

Государственный комитет  
по использованию атомной энергии СССР

Центральный научно-исследовательский институт  
информации и технико-экономических исследований по атомной науке и технике

# ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

**Математическое моделирование  
физических процессов**

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 2

Издается с 1978 г.

Москва - 1989

КОМПЛЕКС ПРОГРАММ "ВОЛНА" И НЕОДНОРОДНЫЙ  
РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ДЛЯ РАСЧЕТА НЕУСТАНОВИВШИХСЯ  
ДВИЖЕНИЙ СЖИМАЕМЫХ СПЛОШНЫХ СРЕД.

ЧАСТЬ I. НЕОДНОРОДНЫЙ РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД

В.Ф. Куропатенко, Г.В. Коваленко, В.И. Кузнецова,  
Г.И. Михайлова, Г.Н. Сапожникова

Излагаются физическая и математическая модели, предназначенные для численного моделирования неустановившихся движений сплошных сред с учетом ряда физических процессов. Рассмотрен неоднородный разностный метод численного интегрирования системы законов сохранения. Применяемые разностные схемы являются явными. Приводятся условия устойчивости разностных уравнений и способы адаптации пространственных сеток к решению.

В в е д е н и е

Комплекс программ "Волна" предназначен для математического моделирования одномерных неустановившихся движений сжимаемых идеальных и неидеальных сред. Математическая модель в общем случае описывает такие движения, в которых свойства среды могут изменяться в широком диапазоне от упругих свойств при низких температурах до свойств фотонного газа при высоких температурах. Однако, когда диапазон изменения термодинамических величин оказывается небольшим, одни свойства среды проявляются сильно, а другие слабо. В таких случаях математическая модель настраивается на решение соответствующей частной задачи. В комплексе "Волна" моделируются следующие свойства среды: адиабатическая сжимаемость, теплопроводность, фазовые переходы (плавление, испарение, полиморфизм), детонация, упругость, пластичность, хрупкость, химические реакции в некоторых реагирующих

средах, разрушение твердых тел, пористость, трещиноватость твердых тел, электропроводимость, магнитные и электрические свойства. Если свойства среды определяются уравнениями не эволюционного типа, то они относятся к уравнениям состояния вещества. Неравновесные свойства описываются уравнениями эволюционного типа, дополняющими систему законов сохранения. Для численного интегрирования систем эволюционных уравнений разработан неоднородный разностный метод, выделяющий в решении существенные разрывы: сильные, слабые, контактные, линии фазовых переходов и т.д.

Физическая модель

Основу физической модели составляют дифференциальные уравнения в частных производных, являющиеся следствиями законов сохранения количества движения, энергии и массы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u^{n-1} \frac{\partial p}{\partial M} = \sum_k \varphi_k; \quad (I)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \sum_e Q_e; \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_N = u; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_t = v. \quad (3)$$

Здесь  $z$  — эйлера пространственная координата;  $t$  — время;  $u$  — скорость частиц вещества;  $\epsilon$  — удельная внутренняя энергия;  $\rho$  — плотность вещества;  $v = \frac{1}{\rho}$  — удельный объем вещества;  $P$  — давление;  $\alpha = 1, 2, 3$  в случае плоской, цилиндрической и сферической симметрии соответственно;  $\varphi_k$  — силы и  $Q_e$  — источники энергии, определяемые различными физическими процессами.

Система уравнений (1)–(3) замыкается уравнениями для  $\varphi_k$  и  $Q_e$  и уравнениями состояния

$$P = P(\rho, \epsilon, \phi); \quad T = T(\rho, \epsilon, \phi); \quad F = F(\rho, \epsilon, \phi),$$

где  $T$  — температура;  $\phi$  — номер фазы,  $F$  — функция, служащая для установления принадлежности точки  $(\rho, \epsilon)$  к фазе  $\phi$ .

В общем случае область интегрирования уравнений (1)–(3) состоит из нескольких областей, каждая из которых характеризуется своим уравнением состояния, скоростью и термодинамическими параметрами, заданными в начальный момент времени. Области отделены друг от друга контактными границами (КГ). На правой и левой границах области интегрирования ставятся крайние условия, которые для адиабатических движений идеальных сред имеют вид:  $u = u(t)$  или  $P = P(t)$ . Расширение рассматриваемых в задаче физических процессов производится путем добавления функции  $\varphi_k$  и задания дополнительных граничных условий. Функции  $u(t)$ ,  $P(t)$ ,  $T(t)$  и все другие граничные условия задаются в виде табличных или аналитических зависимостей от времени  $t$ .

Анализ решения задач механики сплошной среды позволяет выделить в них следующие элементы и элементарные решения: гладкое решение; сильный, слабый и контактный разрывы; фронт фазового превращения — сильный или слабый разрыв, на поверхности которого изменяется фаза; распад произвольного разрыва; возникновение сильного разрыва из первоначального гладкого решения; взаимодействие сильного разрыва с первоначально гладким решением.

Сильные разрывы разграничивают области с непрерывными решениями. Значения кинематических и термодинамических величин справа и слева в идеальной среде связаны между собой условиями Гюгонио

$$w[u] - [P] = 0;$$

$$w[v] + [u] = 0; \quad (4)$$

$$[\epsilon] + 0.5(\rho_+ + \rho_-)[v] = 0.$$

Квадратные скобки здесь и ниже означают разность  $[f] = f_+ - f_-$ . Величины со знаком "+" характеризуют вещество за разрывом, со знаком "-" — перед разрывом;  $w = dm/dt$  — скорость распространения разрыва относительно вещества.

Слабые разрывы характеризуются разрывом производных всех величин, в то время как сами величины остаются непрерывными. Уравнения, связывающие величины по обе стороны поверхности слабого разрыва, имеют вид:

$$\frac{\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]}{\left[\frac{\partial v}{\partial m}\right]} = \frac{\left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]}{\left[\frac{\partial p}{\partial m}\right]} = \frac{\left[\frac{\partial \epsilon}{\partial t}\right]}{\left[\frac{\partial \epsilon}{\partial m}\right]} = \frac{\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]}{\left[\frac{\partial u}{\partial m}\right]} = -w. \quad (5)$$

Контактными называются разрывы, покоящиеся относительно вещества. Условия на контактных разрывах следуют из (4) и (5) при  $w=0$  и имеют вид

$$u_+ = u_-; \quad P_+ = P_-; \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_+ = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_-; \quad \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_+ = \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_-. \quad (7)$$

#### Математическая модель

Потребность в создании неоднородных разностных методов, выделяющих в решении особенности разных типов, диктуется, во-первых, требованиями точности, во-вторых, соображениями экономичности. По сравнению с однородными методами расчета ударных волн (УВ), в которых сильные разрывы "размазываются" на 2–5 интервалов сетки, неоднородный метод имеет принципиально иную разрешающую способность и позволяет получать высокую точность на более грубой сетке, чем однородные методы.

Одним из первых неоднородных методов, применяемых для расчетов неустановившихся движений сплошных сред, был метод характеристик, достаточно подробно изложенный в работе [1]. Однако в силу своей логической сложности, значительных затруднений при расчетах движения сред со сложными уравнениями состояния, особенно сред с фазовыми переходами, и других присущих ему особенностей он не нашел широкого применения. В работах [2, 3] обсуждаются трудности, возникающие при создании не-

однородных разностных методов для решения задач гидродинамики, однако отсутствуют указания на существование достаточно универсального неоднородного разностного метода, способного рассчитывать скачки при произвольном изменении условия перед фронтом. В работе [4] изложен неоднородный метод расчета движения среды при сильном взрыве. В этом методе выделялась головная УВ, идущая по постоянному фону. В работе [5] изложена разностная схема для решения одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках с выделением некоторых особенностей. Многочисленные вопросы применения однородных и неоднородных разностных методов, их достоинства и недостатки обсуждаются в обзоре [6].

В основе разработки излагаемого неоднородного разностного метода лежало стремление с нужной точностью рассчитывать как все перечисленные выше решения, так и некоторые другие, возникающие, например, в веществах с невыпуклым уравнением состояния или с фазовыми переходами. Ниже рассматривается неоднородный разностный метод расчета движения сплошной среды с выделением всех типов разрывов в решении и использованием для их расчета алгебраических или дифференциальных уравнений - законов сохранения и их следствий, записанных для каждого типа разрыва. В случае необходимости имеется возможность выделять только "наиболее важных" разрывов. В этом случае для расчета "менее важных" особенностей применяется один из однородных разностных методов.

Разностные уравнения, аппроксимирующие исходные дифференциальные уравнения (1)-(3), существенно зависят от выбора сеток, на которых разыскиваются решения. В неоднородном разностном методе, реализованном в комплексе "Волна", для решения системы разностных уравнений используются регулярная сетка для областей интегрирования с гладкими решениями и "размазанными" особенностями и сетка особенностей, которая накладывается на регулярную сетку. При этом линии особенностей пересекают линии регулярной сетки и друг друга. Разделение сеток на регулярную сетку и сетку особенностей приводит к появлению следующих задач: построение разностной схемы для определения искомого величин на регулярной сетке; построение разностной схемы для определения искомого величин на сетке особенностей; построение разностной схе-

мы в ячейках регулярной сетки, примыкающих к линиям особенностей; построение решения задачи о распаде произвольного разрыва.

