

Цитированная литература

1. Л. А. Оганесян. Сходимость вариационно-разностных схем при улучшенной аппроксимации границы. Докл. АН СССР, 1966, 170, № 1, 41—44.
2. Г. П. Астраханцев. Конечноразностный метод решения третьей краевой задачи для эллиптических и параболических уравнений в произвольной области. Итерационное решение разностных уравнений. I. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, 11, № 1, 105—120.
3. J.-P. Aubin. Approximation des problèmes aux limites non homogènes et régularité de la convergence. Div. Math. Sci. Purdue Univ. Lafayette, Indiana, 47907 USA 1969.

УДК 518:517.9:532

О НЕКОТОРЫХ ЯВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ  
ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

В. В. ГАДЖИЕВА, В. Ф. КУРОПАТЕНКО

(Челябинск)

Предлагается метод построения явных разностных схем, не имеющих ограничений на отношение шагов. Результат достигается путем увеличения числа точек на нижнем слое для обеспечения устойчивости при заданном отношении шагов.

Ряд практически важных задач не может быть решен с помощью обычных явных разностных схем из-за ограничений, налагаемых на шаг по времени  $\tau$  условием устойчивости. В настоящее время такие задачи решаются по неявным разностным схемам, как правило, безусловно устойчивым. Однако неявные схемы имеют ряд недостатков. В нелинейном случае они требуют линеаризации разностных уравнений и введения итераций, что усложняет алгоритм и увеличивает время счета. При этом возникает вопрос о сходимости итерационного процесса. Кроме того в двумерном, трехмерном и т. д. случаях для решения задачи необходимы специальные приемы типа метода расщепления.

В настоящей статье рассматривается метод построения явных разностных схем для уравнений гидродинамики, лишенный указанных выше недостатков и не имеющих ограничений на  $\tau/h$ . Суть метода в том, что каждая из входящих в уравнения производных по пространственной координате  $\partial f/\partial x$  аппроксимируется разностным отношением  $(1/h)(f_i^* - f_{i-1}^*)$ , а вспомогательные величины  $f^*$  определяются суммированием величин  $f$  с весами  $\beta$  на известном шаге. Число слагаемых в суммах выбирается так, чтобы разностная схема была устойчива для любых  $\tau$  и  $h$ . Иными словами, условие устойчивости трансформируется в условие выбора числа слагаемых в выражении для  $f^*$ . При определенном числе слагаемых и некотором выборе весовых функций разностная схема оказывается безусловно устойчивой и гибкой.

Рассмотрим уравнения неразрывности и движения для плоского одномерного случая:

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial m} = 0,$$

где  $dm = \rho dx$ . В соответствии с [1] аппроксимируем эти уравнения разностными уравнениями

$$(1) \quad \frac{1}{\tau}(U_i^{n+1} - U_i^n) + \frac{1}{h}(P_{i+0.5}^{\circ} - P_{i-0.5}^{\circ}) = 0,$$

$$(2) \quad \frac{1}{\tau}(V_{i-0.5}^{n+1} - V_{i-0.5}^n) - \frac{1}{h}(U_i^{\circ} - U_{i-1}^{\circ}) = 0.$$

Вспомогательные величины  $P^*$ ,  $U^*$ , входящие в уравнения (1) и (2), будем вычислять по формулам

$$U_i^* = 0.5 \left( \beta_0 U_i^n + \sum_{v=-k_1}^{k_2} \beta_v U_{i+v}^n \right), \quad (3)$$

$$P_{i-0.5}^{*'} = 0.5 \left( \beta_0 P_{i-0.5}^{n+1} + \sum_{v=-k_1}^{k_2} \beta_v P_{i-0.5+v}^{n+1} \right),$$

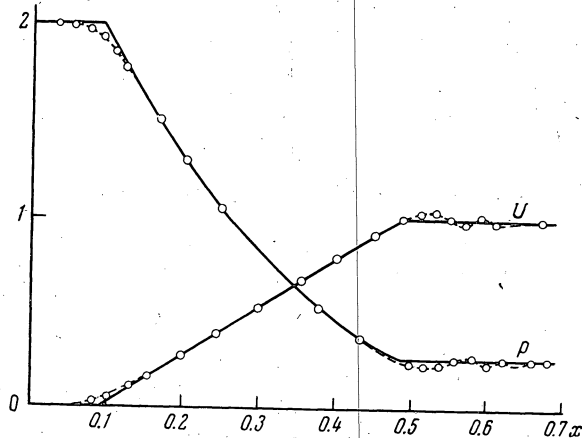
где

$$\beta_v = \frac{h_{i-0.5+v}}{\tau a_{i-0.5+v}}, \quad a^2 = - \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_s$$

Число слагаемых в суммах (3) находится из условий

$$(4) \quad \sum_{v=0}^{k_1-1} \beta_{-v} < 1 \leq \sum_{v=0}^{k_1} \beta_{-v}, \quad \sum_{v=0}^{k_2-1} \beta_v < 1 \leq \sum_{v=0}^{k_2} \beta_v,$$

после чего слагаемые с индексами  $k_1$  и  $k_2$  подправляются для выполнения строгого равенства в правых частях соотношений (4).



