ ) нет совпадающих. Ячейкой Дирихле точки  $M_i$  из множества  $\{M_k\}$  будем называть множество  $D_i \cap D$ , где  $D_i$  — все точки на плоскости, находящиеся ближе к точке  $M_i$ , чем ко всем остальным точкам из  $\{M_k\}$ . Ячейки Дирихле ограничены, покрывают область  $D$  плотно, без перекрытий и зазоров, как это показано на рис. 1. Ячейки Дирихле внутренних точек выпуклы. Параметры потока определяются в точках  $M_k$ :  $R, u_R = \dot{R}$ ,  $\dot{u}_R = \ddot{R}$  — радиальные координата, скорость, ускорение соответственно;  $Z, u_Z = \dot{Z}$ ,  $\dot{u}_Z = \ddot{Z}$  — осевые координата, скорость, ускорение соответственно;  $\rho$  — плотность ( $V=1/\rho$ );  $E$  — удельная внутренняя энергия;  $P$  — давление;  $a = \rho c$  — жест-

кость ( $c$  — скорость звука);  $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  —

тензор скоростей деформаций ( $\dot{\epsilon}_{ij}$  — его девиатор);

$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  — тензор вращения;  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжений;  $S_{ij}$  — девиатор тензора напряжений;

$\mu$  — модуль сдвига;  $Y$  — предел текучести;  $q_R, q_Z$  — компоненты вектора искусственной вязкости;  $Q_{RR}, Q_{ZZ}, Q_{RZ}$  — компоненты девиатора тензора искусственной вязкости;  $A$  — площадь ячейки Дирихле;

$\theta$  — объем ячейки Дирихле. Точка сверху функции обозначает ее субстанциональную производную.

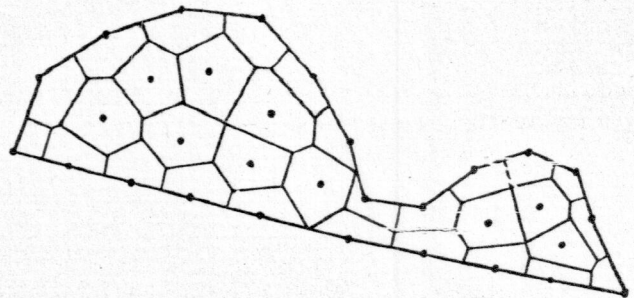


Рис. 1. Пример области с сеткой ячеек Дирихле

### Дифференциальные уравнения

Выпишем дифференциальные уравнения, выражающие законы сохранения для изотропной упругопластической среды с учетом искусственных сил.

#### 1. Уравнения импульса

$$\rho \dot{u}_R = \frac{\partial \sigma_{RR}}{\partial R} + \frac{\partial \sigma_{RZ}}{\partial Z} + \alpha \cdot \frac{2S_{RR} + S_{ZZ}}{R}; \quad (1)$$

$$\rho \dot{u}_Z = \frac{\partial \sigma_{ZZ}}{\partial Z} + \frac{\partial \sigma_{RZ}}{\partial R} + \alpha \cdot \frac{S_{RZ}}{R},$$

где

$$\sigma_{RR} = S_{RR} + Q_{RR} - P - q_R;$$

$$\sigma_{ZZ} = S_{ZZ} + Q_{ZZ} - P - q_Z;$$

$$\sigma_{RZ} = S_{RZ} + Q_{RZ}.$$

#### 2. Уравнение неразрывности

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \dot{\epsilon}_{RR} + \dot{\epsilon}_{ZZ} + \dot{\epsilon}_{\theta},$$

где

$$\dot{\epsilon}_{RR} = \frac{\partial U_R}{\partial R}, \quad \dot{\epsilon}_{ZZ} = \frac{\partial U_Z}{\partial Z}, \quad \dot{\epsilon}_{\theta} = \alpha \cdot \frac{\dot{U}_R}{R}.$$

#### 3. Уравнения для девиатора тензора напряжений

$$\dot{S}_{RR} + \lambda S_{RR} = 2\mu \cdot \dot{\epsilon}_{RR} + 2S_{RZ} \omega_{RZ};$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_{ZZ} + \lambda S_{ZZ} &= 2\mu \cdot \dot{\epsilon}_{ZZ} - 2S_{RZ} \omega_{RZ}; \\ \dot{S}_{RZ} + \lambda S_{RZ} &= 2\mu \cdot \dot{\epsilon}_{RZ} + (S_{ZZ} - S_{RR}) \omega_{RZ}, \end{aligned}$$