В случае непрерывных решения с непрерывными первыми производными уравнения (1)-(3) для идеальной среды аппроксимируются следующими разностными уравнениями:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{\alpha(\tau_i^n)^{\alpha-1} (\bar{p}_{i+0,5}^n - \bar{p}_{i-0,5}^n)}{a_{i,5}(M_{i+0,5} + M_{i-0,5})} = 0;$$

$$\frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\tau} - u_i^{n+1} = 0; v_{i+0,5} M_{i+0,5} = z_{i+1}^n - z_i^n;$$

$$E^{n+1} - E^n + 0,5(\bar{p}^n + \bar{p}^{n+1})(V^{n+1} - V^n) = 0.$$

Если у всех входящих в уравнения величин верхние или нижние индексы одинаковы, то они опускаются. На волнах разрежения (ВР), где  $u_{i+1} - u_i \geq 0$ , считаем, что диссипация энергии отсутствует и полагаем  $\bar{p} = p$ . На "размазанных" УВ сжатия рассчитывается динамическое давление с привлечением уравнений (4). Определив величины  $p, v, E, u, z$  и  $w$  на сетке, из (4) получим

$$\bar{p}_{i+0,5}^{n+1} = p_{i+0,5}^n - w_{i+0,5} (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}). \quad (8)$$

С помощью известного в механике линейного  $\mathcal{D}(u)$  уравнения уравнение (8) преобразуется к виду

$$\bar{p}_{i+0,5}^{n+1} = p_{i+0,5}^n + (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) (a_{i+0,5}^n - \lambda p_{i+0,5}^n (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1})),$$

где  $\lambda = const$ . Свойства этого метода подробно исследованы в работах [7,8].

На сильных разрывах параметры среды находятся из системы (4), в которой состояние перед разрывом предполагается известным. Система (4) вместе с уравнением состояния состоит из четырех уравнений с пятью неизвестными  $p, v, E, u, w$ . Это значит, что решение может быть найдено, если к указанным уравнениям добавить еще одно. В работе [9] изложен один из методов расчета величин на сильных разрывах. Суть его состоит в выводе уравнения, содержащего скорости изменения величин вдоль поверхности сильного разрыва:

$$\frac{d[p]}{dt} + \frac{a_+^2}{w} \frac{d[u]}{dt} + A = 0,$$

где

$$A = \frac{(\alpha-1)u_+ v_+ a_+^2}{z} + \frac{(a_+^2 - w^2)}{w} \frac{\alpha \tau^{\alpha-1} dp}{dM} + \frac{dp}{dt} + \frac{a_+^2}{w} \frac{du_-}{dt}.$$

Для скорости УВ уравнение имеет вид

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{[u]} \left( \frac{a^2}{w} + w \right) \frac{d[u]}{dt} + A = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) аппроксимируется разностным уравнением

$$\frac{w^{n+1} - w^n}{\tau} + \frac{1}{[u^n]} \left( \frac{a^2}{w} + w \right)^n \frac{[u^{n+1}] - [u^n]}{\tau} + A = 0.$$

Применение этого уравнения приводит к появлению дополнительного условия устойчивости.

Разностные схемы, включенные в неоднородный разностный метод, являются явными и имеют первый порядок аппроксимации по времени и второй порядок по пространственной координате на равномерной сетке. Выбор явных разностных схем был сделан в связи с тем, что при наличии двух типов взаимодействующих сеток весьма затруднительно построение неявных разностных уравнений и их решение в окрестности линий особенностей и на них. В тех задачах, где явные схемы оказываются неэкономичными (при наличии воздушных зазоров, тонких покрытий для изоляции химически активных материалов и т.д.), применяется явная безусловно устойчивая разностная схема, описанная в работах [10, 11].

#### Распад произвольного разрыва

Решение задачи о распаде произвольного разрыва заключается в отыскании такой совокупности устойчивых разрывов, которая позволяет с помощью условий на них связать значения всех характеристик среды справа и слева от поверхности произвольного разрыва. В системе образовавшихся устойчивых разрывов обязательно присутствует контактный разрыв, на котором давление и скорость принимают значения  $P_k, U_k$ . Чтобы обеспечить непрерывность  $P$  и  $U$  на контактном разрыве, нужно, чтобы правое вещество претерпело изменения от состояния с параметрами  $P_n, U_n$  до состояния с параметрами  $P_k, U_k$  и соответственно левое - от  $P_n, U_n$  до  $P_k, U_k$ . В этом рассмотрении участвуют только  $P$  и  $U$ , поскольку только они удовлетворяют на контактном разрыве условиям (6). Вещество с нормальными свойствами может быть приведено в состояние  $P_k, U_k$  либо скачком (сильный разрыв), либо непрерывно (ВР, ограниченная слабыми разрывами). Если же в пространстве термодинамических функций есть области, в которых выпуклость изэнтроп обращена в сторону больших давлений  $\left( \left( \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_s < 0 \right)$ , то в таком ве-

ществе возможны скачки разрежения и волны сжатия, в которых все величины непрерывны. Таким образом, чтобы задача о распаде произвольного разрыва была решена правильно, необходим анализ свойств веществ, в которых образуются новые разрывы. Это делает задачу о распаде произвольного разрыва чрезвычайно сложной.

В зависимости от типа разрыва уравнения, связывающие величины по обе стороны от поверхности разрыва, принимают разную форму. На сильном разрыве они имеют вид (4). Для простых уравнений состояния зависимость  $P$  от  $U$  может быть получена в аналитической форме. Так, для уравнения состояния

$$P = (\gamma - 1) \rho E + C_{ок}^2 (\rho - \rho_{ок}) \quad (10)$$

зависимость  $P$  от  $U$  имеет вид

$$P = P_+ + \frac{\gamma + 1}{4} \rho_+ (U_+ - U_-)^2 + \sqrt{\left( \frac{\gamma + 1}{4} \rho_+ (U_+ - U_-)^2 \right)^2 + (a_+ (U_+ - U_-))^2},$$

где  $a_+^2 = (\gamma P_+ + \rho_{ок} C_{ок}^2) \rho_+$ . Для сложных уравнений состояния зависимость  $P$  от  $U$  получается численно.

Если вещество непрерывно переводится из одного состояния в другое, связь между  $P$  и  $U$  в конечном состоянии получается после интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего изменение  $P$  и  $U$  вдоль характеристики  $cdU \pm dP = 0$ . В случае сложных уравнений состояния это уравнение интегрируется численно. В случае же уравнения состояния (10) зависимость  $U(P)$  на ВР получается в виде

$$U - U_- + \frac{2}{\gamma - 1} \rho_-^{-0.5} \left( \gamma P_- + \rho_{ок} C_{ок}^2 \right)^{0.5} \left( \left( \frac{\gamma P_+ + \rho_{ок} C_{ок}^2}{\gamma P_- + \rho_{ок} C_{ок}^2} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} - 1 \right) = 0.$$

Поскольку  $P$  и  $U$  непрерывны на КГ, то  $P_k$  и  $U_k$  находятся как координаты точки пересечения двух кривых в плоскости  $P, U$ , проходящих через точки, характеризующие начальное правое (П) и начальное левое (Л) состояния вещества до распада разрыва.

В общем случае задача о распаде разрыва решается численно. Значения  $P_k$  и  $U_k$  находят как решение уравнения  $F(U_k) = P_{кн}(U_k) - P_{лн}(U_k)$ , где  $P_{кн}$  и  $P_{лн}$  определяются зависимостями  $P(U)$  для веществ, лежащих слева и справа от контактного разрыва.

Для веществ с выпуклыми уравнениями состояния после распада разрыва в каждом направ-

лени распространяются либо один сильный, либо два слабых разрыва. Большое количество разрывов может возникнуть либо в веществе с локально невыпуклым уравнением состояния, либо при наличии изломов изэнтроп.

Учет фазовых переходов при распаде произвольного разрыва производится следующим образом. Вначале по известным величинам массивов  $\Pi$  и  $\Pi$  с известными уравнениями состояния рассчитываются  $P_k, u_k$  без учета фазовых переходов. Затем делается анализ: пересекает ли луч с наклоном  $\Lambda_n = \frac{P_n - P}{u_n - u}$  ударную адиабату. Если да, то рассчитывается  $UB$  с параметрами за разрывом  $P_i, u_i$ , определяемыми так, что  $P_i = \max\{P_i\}$ . Индексом  $i$  здесь нумеруются элементы множества точек на ударной адиабате, которые могут быть соединены лучом с начальной точкой  $P, u$  так, что луч не пересекает ударную адиабату. Ударная волна с параметрами за фронтом  $P_i, V_i, \epsilon_i, u_i, w_i$  пополняет пакет устойчивых разрывов, а указанные величины заносятся в массив  $\Pi$  (или  $\Pi$ ). Таким образом возникает новый произвольный разрыв. Каждый произвольный разрыв характеризуется величиной  $\xi = |P_n - P_n| + R_i(u_n - u_n)^2$ , где в качестве  $R_i$  выбирается наибольшее значение из  $P_n$  и  $P_n$ . Если произвольный разрыв слабый ( $\xi < \epsilon$ , где  $\epsilon$  - величина, определяющая точность решения задачи), то дальнейший расчет распада разрыва прекращается. Если же  $\xi \geq \epsilon$ , то решается снова задача о распаде нового произвольного разрыва. Аналогичный анализ производится и в случае образования волн сжатия или разрежения. Таким образом, при нахождении  $P_k, u_k$  учитываются все фазовые переходы, встречающиеся при движении вдоль ударной адиабаты или изэнтропы в переменных  $P, u$  от  $P_n, u_n$  или от  $P_n, u_n$  до  $P_k, u_k$ . При решении задачи о распаде произвольного разрыва, когда одно из веществ является ВВ, предварительно рассчитывается  $UB$  (или  $BP$ ) в ВВ. Если на фронте  $UB$  в ВВ энергия меньше энергии активации ВВ  $\epsilon_a < \epsilon_a$ , то расчет распада разрыва на этом заканчивается. Если же оказывается  $\epsilon_a > \epsilon_a$ , то  $UB$  в ВВ заменяется нормальной или сильной детонационной волной и распад разрыва рассчитывается заново.

