

# ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

---

СЕРИЯ:

Математическое моделирование  
физических процессов

ВЫПУСК 3

2001

УДК 519.6

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ВДУВА НА ПОТОК ВОЗЛЕ ОБТЕКАЕМОГО ТЕЛА

В.Ф. Куропатенко, И.И. Кузнецова, И.Р. Макеева,  
А.С. Мурашко, В.Н. Уваров  
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Рассматривается задача о влиянии периодического вдува воздуха через узкую щель на обтекаемом теле на характеристики течения. Движение воздуха через щель организовано так, что вдув чередуется с отсосом. Для решения задачи применены две новые разностные схемы. Расчеты обтекания проводились в двумерной постановке. Обсуждаются характеристики разностных схем, в том числе монотонность, диссипация энергии и дистракция разрывов.

### Введение

Методы расчета обтекания летательных аппаратов развиты достаточно хорошо [1]. Однако в некоторых случаях, например при исследовании вихревых трансзвуковых течений, которые являются наиболее сложными и требуют максимальной ответственности при проектировании летательных аппаратов, возникают затруднения. Требования к точности математического эксперимента непрерывно повышаются, что вызывает потребность в более точных методах расчета. В последние годы предпочтение стало отдаваться алгоритмам, архитектура которых допускает распараллеливание для использования на многопроцессорных ЭВМ. При этом, как и всегда, алгоритмы сравниваются по точности, экономичности, дистракции разрывов, уровню диссипации, монотонности и консервативности. Как правило, априорные оценки разных качеств алгоритмов проверяются путем расчетов эталонных задач.

В работе представляются две новые разностные схемы для расчета обтекания тел сложной формы в двумерной постановке. Одна из них обладает нулевой диссипацией энергии на гладких решениях и минимальной дистракцией и осцилляцией на сильных разрывах.

Исследуется влияние периодического вдува воздуха через узкую щель на обтекаемом теле на характеристики течения возле него. Движение воздуха через щель организовано так, что вдув чередуется с отсосом.

### Постановка задачи

Рассматривается обтекание сверхзвуковым потоком газа изолированных тел различной формы. Для описания течения исходные дифференциальные уравнения берутся в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{U} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \operatorname{div} \rho \vec{U} + (\rho \vec{U} \nabla) \vec{U} + \operatorname{grad} P - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{S}_i}{\partial x_i} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} (\vec{U} (P + \rho \varepsilon)) - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{S}_i \vec{U}) = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\rho$  — плотность;  $\vec{U}$  — скорость;  $\varepsilon$  — полная удельная энергия,  $\varepsilon = E + 0,5U^2$ , где  $E$  — удельная внутренняя энергия;  $P$  — давление;  $t$  — время;  $\vec{S}_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) — вязкие напряжения, действующие вдоль осей  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$ ,

$$\vec{S}_1 = S_{11}\vec{i} + S_{12}\vec{j} + S_{13}\vec{k},$$

$$\vec{S}_2 = S_{21}\vec{i} + S_{22}\vec{j} + S_{23}\vec{k},$$

$$\vec{S}_3 = S_{31}\vec{i} + S_{32}\vec{j} + S_{33}\vec{k}.$$

Система законов сохранения (1)–(3) замыкается уравнением состояния (УРС)

$$P = P(\rho, E)$$

и уравнениями для компонент девиатора тензора вязких напряжений, которые в случае двух пространственных переменных имеют вид

$$\begin{aligned} S_{11} &= 2\mu \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{U} \right); & S_{22} &= 2\mu \left( \frac{\partial U_2}{\partial x_2} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{U} \right); \\ S_{33} &= 2\mu \left( \frac{U_2}{x_2} \alpha - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{U} \right); & S_{21} = S_{12} &= \mu \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha = 0$  в случае плоского течения,  $\alpha = 1$  в случае течения с осевой симметрией;  $\mu$  — коэффициент вязкости.

Рассматриваемая задача может иметь разнообразные особенности в виде сильных или слабых разрывов. Постановка задачи может усложняться за счет появления в потоке газа возмущений и образования пограничного слоя. Для скоростей движения газа, сравнимых со скоростью звука или не слишком превосходящих ее, воздух можно рассматривать как однородную среду. Для рассмотрения же движения газа в пограничных слоях при гиперзвуковых скоростях, сопровождающихся мощным разогревом газа, следует учитывать тот факт, что воздух превращается в многокомпонентную смесь газов, динамика и термодинамика которых требуют значительно более сложного анализа, чем в случае однородного идеального газа.

Для расчета течений используются однородные разностные схемы. Для описания диссипации энергии на ударных волнах применяется метод В.Ф. Куропатенко.

Расчет каждого временного шага разбивается на два этапа [1,2].

Первый этап — лагранжев. Здесь рассчитываются изменения за время  $\tau$  плотности, импульса и энергии для каждой лагранжевой частицы, а также ее перемещение. Законы сохранения на лагранжевом этапе после введения субстанциональной производной

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 U_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

принимают вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{U} = 0; \tag{4}$$

$$\rho \frac{d\vec{U}}{dt} + \operatorname{grad} P - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{S}_i}{\partial x_i} = 0; \tag{5}$$

$$\rho \frac{dE}{dt} + P \operatorname{div} \vec{U} - \sum_{i=1}^3 \vec{S}_i \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} = 0. \tag{6}$$

Уравнения (4)–(6) допускают следствие

$$\rho \frac{dE}{dt} - \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - \sum_{i,j=1}^3 S_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = 0,$$

которое с учетом того, что  $\rho = \frac{1}{V}$ , может быть записано в виде

$$\frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} - V \sum_{i,j=1}^3 S_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = 0.$$

Второй этап — эйлеров. Рассчитываются параметры вещества в эйлеровых сеточных объемах с использованием величин, определенных на лагранжевом этапе.

#### Явные лагранжево-эйлеровы разностные схемы

Ниже приведены разностные уравнения на косоугольном (методика ЛЭМ) и прямоугольном (методика КАМА) шаблонах.



