ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1960

Том 133, № 4

Доклады Академии наук СССР
1960. Том 133, № 4

ГИДРОМЕХАНИКА

В. Ф. КУРОПАТЕНКО

МЕТОД РАСЧЕТА УДАРНЫХ ВОЛН

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 16 XII 1959)

Для нахождения разрывных решений уравнений газодинамики

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x},$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{1}$$
$$\frac{\partial E}{\partial t} = -P\frac{\partial V}{\partial t},$$
$$P = f(E, V),$$

где u — скорость, P — давление, V — удельный объем, E — внутренняя энергия, $f(E, V)$ — произвольная функция, широко используются разностные методы так называемого «сквозного» счета ([1-3]), не выделяющие на сетке точек, покрывающей область интегрирования системы (1), особых точек, в которых функции u, P, V, E терпят разрыв.

В настоящем сообщении мы предлагаем метод расчета разрывных решений системы (1), не выделяющий особо разрывов и таким образом относящийся к методам «сквозного» счета, но использующий в то же время для вычислений условия Гюгонио

$$\overline{V} - V_0 = \frac{1}{w}(\overline{u} - u_0),$$
$$\overline{u} - u_0 = \frac{1}{w}(\overline{P} - P_0), \tag{2}$$
$$\overline{E} - E_0 = {}^1/_2(\overline{P} + P_0)(V_0 - \overline{V}),$$

справедливые только на разрывах. Здесь $\overline{u}$, $\overline{P}$, $\overline{V}$, $\overline{E}$ характеризуют состояние вещества за фронтом, а u_0, P_0, V_0, E_0 — перед фронтом ударной волны, w — скорость ударной волны.

Разобьем область интегрирования системы (1) сеткой на слои (интервалы) массой $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, N)$. Будем определять u на границах интервалов (в точках с целыми индексами), а величины P, V, E — в центрах интервалов (в точках с половинными индексами). Каждый интервал при этом характеризуется двумя значениями скорости u (на правой и левой границах) и значениями P, ρ, E.

Все интервалы разделим на два класса. К первому классу отнесем интервалы, характеризуемые условием

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \geqslant 0,$$

ко второму — характеризуемые условием

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} < 0.$$

Приближенное решение в интервалах первого класса назовем **элементарной волной разрежения**, в интервалах второго класса — **элементарной ударной волной**.

В случае, когда $\Delta u / \Delta x < 0$, разность $u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}$ будем рассматривать как разрыв скорости на элементарной ударной волне, а значения $P_{i+1/2}^n$, $V_{i+1/2}^n$, $E_{i+1/2}^n$ как значения соответствующих величин перед фронтом элементарной ударной волны в интервале $i + 1/2$.

Решая для элементарной ударной волны в интервале $i + 1/2$ систему (2) по известным $P_0 = P_{i+1/2}^n$, $V_0 = V_{i+1/2}^n$, $E_0 = E_{i+1/2}^n$ и по величине $\bar{u} - u_0 = \pm (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1})$, определим $\overline{P}_{i+1/2}^{n+1}$, $\overline{V}_{i+1/2}^{n+1}$, $\overline{E}_{i+1/2}^{n+1}$. Определенное таким образом значение давления $\overline{P}_{i+1/2}^{n+1}$ в дальнейшем используется для вычисления $E_{i+1/2}^{n+1}$, $P_{i+1/2}^{n+1}$.

Окончательно мы приходим к следующим разностным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}
u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\tau}{h}\left(\overline{P}_{i+1/2}^n - \overline{P}_{i-1/2}^n\right) \\
V_{i+1/2}^{n+1} &= V_{i+1/2}^n + \frac{\tau}{h}\left(u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}\right), \\
E_{i+1/2}^{n+1} &= E_{i+1/2}^n + 1/2\left(\overline{P}_{i+1/2}^n + \overline{P}_{i+1/2}^{n+1}\right)\left(V_{i+1/2}^n - V_{i+1/2}^{n+1}\right), \\
P_{i+1/2}^{n+1} &= f\left(E_{i+1/2}^{n+1},\ V_{i+1/2}^{n+1}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Величина $\overline{P}_{i+1/2}^{n+1}$ определяется следующим образом:

1) Если $\dfrac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{x_{i+1} - x_i} \geqslant 0$, то $\overline{P}_{i+1/2}^{n+1} = P_{i+1/2}^{n+1}$.

2) Если $\dfrac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{x_{i+1} - x_i} < 0$, то $\overline{P}_{i+1/2}^{n+1}$ находится решением системы

$$\begin{gathered}
\left(\overline{P}_{i+1/2}^{n+1} - P_{i+1/2}^n\right)\left(V_{i+1/2}^n - \overline{V}_{i+1/2}^{n+1}\right) - \left(u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}\right)^2 = 0, \\
\overline{E}_{i+1/2}^{n+1} - E_{i+1/2}^n - 1/2\left(P_{i+1/2}^n + \overline{P}_{i+1/2}^{n+1}\right)\left(\overline{V}_{i+1/2}^{n+1} - V_{i+1/2}^n\right) = 0, \\
\overline{P}_{i+1/2}^{n+1} = f\left(\overline{E}_{i+1/2}^{n+1},\ \overline{V}_{i+1/2}^{n+1}\right).
\end{gathered}$$

При использовании предлагаемого метода любая ударная волна автоматически заменяется конечным числом элементарных ударных волн (ударным слоем).

Траектория рассчитываемой ударной волны определяется как траектория элементарной ударной волны, принадлежащей ударному слою, на которой величина $\overline{P} - P$ достигает максимального значения, а разрывы u, P, V, E на рассчитываемой ударной волне определяются как разности соответствующих величин, взятых на правой и левой границах ударного слоя.

Вычислительный процесс является устойчивым при условии

$$\tau \leqslant \frac{h}{c},$$

где c — скорость звука.

С помощью данного метода были проведены многочисленные расчеты. Часть из них сравнивалась с точными решениями, часть с приближенными решениями, полученными методом характеристик. Совпадение результатов было вполне удовлетворительным.

Выражаю благодарность Н. Н. Яненко за ряд весьма ценных критических замечаний.

Поступило
18 XI 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Neumann, R. Richtmyer, J. Appl. Phys., 21, 232 (1950). [2] P. Lax, Comm. on Pure and Appl. Math., 7, № 1, 159 (1954). [3] С. К. Годунов, УМН, 12, в. 1 (73), 176 (1957).