Принятая структура алгоритма обеспечивает решение задачи о распаде произвольного разрыва для любых сколь угодно сложных уравнений состояния. На рис. 1-5 приведены возможные простейшие конфигурации устойчивых разрывов после

распада произвольного разрыва. Здесь  $KП$  ( $КЛ$ ) - правое(левое) состояние на  $KГ$ ;  $P_*$  - давление в точке Жуге.

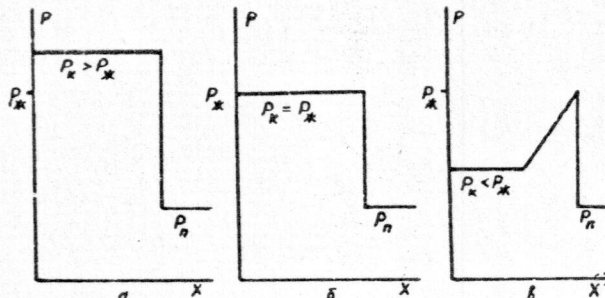


Рис. 1. Зависимость  $P(x)$  за фронтом детонационной волны: а - сильная детонационная волна; б - нормальная детонационная волна; в - нормальная детонационная волна и  $BP$

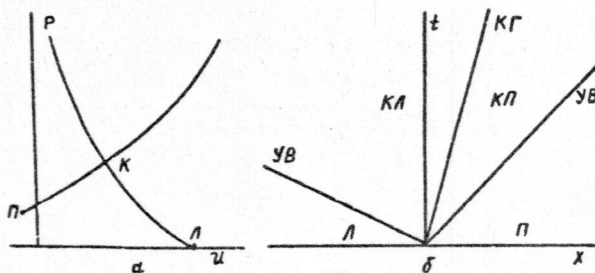


Рис. 2. Распад разрыва с образованием двух  $UB$ : а - кривые нагрузки и разгрузки в переменных  $P, u$ ; б - траектории  $UB$  и  $KГ$  в переменных  $x, t$

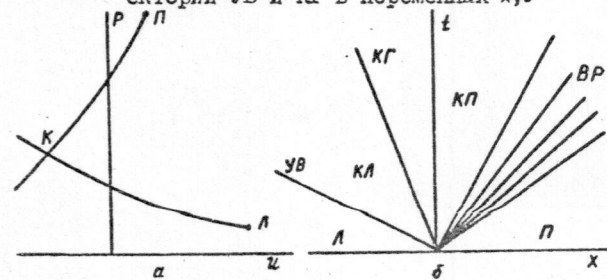


Рис. 3. Распад разрыва с образованием  $UB$  и  $BP$ : а - кривые нагрузки и разгрузки в переменных  $P, u$ ; б - траектории  $UB, BP$  и  $KГ$  в переменных  $x, t$

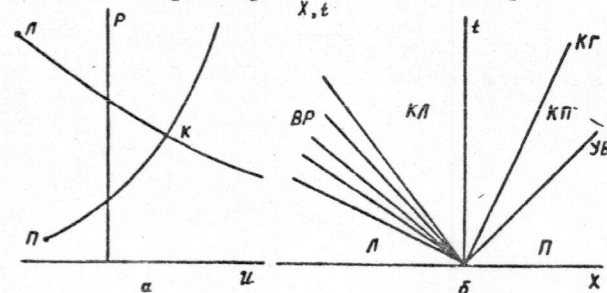
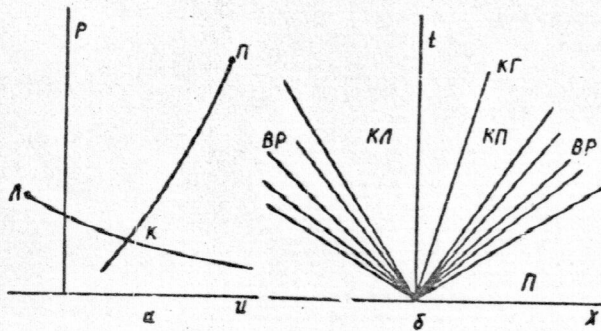


Рис. 4. Распад разрыва с образованием  $BP$  и  $UB$ : а - кривые разгрузки и нагрузки в переменных  $P, u$ ; б - траектории  $BP, UB$  и  $KГ$  в переменных  $x, t$



Фиг.5. Распад разряда с образованием двух ВР: а - кривые нагрузки в переменных  $P, u$ ; б - траектории ВР и КП в переменных  $x, t$

### Дополнительные физические процессы

Магнитная гидродинамика. Для решения задач магнитной гидродинамики в уравнения (1), (2) добавляются функции  $\varphi_k$  и  $q_k$ , имеющие вид

$$\varphi_k = \sigma V \tilde{E}^2 \cdot 10^5; \quad q_k = \sigma V \tilde{E}^2 \cdot 10^2,$$

где  $\sigma(V, E)$  - коэффициент электропроводности;  $\tilde{E}$  - напряженность электрического поля;  $H$  - напряженность магнитного поля. Система уравнений для расчета электромагнитных величин

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \tilde{H} \frac{V}{r^{2(\alpha-1)}} \right) = 10^3 \frac{\partial \tilde{E}}{\partial M}; \quad \tilde{E} = \frac{10}{4\pi} \frac{1}{\sigma V} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial M} \quad (11)$$

решается отдельно от остальных уравнений. Здесь  $\tilde{H} = H r^{\alpha-1}$ . Для отыскания численного решения системы (11) используются разностные уравнения

$$(A\tilde{H})_{i+0,5}^{n+1} - (A\tilde{H})_{i+0,5}^n = \tau (\tilde{E}_{i+1}^{n+1} - \tilde{E}_i^{n+1}); \quad (K\tilde{E})_i = \tilde{H}_{i+0,5} - \tilde{H}_{i-0,5},$$

где

$$A_{i+0,5} = (MV)_{i+0,5} \cdot 10^{-3} / (0,5(r_i + r_{i+1}))^{2(\alpha-1)};$$

$$K_i = \frac{\pi}{5} \left( (\sigma MV)_{i+0,5} - (\sigma MV)_{i-0,5} \right); \quad \tilde{H}_{i+0,5} = H_{i+0,5} (0,5(r_i + r_{i+1}))^{\alpha-1}.$$

Система решается методом потоковой прогонки: прямая - счет прогоночных коэффициентов, обратная - счет электромагнитных величин. Поскольку прямая и обратная прогонки безусловно устойчивы, то ограничения на соотношение шагов по времени и пространству определяются лишь требованиями точности, возникающими в тех случаях, когда характерные времена протекания электромагнитных явления оказываются намного меньше характерных гидродинамических времен. Потребуем, чтобы за один шаг по времени  $\tau_{3M}$  скорость изменения выделившегося в точке джета

лева тепла не изменялась бы более чем на  $K\%$ . Это требование записывается так:

$$10^{-2} \left( (\sigma V \tilde{E}^2)_{i+0,5}^{n+1} - (\sigma V \tilde{E}^2)_{i+0,5}^n \right) \leq K \sigma V \tilde{E}^2 \quad (12)$$

Формула для определения  $\tau_{3M}$  может быть не строгой, поскольку величина  $\tau_{3M}$  регулируется эмпирической константой  $K$ . Запишем левую часть (12) в виде

$$(\sigma \tilde{E}^2)^{n+1} - (\sigma \tilde{E}^2)^n = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial}{\partial t} (\sigma \tilde{E}^2) dt. \quad (13)$$

Предположив, что  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ , а электропроводность  $\sigma$  зависит от  $V$  и  $E$ , запишем подынтегральную функцию в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sigma \tilde{E}^2) = \frac{10^4}{2\pi} \frac{\tilde{E}}{V} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial m^2} - \tilde{E}^4 \left( \frac{\partial \sigma}{\partial E} \right)_V \cdot 10^{-2} \sigma V. \quad (14)$$

Подставив (14) в (13), проведя разложение подынтегральной функции в ряд и сохранив только члены первого порядка, получим

$$\tau_{3M} \leq \frac{0,5 K \sigma}{\frac{25}{2\pi \tilde{E}} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial m^2} - \tilde{E}^2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial E} \right)_V}. \quad (15)$$

При переходе к сеточным функциям величины, входящие в (15), аппроксимируются соответствующими сеточными величинами.