Разностные уравнения методики на косоугольном шаблоне. В методике ЛЭМ на лагранжевом этапе для определения величин применяются уравнения, в основном совпадающие с уравнениями метода Уилкинса [3]. Многие из этих уравнений используются в методике СПРУТ [4].

Рассмотрим фрагмент сеточного шаблона, изображенный на рис. 1.

Скорости и координаты определяются в вершинах четырехугольных ячеек, термодинамические величины являются средними по ячейке и условно относятся к центрам тяжести ячеек. Для каждой ячейки определяются площадь  $S$  и объем  $\theta$  вращения ячейки вокруг оси  $Ox_1$ . Формулы определения  $S$  и  $\theta$  по координатам вершин здесь не приводятся ввиду их широкой известности [5]. Масса плоской фигуры и масса тела вращения определяются просто:

$$m_A = \rho_A S_A; \quad M_A = \rho_A \theta_A.$$

Для определения ускорений вершин ячеек скалярные уравнения движения интегрируются по контуру, проходящему через их центры, с последующим применением теоремы о среднем. В результате для центрального узла шаблона получаются уравнения

$$\frac{dU_x}{dt} = -\frac{1}{\Phi^n} \left[ \sigma_{xxA} (y_2 - y_4) + \sigma_{xxB} (y_4 - y_6) + \sigma_{xxC} (y_6 - y_8) + \sigma_{xxD} (y_8 - y_2) - \sigma_{xyA} (x_2 - x_4) - \sigma_{xyB} (x_4 - x_6) - \sigma_{xyC} (x_6 - x_8) - \sigma_{xyD} (x_8 - x_2) \right]^n + \beta_x^n, \quad (7)$$

$$\frac{dU_y}{dt} = \frac{1}{\Phi^n} \left[ \sigma_{yyA} (x_2 - x_4) + \sigma_{yyB} (x_4 - x_6) + \sigma_{yyC} (x_6 - x_8) + \sigma_{yyD} (x_8 - x_2) - \sigma_{xyA} (y_2 - y_4) - \sigma_{xyB} (y_4 - y_6) - \sigma_{xyC} (y_6 - y_8) - \sigma_{xyD} (y_8 - y_2) \right]^n + \beta_y^n. \quad (8)$$

Здесь

$$\Phi = 0,25 \sum_{\ell} m_{\ell}, \quad (9)$$

$$\beta_x^n = 0,25\alpha \sum_{\ell} \left( \sigma_{xy} \frac{S}{M} \right)_{\ell}^n, \quad (10)$$

$$\beta_y^n = 0,25\alpha \sum_{\ell} \left[ (\sigma_{yy} - \sigma_{\theta\theta}) \frac{S}{M} \right]_{\ell}^n, \quad \ell = A, B, C, D. \quad (11)$$

Значения  $\sigma_{ij}^n$  ( $i, j$  — обозначения координатных осей), входящие в (7)–(11), включают в себя компоненты дивергента тензора напряжений  $S_{ij}$  и динамическое давление  $\bar{P}$ , равное  $P$  на волнах разрежения и рассчитываемое как давление за фронтом ударной волны на волнах сжатия:

$$\sigma_{ij}^n = S_{ij} - (\bar{P}^n) \delta_{ij}^n, \quad (12)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Скорости в момент  $t^{n+1}$  в точке 1 рассчитываются по уравнениям

$$U_x^{n+1} = U_x^n + \tau \frac{dU_x}{dt}; \quad U_y^{n+1} = U_y^n + \tau \frac{dU_y}{dt}.$$

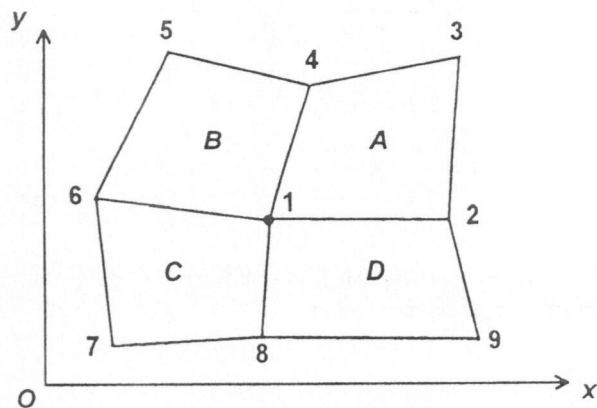


Рис. 1. Фрагмент косоугольного сеточного шаблона

Координаты точки 1 в момент  $t^{n+1}$  рассчитываются по уравнениям

$$x_1^{n+1} = x_1^n + U_x^{n+1} \tau; \quad y_1^{n+1} = y_1^n + U_y^{n+1} \tau.$$

После нахождения координат точек с номерами 1, 2, 3, 4 на момент  $t^{n+1}$  вычисляется площадь  $S_A^{n+1}$  и объем  $\theta_A^{n+1}$  ячейки  $A$  и определяются средняя плотность и удельный объем:

$$\rho_A^{n+1} = \frac{\rho_A^n \theta_A^n}{\theta_A^{n+1}}; \quad V_A^{n+1} = \frac{1}{\rho_A^{n+1}}.$$

На следующем этапе рассчитываются компоненты дивергента тензора вязких напряжений, давление или динамическое давление, которое берется в форме, получаемой из соотношений на ударной адиабате [6]. Динамическое давление определяется по формулам, приведенным ниже.

Сначала рассчитывается среднее время распространения акустического сигнала по ячейке:

$$\Delta t = K_1 \frac{\sqrt{S_A^n}}{C_A^n},$$

где  $C_A^n$  — скорость звука в ячейке  $A$  в момент  $t^n$ . Затем рассчитываются координаты вершин ячейки,

$$x_l^* = x_l^n + U_{x_l}^{n+1} \Delta t, \quad y_l^* = y_l^n + U_{y_l}^{n+1} \Delta t, \quad l = 1, 2, 3, 4,$$

ее площадь  $S_A^*$  и объем  $\theta_A^*$ , после чего определяются

$$V_A^* = \frac{\theta_A^*}{\rho_A^n \theta_A^n};$$

$$B_A = \frac{|V_A^* - V_A^n| 2K_2}{V_A^* + V_A^n K_1};$$

$$\bar{P}_A^{n+1} = P_A^n + \frac{\rho_A^n (C_A^n)^2 B_A}{K_2} \left( B_A + \sqrt{1 + B_A^2} \right).$$

Константы  $K_1$  и  $K_2$  выбираются близкими к 0,5 и 1 соответственно.