где  $\lambda \geq 0$  определяется с помощью условий пластичности:

$$F = S_{RR}^2 + S_{ZZ}^2 + S_{RZ}^2 + S_{RR} \cdot S_{ZZ} - \frac{Y^2}{3} = 0;$$

$$G = \frac{3\mu}{Y^2} [(2S_{RR} + S_{ZZ}) \dot{\epsilon}_{RR} + (2S_{ZZ} + S_{RR}) \dot{\epsilon}_{ZZ} + 2S_{RZ} \dot{\epsilon}_{RZ}] - \frac{\dot{Y}}{Y} \geq 0.$$

$$\lambda = \begin{cases} 0, & \text{если } F < 0 \text{ или } G \leq 0, \\ G, & \text{если } F = 0, G > 0. \end{cases}$$

#### 4. Уравнение состояния

$$P = f(\rho, E).$$

#### 5. Уравнение энергии

$$\dot{E} = -P\dot{V} + \dot{E}_S + \dot{E}_Q,$$

где

$$\rho \dot{E}_S = S_{RR} (\dot{\epsilon}_{RR} - \dot{\epsilon}_\theta) + S_{ZZ} (\dot{\epsilon}_{ZZ} - \dot{\epsilon}_\theta) + 2S_{RZ} \dot{\epsilon}_{RZ};$$

$$\rho \dot{E}_Q = (Q_{RR} - q_R) \dot{\epsilon}_{RR} + (Q_{ZZ} - q_Z) \dot{\epsilon}_{ZZ} + 2Q_{RZ} \dot{\epsilon}_{RZ}.$$

Изменению  $E_Q$  отвечает изменение энтропии. Искусственные силы должны быть такими, чтобы  $\dot{E}_Q \geq 0$ . Выражение для  $\dot{E}_Q$  распишем

$$\begin{aligned} \rho \dot{E}_Q &= u_R \cdot \left[ \frac{\partial(q_R - Q_{RR})}{\partial R} - \frac{\partial Q_{RZ}}{\partial Z} \right] + \\ &+ u_Z \cdot \left[ \frac{\partial(q_Z - Q_{ZZ})}{\partial Z} - \frac{\partial Q_{RZ}}{\partial R} \right] + \\ &+ \frac{\partial [u_R (Q_{RR} - q_R) + u_Z Q_{RZ}]}{\partial R} + \\ &+ \frac{\partial [u_Z (Q_{ZZ} - q_Z) + u_R Q_{RZ}]}{\partial Z}. \end{aligned} \quad (2)$$

6. Искусственные силы. Векторная искусственная вязкость (массовая сила) содержит квадратичный и линейный члены

$$q_x = \begin{cases} \rho (\dot{\epsilon}_{xx} \cdot h)^2 + \frac{1}{2} a |\dot{\epsilon}_{xx} h|, & \text{если } \dot{\epsilon}_{xx} < 0; \\ 0, & \text{если } \dot{\epsilon}_{xx} \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $h$  — характерный размер фронта волны сжатия.

Девiator тензора искусственной вязкости  $Q_{ij}$  (поверхностная сила) действует при наличии деформаций сдвига

$$Q_{xy} = W \cdot \left( \dot{\epsilon}_{xy} h \right), \quad (4)$$

где

$$W = \begin{cases} \frac{1}{2} a, & \text{если } \dot{\epsilon}_{xx} \geq 0; \\ \frac{1}{2} a + \rho (\dot{\epsilon}_{xx} h), & \text{если } \dot{\epsilon}_{xx} < 0, \end{cases}$$

$x, y$  — пара ортогональных осей в плоскости  $Z, R$ .

#### Разностные уравнения

Разностная схема явная. Аппроксимация уравнений, выражающих законы сохранения, основывается на использовании представления пространственных производных через контурные или поверхностные интегралы, соответствующие контурам ячеек Дирихле. Для получения разностной схемы требуется определить необходимые величины на ребрах ячейки Дирихле.

1. Определение скоростей и сил на ребрах ячейки Дирихле. Рассмотрим одномерный случай. Пусть  $\vec{x}$  — выбранное направление. Выделим на оси  $x$  пару соседних точек  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 2). Определение сил на контактной границе в методике СПРУТ основано на условии идеального скольжения и соотношении

$$\bar{P} = \frac{\bar{P}_2 m_1 + \bar{P}_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (5)$$

где  $m_i$  — линейные массы соседних интервалов  $m_i = \rho_i \Delta x_i$ ;  $\bar{P}_i$  — нормальные напряжения со скалярной искусственной вязкостью, относящиеся к центрам этих интервалов.