2. Теплопроводность. Для решения задач о движении вещества с теплопроводностью в уравнения (1), (2) добавляются функции  $\varphi_k$ ,  $q_k$ , имеющие вид

$$\varphi_k = -\alpha \tau^{\alpha-1} \frac{\partial P_u}{\partial M}; \quad (16)$$

$$q_k = \frac{\partial (\alpha \tau^{\alpha-1} Q_u)}{\partial M} - \frac{\partial E_u}{\partial t} - \rho_u \frac{\partial V}{\partial t},$$

где  $P_u$ ,  $E_u$  - давление и энергия теплового излучения;  $Q_u$  - поток излучения, определяемый уравнением  $Q_u = \kappa \alpha \tau^{\alpha-1} \frac{\partial T_u}{\partial M}$ . Величина  $\kappa(\rho, T_u)$  - коэффициент теплопроводности.

Математическая модель распространения излучения опирается на гипотезу о локальном тепловом равновесии между излучением и веществом  $T = T_u$ , где  $T$  - температура вещества. Давление и энергия излучения связаны друг с другом и с температурой излучения уравнениями

$$P_u = \frac{4}{3} \frac{\sigma}{c} T^4; \quad E_u = \frac{4\sigma V}{c} T^4; \quad \rho_u = \frac{1}{3} \frac{E_u}{V},$$

где  $c$  - скорость фотонов в вакууме. Уравнение энергии (2) вместе с  $\varphi_k$  и  $q_k$  из (16) аппроксимируется разностным уравнением

$$\left( \frac{\tilde{E}^{n+1} - \tilde{E}^n}{\tau} + \frac{\tilde{P}^n + \tilde{P}^{n+1} + \tilde{q}^{n+1}}{2} \cdot \frac{(V^{n+1} - V^n)}{\tau} \right)_{i+0,5} = \frac{1}{M_{i+0,5}} (Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}) \quad (17)$$

где  $Q_i = 2\alpha_i z_i^{2(\alpha-1)} (T_{i+0,5} - T_{i-0,5}) / (M_{i+0,5} + M_{i-0,5})$ ;

$$\bar{p}^{n+1} = p^{n+1}, \bar{p}_u^n = p_u^n; \bar{p}^n = \bar{p}^n + p_u^n.$$

При переходе от одной итерации к последующей энергии  $E$  и  $E_u$ , зависящие от  $T$  нелинейно, линеаризуются по формулам

$$E^{n+1} = E^n + (T^{n+1} - T^n) \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_T; E_u^{n+1} = E_u^n + \left( \frac{\partial E_u}{\partial T} \right)_T (T^{n+1} - T^n). \quad (16)$$

Давление вещества и излучения в (17) берется с  $v$ -й итерации. После подстановки (18) в (17) получается неявное уравнение относительно  $T^{n+1}$ . Система разностных уравнений имеет трехдиагональную матрицу и решается прогонкой. При прямой прогонке определяются прогоночные коэффициенты  $X_{i+0,5}^n, Y_{i+0,5}^n$ , которые являются коэффициентами квазилинейной зависимости температур в соседних точках сетки  $T_{i-0,5}^{n+1} = T_{i+0,5}^{n+1} X_{i-0,5}^n + Y_{i-0,5}^n$ . Температура и поток в целых точках сетки вычисляются из условия непрерывности теплового потока

$$p_{i-0,5} \ell(p_{i-0,5}, T_i) \frac{T_i - T_{i-0,5}}{z_i - z_{i-1}} = p_{i+0,5} \ell(p_{i+0,5}, T_i) \frac{T_{i+0,5} - T_i}{z_{i+1} - z_i}.$$

При наличии теплопроводности вводится дополнительное ограничение на шаг по времени  $\tau$ , которое получается из требования, чтобы разность потоков, умноженная на  $\tau$ , не превышала некоторой части от полной энергии ячейки  $K \Delta M_i \bar{E}_i$ .

Теплопроводность на каждом шаге по времени рассматривается лишь в тех точках сетки, где она существенна. В переходных течениях, когда приток тепла сравним с работой адиабатического сжатия, могут возникнуть условия, когда из тепловой волны выделяется УВ. В таких случаях УВ рассчитывается как сильный разрыв без размазывания.

### 3. Упругость, пластичность, трещиноватость.

Для расчета неустановившихся движений неидеальных сред в уравнения (1), (2) добавляются функции

$$q_k = \frac{\partial S_1}{\partial z} + \frac{(\alpha-1)(S_1 - S_2)}{z}; q_e = S_1 v \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{(\alpha+1)S_2 uv}{z},$$

где  $S_j$  - компоненты тензора дивергента напряжений, удовлетворяющие условию  $\sum_{j=1}^3 S_j = 0$ . Компоненты тензора дивергента скоростей деформации  $\partial \ell_j / \partial t$  определяются уравнениями

$$\frac{\partial \ell_1}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{3v} \frac{\partial v}{\partial t}; \frac{\partial \ell_2}{\partial t} = \frac{(\alpha-1)(v-\alpha)}{2} \frac{u}{z} - \frac{1}{3v} \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Для полного замыкания системы законов сохранения нужно добавить определяющие уравнения, связывающие  $S_j$  с  $\ell_j$  или с  $\partial \ell_j / \partial t$ . В области упру-

гих деформации такими уравнениями являются уравнения Гука

$$\frac{\partial S_j}{\partial t} = 2C_1 \frac{\partial \ell_j}{\partial t}. \quad (19)$$

В области упругопластических деформаций используются уравнения Прандтля-Рейсса

$$\frac{\partial S_j}{\partial t} + \left( \frac{3C_1}{y^2} \sum_{j=1}^3 S_j \frac{\partial \ell_j}{\partial t} - \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) S_j = 2C_1 \frac{\partial \ell_j}{\partial t}, \quad (20)$$

где  $y$  - предел текучести. В области пластических деформаций

$$S_j = \frac{2}{3} y^2 \frac{\partial \ell_j}{\partial t} / \sum_{j=1}^3 S_j \frac{\partial \ell_j}{\partial t}. \quad (21)$$

Для характеристики степени необратимости деформации вводится мера пластичности

$$\varphi = 1 - y \frac{\partial y}{\partial t} / 3C_1 \sum_{j=1}^3 S_j \frac{\partial \ell_j}{\partial t}.$$

При  $\varphi = 0$  деформации являются упругими, при  $\varphi = 1$  деформации полностью пластические. С помощью  $\varphi$  энергия упругой и пластической дисторсии связывается с полной энергией дисторсии

$$\frac{\partial w_u}{\partial t} = (1-\varphi) \frac{\partial w}{\partial t}; \frac{\partial w_p}{\partial t} = \varphi \frac{\partial w}{\partial t},$$

где  $\frac{\partial w}{\partial t} = q_e$ . Энергия упругой дисторсии отщепляется от уравнения энергии (2), а энергия пластической дисторсии, полностью переходящая в необратимый разогрев вещества, остается в правой части уравнения (2).

Разностное уравнение движения берется в виде

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} - \alpha (z_i^n)^{\alpha-1} \frac{\bar{\sigma}_{i+0,5}^n - \bar{\sigma}_{i-0,5}^n}{h_i} - (\alpha-1) f_i^n = 0,$$

где

$$h_i = 0,5(h_{i+0,5} + h_{i-0,5}); h_{i+0,5} = \frac{(z_{i+1} - z_i^\alpha)}{V_{i+0,5}};$$

$$f_i = \frac{(v(S_1 - S_2))_{i+0,5} + (v(S_1 - S_2))_{i-0,5}}{2z_i}.$$

Скорость изменения энергии дисторсии определяется уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \alpha (S_1)_{i+0,5}^n \frac{(z_{i+1}^n)^{\alpha-1} u_{i+1}^{n+1} - (z_i^n)^{\alpha-1} u_i^{n+1}}{h_{i+0,5}} - \frac{(\alpha-1)(v(S_1 - S_2))_{i+0,5}^n + (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1})}{z_i^{n+1} + z_{i+1}^{n+1}}.$$

Если ограничиться случаем, когда  $y$  зависит только от  $p$ , то мера пластичности рассчитывается из уравнения

$$\varphi = \frac{3C_1 \frac{\partial w}{\partial t} + \alpha^2 v y \frac{dy}{dp} \frac{V_{i+0,5}^{n+1} - V_{i+0,5}^n}{\tau}}{(3C_1 + v y \frac{dy}{dp} \frac{\partial p}{\partial E}) \frac{\partial w}{\partial t}}, \quad (22)$$



а все величины без индексов, входящие в (22), берутся в точке  $M_{i+0,5}, t^n$ .