Входящие в уравнения для физической вязкости производные компонент скорости по координатам аппроксимируются следующими разностными соотношениями:

$$\left( \frac{\Delta U_x}{\Delta x} \right)_A = \frac{[(U_{x2} - U_{x4})(y_3 - y_1) - (y_2 - y_4)(U_{x3} - U_{x1})]^{n+1}}{2S_A^{n+1}};$$

$$\left( \frac{\Delta U_x}{\Delta y} \right)_A = \frac{[(U_{x3} - U_{x1})(x_2 - x_4) - (x_3 - x_1)(U_{x2} - U_{x4})]^{n+1}}{2S_A^{n+1}};$$

$$\left( \frac{\Delta U_y}{\Delta x} \right)_A = \frac{[(U_{y2} - U_{y4})(y_3 - y_1) - (y_2 - y_4)(U_{y3} - U_{y1})]^{n+1}}{2S_A^{n+1}};$$

$$\left( \frac{\Delta U_y}{\Delta y} \right)_A = \frac{[(U_{y3} - U_{y1})(x_2 - x_4) - (x_3 - x_1)(U_{y2} - U_{y4})]^{n+1}}{2S_A^{n+1}}.$$

Если ввести разностный аналог производной  $\frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$

$$Z_A^{n+1} = \frac{|V_A^* - V_A^n|}{V_A^* + V_A^n} \frac{2C_A^n}{K_1 \sqrt{S_A^n}},$$

то компоненты физической вязкости  $S_{ij}$  можно записать в виде

$$S_{xx}^{n+1} = 2\mu \left[ \left( \frac{\Delta U_x}{\Delta x} \right)_A - \frac{1}{3} Z_A^{n+1} \right]; \quad S_{yy}^{n+1} = 2\mu \left[ \left( \frac{\Delta U_y}{\Delta y} \right)_A - \frac{1}{3} Z_A^{n+1} \right];$$

$$S_{xy}^{n+1} = \mu \left[ \left( \frac{\Delta U_x}{\Delta y} \right)_A + \left( \frac{\Delta U_y}{\Delta x} \right)_A \right]; \quad S_{\theta\theta}^{n+1} = 2\mu \left[ \frac{2}{3} Z_A^{n+1} - \left( \frac{\Delta U_x}{\Delta x} \right)_A - \left( \frac{\Delta U_y}{\Delta y} \right)_A \right].$$

Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  находятся по формулам (12) и уравнению, аппроксимирующему уравнение внутренней энергии,

$$E^{n+1} = E^n - 0,5 (\bar{P}^n + \bar{P}^{n+1}) (V^{n+1} - V^n) + \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} \epsilon_{ij} S_{ij}, \quad (13)$$

где

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{xx} = \frac{\Delta U_x}{\Delta x} \tau; \quad \epsilon_{22} = \epsilon_{yy} = \frac{\Delta U_y}{\Delta y} \tau; \quad \epsilon_{33} = \epsilon_{\theta\theta} = \frac{U_y}{y} \tau; \quad \epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \epsilon_{xy} = \left( \frac{\Delta U_x}{\Delta y} + \frac{\Delta U_y}{\Delta x} \right) \tau.$$

Давление удовлетворяет УРС

$$P = P(\rho, E). \quad (14)$$

Уравнения (13), (14) в общем случае образуют систему нелинейных уравнений.

На эйлеровом этапе происходит возвращение узлов разностной сетки в исходное положение, после чего осуществляется пересчет величин с лагранжевой сетки на эйлерову. В методике ЛЭМ уравнения эйлерова этапа в основном совпадают с [7].

Новая масса эйлеровой ячейки рассчитывается по формуле

$$M'_{A'} = \sum_{\ell} \rho_{C\ell} \theta_{n\ell},$$

где  $\theta_{n\ell} = \theta_{C\ell} \cap \theta_{A'}$ ,  $\ell$  — число ячеек лагранжевой сетки, имеющих общие части с эйлеровой ячейкой  $A'$  (рис. 2);  $\theta_{C\ell}$  — объем лагранжевой ячейки;  $\theta_{A'}$  — объем эйлеровой ячейки;  $\rho_{C\ell}$  — плотность вещества в лагранжевой ячейке. При пересчете скоростей, внутренней энергии и компонентов тензора вязких напряжений используем аналогичные формулы:

$$\begin{aligned} (MU_x)_{A'} &= \sum_{\ell} (\rho_{C\ell} U_{x\ell}) \theta_{n\ell}; & (MU_y)_{A'} &= \sum_{\ell} (\rho_{C\ell} U_{y\ell}) \theta_{n\ell}; \\ (ME)_{A'} &= \sum_{\ell} E_{C\ell} \theta_{n\ell} \rho_{C\ell}; & (\theta S_{ij})_{A'} &= \sum_{\ell} S_{ij} \theta_{n\ell}. \end{aligned}$$

Окончательный расчет параметров потока на момент времени  $t^{n+1} = t^n + \tau$  для эйлерова этапа производится по формулам

$$\begin{aligned} \rho_{A'}^{n+1} &= \frac{M_{A'}}{\theta_{A'}}; & E_{A'}^{n+1} &= \frac{(ME)_{A'}}{M_{A'}}; \\ U_{xA'}^{n+1} &= \frac{(MU_x)_{A'}}{M_{A'}}; & U_{yA'}^{n+1} &= \frac{(MU_y)_{A'}}{M_{A'}}; \\ S_{ijA'}^{n+1} &= \frac{S_{ij} \theta_{A'}}{\theta_{A'}}; & P_{A'}^{n+1} &= P(\rho_{A'}^{n+1}, E_{A'}^{n+1}). \end{aligned}$$