Если между точками  $M_1$  и  $M_2$  отсутствует контактная граница, то в случае, соответствующем рис. 2, а, скорость в точке определим линейной интерполяцией по  $x$  при  $\Delta x_1 = \Delta x_2$

$$\vec{u}_0 = \frac{1}{2} (\vec{u}_1 + \vec{u}_2).$$

Тогда в соответствии с (5), получаем следующие интерполяционные формулы для сил:

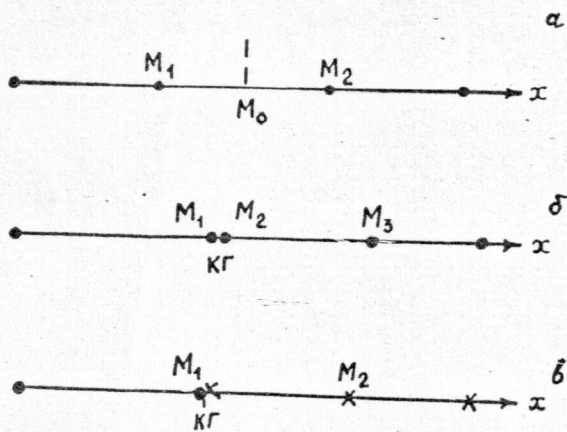


Рис. 2. Соседство точек в одномерном случае: а — точки  $M_1$  и  $M_2$  в одной области; б — точки  $M_1$  и  $M_2$  в разных областях; в — точка  $M_1$  в области с нерегулярной сеткой, точка  $M_2$  — с регулярной

$$P_0 = \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{V_1 + V_2}, \quad (S_{xx})_0 = \frac{(S_{xx})_1 V_1 + (S_{xx})_2 V_2}{V_1 + V_2}, \quad (6)$$

$$(q_x)_0 = \frac{(q_x)_1 V_1 + (q_x)_2 V_2}{V_1 + V_2}. \quad (7)$$

С учетом (3), принимая за  $h$  размер ячейки, имеем

$$(q_x)_0 = \frac{2 \Delta u^2 + \frac{1}{2} (c_1 + c_2) \Delta u}{V_1 + V_2}, \quad (8)$$

где

$$\Delta u = \begin{cases} 0, & u_1 - u_2 \leq 0; \\ u_1 - u_2, & u_1 - u_2 > 0. \end{cases}$$

Введем ось ординат  $y$  на рис. 2 и обобщим формулы (6)–(8) на двумерный случай. Прежде всего определим  $(S_{xy})$  соотношением, аналогичным (6):

$$S_{xy} = \frac{(S_{xy})_1 V_1 + (S_{xy})_2 V_2}{V_1 + V_2}, \quad (9)$$

что допустимо при отсутствии тангенциального разрыва. Формулы (6)–(9) остаются в силе в двумерном случае для середины отрезка, соединяющего соседние точки  $M_1$  и  $M_2$ , если считать ось  $x$  совпадающей с направлением отрезка  $M_1 M_2$ . Обобщение состоит в том, что все силы, полученные на середине отрезка  $M_1 M_2$ , считаются средними силами, действующими на соответствующем ребре ячейки Дирихле. Наконец, в соответствии с (4),

$$(Q_{xy})_0 = \frac{1}{2} W_0 [(u_y)_2 - (u_y)_1];$$

$$W_0 = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{c_1 + c_2}{V_1 + V_2}, & \text{если } \Delta u = 0; \\ \frac{1}{2} \frac{c_1 + c_2}{V_1 + V_2} + \frac{2 \Delta u^2}{V_1 + V_2}, & \text{если } \Delta u > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь положение точек на рис. 2, б, т.е. когда точки лежат на контактной границе и имеют общую скорость в направлении оси  $x$ . Нормальные напряжения в точках  $M_1$  и  $M_2$ , вообще говоря, разные. Это различие ликвидируется путем введения искусственной вязкости. Обозначим  $P_{12}$  — нормальное напряжение (с вязкостью) на границе;  $P_{01}$ ,  $P_{23}$  — нормальные напряжения с вязкостью на соответствующих соседних ребрах, полученные по формулам (6)–(9);  $m_{01}$ ,  $m_{23}$  — линейные массы ячеек, прилегающих к границе. Определим