После определения  $\varphi$  находятся  $Q_e$  и  $W_y$  по формулам

$$Q_e = \varphi \frac{\partial W}{\partial t}; \quad W_y^{n+1} = W_y^n + (1-\varphi) \frac{\partial W}{\partial t} \tau.$$

Значения  $S_i^{n+1}$  и  $S_2^{n+1}$  находятся следующим образом. Сначала находятся компоненты девиатора скоростей деформации

$$\frac{\partial l_1}{\partial t} = \frac{2(v^{n+1} - v^n)_{i+0,5}}{3\tau v_{i+0,5}^n} - \frac{(\alpha-1)(u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1})}{z_i^{n+1} + z_{i+1}^{n+1}};$$

$$\frac{\partial l_2}{\partial t} = -\frac{(v^{n+1} - v^n)_{i+0,5}}{3v_{i+0,5}^n \tau} - \frac{(\alpha-1)(4-\alpha)(u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1})}{2(z_i^{n+1} + z_{i+1}^{n+1})}.$$

Затем из разностного уравнения, аппроксимирующего одно из уравнений (19), (20) или (21), находится  $S_j^{n+1}$ . Вследствие того, что  $S_j^{n+1}$  находится по приближенным формулам, следует проверить, удовлетворяют ли они неравенству

$$(S_1^{n+1})^2 + (S_2^{n+1})^2 + (S_1^{n+1} + S_2^{n+1})^2 \leq \frac{2}{3} (v^{n+1})^2. \quad (23)$$

Если это неравенство выполнено, то пересчета  $S_j^{n+1}$  не требуется. Если же (23) не выполнено, то новые значения  $S_j^{n+1}$  получаются после умножения уже имеющихся значений  $S_j^{n+1}$  на множитель

$$R = \left( \frac{2(v^{n+1})^2}{3((S_1^{n+1})^2 + (S_2^{n+1})^2 + (S_1^{n+1} + S_2^{n+1})^2)} \right)^{0,5}.$$

#### Построение и перестроение пространственных сеток

Основной задачей при построении сеток является повышение точности математического эксперимента. Применяемая в комплексе "Волна" разностная методика имеет второй порядок точности на равномерной сетке, а на неравномерной сетке порядок точности снижается до первого. Поскольку соседние шаги сетки входят в погрешность аппроксимации только уравнения движения, то в основу критерия для построения сетки было положено требование, чтобы погрешность аппроксимации уравнения движения была величиной второго порядка. Это означает, что сетка должна строиться так, чтобы "плоские" массы двух соседних сеточных интервалов совпадали. Полная масса сеточного интервала определяется уравнением  $\Delta M = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \rho r^{\alpha-1} dz = const$ , где  $z=1$  при  $\alpha=1$ ,  $z=2x$  при  $\alpha=2$  и  $z=4x$  при  $\alpha=3$ .

Следовательно, плоская масса, которая определяется уравнением  $\Delta m = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \rho dt$ , при  $\alpha \neq 1$  с течением времени меняется.

Вторым фактором, который существенно влияет на построение пространственной сетки, является зависимость погрешностей аппроксимации от решения. Главные члены пространственной компоненты погрешностей аппроксимации имеют вид

$$\omega = a \frac{\partial^2 f}{\partial m^2} \Delta m,$$

где  $a = const$ . Если потребовать, чтобы во всей области интегрирования выполнялось ограничение

$$|\omega| < K = const,$$

то сетка по  $\Delta m$  получится существенно неравномерной

$$\Delta m < \frac{K}{a \frac{\partial^2 f}{\partial m^2}}.$$

Поэтому на стадии ГИД сделана попытка предусмотреть возможные изменения  $\Delta m$  с тем, чтобы в наиболее важные моменты времени сетка по  $m$  оказалась согласованной с решением.

Основным требованием построения сетки является равенство "плоских масс"  $\Delta m$  соседних сеточных интервалов. Поэтому в плоских системах рассчитывается средний шаг по формуле

$$\Delta \bar{m} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^K m_j,$$

где  $m_j$  - плоская масса  $j$ -й области;  $K$  - количество областей;  $N$  - общее число точек в области интегрирования.

После вычисления  $\Delta \bar{m}$  вычисляется количество точек в области по формуле

$$n_j = \frac{m_j}{\Delta \bar{m}}.$$

В сферических и цилиндрических системах, содержащих зазоры или внутренние области, заполненные газом, перед выбором  $\Delta \bar{m}$  производится "упаковка" системы около центра или оси симметрии. Для этого области с малой начальной плотностью сдвигаются в сторону уменьшения радиусов до тех пор, пока их плотность станет равна средней плотности системы. Соответственно координаты всех границ уменьшаются так, чтобы объемы областей сохранялись. При такой упаковке системы увеличиваются плоские массы областей, радиусы которых уменьшались при упаковке. Следовательно, в этих областях изложенная процедура вычисления  $n_j$  дает большее число точек в упакованной системе, чем в неупакованной. Далее, из всех областей выделяются области, где происходит энерговыделение.

В этих областях число точек увеличивается. Алгоритм построения сеток в комплексе "Волна" позволяет рассчитывать сетки с учетом заданной в областях переменной плотности  $\rho = \rho(r)$ .

В комплексе "Волна" реализован алгоритм построения сеток для случаев, когда в начальный момент времени энергия либо задана дельта-функцией в точке, либо вводится через одну из границ системы, либо основная энергия задана в бесконечно малой части системы.

При расчете сеток для задач с энерговыделением, зависящим от времени  $t$  и массовой координаты  $m$ , в каждой области системы рассчитывается сетка массовых координат, удовлетворяющих условию

$$\left| \frac{J(m_{j+1}) - J(m_j)}{J(m_j) + E_{хар}} \right| < \epsilon,$$

где  $J_j = \int a(m, t) dt$ ;  $a$  - скорость энерговыделения;  $E_{хар} \approx 0,1E$ . При таком выборе сетки значения  $J$  в двух соседних узлах сетки отличаются друг от друга на определенное заданное число процентов. Наличие  $E_{хар}$  в знаменателе препятствует чрезмерному сгущению сетки при  $J \rightarrow 0$ .

При адиабатическом схлопывании сферических или цилиндрических полостей координата полости стремится к нулю, скорость поверхности полости стремится к  $-\infty$ , а давление, плотность и внутренняя энергия вещества в малой окрестности внутренней поверхности  $\rightarrow +\infty$ . Рассмотрим один из способов, повышающих точность расчетов таких движений среды.

Погрешность аппроксимации уравнения движения разностным уравнением на внутренней поверхности оболочки ( $r = r_b$ ) имеет вид

$$\omega = 0,5 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tau + 0,25 \frac{\partial^2 p}{\partial m^2} \Delta m + O(\tau^2, \Delta m^2). \quad (24)$$

Оценим производные  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  и  $\frac{\partial^2 p}{\partial m^2}$ . В момент захлопывания сферической полости в среде с уравнением состояния  $p = \beta(\delta^2 - 1)$  распределения скорости, скорости звука, плотности и давления имеют вид [12]

$$u \sim r^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}; \quad c \sim r^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}; \quad \rho \sim r^{\frac{2(\alpha-1)}{\alpha(r-1)}}; \quad p \sim r^{\frac{2r(\alpha-1)}{\alpha(r-1)}}. \quad (25)$$

Показатель автомодельности  $\alpha$  находится в результате численного интегрирования, его зависимость от  $r$  приведена в таблице.

Зависимость показателя автомодельности  $\alpha$  от  $r$

|          |          |       |       |       |               |   |
|----------|----------|-------|-------|-------|---------------|---|
| $r$      | $\infty$ | 7     | 3     | 2     | $\frac{5}{3}$ | I |
| $\alpha$ | 0,4      | 0,555 | 0,708 | 0,850 | 0,94          | I |

В случае, если  $\tau \rho c = \delta m$ , из (24), (25) следует

$$\omega = \delta m A r^{\frac{4-2\alpha-2r}{\alpha(r-1)}}, \quad (26)$$

где  $A$  - положительная константа.

Запишем приближенные и точные значения  $u_i^{(n)}$

$$(u_i^{(n)})_{np} = u_i^n - \frac{\tau}{\delta m} \Delta p^n; \quad (u_i^{(n)})_r = u_i^n - \frac{\tau}{\delta m} \Delta p^n + \omega \tau. \quad (27)$$

Из (26), (27) следует

$$\left| \frac{u_r - u_{np}}{u_r} \right| = \delta m^2 B \tau^\beta,$$

где  $\beta = (4-2\alpha-2r)/\alpha(r-1)$ . Из таблицы следует, что  $\beta \leq 2$ . Это значит, что при  $\tau \rightarrow 0$  относительная погрешность скорости останется ограниченной по модулю, если  $\delta m$  будет убывать при  $\tau \rightarrow 0$  по закону  $\delta m_\tau \sim \tau$ . В некоторый момент времени  $\tau = \tau_0$  и  $\delta m = \delta m_0$ , а зависимость  $\delta m_\tau$  от  $\tau$  можно записать в виде  $\delta m_\tau = \delta m_0 (\frac{\tau}{\tau_0})^\beta$ . Если регулярная сетка не изменяется с течением времени, то сохраняется постоянная масса сеточного интервала  $\delta M = \tau^2 \delta m$  и, следовательно, величина  $\delta m$  возрастает неограниченно при  $\tau \rightarrow 0$ , причем этот эффект не зависит от выбора регулярной сетки при  $t=0$ . Но в этом случае погрешность скорости также будет неограниченно возрастать и наиболее сильное возрастание будет иметь место в интервале сетки, примыкающем к границе полости. Из закона сохранения массы следует, что в этом интервале сетки

$$\delta m = \delta m_0 \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^2. \quad (28)$$

Перестройка сетки происходит дискретно в моменты времени, которые выбираются следующим образом. Допускается рост  $\delta m$  в соответствии с (28) до момента  $t$ , когда после деления пополам интервал  $\delta m$  станет равным  $\delta m_\tau$ . Из уравнения  $\delta m_\tau = 0,5 \delta m$  или  $(\frac{\tau}{\tau_0})^\beta = 0,5 (\frac{\tau_0}{\tau})^2$  находится допустимая величина возрастания  $\delta m$ , при которой должно произойти дробление интервала  $\delta m = \delta m_0 \cdot 2^{2/\beta}$ . При  $\delta m < \delta m_0 \cdot 2^{2/\beta}$  дробление интервала не происходит. Кроме того, дробление прекращается в малой окрестности центра или оси симметрии. Эта окрестность выбирается так, чтобы рост ошибок происходил в малой массе и не оказывал влияния на распределение величин во всем веществе.