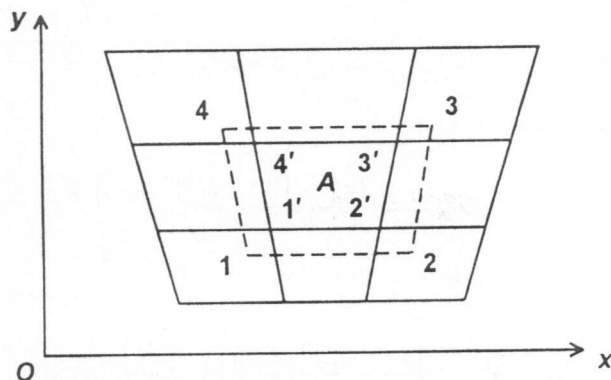


Рис. 2. Шаблон для пересчета масс на эйлеровом этапе для ячейки  $A$ : 1, 2, 3, 4 — вершины ячейки  $A$ , полученные на лагранжевом этапе; 1', 2', 3', 4' — вершины исходной эйлеровой ячейки  $A'$

Разностные уравнения методики на прямоугольном шаблоне. Все величины, описывающие состояние и движение вещества определяются в серединах прямоугольных ячеек, образуемых линиями  $x_i = \text{const}$ ,  $y_j = \text{const}$  ( $0 \leq i \leq N$ ,  $0 \leq j \leq K$ ). Фрагмент такой сетки, называемой сеткой первого уровня, изображен на рис. 3.

Контактные границы (КГ), имеющиеся в области интегрирования, образуют линии, налагаемые на указанную сетку. КГ, проходя через ячейку, делит ее на две части. Для расчетов величин на КГ применяются уравнения, отличные от уравнений в регулярных точках.

Для повышения точности расчетов в случае больших значений производных в некоторой ячейке эта ячейка делится на 4 ячейки, которые образуют сетку второго уровня. Элемент такой сетки изображен на рис. 3 в ячейке  $i + 1, 5$ ,  $j - 0, 5$ . Возможны сетки третьего, четвертого и более высоких уровней. В случае расчета имплозии сжатие вещества в локальных областях может достигать значений  $5 \div 10$ , что и определяет уровень дробления.

Расчеты начинаются с ячеек самого высокого уровня, затем рассчитываются ячейки по ниспадающему уровню. Сначала рассчитываются вспомогательные величины. Поскольку ячейка ограничена четырьмя ребрами, то вспомогательные величины рассчитываются в четырех точках — серединах этих ребер.

Рассмотрим ячейку  $i + 0, 5$ ,  $j + 0, 5$  (рис. 4) как центральный элемент сеточного шаблона. Перенумеруем все вершины ячейки целыми числами 1, 2, 3, 4, а середины ребер дробными (1, 5; 2, 5; 3, 5; 4, 5). Сердину рассматриваемой ячейки обозначим буквой  $O$ , а середины окружающих ячеек буквами  $A, B, C, D$ . Кроме того, перенумеруем середины ребер окружающих ячеек цифрами от 5 до 12.

Рассмотрим алгоритм расчета вспомогательных величин  $U_{x2,5}^*$ ,  $P_{2,5}^*$  (в точке 2,5). Предварительно определим класс интервала  $OA$ . Если  $U_{xA} - U_{xO} < 0$ , то интервал отнесем к первому классу, если  $U_{xA} - U_{xO} \geq 0$ , — ко второму.

Для интервала первого класса

$$U_{x2,5}^* = U_{xO}^n, \quad P_{2,5}^* = P_A^n - W(U_{xA}^n - U_{xO}^n), \quad \text{если } P_O^n > P_A^n; \quad (15)$$

$$U_{x2,5}^* = U_{xA}^n, \quad P_{2,5}^* = P_O^n - W(U_{xA}^n - U_{xO}^n), \quad \text{если } P_O^n \leq P_A^n. \quad (16)$$

Значение  $W$  определяется из уравнений Гюгоню, в которых состояние с меньшим давлением берется в качестве состояния перед разрывом, а разность  $|U_A^n - U_O^n|$  полагается равной скачку скорости на разрыве.

Для интервала второго класса

$$U_{x2,5}^* = U_{x2,5}^n - \frac{\tau}{2h} (P_A^n - P_O^n); \quad (17)$$

$$P_{2,5}^* = \frac{P_A^n + P_O^n}{2} - \frac{\tau [(a_O^n)^2 + (a_A^n)^2]}{4h} (U_{xA}^n - U_{xO}^n), \quad (18)$$

где

$$U_{x2,5}^n = \frac{(a_A^n)^2 U_{xA}^n + (a_O^n)^2 U_{xO}^n}{(a_A^n)^2 + (a_O^n)^2}; \quad h = (x_A^n - x_O^n) \frac{\rho_A^n + \rho_O^n}{2}; \quad (19)$$

$a$  — массовая скорость звука, определяемая уравнением  $a^2 = - \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_s$ .

Аналогично рассчитываются величины  $U_x^*$ ,  $P^*$  в точках 4,5; 5; 6; 9; 10.

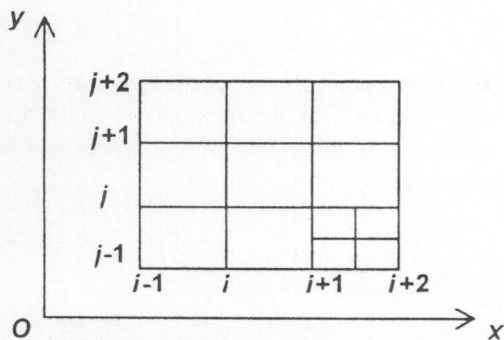


Рис. 3. Фрагмент прямоугольной сетки

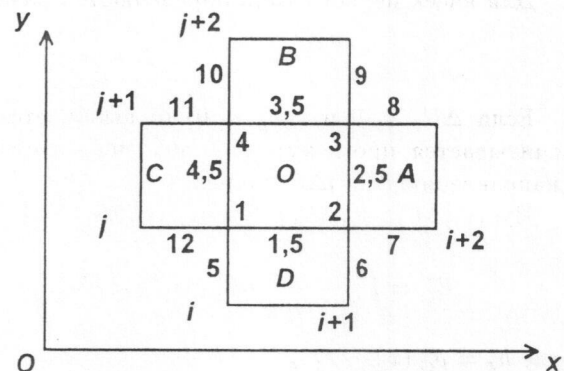


Рис. 4. Рассчитываемая ячейка и ее окружение



Если взять интервал  $OB$  вместо  $AO$  и вместо  $U_x$  взять  $U_y$ , то после соответствующего переобозначения величин с помощью уравнений (15)–(19) найдем  $U_y^*$ ,  $P^*$  в точках 1,5; 3,5; 7; 8; 11; 12.