$$P_{12} = \frac{P_{01} m_{23} + P_{23} m_{01}}{m_{01} + m_{23}}. \quad (10)$$

Последняя формула остается в силе и для ситуации, изображенной на рис. 2, в. Ее обобщение на двумерный случай заключается в интегрировании соотношения (10) вдоль поверхности границы.  $Q_{xy}$  на границе полагается равным нулю. Аналогом  $P_{01}$ ,  $P_{23}$  являются нормальные к граничным ребрам напряжения, получаемые с помощью разностных формул для производной  $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}$  в середине ребра. Эти формулы расписываются в предположении, что все искусственные силы и напряжения равны нулю на границе.

**2. Уравнения импульса.** Рассмотрим ячейку Дирихле точки  $M_0$  с набором соседних точек  $M_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), расположенных в порядке обхода контура ячейки против часовой стрелки. Узлы ячейки — точки  $M'_k$ , как показано на рис. 3. Разностный аналог уравнений (1) имеет вид

$$A^n \rho^n \frac{u_R^{n+1} - u_R^n}{r} = \sum_{k=1}^N [(\sigma_{RR})_{0k} (Z'_{k-1} - Z'_k) +$$

$$+(\sigma_{RZ})_{0k} (R'_k - R'_{k-1})]^n + a \cdot (2S_{RR} + S_{ZZ})_0^n \cdot \frac{1}{R^*};$$

$$A^n \rho^n \frac{u_Z^{n+1} - u_Z^n}{r} = \sum_{k=1}^N [(\sigma_{ZZ})_{0k} (R'_k - R'_{k-1}) +$$

$$+(\sigma_{RZ})_{0k} (Z'_{k-1} - Z'_k)]^n + a \cdot (S_{RZ})_0^n \cdot \frac{1}{R^*},$$

где

$$Z'_0 = Z'_N, R'_0 = R'_N, R^* = \left( \frac{\theta}{2\pi A^2} \right)^n$$

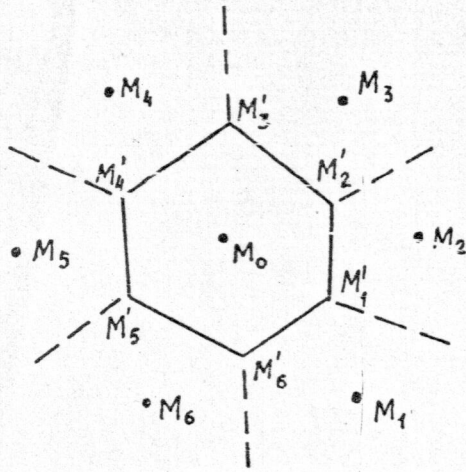


Рис. 3. Обозначения узлов ячейки Дирихле

### 3. Перемещения и деформации. Новые координаты точек

$$R^{n+1} = R^n + r \cdot u_R^{n+1}, Z^{n+1} = Z^n + r \cdot u_Z^{n+1}$$

Новые соседи точки определяются, как правило, из числа старых соседей и соседей старых соседей. Компоненты тензора скоростей деформаций определяются уравнениями

$$\begin{aligned} A^{n+1} \cdot \epsilon_{RR}^{n+1} &= \sum_{k=1}^N (u_R^{n+1})_{0k} (Z'_k - Z'_{k-1})^{n+1}; \\ A^{n+1} \cdot \epsilon_{ZZ}^{n+1} &= \sum_{k=1}^N (u_Z^{n+1})_{0k} (R'_{k-1} - R'_k)^{n+1}; \\ 2A^{n+1} \cdot \epsilon_{RZ}^{n+1} &= \sum_{k=1}^N (u^{n+1})_{0k} (R'_{k-1} - R'_k)^{n+1} + \\ &+ \sum_{k=1}^N (u^{n+1})_{0k} (Z'_k - Z'_{k-1})^{n+1}; \\ \epsilon_{\theta}^{n+1} &= \sum_{k=1}^N [(u_R^{n+1})_{0k} \cdot (Z'_k - Z'_{k-1})^{n+1} + \\ &+ (u_Z^{n+1})_{0k} (R'_{k-1} - R'_k)] \left[ \frac{S_{k,k-1}^{n+1}}{l_{k,k-1}^{n+1}} - \frac{1}{\theta^{n+1}} - \frac{1}{A^n} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где  $l, s$  — длина и площадь поверхности соответственно, отвечающие ребру ячейки Дирихле.