#### С п и с о к л и т е р а т у р ы

И. Жук о в А.И. Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики // Тр. матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1960. Т. 58. С. 150.

2. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения кривых задач. М.: Мир, 1972.

3. Моретти Д. К вопросу о выделении скачка // Численные решения задач гидромеханики. М.: Мир, 1977. С.55-63.

4. Охоцимский Д.Э., Кондрашова И.Л., Власова З.П., Казакова Р.К. Расчет точечного взрыва с учетом противодействия // Тр. матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1957. Т.50. С.65.

5. Алалыкин Г.Б., Годунов С.К., Киреева И.Л., Клинер Л.А. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. М.: Наука, 1970.

6. Забродин А.В., Софронов И.Д., Ченцов Н.Н. Адаптивные разностные методы математического моделирования нестационарных газодинамических течений (обзор) // ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1988. Вып. 4. С.3-22.

7. Куропатенко В.Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики // Тр. матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1966. Т.74. С.107-137.

8. Куропатенко В.Ф. Локальная консервативность разностных схем для уравнений газовой динамики // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1985. Т.25, № 8. С.1176-1188.

9. Куропатенко В.Ф. Приближенный метод расчета величин за фронтом ударной волны // Числ. методы мех. спл. среды. 1970. Т.1, № 6. С.77-83.

10. Гаджиева В.В., Куропатенко В.Ф. О некоторых явных разностных схемах для уравнений гидродинамики // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1971. Т.11, № 6. С.1603-1605.

11. Алексеева Т.Н., Куропатенко В.Ф. Адаптивный безусловно устойчивый разностный метод расчета мелких неоднородностей гидродинамического потока // Числ. методы мех. спл. среды. 1981. Т.12, № 4. С.3-14.

12. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн. М.: Наука, 1966.

Статья поступила в редколлегию 17.08.88,  
в редакцию 12.10.88.

УДК 533+518.5

КОМПЛЕКС ПРОГРАММ "ВОЛНА" И НЕОДНОРОДНЫЙ РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД  
ДЛЯ РАСЧЕТА НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ СЖИМАЕМЫХ СПЛОШНЫХ СРЕД.

ЧАСТЬ 2. АРХИТЕКТУРА. ОБЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ

В.Ф.Куропатенко, Т.Е.Еськова, Г.В.Коваленко, В.И.Кузнецова,  
Г.И.Михайлова, Б.К.Потапкия, Г.Н.Сапожникова

Излагается общая организация комплекса программ "Волна", предназначенного для численного моделирования неустановившихся движений сплошных сред с учетом ряда физических процессов. Описаны архитектура комплекса, входная информация и получаемые результаты, структура массивов данных, принципы создания и работы программ комплекса.

В в е д е н и е

В [1] дано описание неоднородного разностного метода, реализованного в комплексе программ "Волна", предназначенном для численного моделирования неустановившихся движений сплошных сжимаемых сред с учетом ряда физических процессов. Неоднородный метод необычайно сложен алгоритмически. Если за критерий сложности алгоритма принять плотность  $\Pi$  условных переходов, то в модулях, содержащих алгоритмы, связанные с неоднородностью метода,  $\Pi \approx 0,4$ , в то время как в модулях, содержащих алгоритмы однородных методов, она примерно равна 0,15. Плотность условных переходов может рассчитываться по-разному. В данной работе  $\Pi$  рассчитывалось как отношение числа операторов условных переходов к числу всех операторов данного модуля (операторы присвоения, условного и безусловного переходов, макрокоманды обращения к модулю более низкого уровня). При этом сколь угодно сложная формула, завершаемая оператором присвоения  $:=$ , считается одним оператором.

Средства и способы разработки алгоритма

Высокая алгоритмическая сложность неоднородного разностного метода потребовала выработки таких правил и приемов проектирования алгоритма, которые обеспечили бы создание легко понимаемой, модифицируемой и сопровождаемой программы. К моменту начала работ требования структурного программирования еще не были сформулированы с такой полнотой и четкостью, как в [2], хотя отдельные приемы уже использовались. Система правил, применяемых при разработке проекта алгоритма и создании комплекса программ "Волна", не была ориентирована на какой-либо конкретный язык высокого уровня или транслятор. Одним из основополагающих правил проектирования алгоритма стало правило квантования - разделение алгоритма на фрагменты (модули), удовлетворяющие некоторым требованиям. Вторым правилом было требование обязательного предварительного документирования проекта.

Комплекс программ "Волна" имеет многоуровневую модульную структуру. Под модулем понимается некоторая функционально законченная программа с одним входом и одним выходом. Модули, объединенные общей функцией, образуют программу, представляющую собой локальную многомодульную иерархическую структуру, определяемую межмодульными связями.

Отличительной чертой каждой программы является наличие управляющего модуля, который занимает наивысшее положение в иерархии модулей данной программы. Обращение к модулям производится с помощью макрокоманд. Модуль высшего уровня может обращаться только к модулям более низких уровней. После завершения работы модуля управление возвращается туда, откуда поступило обращение к данному модулю. Последовательная реализация такого подхода на стадии проектирования программы обеспечивает высокий уровень организации программы, сочетающийся с удобством её эксплуатации. Каждая программа формально удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к модулю. Программы комплекса "Волна" образуют глобальную иерархическую структуру, на вершине которой находится программа "Управляющая комплекса", осуществляющая стратегическое управление всем процессом вычислений.

Каждый модуль и каждая программа в комплексе программ "Волна" имеют формальное и содержательное имя. Формальное имя используется при поиске модуля в библиотеке или программе и для формирования макрокоманд обращения к этому модулю. Содержательное имя указывает, какую функцию выполняет модуль. Наличие содержательного имени значительно облегчает процедуру проектирования программ и всего комплекса, поскольку создаются благоприятные условия для реализации принципа "локальности мышления" разработчика (мозг разработчика удерживает ярко информацию при сканировании поля в 10-15 строк, а при удалении от этого поля яркость информации экспоненциально затухает и возрастает вероятность ошибок), обеспечивается высокая наглядность проектируемых программ и делается непосредственно видимой структура описанного алгоритма.

Формальное имя модуля (идентификатор) имеет вид: ББЦЦЦ, где Б - буква, Ц - цифра ( $0 \leq Ц \leq 9$ ). Две буквы ББ должны совпадать с буквами раздела библиотеки модулей, к которо-

му принадлежит данный модуль. Три цифры ЦЦЦ означают порядковый номер модуля в разделе ББ библиотеки. Предлагаемая структура формального имени позволяет разместить в каждом из 756 разделов библиотеки по 1000 модулей.

Содержательное имя модуля должно дать наиболее полное представление о результатах работы модуля. Оно должно быть максимально простым. Затруднения, возникающие при определении содержательного имени, указывают на неудачное выделение данного модуля из общего алгоритма.

Рабочий проект модуля состоит из паспорта, текста модуля и комментария (пояснения) к модулю. Паспорт модуля имеет следующие разделы:

ПРОГ: (формальное имя программы или библиотеки, к которой принадлежит модуль).

ИНФ: (входная информация к модулю - величины и массивы и их параметры).

РЕЗ: (выходные данные - результат работы модуля).

РАБ: (рабочие, промежуточные величины, рассчитываемые модулем и используемые только внутри данного модуля).

КОНСТ: (постоянные величины, используемые модулем).

МОД: (формальные имена модулей, на которые происходит обращение из данного модуля).

АЛГ-Т: (инициалы и фамилия алгоритмиста).

ПРОГ-Т: (инициалы и фамилия программиста).

ЭКСП: (инициалы и фамилия эксперта).

ДАТА: (дата создания модуля либо включения его в рабочий проект программы или в библиотеку модулей).

#### Правила проектирования алгоритма

При проектировании текста модуля должны выполняться следующие правила.

1. Модуль - это часть алгоритма, выполняющая преобразование исходных данных в результат. Модуль должен реализовать только одну функцию.

2. Модуль имеет один вход и один выход. Вход в модуль совмещен с оператором НАЧАЛО, выход из модуля - с оператором КОНЕЦ.

3. Размер модуля не должен превышать одной - двух стандартных страниц и содержать более 40-50 строк. Опыт показывает, что только в таких модулях создаются оптимальные условия для реализации принципа локальности мышления разработчика.