В вершинах 1, 2, 3, 4 ячейки  $O$  с помощью интерполяций найдем

$$\begin{aligned} U_{x1}^* &= \frac{1}{2} (U_{x4,5}^* + U_{x5}^*); & U_{x2}^* &= \frac{1}{2} (U_{x2,5}^* + U_{x6}^*); \\ U_{x3}^* &= \frac{1}{2} (U_{x2,5}^* + U_{x9}^*); & U_{x4}^* &= \frac{1}{2} (U_{x4,5}^* + U_{x10}^*); \\ U_{y1}^* &= \frac{1}{2} (U_{y1,5}^* + U_{y12}^*); & U_{y2}^* &= \frac{1}{2} (U_{y1,5}^* + U_{y7}^*); \\ U_{y3}^* &= \frac{1}{2} (U_{y3,5}^* + U_{y8}^*); & U_{y4}^* &= \frac{1}{2} (U_{y3,5}^* + U_{y11}^*). \end{aligned}$$

На этом расчет вспомогательных величин заканчивается, после чего проводится расчет основных величин. Новые координаты вершин для  $k = 1, 2, 3, 4$  рассчитываются по формулам

$$x_k^{n+1} = x_k^n + U_{xk}^* \tau; \quad y_k^{n+1} = y_k^n + U_{yk}^* \tau.$$

По координатам вершин определяется площадь ячейки  $O$  в момент времени  $t^{n+1}$ :

$$S_O^{n+1} = 0,5 \left[ x_1^{n+1} (y_2^{n+1} - y_4^{n+1}) + x_2^{n+1} (y_3^{n+1} - y_1^{n+1}) + x_3^{n+1} (y_4^{n+1} - y_2^{n+1}) + x_4^{n+1} (y_1^{n+1} - y_3^{n+1}) \right].$$

Из закона сохранения массы находится плотность:

$$\rho_O^{n+1} = \rho_O^n \frac{S_O^n}{S_O^{n+1}}.$$

Значения компонент скорости в точке  $O$  находятся из уравнений

$$\begin{aligned} U_{xO}^{n+1} &= U_{xO}^n - \frac{\tau}{h_{xO}} (P_{2,5}^* - P_{4,5}^*); \\ U_{yO}^{n+1} &= U_{yO}^n - \frac{\tau}{h_{yO}} (P_{3,5}^* - P_{1,5}^*). \end{aligned}$$

В конце лагранжева этапа рассчитывается внутренняя энергия в момент  $t^{n+1}$ . Для этого определяется тип ячейки. Если  $\rho_O^{n+1} > \rho_O^n$ , то ячейка относится к первому типу (сжатие), если  $\rho_O^{n+1} \leq \rho_O^n$ , — ко второму (разрежение).

В случае разрежения внутренняя энергия и давление определяются системой уравнений изэнтропы:

$$\begin{aligned} E_O^{n+1} &= E_O^n - \int_V^{V^{n+1}} P(V, E) dV; \\ P &= P(V, E). \end{aligned}$$

Для ячеек первого типа определяются разности скоростей:

$$\Delta U_x = U_{x2,5}^* - U_{x4,5}^*; \quad \Delta U_y = U_{y3,5}^* - U_{y1,5}^*.$$

Если  $\Delta U_x < 0$  и  $\Delta U_y < 0$ , то выбирается наибольшая по модулю разность скоростей, после чего рассчитывается промежуточное значение энергии в предположении, что сжатие происходит только по тому направлению, где  $|\Delta U|$  больше.

Пусть  $|\Delta U_x| > |\Delta U_y|$ . Тогда промежуточное значение энергии находится из уравнения

$$E_O^* = E_O^n - \frac{\tau}{2h_x} (P_{2,5}^* + P_{4,5}^*) (U_{x2,5}^* - U_{x4,5}^*) - \frac{1}{2} (U_{xO}^{n+1} - U_{xO}^n) (U_{x2,5}^* - U_{x4,5}^* + U_{xO}^{n+1} - U_{xO}^n), \quad (20)$$

где  $h_x = \rho_O^n (x_2^n - x_1^n)$ .

Далее рассчитывается окончательное значение внутренней энергии



$$E_O^{n+1} = E_O^* - \frac{\tau}{2h_y} (P_{3,5}^* + P_{y1,5}^*) (U_{3,5}^* - U_{y1,5}^*) - \frac{1}{2} (U_{yO}^{n+1} - U_{yO}^n) (U_{y3,5}^* - U_{y1,5}^* + U_{yO}^{n+1} - U_{yO}^n),$$

где  $h_y = \rho_O^n (y_3^n - y_2^n)$ .

Если одно из значений  $\Delta U_x$  или  $\Delta U_y$  больше нуля, то рассчитываются промежуточные значения плотности, энергии и давления в предположении, что сжатие происходит только по направлению, где  $\Delta U < 0$ .

Предположим, что  $\Delta U_x < 0$ . Тогда

$$V_O^* = V_O^n + \frac{\tau}{h_x} (U_{x2,5}^* - U_{x4,5}^*).$$

Промежуточное значение внутренней энергии  $E_O^*$  рассчитывается по уравнению (20), а давление  $P_O^*$  — по УРС. Далее по изэнтропе рассчитывается новое значение энергии  $E_O^{n+1}$ :

$$E_O^{n+1} = E_O^* - \int_{V^n}^{V^{n+1}} P(V, E) dV, \quad P = P(V, E).$$

Методика КАМА подробно изложена в [8].