### 4. Уравнение неразрывности. Использование уравнения неразрывности в форме

$$\frac{\rho^n - \rho^{n+1}}{r \rho^n} = \epsilon_{RR}^{n+1} + \epsilon_{ZZ}^{n+1} + \epsilon_{\theta}^{n+1} \quad (12)$$

резко ухудшает свойства разностной схемы. Во-первых, нарушается баланс массы, во-вторых, возникают колебания плотности, которые нельзя подавить с помощью искусственных сил.

Будем добиваться выполнения интегрального по области балансного соотношения

$$\sum_k \rho_k^{n+1} \theta_k^{n+1} = \sum_k \rho_k^n \theta_k^n \quad (13)$$

и вводить в формулы (11) модифицированные значения нормальных к ребрам ячейки Дирихле составляющих скорости. Идейная сторона вопроса, связанного с устранением колебаний, рассматривалась в [9].

Модификация скорости в направлении точки  $M_i$  вычисляется из соотношения

$$u'_{0i} = u_{0i}^{n+1} + k \cdot \left[ \frac{P_0^n - P_i^n}{l_{0i}^{n+1}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)_0^n + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)_i^n \right] \frac{l_{0i}^{n+1}}{a_{0i}^n}, \quad (14)$$

где  $l_{0i}$  — расстояние между точками  $M_0$  и  $M_i$ ; направление  $\vec{x}$  совпадает с направлением отрезка  $M_0 M_i$ ;  $k \leq 0,5$  — константа. Очень важно обеспечить одинаковую по модулю модификацию скорости для точки  $M_0$  и для точки  $M_i$ . Невыполнение этого требования имеет место в [7] и приводит к нарушению баланса (13).

Обозначим через  $\epsilon'_{ij}$  значения  $\epsilon_{ij}$ , вычисленные по формулам (11) с модифицированными значениями скорости на ребрах ячейки. Вместо уравнения неразрывности в форме (12) используем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\rho^n - \rho^{n+1}}{r \rho^n} &= (\epsilon'_{RR} + \epsilon'_{ZZ} + \epsilon'_{\theta})^{n+1} + \\ &+ k_1 r \left[ (\epsilon'_{RR})^2 + (\epsilon'_{ZZ})^2 + (\epsilon'_{\theta})^2 \right]^{n+1} + 2k_1 r \left[ \epsilon'_{RZ} \right]^{2n+1} + \\ &+ k_2 \left[ |\epsilon'_{RR} - \epsilon'_{RR}| + |\epsilon'_{ZZ} - \epsilon'_{ZZ}| + |\epsilon'_{\theta} - \epsilon'_{\theta}| \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнение (15) аппроксимирует дифференциальное уравнение с порядком  $O(r, h)$ . Значения констант  $k_1, k_2$  ограничены по модулю единицей. Если при  $k_2 = 0$  соотношение (15) выполняется с  $|k_1| < 1$ , то  $k_2 = 0$ .

5. Уравнение энергии. Идеология вычисления дивергента тензора напряжений по известному тензору скоростей деформаций совпадает с идеологией методики

СПРУТ [6]. Так же, как в [6], вычисляется приращение внутренней энергии  $\Delta E_s$ , связанное с работой девиатора напряжений на сдвиге ( $\Delta E_s = r E_s$ ). Приращение внутренней энергии за счет работы искусственных сил определяется по формулам, соответствующим уравнению (2), в котором искусственные силы на границе полагаются равными нулю

$$\Delta E_Q = \frac{r V^n}{2\theta_0^{n+1}} \sum_{k=1}^N s_{k,k-1}^{n+1} [(q_{\nu})_k (u_{\nu_0} - u_{\nu_k})^{n+1} + Q_{\nu} \phi_k (u_{\phi_0} - u_{\phi_k})^{n+1}]$$

где  $\vec{\phi}, \vec{\nu}$  - пара орт,  $\vec{\nu} \cdot \vec{M}_0 \vec{M}_k = 0$ ,  $\vec{\nu} \cdot \vec{\phi} = 1$ ;

$$q_{\nu k} = \begin{cases} \rho_0^n \Delta u_k^2 + \frac{1}{2} a_0^n \Delta u_k, & \text{если } \Delta u_k = u_{\nu_0}^{n+1} - u_{\nu_k}^{n+1} > 0; \\ 0, & \text{если } \Delta u_k \leq 0; \end{cases}$$

$$\frac{1}{4} a_0^n (u_{\phi_0}^{n+1} - u_{\phi_k}^{n+1}), \text{ если } \Delta u_k \leq 0,$$

$$Q_{\nu} \phi_k = \begin{cases} \left( \frac{1}{4} a_0^n + \frac{1}{2} \rho_0 \Delta u_k \right) (u_{\phi_0}^{n+1} - u_{\phi_k}^{n+1}), & \text{если } \Delta u_k > 0. \end{cases}$$