4. Совокупность действий, завершаемых символом присвоения :=, условные и безусловные переходы и макрокоманды обращения к внешним модулям называются оператором. Простые операторы располагаются в строку слова направо, сложные - по строкам сверху вниз. Строки нумеруются.

5. Оператор, к которому есть условный или безусловный переход, помещается на отдельной строке, которая отмечается меткой.

6. Обращение к внешним модулям происходит с помощью операторов обращения. Оператор обращения начинается одним из слов: рассчитать, определить, записать, найти, выбрать и т.д. Для оператора обращения используется повелительное наклонение - форма приказа.

7. Оператор условного перехода имеет вид: если (условие), то К... (номер оператора данного модуля, к исполнению которого нужно перейти при выполнении условия). Если условие не выполнено, то происходит переход к следующему оператору.

8. Оператор безусловного перехода имеет вид К... (номер оператора данного модуля, к исполнению которого нужно перейти). Дейкстра в [3] показал, что использование оператора GOTO увеличивает количество ошибок. Однако в системе разработанных нами правил, когда безусловный переход возможен лишь внутри модуля, применение этого оператора такого отрицательного эффекта не дает.

9. Модуль не должен портить информацию. Это значит, что величины, перечисленные в разделе ИНФ, могут только использоваться в данном модуле.

10. Для работы с упорядоченными по индексу элементами массива используется переменный адрес элемента массива. Массивы перемещаемы. В конкретной задаче каждый массив характеризуется адресом первого элемента. Длина массивов может меняться в процессе счета задачи. Поэтому конец массива определяется по признаку конца: ПРИЗ.КП. Использование счетчиков для определения элемента или конца массива не допускается.

11. Для обозначения некоторых величин рекомендуется использовать: А - адрес; А<sub>Н</sub> - адрес начала массива (с именем массива); А<sub>К</sub> - адрес конца массива (с именем массива); А<sub>1</sub> - адрес i-го элемента в массиве; R - рабочая величина; К - константа. Рабочие величины и константы нумеруются в пределах модуля.

Комментарий. Комментарий может содержать разъяснения, облегчающие понимание алгоритма модуля, особых ситуаций, условий применения и возможных отказов, вывод формул и обоснование алгоритма и т.д.

В качестве примера приведем рабочий проект модуля СШ006 из комплекса "Волна".

#### СШ006. Разделение особенностей

ПРОГ:

ИНФ: ПОСЛ, А<sub>1</sub>, А<sub>1-1</sub>, А<sub>1+1</sub>, ПУВ, А<sub>нцув</sub>

РЕЗ: ПОСЛ, ПРИЗ.РС

РАБ: R,

КОНСТ: K,

МОД: ОБ012, БШ005

АЛГ-Т: В.Ф.Курспатенко

ПРОГ-Т: Г.И.Михайлова

ЭКСП: Г.Н.Сапожникова

ДАТА: 29.06.69

1. Начало

2. ПРИЗ.РС := 0

3. Если  $n_{ув} = 0$ , то к 18

4. Если  $n_{ув,i} = 0$ , то к 18

5.  $n_{ув} := n_{ув,i-1}$

6. Выбрать разрыв в ПУВе по ОБ012

7.  $R_A := R_{пнуб}; E_A := E_{пнуб}; u_A := u_{пнуб}; w_A := w_{пнуб}$

8.  $n_{ув} := n_{ув,i}$

9. Выбрать разрыв в ПУВе по ОБ012

10. Если  $w_A \cdot w_{пнуб} > 0$ , то к 18

11. Если  $z_i \neq z_{i-1}$ , то к 13

12. Если  $w_{пнуб} < 0$ , то к 18

13.  $R_B := R_{пнуб}; E_B := E_{пнуб}; u_B := u_{пнуб}; w_B := w_{пнуб}$

14. ПРИЗ.РС := 1

15. Расщепить интервал "i" по БШ005

16.  $шк_{i-1} := шк_i \vee (ПРИЗ.ВР.Т = K_i)$

17.  $A_{i+1} := A_{i-1}; A_i := A_{i+1} - L_T; A_{i-1} := A_i - L_T$

18. Конец.

#### Пояснения к модулю СШ006

$n_{ув,i}$  - номер разрыва, который стоит в основной последовательности в точке с  $z = z_i$ .

ПРИЗ.РС - признак разделения соседей. Если ПРИЗ.РС = 0, то разделения соседей не было, если ПРИЗ.РС  $\neq$  0, то было.

Величины с подписью ПУВ выбираются из последовательности разрывов (ПУВ) по адресу, определяемому в ОБ012 по номеру разрыва  $n_{ув}$ .

Разделение соседних разрывов регулярной точкой происходит в тех случаях, если они идут навстречу друг другу, либо уходят друг от друга ( $w_A \cdot w_B < 0$ ).

В заключение отметим, что сформулированная выше система правил (псевдокод) позволяет разработчику создавать проект на естественном языке, обеспечивает концептуальное единство проекта и, следовательно, программы и повышает надежность программного продукта. В то же время применение данного псевдокода приводит к возникновению многоуровневых иерархических структур, в результате чего время исполнения программы несколько возрастает.

#### Архитектура комплекса "Волна"

По функциональному назначению программы комплекса "Волна" разделены на четыре группы. В первую группу включены программы ввода, расшифровки и расстановки входной информации. Эти программы переводят входные данные задачи на язык машины, организуют анализ информации и поиск возможных ошибок, объединяют информацию в группы для работы с ними на следующей стадии работы комплекса.

Программы второй группы (РНЦ) динамически распределяют оперативную память, строят информационные последовательности, определяют тип задачи, готовят массив постоянной информации, массив уравнений состояния веществ и параметров к ним, массив для счета краевых условий, массив для расчета энерговыделения, массивы для расчета присутствующих физических процессов (пробегов, кинетики накопления повреждений и др.).

Третью группу образуют основные счетные программы комплекса (СШ). Сюда входят программы газодинамики и теплопроводности, детонации, кинетики накопления повреждений, упругости и электродинамики, а также программы, рассчитывающие расклады разрывов, ударные волны и слабые разрывы.

К четвертой группе относятся программы накопления результатов счета, необходимых для выдачи пользователю, для последующей выдачи их на АЦПУ, терминал или графическое устройство.

Модули, описывающие свойства веществ, а также модули, используемые в разных программах, объединены в библиотеки. Доступ к таким модулям осуществляется через каталоги.

Комплекс "Волна" имеет в своем составе следующие библиотеки: 1) уравнений состояния (УРС); 2) параметров веществ, 3) параметров упруго-

пластических свойств, 4) источников энергии, 5) коэффициентов теплопроводности, 6) коэффициентов электропроводности, 7) параметров кинетической модели разрушения.

Библиотека УРС содержит большое количество аналитических и табличных УРС веществ, которые описывают свойства веществ в широком диапазоне термодинамических величин.

На рис. 1 схематически изображена структура комплекса "Волна". Указанные здесь модули выполняют следующие функции:

НР - начало работы: загружает программу УК.

УК - управляющая программа комплекса: загружает подчиненные ей программы, поручает им последовательно выполнять их функции.

ВИ - ввод информации: осуществляет ввод и предварительную переработку введенной информации.

АР - автономные виды работ.

УРНЦ - управляющая программа расчета начальных данных: загружает подчиненные ей программы, поручает им последовательно выполнять их функции, готовит массивы данных и формирует библиотеки задачи.

ПСШ - подготовка к счету шага: формирует вспомогательные массивы, необходимые на стадии счета шага.

УСШ - управляющая счетом шагов: осуществляет циклический вызов программ счета шага, поручает им выполнение их функции.

УВР - управляющая выдачами результатов: осуществляет циклический анализ полученного на шаге решения и готовит массивы данных для выдачи пользователю.

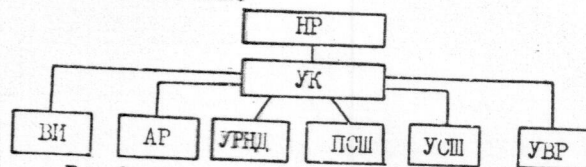


Рис. 1. Схема работы комплекса "Волна"

На рис. 2 схематически изображена структура программ, работающих на стадии расчета начальных данных. Указанные здесь программы (модули) выполняют следующие функции:

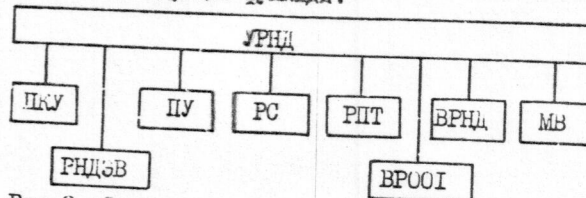


Рис. 2. Схема работы программ на стадии РНЦ

ПКУ - подготовка краевых условий: готовит массивы краевых условий.

ГНДЭВ - рассчитывает информацию к внешнему энерговыделению, готовит массивы источников энергии.

ПУ - подготовка УСВ: готовит массивы УСВ и констант веществ и при необходимости - массивы пробегов излучения, кинетики разрушения, упругопластичности и электропроводности для веществ, которые присутствуют в рассчитываемой системе.

