

аналогичные обозначения для u в момент $t + \Delta t$; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ — значения λ , соответственно, в прямоугольниках $D_1 (A_0 A_1 A_5 A_2)$, $D_2 (A_0 A_2 A_6 A_3)$, $D_3 (A_0 A_3 A_7 A_4)$, $D_4 (A_0 A_4 A_8 A_1)$ (A_5, A_6, A_7, A_8 — соответственно, точки $(x + h_1, y + h_2)$, $(x - h_3, y + h_2)$, $(x - h_3, y - h_2)$, $(x + h_1, y - h_2)$); $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ и f_1, f_2, f_3, f_4 — аналогичные обозначения для σ и f ; $\lambda_0 = \lambda_4$; $h_0 = h_4$; $h_5 = h_1$.

Если под локальной погрешностью сеточного оператора L_h понимать величину

$$\left| L_h U_0 - \frac{1}{(h_1 + h_3)(h_2 + h_4)} \sum_{i=1}^4 h_i h_{i+1} (LU)_i \right|,$$

где $()_i$ — предельное значение величины, заключенной в скобки $()$, в точке $(x, y, t + \Delta t/2)$ со стороны прямоугольника D_i ($i = 1, 2, 3, 4$), а U — функция, обладающая в точке $(x, y, t + \Delta t/2)$ ограниченными односторонними (по x и y) производными до нужных порядков и удовлетворяющая условиям (11), то можно сделать следующие заключения:

1) в общем случае локальная погрешность в указанном выше смысле сеточного уравнения (12) равна $O(\Delta t h^{-1} + h)$;

2) в случае $\lambda_i \equiv \lambda$ (гладкость коэффициента λ), $\alpha_1 = \alpha_3$, $\alpha_2 = \alpha_4$ (симметрия весовых множителей) и $h_1 = h_3$, $h_2 = h_4$ (регулярная прямоугольная сетка) локальная погрешность (теперь уже в обычном сеточного уравнения (12) равна $O(\Delta t + h^2)$, (и даже $O((\Delta t)^2 + h^2)$ в случае $\alpha_i \equiv \frac{1}{2}$ ($i = 1, 2, 3, 4$)).

Поступила в редакцию
8.03.1962

Цитированная литература

1. В. К. Саульев. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., Физматгиз, 1960.

ОБ ОДНОМ РАЗНОСТНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА УДАРНЫХ ВОЛН

В. Ф. КУРОПАТЕНКО

(Челябинск)

Численное интегрирование уравнений газодинамики:

$$\left. \begin{aligned} u_t &= -P_x, \\ V_t &= u_{x_1}, \\ \mathcal{E}_t &= -(Pu)_x, \\ \mathcal{E} &= E + \frac{1}{2} u^2, \\ P &= f(V, E) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

сопряжено с большими трудностями, обусловленными наличием в плоскости x, t линий, вдоль которых терпят разрыв или искомые функции, или их производные. Значения функций по обе стороны сильного разрыва, являющегося фронтом ударной волны и распространяющегося со скоростью W , связаны известными соотношениями Рэнкина — Гюгонио:

$$\left. \begin{aligned} \bar{V} - V_0 &= -\frac{1}{W} (\bar{u} - u_0), \\ \bar{u} - u_0 &= \frac{1}{W} (\bar{P} - P_0), \\ \bar{E} - E_0 &= \frac{1}{2} (\bar{P} + P_0) (V_0 - \bar{V}). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Принимая во внимание, что энтропия частицы возрастает лишь в случае пересечения ее траектории с линией сильного разрыва, а в остальных случаях сохраняется вдоль траектории без изменения, разделим все решения системы (1) на два типа:

- а) решения с диссипацией энергии (сильные разрывы),
- б) решения без диссипации энергии (слабые разрывы, контактные разрывы, непрерывные решения).

Для преодоления трудностей, связанных с существованием сильных разрывов, были предложены различные приемы, приводящие к методам так называемого «сквозного» счета [1] — [4]. Общей чертой этих методов является размывание сильных разрывов, что существенно упрощает вычисления.

В [3] для расчета размытых ударных волн предлагается использовать соотношения (2), в которых все величины с индексом нуль и одна из величин с чертой предпологаются известными. Это позволяет определить все остальные неизвестные величины с чертой, которые играют вспомогательную роль и служат для нахождения приближенного решения системы (1).

В настоящем сообщении для расчета размытых ударных волн предлагается, так же как и в [3], использовать соотношения (2). Однако, выбирая сетку, не совпадающую с сеткой в [3], и выбирая по иному известные величины в (2), мы приходим к новой, чисто дивергентной разностной схеме.