### Моделирование развития малых возмущений в потоке возле жесткой стенки

Рассчитывалась задача о развитии вносимых через щель периодических возмущений газа при обтекании пластины (рис. 5). На рисунке отрезок  $DE$  обозначает щель, через которую осуществлялось возмущение потока воздуха, отрезки  $OD$  и  $EC$  — жесткую стенку. Геометрические размеры системы задавались в миллиметрах:  $OA = 150$ ;  $OC = 300$ ;  $OD = 90$ ;  $DE = 1$ .

Для данной задачи было проведено несколько расчетов. Расчеты отличались друг от друга геометрическими размерами системы, формой, периодичностью, амплитудой вносимых возмущений, УРС для воздуха, значениями скорости набегающего потока.

Первоначально в расчетах использовался УРС в виде

$$P = (\gamma - 1)\rho E$$

и возмущение моделировалось изменением давления в отдельно взятой ячейке на оси  $Ox$  по формуле

$$P = P^{n+1} + \Delta P,$$

где  $\Delta P = kP_0 \sin \omega t$ ,  $\omega$  — частота пульсаций,  $P_0$  — начальное давление в системе,  $k$  — задаваемый параметр.

На рис. 6 приведены изолинии давления для одного из расчетов.

В последующих расчетах УРС для газа брался в форме

$$P = P_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$$

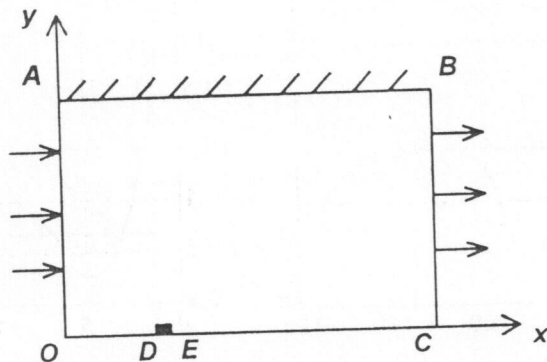


Рис. 5. Геометрия системы

и возмущение моделировалось с помощью периодического притока и оттока массы через щель по формуле

$$\Delta m = \tau \sin \omega t \cdot U_b \rho,$$

где  $\tau$  — временной шаг;  $t$  — время в микросекундах;  $\omega = \frac{\pi}{25}$ , что соответствует частоте пульсаций 20 кГц;  $U_b$  — задаваемая скорость возмущения.

Исследовалось решение для двух вариантов задачи о развитии возмущений с различными числами Маха  $M$  для набегающего потока. В первом варианте с целью получения оценки погрешности применяемой методики при расчете развития цилиндрических возмущений бралась покоящаяся среда ( $M = 0$ ). Второй вариант был предназначен для оценки развития периодического возмущения в движущейся среде ( $M = 2$ ).

Анализ результатов расчетов для  $M = 0$  показал, что возмущения сохраняют симметричность во времени. Отличие в счетных величинах составляет не более 1% (рис. 7-9).<sup>\*</sup> Эти данные позволяют сделать вывод о том, что лагранжево-эйлерова методика ЛЭМ применима для использования в расчетах данного класса задач.

Результаты серии расчетов для варианта с  $M = 2$  и различными параметрами возмущения показали, что происходит зарождение и развитие вихрей. Это отчетливо видно на графиках с изолиниями функции  $F = \text{rot } \vec{U}$ . На рис. 10, 11 представлены результаты некоторых расчетов, демонстрирующие распространение вносимых возмущений в потоке.

<sup>\*</sup> Всюду в подписях к рисункам  $T$  означает период гармонического возмущения,  $U_\infty$  — скорость набегающего невозмущенного потока.

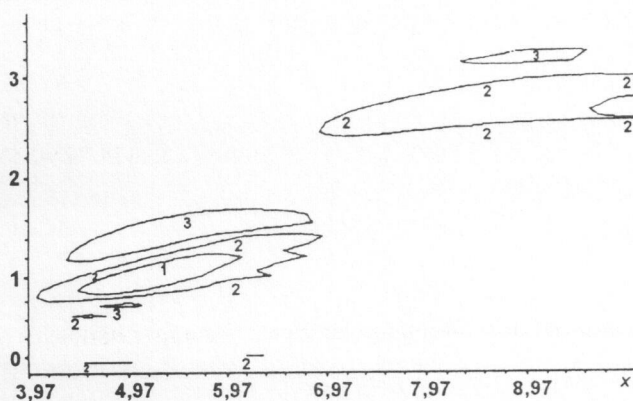


Рис. 6. Изолинии  $P$ ,  $P = (\gamma - 1)\rho E$

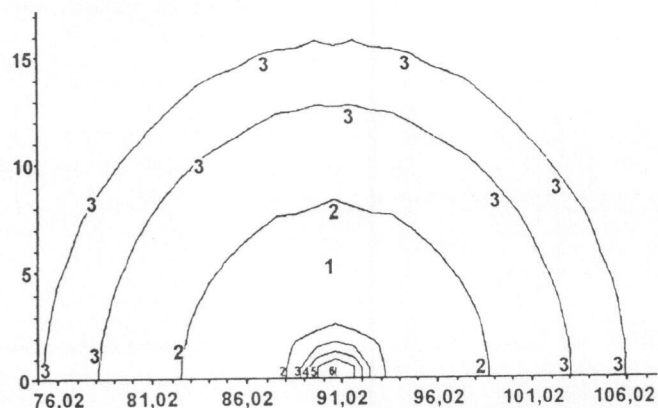


Рис. 7. Изолинии  $P$  для расчета с щелью,  $M = 0$  ( $t = 1T$ )