РС - рассчитывает регулярную сетку для системы.

РПТ - рассчитывает все величины шага на начальном момент времени.

ВРООИ - готовит информацию к выдаче отчета по задаче.

ВРНЦ - осуществляет выдачи на АЦПУ рассчитанной информации.

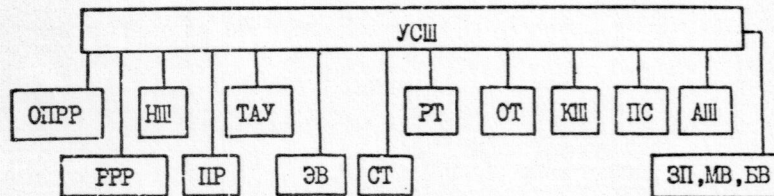


Рис.3. Схема работы программ на стадии счета шага

На рис.3 схематически изображена структура программ, работающих на стадии счета шага. Указанные здесь программы выполняют следующие функции:

ОПРР - определяет признак наличия разрывов.

РРР - рассчитывает распады разрывов.

НШ - начало шага: анализирует образовавшиеся разрывы, перестраивает сетку (ликвидирует слабые разрывы и ставит дополнительные интервалы между расходящимися точными фронтами), определяет интервалы, которые необходимо включить в счет на данном шаге, формирует адрес поля дополнительной последовательности в случае, если на шаге подключается новый физический процесс.

ПР - подготовка разрывов: готовит вспомогательные величины с  $n$ -го шага, необходимые для расчета параметров разрывов в момент  $t^{n+1}$ .

ТАУ - рассчитывает шаг по времени  $\tau^{n+1}$ , исходя из условий устойчивости, точности, взаимодействия линий сетки, условий на границах

системы, по энерговыделению, по выходу на заданное время  $t$  и др.

СТ - счет теплопроводности: рассчитывает поле температур и давлений излучения в точках сетки с теплопроводностью.

РТ - регулярные точки: рассчитывает краевые условия на левой и правой границах системы, работу и импульсы на всех контактных границах, все термодинамические и упругопластические величины во всех интервалах, кроме точных фронтов.

ОТ - особые точки: рассчитывает положение фронтов разрывов (особые точки), величины за и перед фронтами, средние величины с обеих сторон от фронтов.

КШ - конец шага: изменяет при необходимости краевые условия на границах системы, рассчитывает работу и импульсы на контактных границах, расщепляет контактные границы по условию разрушения склейки.

РС - перестраивает пространственную сетку, адаптируя ее к решению в момент  $t^{n+1}$ .

АШ - анализирует ситуацию, сложившуюся в системе после счета  $(n+1)$ -го шага, и сравнивает ее с заданием по управлению выдачами на АЦПУ и записями результатов счета на

внешние носители; выдает на АЦПУ информацию о случившихся ожидаемых или непредвиденных ситуациях, о причинах снятия задачи со счета; формирует признаки выдач и записей результатов, пополняет библиотеку результатов для отчета.

МВ - осуществляет выдачу на АЦПУ некоторой общей информации о системе (время, номер счетного шага, шаг по времени, балансные величины), информации о возмущенных движущихся контактных границах и областях, о точных фронтах, о фазах в веществах, параметрах на выделенных траекториях.

БВ - большая выдача: выдает на АЦПУ общую информацию о шаге, о величинах во всех интервалах системы или только в считаемых интервалах, значения величин на точных фронтах.

ЭВ - рассчитывает внешнее энерговыделение.

В комплексе "Волна" наряду с решением основных уравнений механики идеальной сплошной среды предусмотрены некоторые автономные виды работ. К ним, в частности, относятся:



.. определение затрат времени при обращении к любому УРС комплекса, находящемуся в его библиотеке;

- вычисление ударных адиабат и изэнтроп по УРС.

- обработка экспериментальных данных по сравнительной ударной сжимаемости.

Комплекс снабжен документацией, содержащей:

- рабочие проекты всех программ;
- описание всех стадий работы программы;
- описание возможностей комплекса;
- инструкции по счету задач;
- инструкции по включению в комплекс новых физических процессов.

#### Структура данных. Хранение и выдача результатов

Множество данных, с которыми работают модули комплекса, делится на входные, промежуточные и результатные массивы.

Структура массивов в зависимости от характера величин, которые их составляют, разнообразна:

- массивы с "жестким" и динамическим распределением памяти;
- массивы постоянной и переменной длины;
- массивы постоянные и временные;
- массивы в виде архивов с каталогами.

Массивы с жестким распределением памяти - это массив М1, содержащий постоянную информацию о рассчитываемой системе, и массив МУ формул и параметров к расчету давления  $P = P(\rho, E)$ . Остальные массивы располагаются вслед за этими массивами. Информация о начале каждого массива в ОЗУ хранится в массиве М1.

Массив М1 - постоянной длины, остальные массивы - переменной длины.

К постоянным массивам относятся последовательности, содержащие основные функции, а именно: гидродинамические и упругопластические величины в интервалах (ПОСЛ), информация о точных фронтах (ПУВ), массив величин на контактных границах и в областях (МКР). Эти массивы хранятся в ОЗУ постоянно или записываются на МБ в случае нехватки памяти ОЗУ и доступны всем модулям на всех стадиях работы комплекса.

Вектор величин постоянных массивов может менять свою размерность. Его длина зависит от присутствующих в данном расчете физических

процессов (массив ПОСЛ) или от числа областей в системе (массив МКР).

Временные массивы хранятся в ОЗУ в промежутки времени от работы одной программы до работы другой и служат для временного хранения промежуточной информации.

Массивы данных располагаются либо в оперативной памяти (ОЗУ), либо на МБ, либо на МД (МД).

На МД (МД) записываются информация с задачи (после расчета НД) и некоторые разрезы. Разрезы записываются через определенное астрономическое время, для передачи на счет другому комплексу, для продолжения счета и по аварийному останову.

На АЦПУ выдается информация:

- о рассчитанных начальных данных (всегда);
- о некоторых параметрах системы в зависимости от времени в виде "малой выдачи" (по требованию);
- в виде отчета по задаче после окончания счета (по требованию);
- разрезы по системе на требуемые моменты времени ("большие выдачи");
- автостановная выдача в случае АВОСТА;
- специальные (уникальные), отладочные выдачи (временные).

На графики выдаются разрезы системы на определенные моменты времени.

#### Эксплуатационные характеристики комплекса

Комплекс "Волна" написан на автокоде [4], использует специализированную систему СПОР [5] для накопления временных обработок и для принятия информации от других комплексов. В качестве операционной системы используется ОС ДИАПАК [6]. Работа с внешними носителями осуществляется в рамках системы управления данными УПД ДИАПАК [7].

Среднее число операций, необходимых для расчета всех величин в точке с фиксированными  $M_i$ ,  $t^{***}$ , зависит от набора рассчитываемых физических процессов, алгоритма, числа выделенных разрывов, УРС. При расчете параметров идеальной среды в адиабатическом приближении УРС требуют от 40 до 80% всех затрат. Число операций на одну точку в зависимости от конфигурации решения меняется от  $10^3$  до  $10^4$ .

Комплекс "Волна" позволяет сравнительно легко добавлять новые физические процессы и в соответствии с потребностями перестраивать

архитектуру комплекса. Технология включения новых физических процессов, заключающаяся в добавлении новых модулей, массивов, граничных условия и библиотек, отработана и описана в соответствующих инструкциях.

Комплекс "Волна" ориентирован на массовый серийный счет, проверен на различных классах задач, легко отторжим от разработчиков. Общий объем программ комплекса вместе с библиотеками составляет около 1 Мбайт.

В комплексе предусмотрена возможность связи с другими комплексами как для получения информации в качестве краевого условия или начальных данных, так и для передачи результатов счета другим методикам.

#### Список литературы

1. Куропатенко В.Ф., Коваленко Г.В., Кузнецова В.И. и др. Комплекс программ "Волна" и неоднородный разностный метод для расчета неустановившихся движений сжимаемых сплошных сред. Ч. I. Неоднородный разностный метод // См. настоящий выпуск. С. 9-18.

2. Хьюз Дж., Мичтом Дж. Структурный подход к программированию. М.: Мир, 1980.

3. Dijkstra E.W. GOTO statement considered harmful // Commun ACM. 1968. Vol. 11, N 3. P. 147-152.

4. Бочкова Э.Ф., Езерова Г.Н., Морозова Л.Б., Штаркман В.С. Руководство по работе с программами на автокоде БЭМШ. М.: ИИМ АН СССР, 1974.

5. Карпечина З.С., Дегоньков В.И., Старостина А.А. Выдача результатов при счете задач математической физики // Числ. методы мех. спл. среды. 1977. Т. 8. С. 98-104.

6. Зуев В.М., Крюков В.М., Корякин В.К. и др. Операционная система ДИАПАК. Руководство пользователя. Свердловск: ИИМ УНЦ АН СССР, 1981.

7. Зуев В.И., Крюков В.М., Попова Т.В., Романова Е.М. Управление данными в ОС ДИАПАК. Свердловск: ИИМ УНЦ АН СССР, 1981.

Статья поступила в редколлегию 17.08.88,  
в редакцию 12.10.88.