В результате, вычисление  $E^{n+1}, P^{n+1}$  идет по схеме

$$E_1^n = E^n - P^n (V^{n+1} - V^n) + \Delta E_S + \Delta E_Q;$$

$$P_1^n = f(\rho^{n+1}, E_1^n);$$

$$E^{n+1} = E^n - \frac{1}{2} (P_1^n + P^n) (V^{n+1} - V^n) + \Delta E_S + \Delta E_Q;$$

$$P^{n+1} = f(\rho^{n+1}, E^{n+1}).$$

#### 6. Шаг по времени

$$r_i = \frac{A_i}{\max_{j,k} l_{jk} (c_l)_i + \max_k \{0, u_{\nu_i} - u_{\nu_k}\}}, \quad 0,9$$

$$r = \min_i r_i,$$

где  $l_{jk}^2 = (R'_j - R'_k)^2 + (Z'_j - Z'_k)^2$ ;  $c_l$  - скорость продольных волн.

#### Пример численного решения

В качестве примера приведем решение задачи Шульца [10]. На внешней границе эллипса (рис. 4;  $Z$  - ось симметрии;  $R$  - плоскость симметрии) приложено давление, изменяющееся по закону:

$$P = \begin{cases} t, & t \leq 5, \\ 5, & t > 5. \end{cases}$$

В области находится газ с уравнением состояния

$P = \frac{\rho E}{3}$  и начальными параметрами  $\rho_0 = 200$ ,  $E_0 = 0$ . Начальная сетка ячеек Дирихле представлена на рис. 4