Разбьем область интегрирования системы (1) сеткой на интервалы $h = x_{i+1} - x_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$). Все искомые функции будем определять в точках $x_{i+1/2}$. Для численного интегрирования используется следующая система разностных уравнений:

$$u_{i+1/2}^{n+1} - u_{i+1/2}^n = -\frac{\tau}{h} (P_{i+1}^* - P_i^*), \quad (3)$$

$$V_{i+1/2}^{n+1} - V_{i+1/2}^n = \frac{\tau}{h} (U_{i+1}^* - U_i^*), \quad (4)$$

$$g_{i+1/2}^{n+1} - g_{i+1/2}^n = -\frac{\tau}{h} (P_{i+1}^* U_{i+1}^* - P_i^* U_i^*), \quad (5)$$

$$g_{i+1/2}^{n+1} = E_{i+1/2}^{n+1} + \frac{1}{2} (u_{i+1/2}^{n+1})^2, \quad (6)$$

$$P_{i+1/2}^{n+1} = f(V_{i+1/2}^{n+1}, E_{i+1/2}^{n+1}). \quad (7)$$

Величины U_i^* и P_i^* , входящие в правые части уравнений (3)–(5), неизвестны, поскольку приближенное решение системы (1) определено в точках $x_{i+1/2}$. Для их определения предлагается следующий алгоритм.

Приближенное решение в интервале $[x_{i+1/2}, x_{i-1/2}]$ назовем *R-волной*, если выполнено условие

$$\frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \geq 0, \quad (8)$$

и *S-волной*, если выполнено условие

$$\frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} < 0. \quad (9)$$

Легко показать, пользуясь теоремой Цемплена [5] и формулой Тэйлора, что при достаточно малых $h = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ все сильные разрывы содержатся в классе *S-волн*.

В случае *R-волны* U_i^* и P_i^* будем определять интерполяцией по формулам

$$\begin{aligned} U_i^* &= \frac{1}{2} (u_{i+1/2}^{n+1} + u_{i-1/2}^{n+1}), \\ P_i^* &= \frac{1}{2} (P_{i+1/2}^n + P_{i-1/2}^n). \end{aligned} \quad (10)$$

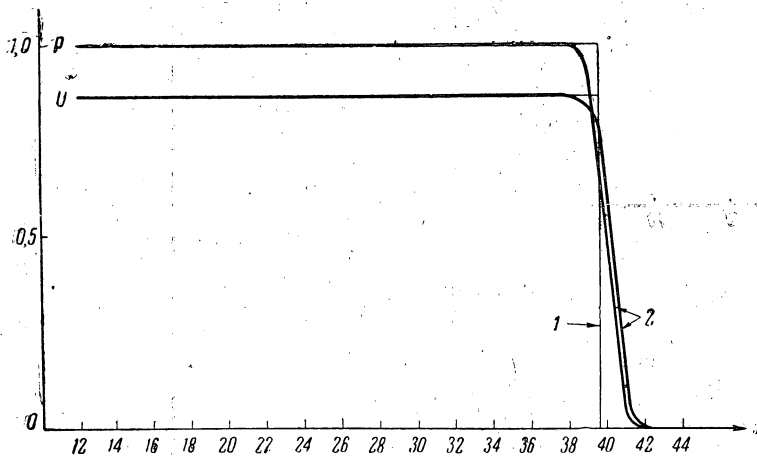
В случае *S-волны* U_i^* и P_i^* приравниваются \bar{u} и \bar{P} . Величина \bar{u} определяется после решения системы (2) вместе с уравнением состояния $P = f(V, E)$. Известные

величины, входящие в (2), и \bar{P} выбираются следующим образом:

$$\text{а) } P_0 = P_{i-1/2}^n, \quad u_0 = u_{i-1/2}^n, \quad V_0 = V_{i-1/2}^n, \quad E_0 = E_{i-1/2}^n, \quad \bar{P} = P_{i+1/2}^n \quad \text{при } P_{i+1/2}^n > > P_{i-1/2}^n \text{ и}$$

$$\text{б) } P_0 = P_{i+1/2}^n, \quad u_0 = u_{i+1/2}^n, \quad V_0 = V_{i+1/2}^n, \quad E_0 = E_{i+1/2}^n, \quad \bar{P} = P_{i-1/2}^n \quad \text{при } P_{i+1/2}^n < < P_{i-1/2}^n. \text{ Если уравнение состояния имеет вид}$$

$$P = (\gamma - 1) E \frac{1}{V}, \quad (11)$$



Фиг. 1. 1 — точное решение, 2 — приближенное решение.