В случае адиабатического течения уравнение энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

вместе с уравнением состояния  $P = P(V, E)$  интегрируется обычным способом вдоль изэнтропы.

Устойчивость этой схемы проверялась методом гармоник в акустическом случае и с помощью расчетов в нелинейном случае.

При отношении шагов  $\tau$  и  $h$  таком, что  $z = \tau a / h \leq 1$ , описанная схема совпадает со схемой II, приведенной в [1].

Легко проверить, что схема (1) — (4) имеет погрешность аппроксимации  $O(\tau + \tau h + h^2)$ .

Схема (1) — (4) применялась для решения ряда задач. На фигуре приводятся профили давления и скорости, полученные при расчете волны разрежения в веществе с уравнением состояния  $P = (\gamma - 1)\rho E$ ,  $\gamma = 3$ , начальными данными  $P_0 = 2$ ,  $\rho_0 = 1.5$ ,  $E_0 = 0.666$ ,  $U_0 = 0$  и краевыми условиями  $U(0, t) = 0$ ,  $U(1, t) = 1$ . Счет велся с  $z = \tau a / h = 2$ ,  $h = 0.02$ . Кроме того рассчитывалось распространение малых возмущений в покоящейся среде с параметрами:  $U_0 = 0$ ,  $\rho_0 = 1$ ,  $P_0 = 1$ ,  $E_0 = 0.5$ ,  $P = (\gamma - 1)\rho E$ ,  $\gamma = 3$ ,  $0 \leq m \leq 1$ . В трех точках ( $m = 0.25, 0.5, 0.75$ ) значения  $E_0$  и  $P_0$  отличались от указанных на 1%. Счет велся с  $z = 10$ ,  $h = 0.02$ . Через 20 шагов по времени возмущения «размазались» и амплитуда возмущений уменьшилась до 0.4%.

Авторы благодарят Г. И. Михайлову за составление программ и проведение расчетов.

Поступила в редакцию 12.02.1970  
Переработанный вариант 21.01.1971

#### Цитированная литература

1. В. Ф. Куропатенко. О разностных методах для уравнений гидродинамики. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1966, 74, 107—137.

УДК 518.5

### О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ОПЕРАЦИИ ЗАМЫКАНИЯ ПРИ АНАЛИЗЕ ГРАФОВ

В. В. МАРТЫНЮК

(Москва)

Предлагаются эффективные алгоритмы решения нескольких задач на графах, представляющих интерес в связи с параллельным программированием и некоторыми другими приложениями.

1. Пусть  $U = (G, \Gamma)$  — ориентированный граф, где  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$  — множество вершин, а  $\Gamma$  — отображение  $G$  в себя. Информация о графе  $U$  хранится в памяти машины в виде булевой квадратной матрицы смежности  $H = (h_{ij})$ , где

$$h_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если есть дуга из } g_i \text{ в } g_j, \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Мы кодируем всякое множество вершин  $X \subseteq G$  строкой, обозначаемой тем же символом  $X$  и состоящей из  $n$  двоичных разрядов, причем равенство  $i$ -го разряда строки  $X$  единице означает, что  $g_i \in X$ . Множество, состоящее из одной вершины  $g_i$ , обозначаем тем же символом  $g_i$ . Множество всех вершин графа  $U$ , не принадлежащих множеству  $X$ , обозначаем символом  $\bar{X}$ . Пустое множество обозначаем символом  $\Lambda$ .

В [1] для любых множеств  $X \subset G$  и  $Y \subset G$  определены операции построения множеств  $M(X, Y) \subseteq G$  и  $N(X, Y) \subseteq G$ ;  $M(X, Y)$  называется замыканием  $X$  относительно  $Y$ , а  $N(X, Y)$  — обратным замыканием  $X$  относительно  $Y$ .

Для всякой вершины  $g_i \in G$  выполняется отношение  $g_i \in M(X, Y)$  тогда и только тогда, когда существует непустой путь по графу  $U$  из какой-либо вершины  $g_j \in X$  в вершину  $g_i$ , причем между  $g_j$  и  $g_i$  на этом пути нет вершин из  $Y$ .

Аналогично, для всякой вершины  $g_i \in G$  выполняется отношение  $g_i \in N(X, Y)$  тогда и только тогда, когда существует непустой путь по графу  $U$  из вершины  $g_i$  в какую-либо вершину  $g_j \in X$ , причем между  $g_i$  и  $g_j$  на этом пути нет вершин из множества  $Y$ .

В [1] описан экономный алгоритм выделения множества  $M(X, Y)$  (и, аналогично,  $N(X, Y)$ ), для реализации которого требуется  $\approx c_1 k z$  машинных тактов, где