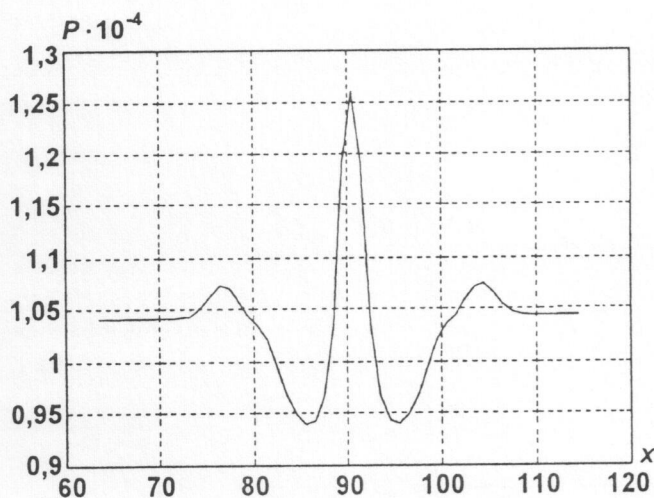


Рис. 8. Зависимость  $P(x)$  при  $y = 0$  для расчета с щелью,  $M = 0$

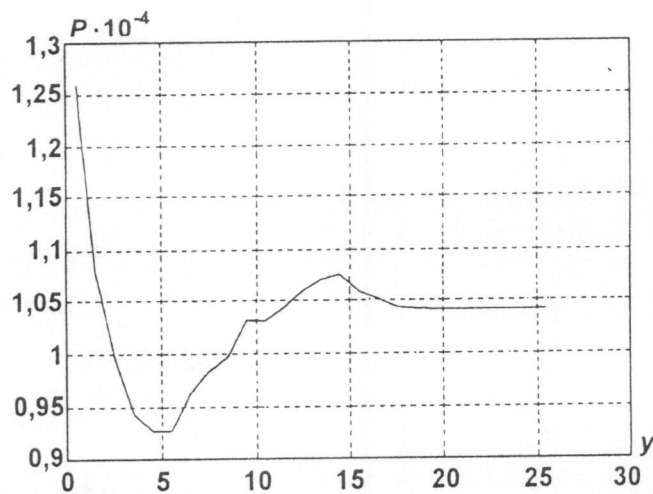


Рис. 9. Зависимость  $P(y)$  при  $x = 90,5$  для расчета с щелью,  $M = 0$

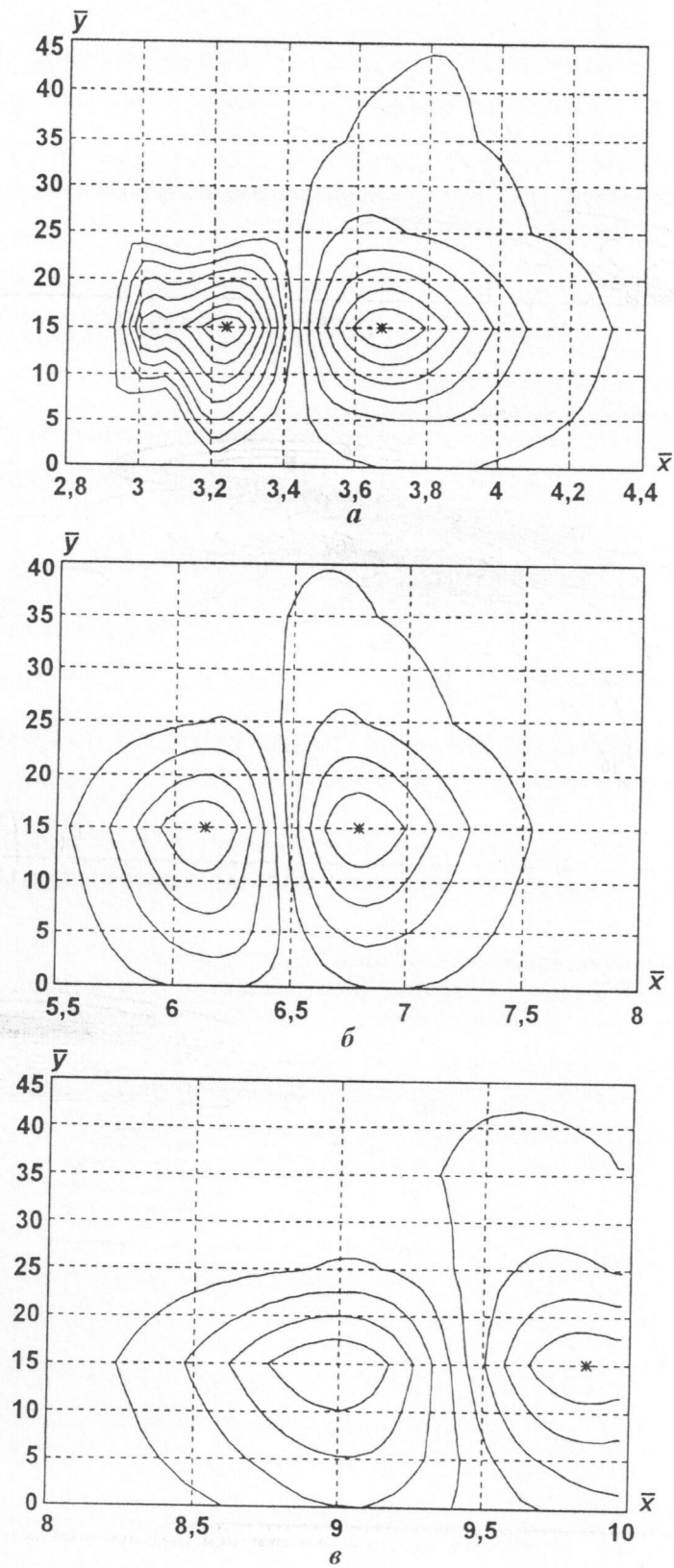


Рис. 10. Изолинии  $F = \text{rot } \vec{U}$  в расчетах с  $M = 2$  ( $\bar{x} = \frac{x}{U_\infty T}$ ,  $\bar{y} = \frac{y}{0,1}$ ): а -  $t = 1T$ ; б -  $t = 4T$ ; в -  $t = 7T$