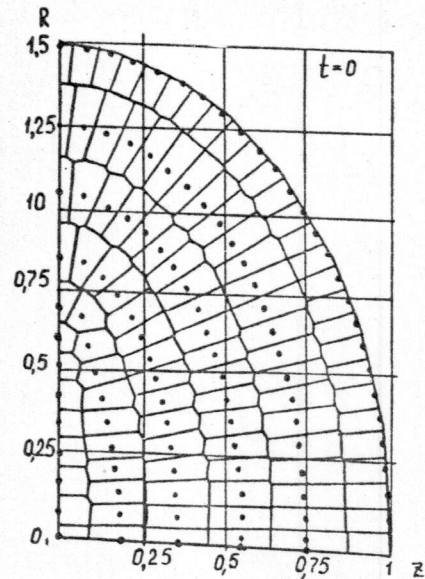


Рис. 4. Начальная геометрия задачи Шульца

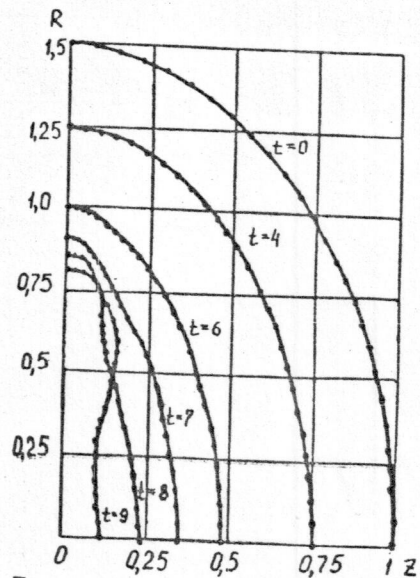


Рис. 5. Положение внешней границы на различные моменты времени

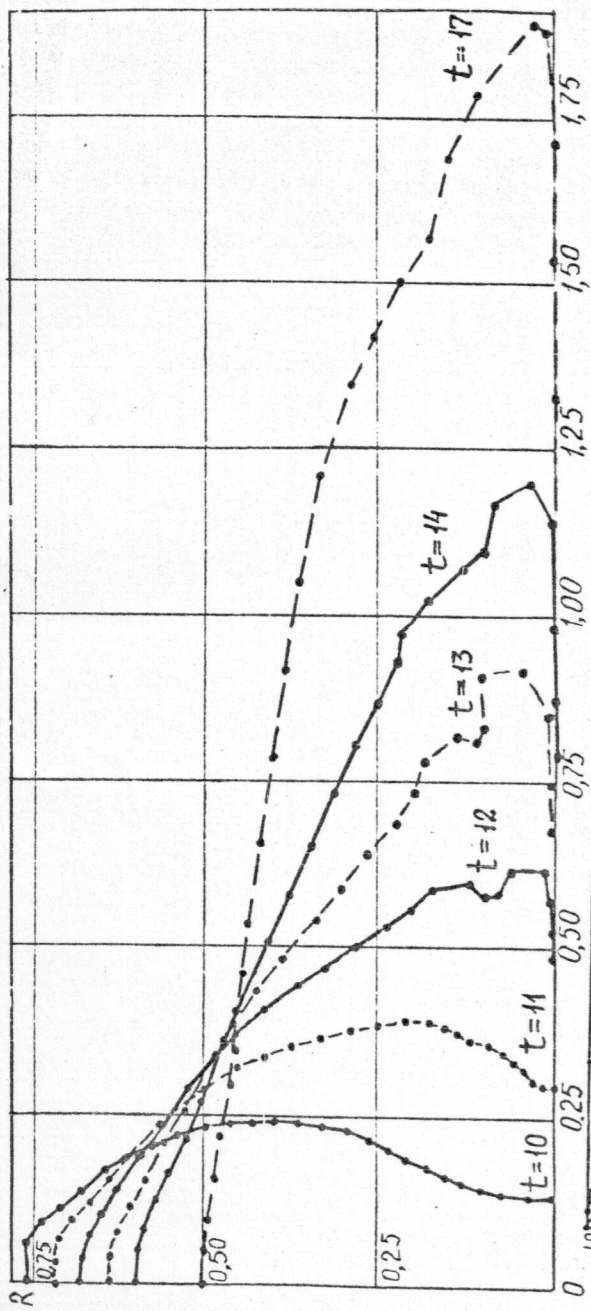


Рис. 6. Положение внешней границы на различные моменты времени

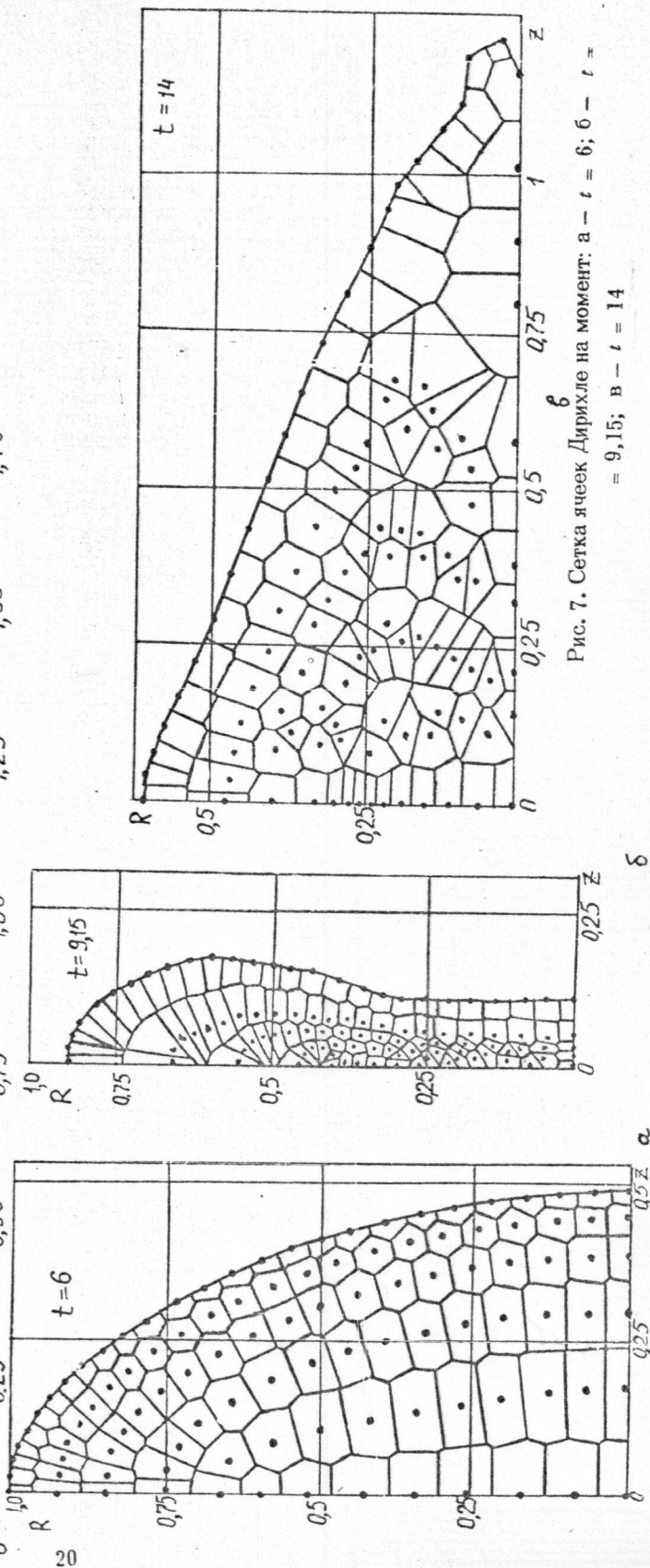


Рис. 7. Сетка ячеек Дирихле на момент: а -  $t = 6$ ; б -  $t = 9,15$ ; в -  $t = 14$



В области взято 103 точки, 43 из них граничные. Число точек близко к числу узлов, использованному в расчетах по лагранжевым методикам на регулярной сетке [6,10]. Параметры  $k_1$  и  $k_2$  полагались равными нулю, баланс массы (13) не был нарушен. На рис. 5,6 показано положение внешней границы области в различные моменты времени. Максимальное сжатие  $\delta = 20$  наступает в момент  $t = 9,15$ . Из рис. 6 видно, что в промежуток  $t \in [11, 12]$  формируется выход внешней границы на ось симметрии. Рассчитать такое движение по регулярной методике не удается. В процессе расчета две граничные точки в окрестности оси  $Z$  были объединены с соседними, а две внутренние точки вышли на ось  $R$  и стали граничными. Эти операции осуществлялись автоматически. Время счета задачи до момента  $t = 17$  составило 40 мин. на ЭВМ БЭСМ-6. На рис. 7 показана сетка ячеек Дирихле в различные моменты времени.

Решение качественно хорошо согласуется с численными решениями, полученными по методикам [6,10] вплоть до момента максимального сжатия. Затем возникает качественное различие в районе оси симметрии, речь о котором шла выше.

#### Список литературы

1. Дьяченко В.Ф. Об одном новом методе численного решения нестационарных задач газовой динамики с двумя пространственными переменными // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1965. Т. 5, № 4. С. 680-688.