$W > 0$ и направление роста индекса i совпадает с положительным направлением оси Ox , то для определения U_i^* и P_i^* получаются выражения

$$P_i^* = P_{i-1/2}^n, \quad U_i^* = u_{i+1/2}^n + \frac{P_{i-1/2}^n - P_{i+1/2}^n}{\sqrt{\frac{1}{2V_{i+1/2}^n} \cdot [(\gamma + 1) P_{i-1/2}^n - (\gamma - 1) P_{i+1/2}^n]}}. \quad (12)$$

Выбор направления роста индекса i и знака W не является ограничением. При другом направлении роста i или при $W < 0$ для U_i^* и P_i^* получаются выражения типа (12), но с другими индексами.

Для сравнения предлагаемого метода с уже имеющимися перейдем от конечно-разностной записи вспомогательных функций U_i^* , P_i^* к дифференциальной записи. Предполагая существование первых производных у искомых функций и отбрасывая в разложениях члены порядка h^2 , из (3)—(5) и (12) получим

$$\begin{aligned} u_t &= -P_x, \\ V_t &= U_x^*, \\ \mathcal{E}_t &= -(PU^*)_x, \end{aligned} \quad (13)$$

где $U^* = u + w$, а w — малая величина порядка h , определяемая выражением

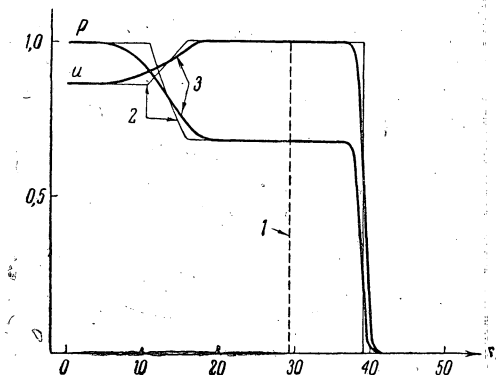
$$w = - \frac{\frac{\partial P}{\partial x} \cdot h}{\sqrt{\frac{\gamma P}{V} - \frac{\gamma + 1}{4} \frac{\partial P}{\partial x} \cdot h}}. \quad (14)$$

В двух предельных случаях формула (14) принимает вид

$$w = \begin{cases} -\frac{h}{c} \frac{\partial P}{\partial x} & \text{при } \frac{\gamma P}{V} \gg -\frac{\gamma+1}{4} \frac{\partial P}{\partial x} h, \\ \sqrt{\frac{4h}{\gamma+1} \frac{\partial P}{\partial x}} & \text{при } \frac{\gamma P}{V} \ll -\frac{\gamma+1}{4} \frac{\partial P}{\partial x} h, \end{cases} \quad (15)$$

где c — массовая скорость звука, определяемая по формуле

$$c^2 = -\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s. \quad (16)$$



Фиг. 2. 1 — контактный разрыв, [2 — точное решение, 3 — приближенное] решение.

В этом случае для решения системы (2) может быть предложен быстроходящийся итерационный процесс. Результаты без труда обобщаются на случай неравномерной сетки, а также на случай течений с цилиндрической и сферической симметрией.

Условие устойчивости в общем случае установлено экспериментально:

$$K = \frac{\tau C}{h} \leq 1.$$

С помощью предлагаемого метода были проведены расчеты ряда задач, допускающих точное решение. Совпадение результатов всегда было хорошим. На фиг. 1 и фиг. 2 приводятся результаты сравнения приближенного решения, полученного изложенным методом, с точным решением для двух задач.

В первом случае решалась задача со следующими начальными и граничными значениями:

$$u|_{t=0} = 0, \quad P|_{t=0} = 0, \quad E|_{t=0} = 0, \quad \rho|_{t=0} = 1 \quad \left(\rho = \frac{1}{V}\right), \quad P|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=50} = 0.$$

Во втором случае начальные и граничные значения были заданы следующим образом: $u|_{t=0} = 0, \quad P|_{t=0} = 0, \quad E|_{t=0} = 0, \quad P|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=50} = 0,$

$$\rho|_{t=0} = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x \leq 29.5, \\ 0.5 & \text{при } 29.5 < x \leq 50. \end{cases}$$

В обоих случаях расчеты велись с $k = 0.5$.

Поступила в редакцию
7.05. 1962

Цитированная литература

1. J. Neumann, R. Richtmyer. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. J. Appl. Phys., 1950, 21, № 3, 232—237.
2. С. К. Годунов. Разностный метод счета разрывных решений уравнений газодинамики. Матем. сб., 1959, 47 (89), вып. 3, 271—306.
3. В. Ф. Куропатенко. Метод расчета ударных волн. Докл. АН СССР, 1960, 133, № 4.
4. P. Lax, B. Wendroff. System of conservation laws. Commun. Pure and Appl. Math., 1960, 13, № 2, 213—237.
5. Л. Ландау, Е. Лифшиц. Механика сплошных сред. М.—Л., Гостехиздат, 1944.