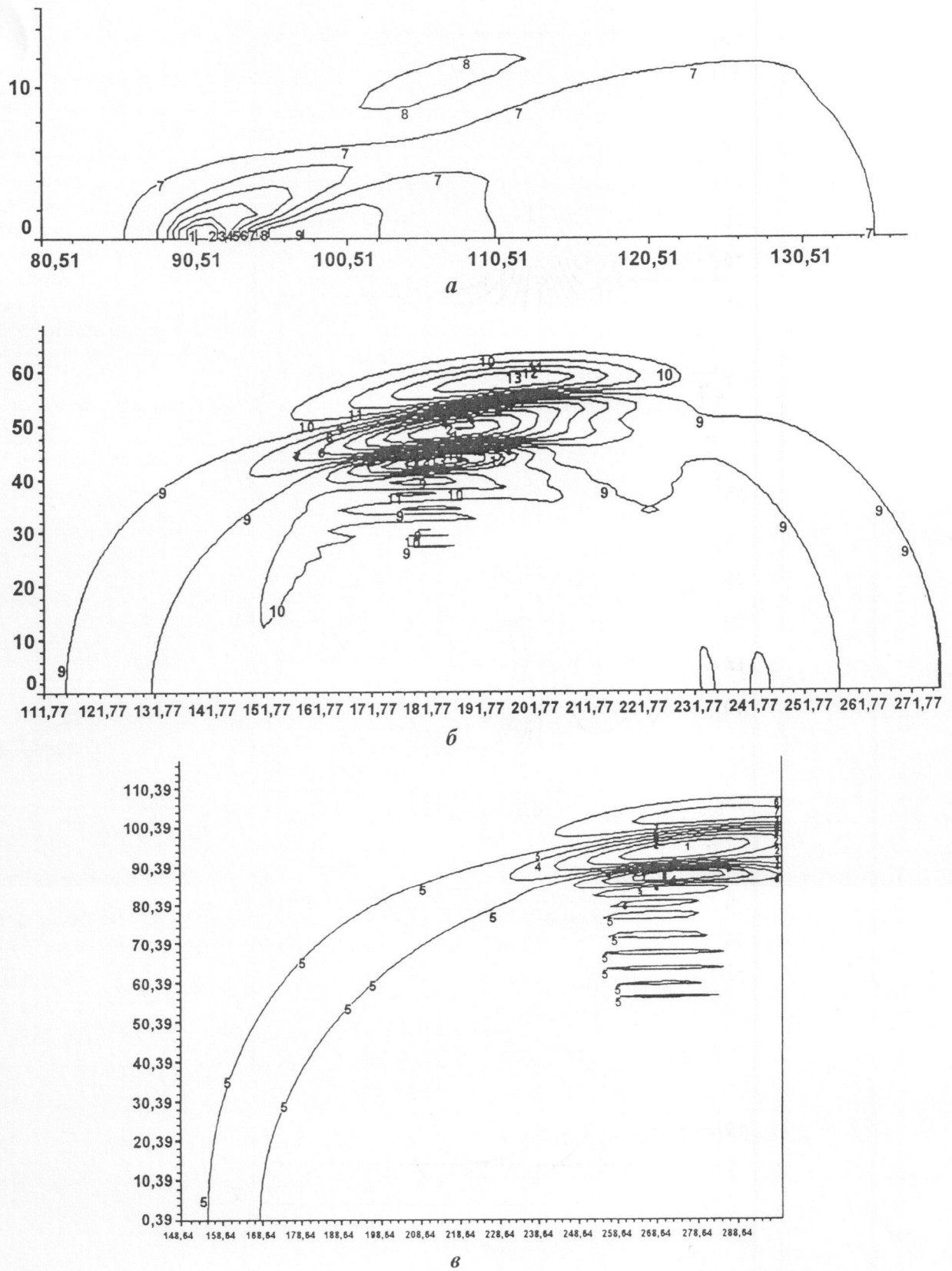


Рис. 11. Изолинии  $P$ ,  $M = 2$ :  $a - t = 1T$ ;  $б - t = 4T$ ;  $в - t = 7T$



### Заключение

Предложенный В.Ф. Куропатенко метод расчета задач в эйлеровых координатах [1,2] реализован в виде двух разностных схем — ЛЭМ и КАМА.

Разностная схема КАМА на лагранжевом этапе обладает минимальной дистракцией и осцилляцией на разрывах и обеспечивает нулевую диссипацию энергии на непрерывных решениях. Прямоугольность ячеек сетки делает алгоритм чрезвычайно простым. Контактные границы выделяются отрезками прямых, которые как бы шарнирно соединены с линиями регулярной сетки. В областях больших градиентов с целью ограничения погрешностей аппроксимации строятся сетки второго, третьего и более высоких уровней (по необходимости).

Разностная схема ЛЭМ на лагранжевом этапе идейно близка к одной из первых в СССР разностных схем, созданной в 1955 г. и реализующей метод Неймана-Рихтмайера в случае двух пространственных переменных [9]. Принципиальное отличие заключается в использовании уравнений, выражающих законы сохранения на сильных разрывах, для определения динамического давления и описания диссипации энергии.

Результаты расчетов влияния малых пульсирующих возмущений на параметры потока возле обтекаемого тела указывают на плодотворность применяемого подхода к построению разностных схем.

### Список литературы

1. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982.
2. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.
3. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967.
4. Быченков В.А., Гаджиева В.В. Метод СПРУТ расчета двумерных неустановившихся течений разрушаемых сред // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1978. Вып. 2(2). С. 17-22.
5. Бронштейн А.Н., Семендяев К.Д. Справочник по математике. М.: Гостехиздат, 1955.
6. Куропатенко В.Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики // Тр. Матем. инст. им. В.А. Стеклова. 1966. Т. 74. С. 107-137.
7. Сучков В.А., Уваров В.Н. Организация сервисного обслуживания двумерных программ для решения нестационарных задач МСС на базе стандартного разреза // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1985. Вып. 1. С. 43-48.
8. Makeeva I.R. Computational technique for shock waves with heightened monotonicity // International Conference "Shock Waves in Condensed Matter". Saint-Petersburg, 1998.
9. Дмитриева Л.В., Дмитриев Н.А., Малиновская Е.В., Софронов И.Д. Методика расчета двумерных нестационарных задач газодинамики в переменных Лагранжа: Препринт № 59. М.: ИПМ АН СССР, 1976.