2. Pasta J.R., Ullam S. Heuristic numerical work in some problems of hydrodynamics // Math. Tables Aids Comput. 1959. 13.

3. Глаголева Ю.П., Жогов Б.М., Кирьянов Ю.Ф., Мальшаков В.Д., Нестеренко Л.В., Подливаев И.Ф., Софронов И.Д. Основы методики "Медуза" численного расчета двумерных нестационарных задач газодинамики // Числ. методы мех. сплош. среды. 1972. Т. 2, № 3. С. 18-55.

4. Sofronov I.D., Rasskazova V.V., Nesterenko L.V. The use of nonregular nets for solving two-dimensional nonstationary problems in gas dynamics // Numerical Methods in Fluid Dynamics. Moscow: Mir. 1984.

5. Михайлова Н.В., Тишкин В.Ф., Тюрин А.Н., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Численное моделирование двумерных газодинамических течений на лагранжевой сетке переменной структуры: Препринт № 156, М.: ИПМ АН СССР, 1984.

6. Быченков В.А., Гаджиева В.В. Метод СПРУТ расчета двумерных неустановившихся течений разрушаемых сред // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1978. Вып. 2(2). С. 17-22.

7. Clark R.A. Compressible lagrangian hydrodynamics without lagrangian cells // Lect. Notes Phys. 1985. N 238. P. 281-294.

8. Trease H.E. Three-dimensional free lagrangian hydrodynamics // Lect. Notes Phys. 1985. N 238. P. 145-157.

9. Мухин С.П., Попов С.Б., Попов Ю.П. О разностных схемах с искусственной дисперсией // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1983. Т. 23, № 6. С. 1355-1369.

10. Шульц У.Д. Двумерные конечно-разностные гидродинамические уравнения в переменных Лагранжа // Вычислительные методы в гидродинамике / М.: Мир, 1967. С. 9-54.

Статья поступила в редколлегию 24.03.87,  
в редакцию 08.06.87.